

УДК 517.9

Г. Я. Семчишин (Ужгородський нац. ун-т)

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

We obtain necessary and sufficient conditions for existence of solution of initial value problem for a degenerate system of differential equations.

Одержано необхідні та достатні умови існування розв'язку задачі Коші для вироджених систем диференціальних рівнянь.

Під час розв'язання різноманітних задач, що виникають в таких прикладних галузях, як математична економіка, робототехніка, обробка цифрових зображень, теорія керування, теорія електронних схем та електричних кіл, радіофізика, хімічна та біологічна кінетики тощо [1, 2], дослідники стикаються з виродженими системами диференціальних рівнянь. Такі системи розглядаються як українськими [3, 4] та російськими [6, 7] вченими, так і закордонними [8, 9].

У даній роботі досліджуються вироджені системи диференціальних рівнянь у випадку, коли при похідній шуканої функції знаходиться блочно-діагональна матриця, одним з блоків якої є нільпотентний блок Жордана. Для задачі Коші для таких вироджених систем одержано необхідні та достатні умови існування розв'язку.

1. Постановка задачі. Розглянемо для виродженої системи диференціальних рівнянь

$$B_0(t) \frac{dz}{dt} = A_0(t)z(t) + f(t), \quad t \in [a, b], \quad (1)$$

задачу Коші з початковою умовою

$$z(t_0) = z_0, \quad t_0 \in [a, b], \quad (2)$$

де $\text{rank} B_0(t) = n + m - 1 \quad \forall t \in [a, b]$, $A_0(t)$, $B_0(t)$ – $((n + m) \times (n + m))$ -вимірні матриці, J – $(m \times m)$ -вимірна стала матриця, $f(t)$ – $(n + m)$ -вимірний вектор-функція, які мають наступну структуру:

$$B_0(t) = \begin{bmatrix} B_1(t) & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}, \quad A_0(t) = \begin{bmatrix} A_1(t) & 0 \\ 0 & A_2(t) \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} f^{(1)}(t) \\ f^{(2)}(t) \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$A_1(t)$, $B_1(t)$ – $(n \times n)$ -вимірні, $A_2(t)$ – $(m \times m)$ -вимірні матриці, компоненти яких є дійсними неперервними на $[a, b]$ функціями: $A_1(t), A_2(t), B_1(t) \in C[a, b]$; $\det B_1(t) \neq 0$; $f^{(1)}(t)$ – n -вимірний, $f^{(2)}(t)$ – m -вимірний вектор-функції із простору $C[a, b]$.

Під розв'язком задачі Коші (1),(2) будемо розуміти неперервно диференційовну на $[a, b]$ $(n + m)$ -вимірну вектор-функцію

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix},$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, яка задовольняє систему (1) та початкову умову (2).

У просторі неперервно диференційованих $(n+m)$ -вимірних вектор-функцій $C^1[a, b]$ розглянемо оператор L та спряжений до нього оператор L^\top :

$$L(t) = A_0(t) - B_0(t) \frac{d}{dt}, \quad L^\top(t) = A_0^\top(t) + \frac{d}{dt} B_0^\top(t).$$

2. Структура загального розв'язку вироджених систем диференціальних рівнянь. Враховуючи структуру матриць $A_0(t)$, $B_0(t)$ та вектор-функції $f(t)$, вироджена система диференціальних рівнянь (1) розщеплюється на дві незалежні одна від одної системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = B_1^{-1}(t)A_1(t)x(t) + B_1^{-1}(t)f^{(1)}(t); \quad (3)$$

$$J \frac{dy}{dt} = A_2(t)y(t) + f^{(2)}(t). \quad (4)$$

Загальний розв'язок невиродженої диференціальної системи (3) має вигляд

$$x(t) = X(t)\bar{c} + \tilde{x}(t), \quad (5)$$

де $X(t)$ – $(n \times n)$ -вимірна фундаментальна матриця відповідної (3) однорідної системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = B_1^{-1}(t)A_1(t)x(t), \quad (6)$$

а $X(t, s)$, $X(s, s) = E_n$ – матрицант системи (6), $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ – вектор довільних сталих, $\tilde{x}(t)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідної системи рівняння (3).

