УДК 519.21

Б. В. Довгай (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ СТРУНИ З ОРЛІЧЕВОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

The string oscillation equation with zero initial and boundary conditions and a centered strictly Orlicz right-hand side is considered. Conditions are established for existence of solution of the boundary-value problem of mathematical physics in the form of uniformly convergent in probability series in terms of covariance function.

Розглядається рівняння коливання струни з нульовими початковими та крайовими умовами та центрованою строго Орлічевою правою частиною. Встановлені умови існування розв'язку крайової задачі математичної фізики у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду в термінах коваріаційної функції.

Вступ. Систематичне вивчення властивостей Орлічевських процесів почалося з робіт [1,2], де досліджувались умови та швидкості збіжності випадкових рядів у нормах деяких просторів Орліча. Новий метод дослідження випадкових задач математичної фізики, який ґрунтується на дослідженні збіжності за ймовірністю у функціональних просторах послідовності часткових сум, що апроксимують розв'язок крайової задачі, було розроблено в роботах Бейсенбаєва Є. та Козаченка Ю.В. [3] і Булдигіна В.В. та Козаченка Ю.В. [4]. Вказаний метод був використаний для обґрунтування застосовності методу Фур'є до розв'язання крайової задачі в ряді робіт [4–16].

В цій роботі розглядається рівняння коливання струни з нульовими початковими і крайовими умовами та центрованою строго Орлічевою правою частиною. В [15] було встановлено достатні умови існування розв'язку цієї задачі у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду. В даній роботі одержуються достатні умови існування розв'язку у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду в термінах коваріаційної функції строго Орлічевого випадкового поля, що стоїть в правій частині рівняння.

1. Випадкові процеси з простору Орліча.

Означення 1 ([17]). *Парна неперервна опукла функція $U(x)$ називається $\mathbb{C}$-функцією, якщо $U(0) = 0$ і $U(x)$ зростає при $x > 0$.*

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ – стандартний імовірнісний простір.

Означення 2 ([17]). *Простором Орліча $L_U(\Omega)$ випадкових величин, породженим $\mathbb{C}$-функцією $U(x)$, називається такий простір випадкових величин $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа r_ξ, що $\mathsf{E}U\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty$.*

Простір Орліча $L_U(\Omega)$ є банаховим простором відносно норми

$$\|\xi\|_{L_U} = \inf\left\{r > 0 : \ \mathsf{E}U\left(\frac{\xi}{r}\right) \le 1\right\}.$$

Означення 3 ([17]). *Випадковий процес $X = \{X(t), \ t \in T\}$, де T – деяка параметрична множина, належить простору Орліча $L_U(\Omega)$, якщо для всіх $t \in T$ випадкова величина $X(t)$ належить $L_U(\Omega)$.*

Означення 4 ([17]). *$\mathbb{C}$-функція $U(x)$ підпорядкована $\mathbb{C}$-функції $V(x)$ ($U \prec V$), якщо існують $x_0 \geq 0$ та $C > 0$ такі, що при $|x| > x_0$ має місце нерівність $U(x) \leq V(Cx)$.*

Означення 5 ([18]). *Нехай $U(x)$ – така $\mathbb{C}$-функція, що $V(x) = x^2$ підпорядкована функції $U(x)$. Сім'я Δ випадкових величин ξ, $\mathsf{E}\xi = 0$, з простору Орліча $L_U(\Omega)$ називається строго Орлічевою, якщо існує стала C_Δ така, що для скінченої кількості випадкових величин $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$ та для будь-яких $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i \in I$ виконується нерівність*

$$\left\| \sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i \right\|_{L_U} \leq C_\Delta \left(\mathsf{E} \left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Зауваження 1 ([18]). *Стала C_Δ називається визначальною сталою сім'ї Δ*

Теорема 1 ([18]). *Нехай Δ – строго Орлічева сім'я випадкових величин. Тоді лінійне замикання сім'ї Δ в просторі $L_U(\Omega)$ є строго Орлічевою сім'єю з тою ж самою визначальною сталою.*

Означення 6 ([18]). *Випадковий процес $X = \{X(t),\ t \in T\}$ з простору Орліча $L_U(\Omega)$ називається строго Орлічевим, якщо сім'я випадкових величин $\{X(t),\ t \in T\}$ є строго Орлічевою.*

Означення 7 ([17]). *Будемо говорити, що $\mathbb{C}$-функція U задовольняє g-умові, якщо існують такі сталі $z_0 \geq 0$, $K > 0$, $A > 0$, що для всіх $x \geq z_0$, $y \geq z_0$ виконується нерівність*

$$U(x)U(y) \leq AU(Kxy).$$

2. Умови існування розв'язку в термінах коваріаційної функції.

