УДК 517.946+511.37

В. С. Ільків, Н. І. Страп (Національний університет „Львівська політехніка“)

Нелокальна крайова задача для рівняння з частинними похідними у багатовимірній комплексній області

The paper is devoted to investigation of non-local boundary problem for partial differential equations with the operator $B = (B_1, B_2, \ldots, B_p)$, where $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \ldots, p$, are operators of the generalized differentiation, which operates on complex variable z_j. Problem is incorrect in the Hadamard sense and the solvability of this problem depends on the small denominators which arising in the construction of the solution. By using of metric approach, the theorem about lower estimation of small denominators was proved, and also existence and uniqueness conditions of this solution in the scale of spaces of functions of many complex variables are establish.

Досліджено нелокальну крайову задачу для рівняння з частинними похідними з векторним оператором $B = (B_1, B_2, \ldots, B_p)$, де $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \ldots, p$, – оператори узагальненого диференціювання за комплексною змінною z_j. Задача є некоректною за Адамаром, а її розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі, а також встановлено умови існування та єдиності даного розв'язку у шкалі просторів функцій багатьох комплексних змінних.

1. Вступ. Одним з важливих напрямків розвитку сучасної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними є дослідження крайових задач, зокрема задач з нелокальними крайовими умовами, та встановлення умов їх коректності і розв'язності. Коректність таких задач забезпечується вибором області розгляду та накладанням додаткових умов. В загальному випадку ці задачі є некоректними за Адамаром і така некоректність пов'язана з проблемою малих знаменників, що виникають у рядах Фур'є, які представляють їх розв'язки. Нелокальні задачі для гіперболічних, параболічних і безтипних рівнянь з частинними похідними вивчалися у дійсній області, напиклад у роботах [1–3].

Особливістю даної роботи є вивчення нелокальної задачі для просторових змінних, які приймають комплексні значення. Крайові задачі з нелокальними умовами у комплексних областях раніше не вивчалися. Задачу Коші для рівнянь з частинними похідними у комплексній області досліджував Дубинський [4]. Перенесення крайових задач дійсної змінної на випадок комплексної потребує відповідних змін у постановці задач. Це зумовило розгляд нелокальної крайової задачі у багатовимірній комплексній області.

У статті досліджено нелокальну крайову задачу для рівняння з частинними похідними з оператором $B = (B_1, B_2, \ldots, B_p)$, де $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \ldots, p$, діє за комплексною змінною z_j. Доведено теореми існування та єдиності розв'язку задачі у відповідному функціональному просторі, а також встановлено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі. Одновиміний випадок задачі досліджено у праці [5].

2. Постановка задачі. Введемо наступні позначення: $\mathcal{S}$ однозв'язна область проколотої у нулі комплексної площини, тобто $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}/\{0\}$, а $\mathcal{D}^p$ — циліндрична область $[0, T] \times \mathcal{S}^p$, де $T > 0$, $p \geq 2$.

Нехай $\mathbf{W}$ — лінійний простір кратних скінченних сум (основних функцій) вигляду $P(z) = \sum_k P_k z^k = \sum_{k_1} \ldots \sum_{k_p} P_{k_1,\ldots,k_p} z_1^{k_1} \ldots z_p^{k_p}$, де $z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathcal{S}^p$, P_k — комплексні коефіцієнти, $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$.

Простір $\mathbf{W}'$ спряжений з простором $\mathbf{W}$; це простір узагальнених функцій (лінійних неперервних функціоналів), які є формальними рядами Лорана $Q(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} Q_k z^k$, що діють на основну функцію $P \in \mathbf{W}$ за правилом $\langle P, Q\rangle = \sum_k Q_k \overline{P}_k$.

Введемо шкали просторів $\{\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$ і $\{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$. Нехай $\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)$, $q \in \mathbb{R}$, — гільбертів простір функцій $\psi = \psi(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \psi_k z^k$ зі заданим в ньому скалярним добутком $(\psi, \varphi)_{\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2q} \psi_k \overline{\varphi}_k$, де $\widetilde{k} = \sqrt{1 + k_1^2 + \ldots + k_p^2}$, і нехай $\|\psi\|^2_{\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)} = (\psi, \psi)_{\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)}$; а $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$, $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, — банахів простір функцій $u = u(t, z)$ таких, що похідні $\dfrac{\partial^r u(t,z)}{\partial t^r}$, де $\dfrac{\partial^r u(t,z)}{\partial t^r} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k^{(r)}(t) z^k$, $r = 0, 1, \ldots, n$, для кожного $t \in [0, T]$ належать до просторів $\mathbf{H}_{q-r}(\mathcal{S}^p)$ відповідно і неперервні за t у цих просторах. Квадрат норми у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$ дає формула:

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)} = \sum_{r=0}^{n} \max_{[0,T]} \left\| \frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r} \right\|^2_{\mathbf{H}_{q-r}(\mathcal{S}^p)}.$$

У просторі $\mathbf{W}'$ запровадимо оператори $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$ узагальненого диференціювання, зокрема $B_j(z^k) = k_j z^k$, а також степені даних операторів $B_j^0 u \equiv u$, $B_j^l u = B_j(B_j^{l-1} u)$ $(j = 1, \ldots, p,\ l = 1, \ldots, n)$. З узагальнених операторів $B_1, \ldots, B_p$ складемо оператор $B = (B_1, B_2, \ldots, B_p)$ і позначимо $B^s = B_1^{s_1} \ldots B_p^{s_p}$.

Введемо також функцію $\zeta(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{-z}$, де $\mathrm{Re}\, z > p$, область $\mathcal{O}_R$ — круг радіуса R із центром у початку координат комплексної площини $\mathbb{C}$ та параметр $\mu \in \mathbb{C}$.

В області $\mathcal{D}^p$ розглянемо задачу з двоточковими нелокальними умовами для диференціально-операторного рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$Lu = \sum_{s_0+|s|\le n} a_{s_0,s} B^s \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = 0, \tag{1}$$

$$M_m u = \mu \left.\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right|_{t=0} - \left.\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right|_{t=T} = \varphi_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

де $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$, $a_{s_0,s} \in \mathbb{C}$, $a_{n,0} = 1$, u — шукана функція, а $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ — задані функції.

Якщо функція $u = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t) z^k$ і $u \in \mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$, то $B_j u = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} k_j u_k(t) z^k$ і, очевидно, $B_j u \in \mathbf{H}_{q-1}^n(\mathcal{D}^p)$. Аналогічно, $B^s u \in \mathbf{H}_{q-|s|}^n(\mathcal{D}^p)$, $Lu \in \mathbf{H}_{q-n}^0(\mathcal{D}^p)$ і $M_m u \in \mathbf{H}_{q-m}(\mathcal{S}^p)$, де $m = 0, 1, \ldots, n-1$, $j = 1, \ldots, p$.