Представимо матрицю $A_2(t)$ наступним чином

$$A_2(t) = \begin{bmatrix} D_1(t) & D_2(t) \\ a_{m,1}^{(2)}(t) & D_3(t) \end{bmatrix},$$

де $D_1(t)$ – $((m-1) \times 1)$ -вимірна, $D_2(t)$ – $((m-1) \times (m-1))$ -вимірна, $D_3(t)$ – $(1 \times (m-1))$ -вимірна матриці. Нехай

$$y(t) = \text{col}[y_1(t), v(t)], \quad f^{(2)}(t) = \text{col}[p(t), f_m^{(2)}(t)],$$

де $v(t) = \text{col}(y_2(t), \dots, y_m(t))$, $p(t) = \text{col}(f_1^{(2)}(t), \dots, f_{m-1}^{(2)}(t))$ – $(m-1)$ -вимірні вектор-функції. Тоді вироджену систему (4) можна записати наступним чином

$$\frac{dv}{dt} = D_1(t)y_1(t) + D_2(t)v(t) + p(t), \quad (7)$$

$$0 = a_{m,1}^{(2)}(t)y_1(t) + D_3(t)v(t) + f_m^{(2)}(t), \quad (8)$$

де (7) – це $(m-1)$ -вимірна система звичайних диференціальних рівнянь, (8) – алгебраїчне рівняння.

Структура розв'язку виродженої системи диференціальних рівнянь (1) залежить від значення $a_{m,1}^{(2)}(t)$. Розглянемо випадок, коли $a_{m,1}^{(2)}(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$. Виразимо $y_1(t)$ з (8)

$$y_1(t) = -\frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(t)} (D_3(t)v(t) + f_m^{(2)}(t))$$

і підставимо його в систему (7):

$$\frac{dv}{dt} = \left(D_2(t) - \frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(t)} D_1(t) D_3(t) \right) v(t) + \left(J_1 - \frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(t)} D_1(t) J_2 \right) f^{(2)}(t), \quad (9)$$

де $J_1 - ((m-1) \times m)$ -вимірний матриця, $J_2 - m$ -вимірний вектор-рядок вигляду

$$J_1 = [E_{m-1}, 0_{m-1,1}], \quad J_2 = [0_{1,m-1}, 1],$$

$E_{m-1} - ((m-1) \times (m-1))$ -вимірний одинична матриця, а через $0_{i,j}$ будемо позначати $(i \times j)$ -вимірну нульову матрицю.

Загальний розв'язок системи рівнянь (9) має вигляд

$$v(t) = V(t)\tilde{c} + \tilde{v}(t), \quad (10)$$

де $V(t) - ((m-1) \times (m-1))$ -вимірний фундаментальна матриця відповідної (9) однорідної системи рівнянь

$$\frac{dv}{dt} = \left(D_2(t) - \frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(t)} D_1(t) D_3(t) \right) v(t), \quad (11)$$

а $V(t, s), V(s, s) = E_{m-1}$ - матрицант системи (11), $\tilde{c} \in R^{m-1}$ - вектор довільних сталих, $\tilde{v}(t)$ - деякий частинний розв'язок неоднорідної системи рівняння (9).

Таким чином, можемо записати:

$$y_1(t) = -\frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(t)} D_3(t) V(t) \tilde{c} - \frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(t)} D_3(t) \tilde{v}(t) - \frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(t)} f_m^{(2)}(t). \quad (12)$$

Об'єднуючи (10) і (12) одержимо загальний розв'язок виродженої системи диференціальних рівнянь (4):

$$y(t) = Y(t)\tilde{c} + K(t)\tilde{v}(t) + W_1(t)f^{(2)}(t), \quad (13)$$

де $Y(t) - (m \times (m-1))$ -вимірний матриця, яка складається з $m-1$ лінійно незалежних розв'язків відповідної (4) однорідної виродженої системи: $Y(t) = K(t)V(t)$; $K(t) - (m \times (m-1))$ -вимірний, $W_1(t) - (m \times m)$ -вимірний матриці вигляду

$$K(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(t)} D_3(t) \\ E_{m-1} \end{bmatrix}, \quad W_1(t) = \begin{bmatrix} 0_{1,m-1} & -\frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(t)} \\ 0_{m-1,m-1} & 0_{m-1,1} \end{bmatrix}.$$