Нехай $T > 0$ — деяка стала, функція $q(x)$, $x \in [0, \pi]$ – неперервно диференційовна функція така, що $q(x) \geq 0$, $\xi(x,t)$, $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$ — вибірково неперервне з імовірністю 1 випадкове поле.

Розглянемо першу крайову задачу для неоднорідного гіперболічного рівняння з нульовими початковими та крайовими умовами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\xi(x,t),\ x \in [0, \pi],\ t \in [0, T] \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0; \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = 0. \tag{3}$$

Розглянемо задачу Штурма-Ліувілля

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - qX + \lambda X = 0 \tag{4}$$

$$X(0) = X(\pi) = 0 \tag{5}$$

Нехай $X_n(x)$ — ортонормовані з вагою ρ власні функції цієї задачі, а λ_n — відповідні власні значення. Будемо вважати, що λ_n занумеровані в порядку зростання. Завдяки обмеженням на q всі власні значення додатні і нуль не є власним значенням [19].

Позначимо $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$.

Теорема 2 ([15]). *Нехай в* (1) $\xi(x,t)$ *– центроване строго Орлічеве випадкове поле з простору* $L_U(\Omega)$ *з визначальною сталою* C_Δ, *вибірково неперервне з імовірністю одиниця,* U *задовольняє g-умові. Нехай* $\varphi(\lambda)$, $\lambda > 0$ *– неперервна зростаюча функція,* $\varphi(\lambda) > 0$ *при всіх* $\lambda > 0$, $\varphi(\lambda) \to \infty$, $\lambda \to \infty$, *така, що функція* $\dfrac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ *є зростаючою при* $\lambda > v_0$, *де стала* $v_0 \geq 0$. *Припустимо виконуються умови:*

1) *Збігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m}\mu_k\mu_m\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0) < \infty,$$

де

$$C_{k,m} = \sup_{\substack{0\leq t\leq T\\ 0\leq s\leq T}} |\mathsf{E}\zeta_k(t)\zeta_m(s)|, \quad \zeta_k(t) = \int_0^\pi \xi(x,t)X_k(x)\,dx.$$

2) *Для довільного* $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon U^{(-1)}\left(\left(\frac{\pi}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{F_3}{v}\right)-v_0\right)+1\right)\left(\frac{T}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{F_3}{v}\right)-v_0\right)+1\right)\right)dv<\infty,$$

де $F_3 > 0$ *– стала, визначена в [15].*

3) *Існують такі сталі* $b_{k,m} > 0$, *що*

$$\left|\mathsf{E}\big(\zeta_k(t)-\zeta_k(s)\big)\big(\zeta_m(t)-\zeta_m(s)\big)\right| \leq b_{k,m}\varphi^{-2}\left(\frac{1}{|t-s|}+v_0\right)$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{k,m} < \infty.$$

Тоді ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\frac{1}{\mu_n}\int_0^t \sin\mu_n(t-u)\zeta_n(u)\,du, \tag{6}$$

де

$$\zeta_n(t) = \int_0^\pi \xi(x,t)X_n(x)\,dx, \tag{7}$$

збігається рівномірно за ймовірністю в області $[0,\pi]\times[0,T]$ *(*$T > 0$ *– деяка стала), рівномірно за ймовірністю збігаються ряди, отримані з* (6) *почленним диференціюванням один та два рази по* t *і один та два рази по* x, *та з імовірністю одиниця задача* (1)–(3) *має розв'язок, який можна зобразити у вигляді ряду* (6).

Зауваження 2. *Умова 2 теореми 2 виконується, якщо для довільного $\varepsilon > 0$*

$$\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{1}{v}\right)\right)^2\right) dv < \infty.$$

Позначимо $B(x,y,t,s) = \mathsf{E}\xi(x,t)\xi(y,s),\ (x,y,t,s) \in [0,\pi]^2 \times [0,T]^2$.

Припустимо, що $B(0,y,t,s) = B(\pi,y,t,s) = 0,\ y \in [0,\pi],\ t \in [0,T],\ s \in [0,T]$
$B(x,0,t,s) = B(x,\pi,t,s) = 0,\ x \in [0,\pi],\ t \in [0,T],\ s \in [0,T]$.

