МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ ВСЕУКРАЇНСЬКИХ ОЛІМПІАД З МАТЕМАТИКИ УЖГОРОДСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

методичні рекомендації для студентів спеціальностей
«Початкова освіта» та «Середня освіта»

УЖГОРОД – 2018

Збірник завдань Всеукраїнських олімпіад з математики Ужгородського національного університету: методичні рекомендації для студентів спеціальностей «Початкова освіта» та «Середня освіта» / М.М. Повідайчик, М.І. Глебена, М.П. Шулла – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2018. – 55 с.

Розробники:

– Повідайчик М.М., к.е.н., доцент кафедри кібернетики і прикладної математики математичного факультету УжНУ;
– Глебена М.І., к.ф.-м.н., доцент кафедри системного аналізу і теорії оптимізації математичного факультету УжНУ;
– Шулла М.П., вчитель-методист вищої категорії Берегівської гімназії

Рецензенти:

– Дзямко В.Й., к.п.н., доцент кафедри математики і інформатики Закарпатського угорського інституту ім. Ф. Ракоці ІІ;
– Сігетій І.П., старший викладач кафедри природничо-математичної освіти та інформаційних технологій Закарпатського інституту післядипломної педагогічної освіти

Розглянуто і схвалено науково-методичною комісією
математичного факультету УжНУ.
Протокол №9 від 14.05.2018 р.

Рекомендовано до друку Вченою радою
математичного факультету УжНУ.
Протокол №10 від 17.05.2018 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

У збірнику приведено завдання з математики, які пропонувалися учням старших класів загальноосвітніх навчальних закладів у рамках проведення заочних профорієнтаційних конкурсів, що організовував математичний факультет ДВНЗ «Ужгородський національний університет» у 2015-16 рр., а також завдання з математики Всеукраїнської олімпіади ДВНЗ «Ужгородський національний університет», яка проводиться з 2017 р.

Відповідно до Положення про Всеукраїнські олімпіади ДВНЗ «УжНУ» для професійної орієнтації вступників на основі повної загальної середньої освіти абітурієнтам спеціальностей «Математика», «Середня освіта. Математика», «Системний аналіз» та «Статистика», які прийняли участь у Всеукраїнській олімпіади з математики ДВНЗ «УжНУ», можуть нараховуватись додаткові бали до сертифікату зовнішнього незалежного оцінювання з одного предмету при розрахунку конкурсного балу в обсязі від 1 до 20 балів, але не вище 200 балів за предмет.

Методичні рекомендації розроблені для студентів спеціальностей «Початкова освіта», «Середня освіта. Математика», а також для вчителів та учнів загальноосвітніх навчальних закладів.

УМОВИ ЗАВДАНЬ

Завдання І туру заочного конкурсу, 2015 р.

1. Визначити суму розв'язків рівняння $3|x-3|-2|3-x|=5$.

2. Знайти найменший корінь рівняння $x^3+3x^2-x-3=0$.

3. Обчислити $|x-y|$, якщо $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3. \end{cases}$

4. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $(x^2-16)\sqrt{x-1} \le 0$.

5. Від тривалого зберігання зерно втрачає за перший рік 5% своєї маси, за другий – 2%. Скільки залишиться зерна (у *кг*) через два роки, якщо його початкова маса складала 800 *кг*?

6. Поїзд затримався в дорозі на 12 *хв*, а потім на відстані 60 *км* надолужив згаяний час, збільшивши швидкість на 15 *км/год*. Визначити початкову швидкість поїзда (у *км/год*).

7. Медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, розбиває його на два трикутники з периметрами 16 *см* і 18 *см*. Знайти довжину гіпотенузи трикутника (у *см*).

8. У прямокутну трапецію вписано коло. Точка дотику ділить більшу з бічних сторін трапеції на відрізки 4 *см* і 25 *см*. Знайти площу трапеції (у $см^2$).