Таким чином, враховуючи структуру розв'язків $x(t)$ і $y(t)$ вигляду (5) і (13) відповідно, загальний розв'язок виродженої системи диференціальних рівнянь (1) можемо записати у вигляді

$$z(t) = \begin{bmatrix} X(t) & 0 \\ 0 & Y(t) \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ K(t)\tilde{v}(t) + W_1(t)f^{(2)}(t) \end{bmatrix},$$

або

$$z(t) = Z(t)c + \tilde{z}(t), \quad (14)$$

де $Z(t) - ((n + m) \times (n + m - 1))$ -вимірна блочно-діагональна матриця, яка складається з $n + m - 1$ лінійно-незалежних розв'язків відповідної (1) однорідної виродженої системи

$$B_0(t) \frac{dz}{dt} = A_0(t)z(t), \quad t \in [a, b], \quad (15)$$

$c \in \mathbb{R}^{n+m-1}$, $c = \text{col}(\bar{c}, \tilde{c})$ – вектор довільних сталих, $\tilde{z}(t)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідної виродженої системи рівняння (1).

Теорема 1. *Нехай для виродженої системи диференціальних рівнянь (1) виконується умова: $a_{m,1}^{(2)}(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$. Тоді вироджена система диференціальних рівнянь (1) має $(n+m-1)$ -параметричну сім'ю розв'язків вигляду (14).*

Зауваження 1. *Якщо $\text{rank} B_0(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$, то формула (14) співпадає з формулою загального розв'язку звичайної системи диференціальних рівнянь. В цьому випадку, як відомо, частинний розв'язок $\tilde{z}(t)$ неоднорідної системи можна знайти методом варіації довільних сталих, виходячи з загального розв'язку відповідної однорідної системи.*

Для знаходження частинного розв'язку $\tilde{z}(t)$ виродженої системи диференціальних рівнянь (1) застосуємо метод запропонований в [3]. Цей метод є деякою модифікацією методу варіації довільних сталих.

3. Спряжені системи диференціальних рівнянь. Поряд із однорідною виродженою системою (15) розглянемо відповідну їй спряжену систему

$$\frac{d}{dt} (B_0^\top(t)\bar{z}(t)) = -A_0^\top(t)\bar{z}(t), \quad t \in [a, b]. \quad (16)$$

Загальний розв'язок цієї системи має таку ж структуру, що й загальний розв'язок однорідної виродженої системи (15), а саме:

$$\bar{z}(t) = \bar{Z}(t)d,$$

де $\bar{Z}(t) - ((n+m) \times (n+m-1))$ -вимірна матриця, яка складається з $(n+m-1)$ лінійно-незалежних розв'язків однорідної виродженої системи (16) і має наступну блочно-діагональну структуру:

$$\bar{Z}(t) = \begin{bmatrix} \bar{X}(t) & 0 \\ 0 & \bar{Y}(t) \end{bmatrix},$$

$\bar{X}(t) - (n \times n)$ -вимірна фундаментальна матриця системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt} (B_1^\top(t)\bar{x}(t)) = -A_1^\top(t)\bar{x}(t),$$

$\bar{X}(t, s)$, $\bar{X}(s, s) = E_n$ – матрицант цієї системи, $\bar{Y}(t) - (m \times (m-1))$ -вимірна матриця, яка складається з $m-1$ лінійно-незалежних розв'язків наступної однорідної системи рівнянь

$$J^\top \frac{d\bar{y}}{dt} = -A_2^\top(t)\bar{y}(t),$$

причому $\bar{Y}(t) = K_1(t)U(t)$, $K_1(t) - (m \times (m - 1))$ -вимірна матриця вигляду

$$K_1(t) = \begin{bmatrix} E_{m-1} \\ -\frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(t)} D_1^\top(t) \end{bmatrix},$$

$U(t) - ((m-1) \times (m-1))$ -вимірна фундаментальна матриця наступної однорідної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{du}{dt} = \left(-D_2^\top(t) + \frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(t)} D_3^\top(t) D_1^\top(t) \right) u(t),$$

$\bar{U}(t, s)$, $\bar{U}(s, s) = E_{m-1}$ - матрицант цієї системи.