Для кожної фіксованої пари $(t,s) \in [0,T]^2$ продовжимо функцію $B(x,y,t,s)$ як функцію від x, y на всю площину $\mathbb{R}^2$ так, щоб вона була періодичною функцією з періодом 2π по x та по y і щоб виконувались тотожності

$$B(-x,y,t,s) = -B(x,y,t,s) = B(x,-y,t,s).$$

Внаслідок нашого припущення таке продовження можливе.

Позначимо

$$B_{i,j}(x,y,t,s) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} B(x,y,t,s),\ 0 \le i,j \le 1;$$

$$\Delta_{2,\delta_1,\delta_2} B(x,y,t,s)$$
$$= B(x+\delta_1, y+\delta_2, t,s) - B(x+\delta_1, y,t,s) - B(x,y+\delta_2,t,s) + B(x,y,t,s);$$
$$\Delta_{x,\delta} B(x,y,t,s) = B(x+\delta,y,t,s) - B(x,y,t,s);$$
$$\Delta_{y,\delta} B(x,y,t,s) = B(x,y+\delta,t,s) - B(x,y,t,s);$$
$$\widetilde{B}(x,y,t,s) = B(x,y,t,t) - B(x,y,t,s) - B(x,y,s,t) + B(x,y,s,s).$$

Лема 1. *Нехай при всіх $x \in [0,\pi]$, $y \in [0,\pi]$, $t \in [0,T]$, $s \in [0,T]$ існує неперервна похідна $\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} B(x,y,t,s)$. Припустимо для деяких неперервних функцій $\tau(\delta_1,\delta_2)$, $\delta_1 \ge 0$, $\delta_2 \ge 0$ та $\tau(\delta)$, $\delta \ge 0$ таких, що $\tau(\delta_1,\delta_2) > 0$ при $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\tau(0,\delta_2) = \tau(\delta_1,0) = 0$, $\tau(\delta_1,\delta_2)$ монотонно зростає по δ_1 та δ_2, $\tau(\delta) > 0$ при $\delta > 0$, $\tau(0) = 0$, $\tau(\delta)$ монотонно зростає, для всіх $0 \le i,j \le 1$ мають місце нерівності*

$$\sup_{\substack{0 \ge t \ge T \\ 0 \ge s \ge T}} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{2,\delta_1,\delta_2} B_{2i,2j}(x,y,t,s)|\, dxdy \le C_{1,i,j}\tau(\delta_1,\delta_2);$$

$$\sup_{\substack{0 \ge t \ge T \\ 0 \ge s \ge T}} \int_0^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{x,\delta} B_{2i,2j}(x,y,t,s)|\, dx\right) dy \le C_{2,i,j}\tau(\delta);$$

$$\sup_{\substack{0 \ge t \ge T \\ 0 \ge s \ge T}} \int_0^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{y,\delta} B_{2i,2j}(x,y,t,s)|\, dy\right) dx \le C_{3,i,j}\tau(\delta).$$

де $C_{1,i,j} > 0,\ C_{2,i,j} > 0,\ C_{3,i,j} > 0,\ 0 \le i,j \le 1$ – константи.

Тоді має місце нерівність

$$C_{k,m} \le \sum_{i,j=0}^{1} \frac{C_q^{2-i-j}}{\mu_k^2 \mu_m^2}\left(\frac{C_{1,i,j}\tau(\frac{\pi}{k},\frac{\pi}{m})}{8\pi} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{LC_{2,i,j}\tau(\frac{\pi}{k})}{4m} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{LC_{3,i,j}\tau(\frac{\pi}{m})}{4k} + \frac{C_{G,i,j}}{km}\right),$$

де L – константа з (8),

$$C_q = \sup_{0\le x\le\pi} |q(x)|, \quad C_{G,i,j} = L^2\pi^2 \max_{\substack{x\in[0,\pi]\\ y\in[0,\pi]\\ t\in[0,T]\\ s\in[0,T]}} |B_{2i,2j}(x,y,t,s)|.$$

Доведення. Розглянемо

$$C_{k,m} = \sup_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le s\le T}} |\mathsf{E}\zeta_k(t)\zeta_m(s)|.$$

$$\mathsf{E}\zeta_k(t)\zeta_m(s) = \mathsf{E}\int\limits_0^\pi \xi(x,t)X_k(x)dx \int\limits_0^\pi \xi(y,s)X_m(y)dy =$$
$$= \int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi X_k(x)X_m(y)B(x,y,t,s)dxdy.$$