Доведемо, наприклад, останнє включення. Нехай функція $u \in \mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$, тоді

$$\|M_m u\|^2_{\mathbf{H}_\sigma(\mathcal{S}^p)} = \left\| \mu \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=T} \right\|^2_{\mathbf{H}_\sigma(\mathcal{S}^p)} \leq$$

$$\leq (|\mu|^2+1) \max_{[0,T]} \left\| \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \right\|^2_{\mathbf{H}_\sigma(\mathcal{S}^p)} \leq (|\mu|^2+1)\|u\|^2_{\mathbf{H}_{\sigma+m}(\mathcal{S}^p)} < \infty,$$

якщо $\sigma + m \leq q$. Отже, $M_m u \in \mathbf{H}_{q-m}(\mathcal{S}^p)$ у разі $\sigma = q - m$.

Для функцій u з простору $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$ рівняння (1) є рівнянням у просторі $\mathbf{H}^0_{q-n}(\mathcal{D}^p)$, а умови (2) — це умови у просторах $\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)$, $H_{q-1}(\mathcal{S}^p)$, …, $\mathbf{H}_{q-n+1}(\mathcal{S}^p)$ відповідно.

Означення 1. *Під розв'язком задачі* (1), (2) *будемо розуміти функцію* $u=u(t,z)$ *із значеннями* $u(t,\cdot)$ *у просторі* $\mathbf{W}'$ *для* $t \in [0,T]$, *яка задовільняє рівняння* (1) *і умови* (2) *та належить до простору* $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$.

Якщо існує розв'язок u задачі (1), (2), то з необхідністю функції $\varphi_m = M_m u$ належать до просторів $\mathbf{H}_{q-m}(\mathcal{S}^p)$ при $m = 0, 1, \ldots, n-1$ відповідно. Це твердження є наслідком означення розв'язку та властивостей просторів $\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)$ і $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$.

Для встановлення достатніх умов на функції φ_m, при яких обернений оператор задачі (1), (2) існує та діє у простір $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$, використовуємо метричний підхід [3].

Розглядаємо множину задач (1), (2), що параметризується коефіцієнтами $a_{s_0,s}$ рівняння (1). Вважаємо, що коефіцієнти $a_{s_0,s}$ розглядаються у крузі $\mathcal{O}_A \subset \mathbb{C}$, параметр μ у крузі $\mathcal{O}_M \subset \mathbb{C}$, причому комплексний простір $\mathbb{C}$ ототожнюємо з дійсним простором $\mathbb{R}^2$ з мірою Лебега, де A та M — додатні фіксовані числа. Для майже всіх, в сенсі міри Лебега у просторі $\mathbb{R}^{2p}$, таких коефіцієнтів $a_{s_0,s}$ доведено теореми існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2).

3. Побудова розв'язку. Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду:

$$u(t,z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) z^k, \tag{3}$$

де коефіцієнти $u_k(t)$ — невідомі функції, які треба визначити.

Запишемо оператор L з рівняння (1) у вигляді $L\Big(\dfrac{\partial}{\partial t}, B\Big) = \dfrac{\partial^n}{\partial t^n} + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j(B) \dfrac{\partial^{n-j}}{\partial t^{n-j}}$,

де $b_j(B) = \sum\limits_{|s|=0}^{j} a_{n-j,s} B^s = \sum\limits_{|s|=0}^{j} a_{n-j,s_1,\ldots,s_p} B_1^{s_1} \ldots B_p^{s_p}$, $j = 1, \ldots, n$.

Функція $u_k = u_k(t)$ з формули (3) для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ є класичним розв'язком відповідної задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$u_k^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} b_j(k) u_k^{(n-j)} = 0, \tag{4}$$

$$\mu u_k^{(m)}\big|_{t=0} - u_k^{(m)}\big|_{t=T} = \varphi_{mk}, \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{5}$$

де $b_j(k) = \sum\limits_{|s|=0}^{j} a_{n-j,s} k^s = \sum\limits_{|s|=0}^{j} a_{n-j,s_1,\ldots,s_p} k_1^{s_1} \ldots k_p^{s_p}$, φ_{mk} — коефіцієнти Фур'є функцій φ_m, тобто $\varphi_m(z) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_{mk} z^k$ та $\langle \varphi_m(z), z^k \rangle = \varphi_{mk}$.

Якщо для якогось k існує нетривіальний розв'язок $\hat{u}_k(t)$ однорідної задачі (4), (5), то однорідна задача (1), (2) також має нетривіальний розв'язок, який визначає формула $\hat{u}(t,z) = \hat{u}_k(t)z^k$. Тому єдиність розв'язку $u_k(t)$ задачі (4), (5) у просторі $\mathrm{C}^n[0,T]$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ є необхідною і достатньою умовою єдиності розв'язку задачі (1), (2) у $\mathbf{W}'$.

4. Побудова розв'язку задачі (4)**,** (5)**.** Для побудови розв'язку задачі (4), (5) пронормуємо коефіцієнти $b_j(k)$, $j = 0,1,\ldots,n$, рівняння (4), подаючи їх у вигляді $b_j(k) = \tilde{k}^j \tilde{b}_j(k)$. Величини $\tilde{b}_j(k)$, як і коефіцієнти $b_j(k)$, лінійно залежать від параметрів $a_{n-j,s}$, які у рівнянні (1) є коефіцієнтами при $B^s \dfrac{\partial^{n-j}u}{\partial t^{n-j}}$, $|s| \le j$, і рівномірно обмежені за k, j і $a_{s_0,s}$. Тоді для величини $\tilde{b}_j(k)$ можна записати наступні нерівності: при $\tilde{k} \notin \{1, \sqrt{2}\}$

$$|\tilde{b}_j(k)| \le \max_{|s|\le j} |a_{n-j,s}| \frac{1}{\tilde{k}^j} \sum_{|s|=0}^{j} |k^s| \le A \sum_{\sigma=0}^{j} \frac{1}{\tilde{k}^{j-\sigma}} \sum_{|s|=\sigma} \prod_{l=1}^{p} \left(\frac{|k_l|}{\tilde{k}}\right)^{s_l} \le$$

$$\le A \sum_{\sigma=0}^{j} \tilde{k}^{\sigma-j} \sum_{|s|=\sigma} 1 = A \sum_{\sigma=0}^{j} \tilde{k}^{\sigma-j} C_{\sigma+p-1}^{\sigma} \le A C_{p+j}^{j},$$

$|\tilde{b}_j(k)| = |a_{n-j,0}| \le A$ при $\tilde{k} = 1$, а $|\tilde{b}_j(k)| \le (j+1)2^{-j/2}A \le \dfrac{3}{2}A$ при $\tilde{k} = \sqrt{2}$.