Залежність між розв'язками виродженої системи (15) та розв'язками спряженої до неї системи (16), встановлює наступна лема.

Лема 1. Нехай $z(t)$ - розв'язок системи (15), а $\bar{z}(t)$ - розв'язок системи (16). Тоді виконується рівність

$$\langle B_0(t)z(t), \bar{z}(t) \rangle = \text{const} \quad \forall t \in [a, b].$$

Доведення. Оскільки $B_0(t) \frac{dz}{dt} = A_0(t)z(t)$ і $\frac{d}{dt} (B_0^\top(t)\bar{z}(t)) = -A_0^\top(t)\bar{z}(t)$, то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle B_0(t)z(t), \bar{z}(t) \rangle &= \frac{d}{dt} \langle z(t), B_0^\top(t)\bar{z}(t) \rangle = \left\langle \frac{dz(t)}{dt}, B_0^\top(t)\bar{z}(t) \right\rangle + \left\langle z(t), \frac{d}{dt} (B_0^\top(t)\bar{z}(t)) \right\rangle = \\ &= \left\langle B_0(t) \frac{dz(t)}{dt}, \bar{z}(t) \right\rangle + \left\langle z(t), \frac{d}{dt} (B_0^\top(t)\bar{z}(t)) \right\rangle = \langle A_0(t)z(t), \bar{z}(t) \rangle + \langle z(t), -A_0^\top(t)\bar{z}(t) \rangle = 0, \end{aligned}$$

звідки і випливає твердження лема.

Означення 1. Матриці $Z(t)$ та $\bar{Z}(t)$, складені з $n + m - 1$ лінійно незалежних розв'язків систем (15) і (16) відповідно, називатимемо фундаментальними матрицями цих систем.

Лема 2. Фундаментальні матриці $Z(t)$ і $\bar{Z}(t)$ відповідних однорідних вироджених систем (15) і (16) задовольняють співвідношення

$$\bar{Z}^\top(t) B_0(t) Z(t) = C, \tag{17}$$

де C - невироджена квадратна $(n + m - 1)$ -вимірна стала матриця.

Доведення. Сталість матриці C випливає з попередньої лема. Покажемо, що C є неособливою матрицею. Врахувавши структуру фундаментальних матриць $Z(t)$ і $\bar{Z}(t)$ та матриці $B_0(t)$, одержимо

$$\begin{aligned} \bar{Z}^\top(t) B_0(t) Z(t) &= \begin{bmatrix} \bar{X}^\top(t) & 0 \\ 0 & \bar{Y}^\top(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1(t) & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) & 0 \\ 0 & Y(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \bar{X}^\top(t) B_1(t) X(t) & 0 \\ 0 & \bar{Y}^\top(t) J Y(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Звідси $\det \bar{Z}^\top(t)B_0(t)Z(t) = \det \bar{X}^\top(t)B_1(t)X(t) \det \bar{Y}^\top(t)JY(t)$. Очевидно, що $\det \bar{X}^\top(t)B_1(t)X(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$. Крім того, взявши до уваги вигляд матриць $Y(t)$ та $\bar{Y}^\top(t)$, матимемо

$$\begin{aligned} \bar{Y}^\top(t)JY(t) &= (K_1(t)U(t))^\top JK(t)V(t) = U^\top(t)K_1^\top(t)JK(t)V(t) = \\ &= U^\top(t) \left[E_{m-1}, \frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(t)} D_1(t) \right] \begin{bmatrix} 0 & E_{m-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(t)} D_3(t) \\ E_{m-1} \end{bmatrix} V(t) = U^\top(t)V(t). \end{aligned}$$

Оскільки $\det U^\top(t) \neq 0$ і $\det V(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$, то й $\det \bar{Y}^\top(t)JY(t) \neq 0$. Лема доведена.