Оскільки $X_k(x) = \dfrac{1}{\lambda_k}\left(q(x)X_k(x) - \dfrac{d^2}{dx^2}X_k(x)\right)$, то

$$\mathsf{E}\zeta_k(t)\zeta_m(s) = \frac{1}{\lambda_k\lambda_m}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi \left(q(x)X_k(x) - \frac{d^2}{dx^2}X_k(x)\right)$$
$$\cdot\left(q(y)X_m(y) - \frac{d^2}{dy^2}X_m(y)\right)B(x,y,t,s)dxdy$$
$$= \frac{1}{\lambda_k\lambda_m}\int\limits_0^\pi \left(q(y)X_m(y) - \frac{d}{dy}X_m(y)\right)\left[\int\limits_0^\pi \left(q(x)X_k(x) - \frac{d^2}{dx^2}X_k(x)\right)B(x,y,t,s)dx\right]dy.$$

$$\int\limits_0^\pi \left(\frac{d^2}{dx^2}X_k(x)\right)B(x,y,t,s)dx = \left(\frac{d}{dx}X_k(x)\right)B(x,y,t,s)\Big|_{x=0}^{\pi} -$$
$$-\int\limits_0^\pi \frac{\partial B(x,y,t,s)}{\partial x}\frac{dX_k(x)}{dx}dx = -X_k(x)\frac{\partial B(x,y,t,s)}{\partial x}\Big|_{x=0}^{\pi} +$$
$$+\int\limits_0^\pi X_k(x)\frac{\partial^2 B(x,y,t,s)}{\partial x^2}dx = \int\limits_0^\pi X_k(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}B(x,y,t,s)dx.$$

Отже,

$$\mathsf{E}\zeta_k(t)\zeta_m(s) = \frac{1}{\lambda_k\lambda_m}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi X_k(x)\left(q(x)B(x,y,t,s) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}B(x,y,t,s)\right)$$
$$\cdot\left(q(y)X_m(y) - \frac{d^2}{dy^2}X_m(y)\right)dxdy =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k \lambda_m} \left[\int_0^\pi \int_0^\pi X_k(x) X_m(y) q(x) q(y) B(x,y,t,s) dx dy - \right.$$

$$- \int_0^\pi \int_0^\pi X_k(x) X_m(y) q(y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x,y,t,s) dx dy -$$

$$- \int_0^\pi \int_0^\pi X_k(x) q(x) B(x,y,t,s) \frac{d^2}{dy^2} X_m(y) dx dy +$$

$$\left. + \int_0^\pi \int_0^\pi X_k(x) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x,y,t,s) \right) \left(\frac{d^2}{dy^2} X_m(y) \right) dx dy \right].$$

$$\int_0^\pi B(x,y,t,s) \frac{d^2}{dy^2} X_m(y) dy = \int_0^\pi X_m(y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} B(x,y,t,s) dy.$$

Оскільки $\frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x,0,t,s) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x,\pi,t,s) = 0$, то

$$\int_0^\pi \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x,y,t,s) \right) \left(\frac{d^2}{dy^2} X_m(y) \right) dy = \left(\frac{d}{dy} X_m(y) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x,y,t,s) \right) \Bigg|_{y=0}^{\pi} -$$

$$- \int_0^\pi \left(\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} B(x,y,t,s) \right) \frac{d}{dy} X_m(y) dy = - \left(\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} B(x,y,t,s) \right) X_m(y) \Bigg|_{y=0}^{\pi} +$$

$$+ \int_0^\pi X_m(y) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} B(x,y,t,s) dy = \int_0^\pi X_m(y) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} B(x,y,t,s) dy.$$

Отже,

$$\mathsf{E} \zeta_k(t) \zeta_m(s) =$$

$$= \frac{1}{\mu_k^2 \mu_m^2} \int_0^\pi \int_0^\pi X_k(x) X_m(y) \left(q(x) q(y) B(x,y,t,s) - q(y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x,y,t,s) - \right.$$

$$\left. - q(x) \frac{\partial^2}{\partial y^2} B(x,y,t,s) + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} B(x,y,t,s) \right) dx dy.$$

Відомо, що в нашому випадку [19]

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx + \frac{K_n(x)}{n}, \ |K_n(x)| \le L; \quad \mu_n^2 = n^2 + O(1). \tag{8}$$