Для коренів $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k)$ многочлена

$$P_k(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j(k)) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_j(k)\lambda^{n-j},$$

які є неперервними функціями від $a_{s_0,s}$, виконуються наступні нерівності [6]:

$$|\lambda_j(k)| \le 1 + \max\{|\tilde{b}_1(k)|,\ldots,|\tilde{b}_n(k)|\} < A_1 = 1 + C_{p+n}^{n} A. \tag{6}$$

Очевидно, що числа $\gamma_j = \tilde{k}\lambda_j(k)$ є коренями характеристичного рівняння

$$\gamma^n + b_1(k)\gamma^{n-1} + \ldots + b_n(k) = 0$$

для диференціального рівняння (4).

Позначимо через K_Δ множину тих $k \in \mathbb{Z}^p$, при яких многочлен $P_k(\lambda)$ має кратні корені. Ця множина залежить від коефіцієнтів $a_{s_0,s}$ рівняння (1).

У випадку різних коренів $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k)$, тобто $k \in \mathbb{Z}^p \setminus K_\Delta$, загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^{n} C_{kl} e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}, \tag{7}$$

де C_{kl} — довільні комплексні сталі, і належить до простору $\mathrm{C}^n[0,T]$.

Якщо $u_k(t)$ є розв'язком задачі (4), (5), то числа $\tilde{C}_{kl} = (\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T})C_{kl}$, $l = 1,\ldots,n$, утворюють розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{C}_{k1} \\ \tilde{C}_{k2} \\ \tilde{C}_{k3} \\ \ldots \\ \tilde{C}_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{0k} \\ \varphi_{1k}/\tilde{k} \\ \varphi_{2k}/\tilde{k}^2 \\ \ldots \\ \varphi_{n-1,k}/\tilde{k}^{n-1} \end{pmatrix} \tag{8}$$

з невиродженою матрицею Вандермонда $(\lambda_j^{\alpha-1})_{j,\alpha=1}^n$ і навпаки, якщо числа $\tilde{C}_{k1}$, $\tilde{C}_{k2}$, ..., $\tilde{C}_{kn}$ утворюють розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (8), то функція $u_k(t)$, що визначається формулою (7), в якій $C_{kl} = \tilde{C}_{kl}/(\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T})$, є розв'язком задачі (4), (5).

Розв'язуючи систему (8) за правилом Крамера, одержуємо

$$\tilde{C}_{kl} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_{jl}(k)}{\Delta(k)} \tilde{k}^{-j} \varphi_{jk}, \quad l = 1, \ldots, n, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus K_\Delta,$$

де $\Delta(k) = \prod_{1\le r<q\le n} (\lambda_q(k) - \lambda_r(k)) \neq 0$ — визначник Вандермонда, а $\Delta_{jl}(k)$ — його відповідні алгебричні доповнення.

Для того, щоб задача (4), (5) мала єдиний класичний розв'язок (у просторі $\mathrm{C}^n[0,T]$) необхідно і достатньо, щоб для кожного $k\in\mathbb{Z}^p \setminus K_\Delta$ виконувалась умова $\mu\notin\{e^{\tilde{k}\lambda_1(k)T}, \ldots, e^{\tilde{k}\lambda_n(k)T}\}$. З цієї умови випливає, що $\ln\mu \neq \tilde{k}\lambda_l(k)T + i2\pi m$, або $\lambda_l(k) \neq \dfrac{\ln\mu - i2\pi m}{\tilde{k}T}$, для довільних $k \in \mathbb{Z}^p \setminus K_\Delta$, $m \in \mathbb{Z}$ і $l = 1, \ldots, n$.

У протилежному випадку, коли $\mu = e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}$ для деяких k та l, існує таке число $m\in\mathbb{Z}$, що корінь $\lambda_l(k)$ визначається за формулою $\lambda_l(k) = \dfrac{\ln\mu - i2\pi m}{\tilde{k}T}$. Тому виконується рівність $\dfrac{(\ln\mu - i2\pi m)^n}{T^n\tilde{k}^n} + \sum\limits_{j=1}^n \tilde{b}_j(k)\dfrac{(\ln\mu - i2\pi m)^n}{T^n\tilde{k}^n} = 0$ чи еквівалентна їй рівність

$$(\ln\mu - i2\pi m)^n + \sum_{j=1}^n \tilde{b}_j(k) T^j (\ln\mu - i2\pi m)^{n-j} = 0. \tag{9}$$

У випадку кратних коренів загальний розв'язок рівняння (4) також буде мати вигляд (7), але замість коефіцієнтів C_{kl} будуть многочлени $C_{kl}(t)$ степеня на одиницю меншого від кратності кореня $\lambda_l(k)$. Тому розв'язність у цілих числах m і $k_1, \ldots, k_p$ рівняння (9) є умовою не єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{W}'$ і для цього випадку.

Сформулюємо і доведемо теорему про єдиність розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{W}'$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $\mathbf{W}'$ *необхідно і достатньо, щоб рівняння* (9) *не мало розв'язків у цілих числах* m *і* $k_1, \ldots, k_p$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай однорідна задача (1), (2) у просторі $\mathbf{W}'$ має не більше одного розв'язку. Якщо існує розв'язок задачі (1), (2), тоді всі функції $u_k(t)$ знаходяться однозначно, тобто однорідна задача (4), (5) у просторі $\mathrm{C}^n[0,T]$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ має єдиний розв'язок. Отже, $\Delta \cdot \prod\limits_{l=1}^n (\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}) \neq 0$ при $k \in \mathbb{Z}^p \setminus K_\Delta$, тобто $\mu \neq e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}$ при $l = 1, \ldots, n$. Таким чином, рівняння (9) не має розв'язків у цілих m і $k_1, \ldots, k_p$. Аналогічні нерівності отримуємо при $k \in K_\Delta$.

Достатність. Доведемо методом від супротивного. Нехай числа m^*, k_1^*, ..., k_p^* є розв'язком рівняння (9). Тоді, вважаючи $\lambda_1(k^*) = \dfrac{\ln\mu - i2\pi m^*}{\tilde{k}^*T}$, де $k^* = (k_1^*, \ldots, k_p^*)$, однорідна задача (4), (5) має розв'язок $e^{\tilde{k}^*\lambda_1(k^*)T} = e^{(\ln\mu - i2\pi m^*)t/T}$.