Виходячи з (17), фундаментальні матриці $Z(t)$ і $\bar{Z}(t)$ систем (15) і (16) завжди можна визначити так, щоб виконувалась рівність

$$\bar{Z}^\top(t)B_0(t)Z(t) = E_{n+m-1}, \quad (18)$$

крім того

$$\bar{X}^\top(t)B_1(t)X(t) = E_n, \quad \bar{Y}^\top(t)JY(t) = E_{m-1}.$$

4. Побудова розв'язків вироджених лінійних неоднорідних систем диференціальних рівнянь. Перейдемо до безпосередньої побудови загально-го розв'язку лінійної неоднорідної виродженої системи (1).

Позначимо через Φ і Ψ – базиси ядра $Ker(B_0(t))$ і ядра $Ker(B_0^\top(t))$ [10] відповідно:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_1 \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_1 \end{bmatrix},$$

де Φ_1 і Ψ_1 – базиси ядра $Ker(J)$ і ядра $Ker(J^\top)$:

$$\Phi_1 = col(1, 0, \dots, 0)^\top, \quad \Psi_1 = col(0, \dots, 0, 1)^\top.$$

Теорема 2. *Нехай для виродженої системи диференціальних рівнянь (1) виконується умова: $a_{m,1}^{(2)}(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$. Крім того, знайдено такі фундаментальні матриці $Z(t)$, $\bar{Z}(t)$ однорідної виродженої системи (15) та відповідної спряженої системи (16), що виконується умова (18). Тоді загальний розв'язок лінійної неоднорідної виродженої системи (1) визначається згідно формули*

$$z(t) = Z(t)c + Z(t) \int_{t_0}^t \bar{Z}^\top(s)f(s)ds - \Phi R(t)\Psi^\top f(t). \quad (19)$$

Доведення. Побудуємо $((n+m) \times (n+m))$ -вимірні матриці

$$P(t) = [Z(t), \Phi(t)], \quad Q(t) = [\bar{Z}(t), \Psi(t)]^\top,$$

які будуть неособливими для $\forall t \in [a, b]$. Дійсно, враховуючи структуру фундаментальної матриці $Z(t)$ та вигляд матриці $Y(t)$, матимемо

$$P(t) = \begin{bmatrix} X(t) & 0 & 0 \\ 0 & Y(t) & \Phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(t) & 0 & 0 \\ 0 & K(t)V(t) & \Phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(t) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(t)} D_3(t)V(t) & 1 \\ 0 & V(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

Звідси $\det P(t) = \det X(t) \det V(t)$, а оскільки $\det X(t) \neq 0$ і $\det V(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$, то маємо, що й $\det P(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$. Аналогічно доводиться неособливість матриці $Q(t)$.

Загальний розв'язок лінійної неоднорідної виродженої системи (1) будемо шукати у вигляді

$$z(t) = P(t)\bar{z}(t). \quad (20)$$

Підставимо (20) у неоднорідну вироджену систему (1) і помножимо одержану рівність зліва на матрицю $Q(t)$. Матимемо

$$Q(t)B_0(t)P(t)\frac{d\bar{z}}{dt} = Q(t)L(t)P(t)\bar{z}(t) + Q(t)f(t). \quad (21)$$

Враховуючи структуру матриць $P(t)$ і $Q(t)$, запишемо наступні матриці у такому вигляді

$$Q(t)B_0(t)P(t) = \begin{bmatrix} \bar{Z}^\top(t)B_0(t)Z(t) & \bar{Z}^\top(t)B_0(t)\Phi \\ \Psi^\top B_0(t)Z(t) & \Psi^\top B_0(t)\Phi \end{bmatrix},$$

$$Q(t)L(t)P(t) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{Z}^\top(t)L(t)\Phi \\ 0 & \Psi^\top L(t)\Phi \end{bmatrix}.$$