Тоді $\forall \ 0 \le i, j \le 1$

$$\left|\int_0^\pi\int_0^\pi X_k(x)X_m(y)q^{1-i}(x)q^{1-j}(y)B_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy\right|=$$

$$=\left|\int_0^\pi\int_0^\pi q^{1-i}(x)q^{1-j}(y)B_{2i,2j}(x,y,t,s)\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx+\frac{K_k(x)}{k}\right)\right.$$

$$\left.\times\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin my+\frac{K_m(y)}{m}\right)dxdy\right|=$$

$$=\left|\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\int_0^\pi q^{1-i}(x)q^{1-j}(y)B_{2i,2j}(x,y,t,s)\sin kx\sin my\,dxdy+\right.$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{m}\int_0^\pi\int_0^\pi q^{1-i}(x)q^{1-j}(y)B_{2i,2j}(x,y,t,s)\sin kx\,K_m(y)dxdy+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k}\int_0^\pi\int_0^\pi q^{1-i}(x)q^{1-j}(y)B_{2i,2j}(x,y,t,s)K_k(x)\sin my\,dxdy+$$

$$\left.+\frac{1}{km}\int_0^\pi\int_0^\pi q^{1-i}(x)q^{1-j}(y)B_{2i,2j}(x,y,t,s)K_k(x)K_m(y)dxdy\right|\leq$$

$$\leq\frac{2C_q^{2-i-j}}{\pi}\left|\int_0^\pi\int_0^\pi\sin kx\sin myB_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy\right|+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{C_q^{2-i-j}L}{m}\left|\int_0^\pi\int_0^\pi\sin kxB_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy\right|+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{C_q^{2-i-j}L}{k}\int_0^\pi\int_0^\pi\sin myB_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy+\frac{C_q^{2-i-j}L^2}{km}\left|\int_0^\pi\int_0^\pi B_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy\right|.$$

Отримаємо

$$|\mathsf{E}\zeta_k(t)\zeta_m(s)|=\left|\frac{1}{\mu_k^2\mu_m^2}\int_0^\pi\int_0^\pi X_k(x)X_m(y)\sum_{i,j=0}^{1}(-1)^{i+j}q^{1-i}(x)q^{1-j}(y)B_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy\right|\leq$$

$$\leq\sum_{i,j=0}^{1}\left(\frac{2C_q^{2-i-j}}{\pi\mu_k^2\mu_m^2}\left|\int_0^\pi\int_0^\pi\sin kx\sin myB_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy\right|\right.$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{C_q^{2-i-j}L}{m\mu_k^2\mu_m^2}\left|\int_0^\pi\int_0^\pi\sin kxB_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy\right|$$

$$\left.+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{C_q^{2-i-j}L}{k\mu_k^2\mu_m^2}\int_0^\pi\int_0^\pi\sin myB_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy+\frac{C_q^{2-i-j}L^2}{km\mu_k^2\mu_m^2}\left|\int_0^\pi\int_0^\pi B_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy\right|\right).$$

Далі

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \sin kx \sin my B_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy = \int_0^\pi \sin kx \int_0^\pi \sin my B_{2i,2j}(x,y,t,s)dydx =$$

$$= \int_0^\pi \sin kx \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \sin my B_{2i,2j}(x,y,t,s)dydx =$$

$$= \int_0^\pi \sin kx \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \sin(my+\pi) B_{2i,2j}(x,y+\frac{\pi}{m},t,s)dydx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin kx \int_{-\pi}^\pi \sin my B_{2i,2j}(x,y+\frac{\pi}{m},t,s)dydx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin kx \int_{-\pi}^\pi \sin my \left(B_{2i,2j}(x,y,t,s) - B_{2i,2j}(x,y+\frac{\pi}{m},t,s)\right)dydx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^\pi \sin my \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \sin kx \left(B_{2i,2j}(x,y,t,s) - B_{2i,2j}(x,y+\frac{\pi}{m},t,s)\right)dxdy =$$

$$= \frac{1}{16}\int_{-\pi}^\pi\int_{-\pi}^\pi \sin kx \sin my \Big(B_{2i,2j}(x,y,t,s) - B_{2i,2j}(x+\frac{\pi}{k},y,t,s) -$$

$$-B_{2i,2j}(x,y+\frac{\pi}{m},t,s) + B_{2i,2j}(x+\frac{\pi}{k},y+\frac{\pi}{m},t,s)\Big)dxdy;$$

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \sin kx B_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy = \frac{1}{4}\int_0^\pi\int_{-\pi}^\pi \sin kx \Big(B_{2i,2j}(x,y,t,s) - B_{2i,2j}(x+\frac{\pi}{k},y,t,s)\Big)dxdy;$$