Отже, звідси випливає, що задача (1), (2) у просторі $\mathbf{W}'$ має неєдиний розв'язок, оскільки функції $u^*(t,z) = C_0 z^{k^*} e^{(\ln\mu - i2\pi m^*)t/T}$, де C_0 — довільна комплексна стала, є розв'язками відповідної однорідної задачі.

Теорему доведено.

В умовах теореми 1 для довільного $k \in \mathbb{Z}^p$ розв'язок $u_k(t)$ задачі (4), (5) існує, а при $k \in \mathbb{Z}^p \setminus K_\Delta$ має такий вигляд:

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_{jl}(k)}{\Delta(k)} \frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}} \tilde{k}^{-j}\varphi_{jk}. \tag{10}$$

Запишемо похідну по t порядку r даної функції:

$$u_k^{(r)}(t) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_{jl}(k)}{\Delta(k)} \frac{\lambda_l^r(k) e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}} \tilde{k}^{r-j}\varphi_{jk}.$$

Оцінимо абсолютну величину функцій $u_k^{(r)}(t)$:

$$|u_k^{(r)}(t)| \le \frac{1}{|\Delta(k)|} \max_{j,l} |\Delta_{jl}(k)| \sum_{l=1}^{n} \frac{|\lambda_l^r(k)||e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}|}{|\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}|} \sum_{j=0}^{n-1} |\tilde{k}^{r-j}\varphi_{jk}|.$$

Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату і перетворимо до вигляду:

$$|u_k^{(r)}(t)|^2 \le n^3 \frac{1}{|\Delta(k)|^2} \max_{j,l} |\Delta_{jl}(k)|^2 |\lambda_l(k)|^{2r} \max_{1<l<n} \left| \frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}} \right|^2 \sum_{j=0}^{n-1} |\tilde{k}^{r-j}\varphi_{jk}|^2.$$

На основі формул (3) і (10) отримаємо формальне зображення розв'язку задачі (1), (2) з простору $\mathbf{W}'$ у вигляді ряду

$$u(t,z) = \sum_{k\in K_\Delta} u_k(t) z^k + \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus K_\Delta} \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_{jl}(k)}{\Delta(k)} \frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}} \tilde{k}^{-j}\varphi_{jk} z^k. \tag{11}$$

Оскільки $\Delta_{jl}(k)$ — визначники порядку $n-1$, що мають обмежені елементи, які є степенями чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то з (6) маємо

$$|\Delta_{jl}(k)| < (n-1)! A_1^{n(n-1)/2}. \tag{12}$$

Сформулюємо і доведемо теорему існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$.

Теорема 2. *Нехай задача* (1), (2) *має єдиний розв'язок у просторі* $\mathbf{W}'$, *тобто справджуються умови теореми 1, та для деяких додатних сталих* C_1, C_2 *і дійсних чисел* η_1, η_2 *для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконуються нерівності*

$$|\Delta(k)| \ge C_1 \tilde{k}^{-\eta_1}, \tag{13}$$

$$\left| \frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}} \right| \le C_2 \tilde{k}^{\eta_2}, \qquad l = 1, \dots, n. \tag{14}$$

Якщо $\varphi_0 \in \mathbf{H}_\psi(\mathcal{S}^p)$, $\varphi_1 \in H_{\psi-1}(\mathcal{S}^p)$, …, $\varphi_{n-1} \in \mathbf{H}_{\psi-n+1}(\mathcal{S}^p)$, *де* $\psi = q + \eta_1 + \eta_2$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$, *який неперервно залежить від функцій* φ_0, φ_1, …, φ_{n-1}.

Доведення. Позначимо через K скінченну множину тих $k \in \mathbb{Z}^p$, для яких не виконується хоча б одна з нерівностей (13) або (14).

З умов теореми випливає, що розв'язки u_k задачі (4), (5) з простору $\mathrm{C}^n[0,T]$ існують, причому

$$|u_k^{(r)}(t)|^2 \le C_3|\tilde{k}|^{2\eta_1+2\eta_2}\sum_{j=0}^{n-1}|\tilde{k}^{r-j}\varphi_{jk}|^2, \qquad k\in\mathbb{Z}^p\setminus K, \qquad r=0,1,\ldots,n, \tag{15}$$

де $C_3 = n^3A_1^{n(n-1)}\big((n-1)!(1+C_{p+n}^n)^rC_2/C_1\big)^2,\ t\in[0,T]$. Нерівності (15) отримано на основі оцінок (12)—(14).

З формул (11) і (15) одержимо нерівність

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)}\le C\sum_{j=0}^{n-1}\|\varphi_j\|^2_{\mathbf{H}_{\psi-j}(\mathcal{S}^p)},$$

де $C>0$ — стала, звідки й випливає твердження теореми.

Теорему доведено.

Розглянемо умови, при яких виконуються нерівності (13), (14). Для доведення нерівності (13) подамо ліву частину Lu рівняння (1) у вигляді

$$Lu = a_{0,n,0,\ldots,0}B_1^nu+\ldots+a_{0,0,\ldots,n}B_p^nu+L_1u,$$

де вектор $(a_{0,n,0,\ldots,0},\ldots,a_{0,0,\ldots,n})\in\mathcal{O}_A^p$.

Теорема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{2p}$) векторів $(a_{0,n,0,\ldots,0},\ldots,a_{0,0,\ldots,n})$ з множини $\mathcal{O}_A^p$ нерівність (13) виконується при $\eta_1>p(n-1)/2$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}$.*

Доведення. Величина $\Delta^2(k) = \prod_{1\le r<q\le n}(\lambda_q(k)-\lambda_r(k))^2$ є дискримінантом $D(k)$ полінома $P_k(\lambda)$, який визначається за коефіцієнтами цього полінома [7]:

$$D(k)=\pm\begin{vmatrix}
1 & \tilde{b}_1(k) & \ldots & \tilde{b}_{n-1}(k) & \tilde{b}_n(k) & 0 & \ldots & 0\\
0 & 1 & \ldots & \tilde{b}_{n-2}(k) & \tilde{b}_{n-1}(k) & \tilde{b}_n(k) & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & \ldots & \tilde{b}_1(k) & \tilde{b}_2(k) & \tilde{b}_3(k) & \ldots & \tilde{b}_n(k)\\
n & (n-1)\tilde{b}_1(k) & \ldots & \tilde{b}_{n-1}(k) & 0 & 0 & \ldots & 0\\
0 & n & \ldots & 2\tilde{b}_{n-2}(k) & \tilde{b}_{n-1}(k) & 0 & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & \ldots & n & (n-1)\tilde{b}_1(k) & (n-2)\tilde{b}_2(k) & \ldots & \tilde{b}_{n-1}(k)
\end{vmatrix}, \tag{16}$$

де знак $\pm$ визначника дає формула $(-1)^{n(n-1)/2}$.