Очевидно, що $\bar{Z}^\top(t)B_0(t)\Phi = 0$. Крім того, неважко переконатися в справедливості наступних рівностей

$$\Psi^\top B_0(t)Z(t) = 0, \quad \Psi^\top B_0(t)\Phi = 0,$$

$$\bar{Z}^\top(t)L(t)\Phi = 0.$$

Покажемо, що $\det \Psi^\top L(t)\Phi \neq 0 \forall t \in [a, b]$. Дійсно

$$\begin{aligned} \Psi^\top L(t)\Phi &= \Psi^\top A_0(t)\Phi = [0, \Psi_1^\top] \begin{bmatrix} A_1(t) & 0 \\ 0 & A_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_1 \end{bmatrix} = \\ &= \Psi_1^\top A_2(t)\Phi_1 = a_{m,1}^{(2)}(t) \neq 0. \end{aligned}$$

Помноживши (21) на матрицю $\text{diag}\{E_{n+m-1}, R(t)\}$, де

$$R(t) = [\Psi^\top L(t)\Phi]^{-1},$$

і врахувавши (18), матимемо

$$\begin{bmatrix} E_{n+m-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d\bar{z}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{z}(t) + \begin{bmatrix} \tilde{Z}^\top(t)f(t) \\ R(t)\Psi^\top f(t) \end{bmatrix}.$$

Ця система розпадається таким чином, що ми одержимо $(n+m-1)$ -вимірну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\bar{z}_1}{dt} = \bar{Z}^\top(t)f(t),$$

розв'язком якої є

$$\bar{z}_1(t) = \int_{t_0}^t \bar{Z}^\top(s)f(s)ds + c,$$

де $c - (n + m - 1)$ -вимірний вектор довільних сталих, та рівність

$$\bar{z}_2(t) = -R(t)\Psi^\top f(t).$$

Повернувшись до початкової змінної згідно з (20), одержимо загальний розв'язок виродженої системи (1) вигляду (19). Теорему доведено.

5. Розв'язність задачі Коші для вироджених систем диференціальних рівнянь. Для задачі Коші (1), (2) справедливою є наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай для виродженої системи диференціальних рівнянь (1) виконується умова: $a_{m,1}^{(2)}(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$. Тоді для того, щоб задача Коші (1), (2) мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб вектор z_0 задовольняв умову*

$$\langle A_0(t_0)z_0 + f(t_0), \Psi \rangle = 0. \quad (22)$$

При цьому, розв'язок задачі Коші (1), (2) єдиний і має наступний вигляд

$$z(t) = Z(t)\bar{Z}^\top(t_0)B_0(t_0)z_0 + Z(t) \int_{t_0}^t \bar{Z}^\top(s)f(s)ds - \Phi R(t)\Psi^\top f(t). \quad (23)$$

Доведення. Як показано в [3], умова (22) є необхідною і достатньою умовою існування розв'язку задачі Коші (1), (2).

Покажемо, що якщо умова (22) виконується, то розв'язок задачі Коші (1), (2) єдиний і має вигляд (23). Підставимо загальний розв'язок виродженої системи (1) вигляду (19) в початкову умову (2) і помножимо одержану рівність зліва на $P^{-1}(t_0)$. Врахувавши, що

$$P^{-1}(t_0)Z(t_0) = \text{col}[E_{n+m-1}, 0], \quad P^{-1}(t_0)\Phi = \text{col}[0, 1],$$

одержимо

$$\begin{aligned} [P^{-1}(t_0)z_0]_1 &= c, \\ [P^{-1}(t_0)z_0]_2 + R(t_0)\Psi^\top f(t_0) &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