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \sin my B_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy = \frac{1}{4}\int_0^\pi\int_{-\pi}^\pi \sin my \Big(B_{2i,2j}(x,y,t,s) - B_{2i,2j}(x,y+\frac{\pi}{m},t,s)\Big)dydx.$$

Отже

$$|\mathsf{E}\zeta_k(t)\zeta_m(s)| \le \sum_{i,j=0}^{1} \frac{C_q^{2-i-j}}{\mu_k^2\mu_m^2}\left(\frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^\pi\int_{-\pi}^\pi \left|\Delta_{2,\frac{\pi}{k},\frac{\pi}{m}} B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right| dxdy + \right.$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{L}{4m}\int_0^\pi\int_{-\pi}^\pi \left|\Delta_{x,\frac{\pi}{k}} B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right| dxdy +$$

$$\left. +\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{L}{4k}\int_0^\pi\int_{-\pi}^\pi \left|\Delta_{y,\frac{\pi}{m}} B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right| dydx + \frac{C_{G,i,j}}{km}\right).$$

Лема 2. *Нехай виконуються умови леми 1 та збігаються ряди*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau\left(\frac{\pi}{k},\frac{\pi}{m}\right)}{km}\varphi(k^2)\varphi(m^2)<\infty;$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau\left(\frac{\pi}{k}\right)}{km^2}\varphi(k^2)\varphi(m^2)<\infty;$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau\left(\frac{\pi}{m}\right)}{k^2m}\varphi(k^2)\varphi(m^2)<\infty.$$

Тоді ряд

$$I=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_{k,m}\mu_k\mu_m\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0)$$

збігається та мають місце нерівності

$$I\leq S_1\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau\left(\frac{\pi}{k},\frac{\pi}{m}\right)}{\mu_k\mu_m}\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0)+S_2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau\left(\frac{\pi}{k}\right)}{m\mu_k\mu_m}\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0)+$$
$$+S_3\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau\left(\frac{\pi}{m}\right)}{k\mu_k\mu_m}\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0)+C_G\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{km\mu_k\mu_m}\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0),$$

де

$$S_1=\frac{1}{8\pi}\sum_{i,j=0}^{1}C_q^{2-i-j}C_{1,i,j},\ S_2=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{L}{4}\sum_{i,j=0}^{1}C_q^{2-i-j}C_{2,i,j},$$
$$S_3=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{L}{4}\sum_{i,j=0}^{1}C_q^{2-i-j}C_{3,i,j},\ C_G=\sum_{i,j=0}^{1}C_q^{2-i-j}C_{G,i,j}.$$

Доведення. Доведення випливає з леми 1.

Лема 3. *Нехай для всіх $0\leq i,j\leq 1$ виконуються умови*

$$\left|\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\widetilde{B}_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy\right|\leq\frac{M_{i,j}}{\varphi^2\left(\frac{1}{|t-s|}+v_0\right)},$$

де $M_{i,j}>0$ – константи.

Тоді існують сталі $b_{k,m}>0$ такі, що

$$|\mathsf{E}(\zeta_k(t)-\zeta_k(s))(\zeta_m(t)-\zeta_m(s))|\leq b_{k,m}\varphi^{-2}\left(\frac{1}{|t-s|}+v_0\right)$$

та для $b_{k,m}$ виконується умова

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}b_{k,m}<\infty.$$

Доведення.

$$\mathsf{E}(\zeta_k(t)-\zeta_k(s))(\zeta_m(t)-\zeta_m(s)) = \mathsf{E}\left(\int_0^\pi \xi(x,t)X_k(x)dx - \int_0^\pi \xi(x,s)X_k(x)dx\right)$$

$$\times\left(\int_0^\pi \xi(y,t)X_m(y)dy - \int_0^\pi \xi(y,s)X_m(y)dy\right) =$$

$$= \mathsf{E}\int_0^\pi (\xi(x,t)-\xi(x,s))X_k(x)dx \int_0^\pi (\xi(y,t)-\xi(y,s))X_m(y)dy =$$

$$= \int_0^\pi\int_0^\pi X_k(x)X_m(y)\left(B(x,y,t,t)-B(x,y,t,s)B(x,y,s,t)+B(x,y,s,s)\right)dxdy =$$

$$= \int_0^\pi\int_0^\pi X_k(x)X_m(y)\widetilde{B}(x,y,t,s)dxdy.$$

Виконуючи перетворення з доведення леми 1 для функції $\widetilde{B}$ замість B отримаємо