Доведемо, що для майже всіх векторів $(a_{0,n,0,\ldots,0},\ldots,a_{0,0,\ldots,n})$, які належать до множини $\mathcal{O}_A^p\subset\mathbb{R}^{2p}$, за досить великих $\tilde{k}$ справджується оцінка:

$$|\mathrm{Re}\,D(k)|\ge\tilde{k}^{-2\eta_1}. \tag{17}$$

Позначимо через E множину векторів $(a_{0,n,0,\ldots,0},\ldots,a_{0,0,\ldots,n})$, для яких протилежна до (17) нерівність

$$|\mathrm{Re}\,D(k)|<\tilde{k}^{-2\eta_1} \tag{18}$$

виконується для безлічі векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, а через E_k — множину тих векторів $(a_{0,n,0,\ldots,0}, \ldots, a_{0,0,\ldots,n})$, для яких нерівність (18) правильна при фіксованому $k \in \mathbb{Z}^p$. Не порушуючи загальності вважатимемо, що $|k_1| = \max\limits_{1 \le i \le n} |k_i|$. Коефіцієнт $a_{0,n,0,\ldots,0}$ позначимо через $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, де α_1 — дійсна, а α_2 — уявна частини α. Із (16) видно, що

$$D(k) = (-1)^{n(n-1)} n^n \tilde{b}_n^{n-1}(k) + F = (-1)^{n(n-1)} n^n \left(\frac{k_1}{\tilde{k}}\alpha + \ldots\right)^{n-1} + F, \quad \tilde{k} \neq 1,$$

звідки

$$\operatorname{Re} D(k) = (-1)^{n(n-1)} n^n (\operatorname{Re} \tilde{b}_n(k))^{n-1} + F_1 = (-1)^{n(n-1)} n^n \left(\frac{k_1}{\tilde{k}}\right)^{n-1} \alpha_1^{n-1} + \tilde{F}_1,$$

де F містить степені $\tilde{b}_n(k)$ менші за $n-1$, F_1 містить степені $\operatorname{Re} \tilde{b}_n(k)$ менші за $n-1$, а $\tilde{F}_1$ містить степені α_1 менші за $n-1$. Знайдемо міру $\operatorname{meas} E_k^1$ множини $E_k^1 \subset E_k$, для якої фіксованими є дійсні та уявні частини вектора $(a_{0,n,0,\ldots,0}, \ldots, a_{0,0,\ldots,n})$, крім α_1. Оскільки виконується нерівність:

$$\left|\frac{\partial^{n-1} \operatorname{Re} D(k)}{\partial \alpha_1^{n-1}}\right| = n^n (n-1)! \left(\frac{|k_1|}{\tilde{k}}\right)^{n(n-1)} \ge C_4,$$

де $C_4 = n^n (n-1)! (p+1)^{-\frac{n(n-1)}{2}}$, то за лемою з [8] справджується оцінка

$$\operatorname{meas} E_k^1 \le \min\left\{2\sqrt{A^2 - \alpha_2^2},\ C_5(n)\left(\frac{1}{C_4}|k|^{-2\eta_1}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right\},$$

де $C_5(n) = 2n$ [9]. Інтегруючи останню оцінку в області $[-A, A] \times \mathcal{O}_A^{p-1}$, отримаємо

$$\operatorname{meas} E_k \le C_6 \tilde{k}^{-\frac{2\eta_1}{n-1}}, \qquad C_6 = C_6(n, p) > 0.$$

Оскільки $\operatorname{meas} E \le \sum\limits_{|k|>0} \operatorname{meas} E_k$ і $\dfrac{2\eta_1}{n-1} > p$, то $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} \operatorname{meas} E_k \le C_6 \zeta\left(\dfrac{2\eta_1}{n-1}\right) < \infty$. Отже, згідно з лемою Бореля-Кантеллі [10] міра множини E дорівнює нулеві.

Якщо вектор $(a_{0,n,0,\ldots,0}, \ldots, a_{0,0,\ldots,n}) \notin E$, то з формули (17) і нерівності $|D(k)| \ge |\operatorname{Re} D(k)|$ отримаємо, що оцінка (13) при $\eta_1 > p(n-1)/2$ виконується для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ (крім скінченного числа, яке залежить від $a_{s_0,s}$).

Теорему доведено.

Розглянемо умови виконання нерівності (14), для чого скористаємося методикою з [11]. Позначимо $\rho(\lambda, t) = \dfrac{e^{\tilde{k}\lambda t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda T}}$, тоді дроби з (14) дорівнюватимуть $\rho(\lambda_l(k), t)$, де $l = 1, \ldots, n$. Послідовність знаменників функції $\rho(\lambda_l(k), t)$ може мати збіжні до нуля підпослідовності. Для оцінювання величини $\rho(\lambda_l(k), t)$ побудуємо виняткові множини малої міри на комплексній площині для параметра μ, використання яких є варіантом метричного підходу до оцінювання малих знаменників [3, 5].

Виберемо додатні числа η_2 та χ з умов $\eta_2 > \dfrac{p}{2}$, $\chi^2 32 n T^2 \zeta(2\eta_2) = \pi$. Нехай $\varepsilon < 1$ і, додатково, $\sqrt{\varepsilon} < \ln 2/(2\chi T)$, якщо $n = 1$; тоді для $n > 1$ виконується наступна нерівність: $\ln 2/(2\chi T) = \ln 2\sqrt{8n\zeta(2\eta_2)/\pi} \geq \sqrt{8n/\pi}/2 = \sqrt{2n/\pi} > 1$, тобто також $\sqrt{\varepsilon} < \ln 2/(2\chi T)$.

Позначимо $\chi_1 = \chi_1(k) = \sqrt{\varepsilon}\chi\tilde{k}^{-\eta_2}$ та $\mu_l(k) = e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}$, $\mu(k) = e^{\tilde{k}\lambda T}$. Враховуючи дані позначення, отримаємо, що $\rho(\lambda, t) = \dfrac{e^{\tilde{k}\lambda t}}{\mu - \mu(k)}$.