де $[P^{-1}(t_0)z_0]_1 - (n + m - 1)$ -вимірний вектор, координатами якого є перші $n + m - 1$ координат вектора $P^{-1}(t_0)z_0$, а $[P^{-1}(t_0)z_0]_2 - (n + m)$ координата вектора $P^{-1}(t_0)z_0$. Перша з цих рівностей дає значення $(n + m - 1)$ -вимірного вектора сталих c . А друга рівність еквівалентна умові (22). Дійсно, з доведення теореми 2 випливає, що

$$\begin{aligned} \text{diag}\{E_{n+m-1}, R(t)\}Q(t)B_0(t)P(t) &= \text{diag}\{E_{n+m-1}, 0\}, \\ \text{diag}\{E_{n+m-1}, R(t)\}Q(t)L(t)P(t) &= \text{diag}\{0, 1\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Продиференціюємо першу тотожність. Дістанемо

$$\begin{aligned} &\text{diag}\{E_{n+m-1}, R(t)\}Q(t)B_0(t)P'(t) = \\ &= -\text{diag}\{0, R'(t)\}Q(t)B_0(t)P(t) - \text{diag}\{E_{n+m-1}, R(t)\}(Q(t)B_0(t))'P(t). \end{aligned}$$

Підставимо одержаний вираз в другу тотожність (25), матимемо

$$\begin{aligned} & \text{diag}\{E_{n+m-1}, R(t)\}Q(t)A_0(t)P(t) + \text{diag}\{0, R'(t)\}Q(t)B_0(t)P(t) + \\ & + \text{diag}\{E_{n+m-1}, R(t)\} (Q(t)B_0(t))' P(t) = \text{diag}\{0, 1\}. \end{aligned}$$

Покладемо в останню рівність значення $t = t_0$ і помножимо її справа на $P^{-1}(t_0)z_0$, одержимо

$$\begin{aligned} [P^{-1}(t_0)z_0]_2 &= R(t_0) [Q(t_0)A_0(t_0)z_0]_2 + R'(t_0) [Q(t_0)B_0(t_0)z_0]_2 + \\ & + R(t_0) \left[\frac{d}{dt} (Q(t)B_0(t)) z_0 \right]_2, \end{aligned}$$

звідки, відповідно до структури матриці $Q(t)$, можемо записати

$$[P^{-1}(t_0)z_0]_2 = R(t_0)\Psi^\top A_0(t_0)z_0 + \frac{d}{dt} [R(t_0)\Psi^\top B_0(t_0)] z_0.$$

Підставивши цей вираз в (24), одержимо рівність

$$R(t_0)\Psi^\top A_0(t_0)z_0 + \frac{d}{dt} [R(t_0)\Psi^\top B_0(t_0)] z_0 + R(t_0)\Psi^\top f(t_0) = 0,$$

яка, як неважко переконатися, еквівалентна умові (22). З першої тотожності (25), можемо знайти:

$$[P^{-1}(t_0)z_0]_1 = [Q(t_0)B_0(t_0)z_0]_1 = \bar{Z}^\top(t_0)B_0(t_0)z_0,$$

отже, $c = \bar{Z}^\top(t_0)B_0(t_0)z_0$. Тоді, підставляючи в (19) знайдене значення вектора c , одержимо розв'язок задачі Коші (1), (2) вигляду (23). Теорему доведено.

1. Сенди К. Современные методы анализа электрических систем. — М.: Энергия, 1971.
2. Чуа Л.О., Лин Пен-Мин Машинный анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные методы. — М.: Энергия, 1980. — 640 с.
3. Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — К.: Вища шк., 2000. — 294 с.
4. Бойчук А.А., Шегда Л.М. Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. — 2007.—**10**, №3. — С. 303–312.
5. Бояринцев Ю.И. Методы решения непрерывных и дискретных задач для сингулярных систем уравнений. — М.: Наука, 1996.
6. Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные системы. Методы численного решения и исследования. — Новосибирск: Наука, 1998.
7. Чистяков В.Ф., Щеглова А.А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. — Новосибирск: Наука, 2003. — 320 с.
8. Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. Numerical solution of initial-problems in differential-algebraic equations (classics in applied mathematics; 14). — Philadelphia: SIAM, 1996. — 256 p.
9. Campbell S.L. Singular systems of differential equations. — SanFrancisco, London, Melbourne. Pitman, 1982. — 188 p.
10. Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 294 с.

Одержано 23.03.2013