$$\mathsf{E}(\zeta_k(t)-\zeta_k(s))(\zeta_m(t)-\zeta_m(s)) =$$

$$= \frac{1}{\mu_k^2\mu_m^2}\sum_{i,j=0}^{1}(-1)^{i+j}\int_0^\pi\int_0^\pi X_k(x)X_m(y)q^{1-i}(x)q^{1-j}(y)\widetilde{B}_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy.$$

$$\left|\int_0^\pi\int_0^\pi X_k(x)X_m(y)q^{1-i}(x)q^{1-j}(y)\widetilde{B}_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy\right| \le$$

$$\le C_X^2 C_q^{2-i-j}\left|\int_0^\pi\int_0^\pi \widetilde{B}_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy\right| \le \frac{C_X^2 C_q^{2-i-j}M_{i,j}}{\varphi^2\left(\frac{1}{|t-s|}+v_0\right)}.$$

Тобто

$$|\mathsf{E}(\zeta_k(t)-\zeta_k(s))(\zeta_m(t)-\zeta_m(s))| \le \frac{1}{\mu_k^2\mu_m^2}\frac{C_X^2\sum_{i,j=0}^1 C_q^{2-i-j}M_{i,j}}{\varphi^2\left(\frac{1}{|t-s|}+v_0\right)}.$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty \frac{C_X^2\sum_{i,j=0}^1 C_q^{2-i-j}M_{i,j}}{\mu_k^2\mu_m^2}$$

збігається, оскільки збігається ряд

$$\sum_{k=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{k^2m^2}.$$

Теорема 3. *Нехай в* (1) $\xi(x,t)$ *– центроване строго Орлічеве випадкове поле з простору* $L_U(\Omega)$ *вибірково неперервне з імовірністю одиниця,* U *задовольняє g-умові. Нехай* $\varphi(\lambda)$, $\lambda > 0$ *– неперервна зростаюча функція,* $\varphi(\lambda) > 0$ *при всіх* $\lambda > 0$, $\varphi(\lambda) \to \infty$, $\lambda \to \infty$, *така, що функція* $\dfrac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ *є зростаючою при* $\lambda > v_0$, *де стала* $v_0 \geq 0$. *Припустимо при всіх* $x \in [0,\pi]$, $y \in [0,\pi]$, $t \in [0,T]$, $s \in [0,T]$ *існує неперервна похідна* $\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} B(x,y,t,s)$ *та для деяких неперервних функцій* $\tau(\delta_1,\delta_2)$, $\delta_1 \geq 0$, $\delta_2 \geq 0$ *та* $\tau(\delta)$, $\delta \geq 0$ *таких, що* $\tau(\delta_1,\delta_2) > 0$ *при* $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\tau(0,\delta_2) = \tau(\delta_1,0) = 0$, $\tau(\delta_1,\delta_2)$ *монотонно зростає по* δ_1 *та* δ_2, $\tau(\delta) > 0$ *при* $\delta > 0$, $\tau(0) = 0$, $\tau(\delta)$ *монотонно зростає, виконуються умови:*

для довільного $\varepsilon > 0$

$$\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{1}{v}\right)\right)^2\right) dv < \infty;$$

для всіх $0 \leq i,j \leq 1$ *існують константи* $C_{1,i,j} > 0$, $C_{2,i,j} > 0$, $C_{3,i,j} > 0$, $0 \leq i,j \leq 1$ *такі, що*

$$\sup_{\substack{0 \geq t \geq T \\ 0 \geq s \geq T}} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\Delta_{2,\delta_1,\delta_2} B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right| dxdy \leq C_{1,i,j}\tau(\delta_1,\delta_2),$$

$$\sup_{\substack{0 \geq t \geq T \\ 0 \geq s \geq T}} \int_0^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|\Delta_{x,\delta} B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right| dx\right) dy \leq C_{2,i,j}\tau(\delta),$$

$$\sup_{\substack{0 \geq t \geq T \\ 0 \geq s \geq T}} \int_0^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|\Delta_{y,\delta} B_{2i,2j}(x,y,t,s)\right| dy\right) dx \leq C_{3,i,j}\tau(\delta);$$

для всіх $0 \leq i,j \leq 1$ *існують константи* $M_{i,j} > 0$ *такі, що*

$$\left|\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \widetilde{B}_{2i,2j}(x,y,t,s)dxdy\right| \leq \frac{M_{i,j}}{\varphi^2\left(\frac{1}{|t-s|} + v_0\right)}.$$

Тоді ряд (6) *збігається рівномірно за ймовірністю в області* $[0,\pi] \times [0,T]$ *(*$T > 0$ *– деяка стала), рівномірно за ймовірністю збігаються ряди, отримані з* (6) *почленним диференціюванням один та два рази по* t *і один та два рази по* x, *та з імовірністю одиниця задача* (1)–(3) *має розв'язок, який можна зобразити у вигляді ряду* (6).