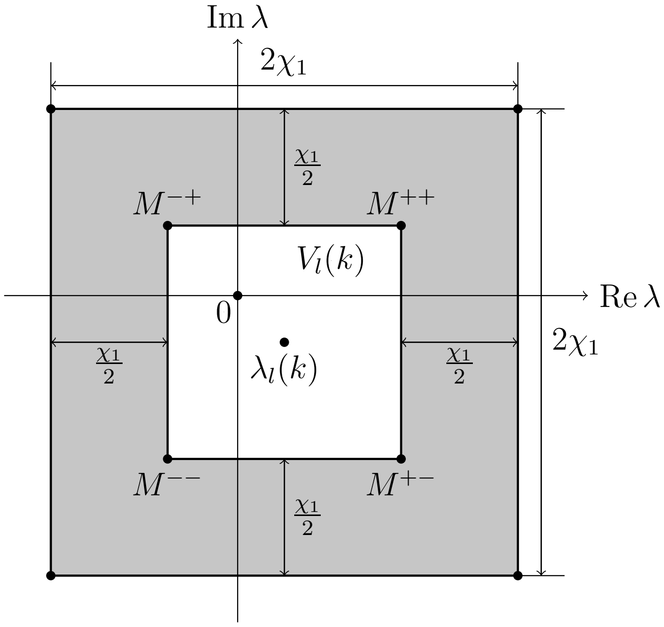

Рис. 1. Концентричні квадрати з центром у точці $\lambda_l(k)$: квадрат $V_l(k)$ зі стороною χ_1 та квадрат із стороною $2\chi_1$. Виділено множину, яка є різницею цих квадратів.

Виберемо множини $V_l(k)$ для тих $l = 1, \dots, n$ та $k \in \mathbb{Z}^p$, що задовільняють умову $|\mu_l(k)| < 2M$, за наступною формулою:

$$V_l(k) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\,(\lambda - \lambda_l(k))| < \frac{\chi_1}{2},\ |\mathrm{Im}\,(\lambda - \lambda_l(k))| < \frac{\chi_1}{2}\Big\}.$$

Кожна множина $V_l(k)$ — це квадрат (рис.1) зі стороною χ_1, центром $\lambda_l(k)$ і вершинами M^{--}, M^{-+}, M^{++}, M^{+-} у комплексній площині змінної λ. Точки M^{--}, M^{-+}, M^{++}, M^{+-} зображають комплексні числа $\lambda_l(k) - (1+i)\chi_1/2$, $\lambda_l(k) - (1-i)\chi_1/2$, $\lambda_l(k) + (1+i)\chi_1/2$, $\lambda_l(k) + (1-i)\chi_1/2$ відповідно.

Нехай множина $V_{l,2}(k)=\Big\{\mu\in\mathbb{C}\colon e^{-\chi_1 T/2}\leq\Big|\dfrac{\mu}{\mu_l(k)}\Big|\leq e^{\chi_1 T/2}, \Big|\arg\dfrac{\mu}{\mu_l(k)}\Big|\leq\chi_1 T/2\Big\}$ — образ квадрата $V_l(k)$ при відображенні $\lambda \to e^{\tilde{k}\lambda T}$, а множина $V_{l,1}(k)$ є образом концентричного до $V_l(k)$ квадрата зі стороною $2\chi_1$, тобто її можна задати за допомогою формули $V_{l,1}(k)=\Big\{\mu\in\mathbb{C} : e^{-\chi_1 T}\leq\Big|\dfrac{\mu}{\mu_l(k)}\Big|\leq e^{\chi_1 T}, \Big|\arg\dfrac{\mu}{\mu_l(k)}\Big|\leq\chi_1 T\Big\}$, тоді

$$V_{l,r}(k) = \Big\{\mu \in \mathbb{C} : e^{-\chi_1 2^{1-r}T} \leq \Big|\frac{\mu}{\mu_l(k)}\Big| \leq e^{\chi_1 2^{1-r}T}, \Big|\arg\frac{\mu}{\mu_l(k)}\Big| \leq \chi_1 2^{1-r}T\Big\}.$$

Множина $V_{l,r}(k)$ є частиною кільця $\Big\{\mu \in \mathbb{C} : e^{-\chi_1 2^{1-r}T} \leq \Big|\dfrac{\mu}{\mu_l(k)}\Big| \leq e^{\chi_1 2^{1-r}T}\Big\}$, яку видно з початку координат під кутом $\chi_1 2^{2-r}T$ (див. рис.2).

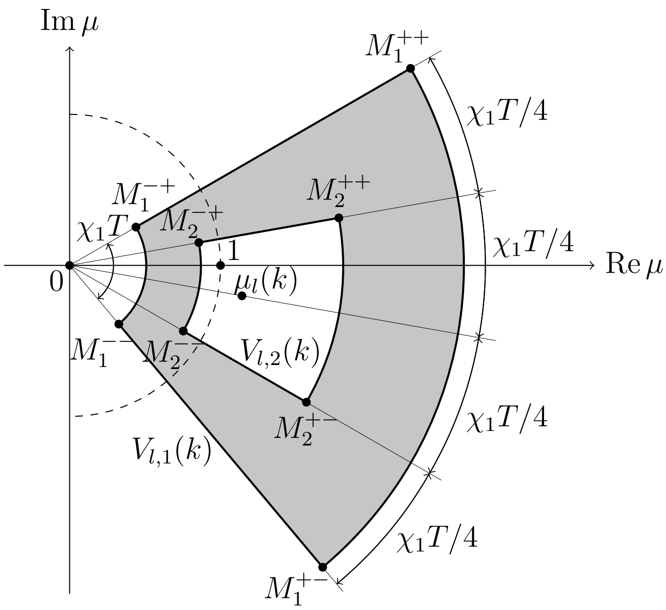

Рис. 2. Образи квадратів з рис.1 при відображенні $\lambda \to e^{\tilde{k}\lambda T}$.

Площа (міра) множини $V_{l,1}(k)$, яку назвемо винятковою множиною для заданого k, обчислюється за формулою

$$\operatorname{meas} V_{l,1}(k) = \frac{2\chi_1 T}{2\pi}\big(\pi|\mu_l(k)|^2 e^{2\chi_1 T} - \pi|\mu_l(k)|^2 e^{-2\chi_1 T}\big) = \chi_1 T|\mu_l(k)|^2\big(e^{2\chi_1 T} - e^{-2\chi_1 T}\big).$$

Оскільки $e^{2\chi_1 T} < 2$ і $\dfrac{e^{y_2\chi_1 T} - e^{y_1\chi_1 T}}{y_2 - y_1} = \chi_1 T e^{y_3\chi_1 T} \le \chi_1 T e^{y_2\chi_1 T}$, де $y_3 \in (y_1; y_2)$, то

$$\operatorname{meas} V_{l,1}(k) = 4\chi_1 T|\mu_l(k)|^2 \frac{e^{2\chi_1 T} - e^{-2\chi_1 T}}{4} \le$$
$$\le 4\big(\chi_1 T|\mu_l(k)|\big)^2 e^{2\chi_1 T} \le 4(2\chi_1 TM)^2 e^{2\chi_1 T} < 32(\chi_1 TM)^2.$$

Об'єднаємо виняткові множини $V_{l,1}(k)$ в одну виняткову множину

$$V_\varepsilon = \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^p;\\ |\mu_l(k)|\le 2M}} \bigcup_{l=1}^{n} V_{l,1}(k)$$

і знайдемо оцінку її міри:

$$\operatorname{meas} V_\varepsilon = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^p;\\ |\mu_l(k)|\le 2M}} \sum_{l=1}^{n} \operatorname{meas} V_{l,1}(k) \le 32(TM)^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \chi_1^2. \tag{19}$$

Враховуючи позначення χ_1 та χ, отримуємо звідси нерівність

$$\operatorname{meas} V_\varepsilon \le 32nT^2\zeta(2\eta_2)\chi^2\varepsilon M^2 = \varepsilon\pi M^2 = \varepsilon \operatorname{meas} \mathcal{O}_M.$$

Параметр μ вважатимемо елементом множини $\mathcal{O}_M \setminus V_\varepsilon$. Враховуючи формулу (19), для міри множини $\mathcal{O}_M \setminus V_\varepsilon$ запишемо наступну оцінку:

$$\operatorname{meas}(\mathcal{O}_M \setminus V_\varepsilon) \ge (1-\varepsilon)\operatorname{meas} \mathcal{O}_M.$$

Теорема 4. *Якщо* $\eta_2 > p/2$, *то для всіх* $\mu \in \mathcal{O}_M \backslash V_\varepsilon$ *функція* $\rho(\lambda, t)$ *в області* $V_l(k) \times [0, T]$ *має оцінку зверху*

$$|\rho(\lambda, t)| \le \frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}} \tilde{k}^{-\eta_2}, \tag{20}$$

де $\theta = 8 \max\{1, 1/|\mu|\} \sqrt{2\pi n \zeta(2\eta_2)} > 20$.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок $|\mu_l(k)| \ge 2M$. У кожному квадраті $V_l(k)$ виконуються нерівності

$$|\mu_l(k)| e^{-\chi_1 T/2} \le |\mu(k)| \le |\mu_l(k)| e^{\chi_1 T/2},$$

де $e^{2\chi_1 T} = e^{2\sqrt{\varepsilon}\chi T \tilde{k}^{-\eta_2}} < e^{\tilde{k}^{-\eta_2} \ln 2} = 2^{\tilde{k}^{-\eta_2}} \le 2$, тому

$$3M/2 < 2^{3/4} M \le 2^{-1/4} |\mu_l(k)| \le |\mu(k)| \le 2^{1/4} |\mu_l(k)|.$$

Далі отримуємо

$$|\rho(\lambda, t)| = \Big| \frac{e^{\tilde{k}\lambda(k) T \frac{t}{T}}}{\mu - \mu(k)} \Big| = \frac{|\mu(k)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu - \mu(k)|} = \frac{|\mu(k)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu(k)| |\mu/\mu(k) - 1|} =$$
$$= \frac{|\mu(k)|^{\frac{t}{T} - 1}}{|\mu/\mu(k) - 1|} \le 3 \max\Big\{1, \frac{1}{|\mu(k)|}\Big\} \le \max\Big\{3, \frac{3}{|\mu(k)|}\Big\} < \max\Big\{3, \frac{2}{M}\Big\},$$

а також, враховуючи, що $\dfrac{\tilde{k}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}} > 1$,

$$|\rho(\lambda, t)| < \frac{\tilde{k}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}} \max\Big\{3, \frac{2}{M}\Big\}. \tag{21}$$

Розглянемо випадок $|\mu_l(k)| < 2M$, тоді для числа $\mu(k)$ маємо три можливості: $|\mu(k)| \le \dfrac{|\mu|}{2}$, $|\mu(k)| \ge 2|\mu|$ та $\dfrac{|\mu|}{2} < |\mu(k)| < 2|\mu|$.

Нехай $|\mu(k)| \le \dfrac{|\mu|}{2}$, тоді $|\mu - \mu(k)| \ge \dfrac{|\mu|}{2}$ і

$$|\rho(\lambda, t)| = \frac{|\mu(k)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu - \mu(k)|} \le \frac{|\mu(k)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu|/2} = \frac{2|\mu(k)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu|} \le$$
$$\le \frac{2}{|\mu|} \max\{1, |\mu(k)|\} \le \frac{2}{|\mu|} \max\Big\{1, \frac{|\mu|}{2}\Big\} = \max\Big\{1, \frac{2}{|\mu|}\Big\},$$

а також

$$|\rho(\lambda, t)| \le \frac{\tilde{k}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}} \max\Big\{1, \frac{2}{|\mu|}\Big\}. \tag{22}$$

Нехай $|\mu(k)| \ge 2|\mu|$, тоді $|\mu - \mu(k)| = |\mu(k)| \Big| \dfrac{\mu}{\mu(k)} - 1 \Big| \ge \dfrac{|\mu(k)|}{2}$ і

$$|\rho(\lambda, t)| = \frac{|\mu(k)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu - \mu(k)|} \le \frac{|\mu(k)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu(k)|/2} = 2|\mu(k)|^{\frac{t}{T} - 1} = 2|\mu(k)|^{\frac{t-T}{T}} \le$$
$$\le 2 \max\Big\{1, \frac{1}{|\mu(k)|}\Big\} = \max\Big\{2, \frac{2}{|\mu(k)|}\Big\} \le \max\Big\{2, \frac{2}{2|\mu|}\Big\} = \max\Big\{2, \frac{1}{|\mu|}\Big\},$$

а отже,

$$|\rho(\lambda,t)| \le \frac{\tilde{k}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}} \max\left\{2, \frac{1}{|\mu|}\right\}. \tag{23}$$