Доведення. Твердження теореми випливає з теореми 2 та лем 2, 3.

Висновки. В роботі отримані умови на коваріаційну функцію центрованого строго Орлічевого випадкового поля, що стоїть в правій частині рівняння коливання струни, що забезпечують існування розв'язку задачі математичної фізики для цього рівняння у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду.

1. Козаченко Ю.В. Случайные процессы в пространствах Орлича I // Теория вероятностей и мат. статист. – 1984, – вып. 30, – С. 92–107.

2. Козаченко Ю.В. Случайные процессы в пространствах Орлича II // Теория вероятностей и мат. статист. – 1984, – вып. 31, – С. 44–50.
3. Бейсенбаев Е., Козаченко Ю.В. Равномерная сходимость случайных рядов по вероятности и решение краевых задач со случайными начальными условиями // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1979. – Вып. 21. – С. 9 – 23.
4. Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В. К вопросу применимости метода Фурье для решения задач со случайными краевыми условиями // Случайные процессы в задачах математической физики. Сборник научных трудов. – Киев, Институт математики АН УССР, 1979. – С. 4 – 35.
5. Козаченко Ю.В., Сливка Г.І. Обгрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами // Теорія ймовірностей та матем. стат., вип. 69, 2003 р., – С.63–78.
6. Сливка Г.І. Обгрунтування застосування методу Фур'є до задачі про коливання круглої мембрани з випадковими початковими умовами // Вісник Київ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки.– 2002, – вип. № 4,– С. 31–37.
7. Сливка Г.І. Крайова задача математичної фізики з випадковими початковими умовами // Вісник Київ. ун-ту, сер. фіз.-мат. науки.– 2002, – вип. № 5,– С. 172–178.
8. Довгай Б.В. Обгрунтування методу Фур'є для ноеднорідного гіперболічного рівняння з випадковою правою частиною // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 5. – С. 616 – 624.
9. Довгай Б.В. Властивості розв'язку неоднорідного гіперболічного рівняння з випадковою правою частиною // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 4. – С. 474 – 482.
10. Довгай Б.В. Розв'язування гіперболічного рівняння з гауссовою правою частиною спеціального вигляду методом Фур'є // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2005, – Вип. № 3, – С. 31-36.
11. Dovgay B.V., Kozachenko Yu.V. The condition for application of Fourie method to the solution of nonhomogeneous string oscillation equation with φ-subgaussian right hand side // Random operators and stochastic equations. – 2005, – Vol. 13, No. 3, – P. 281–296.
12. Dovgay B.V., Kozachenko Yu.V. Properties of solution of nonhomogeneous string oscillation equation with φ-subgaussian right side// Random operators and stochastic equations. – 2009, – Vol. 17, – P. 221–241.
13. Довгай Б.В. Узагальнені розв'язки гіперболічного рівняння з φ-субгауссовою правою частиною // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2009, – Вип. 81, – С. 25-30.
14. Довгай Б.В. Моделювання розв'язку гіперболічного рівняння // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2011, – Вип. №3, – С. 18-23.
15. Довгай Б.В. Гіперболічне рівняння з Орлічевою правою частиною // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика і інформатика. – 2011. – Вип. 22, N 2. – С. 64–78.
16. Довгай Б.В. Узагальнені розв'язки гіперболічного рівняння з Орлічевою правою частиною // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2012, – Вип. №1, – С. 13-17.
17. Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V. Metric characterization of random variables and random processes. – Kiev: "ТВіМС"; English transl., Amer. Math. Soc., Providence, RI, – 2000. – 257 p.
18. E. Barrasa de la Krus and Yu. V. Kozachenko. Boundary-value problem for equations of mathematical physics with strictly Orlicz random initial conditions // Random operators and stochastic equations. – 1995. – Vol. 3, No. 3. – P. 201 – 220.
19. *Положий Г.Н.* Уравнения математической физики. – Москва: Высшая школа, 1964. – 559 с.

Одержано 15.02.2013