Розглянемо випадок $\frac{|\mu|}{2} < |\mu(k)| < 2|\mu|$. Знаменник $|\mu-\mu(k)|$ не менший, ніж $\min|z_1 - z_2|$, де z_1 і z_2 належать границям областей $V_{l,1}(k)$ і $V_{l,2}(k)$ відповідно. Даний мінімум досягається, якщо $z_2 = e^{\tilde{k}(\lambda_l(k)+(i+1)\chi_1/2)T}$, а z_1 — проекція z_2 на промінь $z = \arg\lambda_l(k) - \chi_1 T$ і дорівнює $|\mu_l(k)|e^{-\chi_1 T/2}\sin(\chi_1 T/2)$. Оскільки справджуються наступні оцінки $\chi_1 T/2 < \ln 2/4 < 1/4 < \pi/4$ і $\sin x > 2\sqrt{2}x/\pi$ при $x \in [0,\pi/4]$, то $\sin\chi_1 T/2 \ge 2\sqrt{2}\chi_1 T/2\pi = \sqrt{2}\chi_1 T/\pi$. Тому з $|\mu_l(k)| \ge |\mu(k)|e^{-\chi_1 T/2}$ отримаємо $|\mu–\mu(k)| \ge |\mu_l(k)|e^{-\chi_1 T/2}\sin(\chi_1 T/2) \ge |\mu(k)|e^{-\chi_1 T}\sqrt{2}\chi_1 T/\pi > |\mu|\chi_1 T/2\pi$, звідки випливає

$$|\rho(\lambda,t)| = \frac{|\mu(k)|^{\frac{t}{T}}}{|\mu-\mu(k)|} \le \frac{\max\{1,|\mu(k)|\}}{|\mu-\mu(k)|} < \frac{\max\{1,2|\mu|\}}{|\mu-\mu(k)|} \le \frac{2\pi\max\{1,2|\mu|\}}{|\mu|\chi_1 T} \le$$

$$\le \frac{2\pi}{\chi_1 T}\max\left\{\frac{1}{|\mu|},2\right\} = \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon}\chi\tilde{k}^{-\eta_2}T}\max\left\{2,\frac{1}{|\mu|}\right\} = \frac{2\pi\tilde{k}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}\chi T}\max\left\{2,\frac{1}{|\mu|}\right\} \le$$

$$\le \frac{\tilde{k}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}} 8\sqrt{2n\pi\zeta(2\eta_2)}\max\left\{2,\frac{1}{|\mu|}\right\}. \tag{24}$$

Праві частини у формулах (21)–(24) оцінюються числом $\frac{\theta\tilde{k}^{\eta_2}}{\sqrt{\varepsilon}}$. Таким чином, нерівність (20) виконується для всіх $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus V_\varepsilon$.

Теорему доведено.

Оскільки $\lambda_l(k) \in V_l(k)$ і $\left|\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\right| = |\rho(\lambda_l(k),t)|$, то оцінка (14) виконується для всіх $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus V_\varepsilon$.

Сформулюємо загальну теорему існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$.

Теорема 5. *Нехай задача* (1), (2) *має єдиний розв'язок у просторі* $\mathbf{W}'$, *тобто виконуються умови теореми 1,* $\mu \in \mathcal{O}_M \backslash V_\varepsilon$. *Тоді у разі* $\varphi_0 \in \mathbf{H}_\psi(\mathcal{S}^p)$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{\psi-1}(\mathcal{S}^p)$, $\ldots$, $\varphi_{n-1} \in \mathbf{H}_{\psi-n+1}(\mathcal{S}^p)$, *де* $\psi > q + pn/2$, *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{2p}$*) векторів* $(a_{0,n,0,\ldots,0},\ldots,a_{0,0,\ldots,n}) \in \mathcal{O}_A^p$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$, *який неперервно залежить від правих частин умов* (2).

Доведення. З теореми 1 випливає існування функцій u_k для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. За теоремою 3 для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2p}$) векторів $(a_{0,n,0,\ldots,0},\ldots,a_{0,0,\ldots,n})$ з множини $\mathcal{O}_A^p$ виконується оцінка (13) для $\eta_1 > p(n-1)/2$. Згідно з теоремою 4 для довільного $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus V_\varepsilon$ виконується оцінка (14) для $\eta_2 > p/2$. Таким чином, з теореми 2 випливає як існування розв'язку задачі (1), (2) з простору $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$, так і його неперервна залежність від функцій $\varphi_0 \in \mathbf{H}_\psi(\mathcal{S}^p)$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{\psi-1}(\mathcal{S}^p)$, $\ldots$, $\varphi_{n-1} \in \mathbf{H}_{\psi-n+1}(\mathcal{S}^p)$ для $\psi > q + pn/2$.

Теорему доведено.

5. Висновки. У роботі розглянуто нелокальну крайову задачу для рівняння з частинними похідними з оператором $B = (B_1, B_2, \ldots, B_p)$, де $B_j \equiv z_j\frac{\partial}{\partial z_j}$,

$j = 1, \ldots, p$, який діє на функцію комплексних змінних. Введено шкали функціональних просторів $\{H_q(\mathcal{S}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$ і $\{H^n_q(\mathcal{D}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$. Розглядувана задача є некоректною за Адамаром і її роз'язність залежить від малих знаменників, які виникають в ряді, що зображає розв'язок даної задачі. Для розв'язання проблеми малих знаменників використано метричний підхід, який дав змогу отримати оцінки знизу для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених з коефіцієнтів рівняння та крайових умов. Встановлено достатні умови існування та необхідні і достатні умови єдиності розв'язку задачі у просторі $H^n_q(\mathcal{D}^p)$.

1. *Гой Т.П., Пташник Б.Й.* Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1997. – 49, №2. – С. 186–195.
2. *Задорожна Н.М., Пташник Б.Й.* Нелокальна крайова задача для параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1995. – 47, №7. – С. 915–921.
3. *Пташник Б.Й.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наукова думка, 1984. – 264 с.
4. *Дубинський Ю.А.* Задача Коши в комплексной области. – М.: Издательство МЭИ, 1996. – 180 с.
5. *Ільків В.С., Страп Н.І., Волянська І.І.* Нелокальна крайова задача для рівняння з оператором диференціювання $z\partial/\partial z$ у комплексній області // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2012. – 10. – С. 15–26.
6. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
7. *Ван-дер-Варден Б.Л.* Алгебра. – М.: Мир, 1976. – 624 с.
8. *Берник В.И., Пташник Б.Й., Салыга Б.О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – 13, №4. – С. 637–645.
9. *Ільків В.С., Магеровська Т.В.* Про константу в лемі Пяртлі. // Вісник Нац. університету "Львівська Політехніка". Фізико-математичні науки. – 2007. – №601. – С. 12–17.
10. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. – К.: Наукова думка, 2002. – 416 с.
11. *Ільків В.С.* Розв'язність нелокальної задачі для систем рівнянь з частинними похідними зі зсувами аргументів. // Науковий вісник Ужгородського універсистету. – 2010. – Вип. 4. – С. 72–85.

Одержано 28.04.2013