9. Одиничний вектор $\vec{e}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}(3;4)$. Обчислити добуток координат вектора $\vec{e}$.

10. Знайти найменше значення параметра a, при якому один із коренів рівняння $x^2+ax+32=0$ у два рази більший за другий.

Завдання ІІ туру заочного конкурсу, 2015 р.

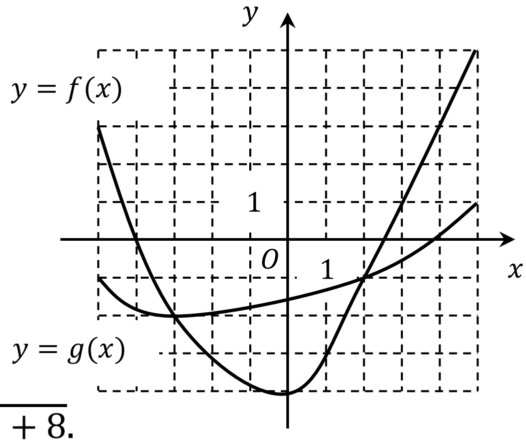
1. У класі кількість хлопців до кількості дівчат відноситься як 3:2. Укажіть число, яким може виражатися загальна кількість учнів у вказаному класі.

А	Б	В	Г	Д
12	21	23	25	32

2. Товар подешевшав на 10%, а потім зріс у ціні на 10%. Як змінилася вартість товару за ці дві переоцінки?

А	Б	В	Г	Д
не змінилася	зросла на 1%	зменшилася на 1%	зросла на 0,1%	зменшилася на 0,1%

3. На рисунку зображено графіки функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$, які визначені на проміжку $x \in [-5; 5]$. Укажіть розв'язок нерівності $f(x) < g(x)$.



А	Б	В	Г	Д
$[-5; -3)$	$(-3; 2)$	$(2; 5]$	$(-2; -1)$	$(-1; 5]$

4. Знайдіть область значень функції $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 8}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$[8; +\infty)$	$[2; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 8)$

5. Обчисліть $\lg 25a + \lg 4b$, якщо $\lg ab = 3$, $a > 0$, $b > 0$.

А	Б	В	Г	Д
5	6	8	13	$\lg 300$

6. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $4^x = \frac{1}{8}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2]$	$(-2; -1]$	$(-1; 1]$	$(1; 2]$	$(2; +\infty)$

7. Вкажіть проекцію точки $A(2; -3; 5)$ на площину yz:

А	Б	В	Г	Д
$(0; -3; 5)$	$(2; 0; 5)$	$(2; -3; 0)$	$(0; -3; 0)$	$(0; 0; 5)$

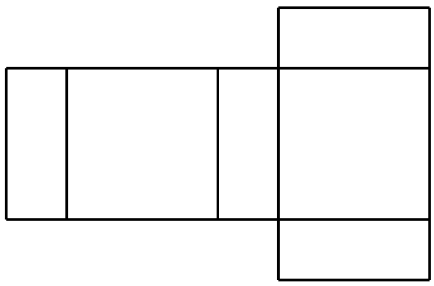
8. Розв'яжіть рівняння $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$-\dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$-\dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

9. У трикутнику ABC кути A і B рівні $50°$ та $70°$ відповідно. Із вершин A і B проведені висоти, які перетинаються в точці O. Знайдіть градусну міру кута AOB.

А	Б	В	Г	Д
$100°$	$105°$	$110°$	$115°$	$120°$

10. На рисунку зображено розгортку поверхні тіла, що складається з двох квадратів і чотирьох однакових прямокутників, довжини сторін яких – 2 *см* і 5 *см*. Обчисліть об'єм цього тіла.



А	Б	В	Г	Д
20 $см^3$	25 $см^3$	50 $см^3$	100 $см^3$	125 $см^3$

11. Знайдіть значення виразу $\frac{22}{5-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\frac{14}{\sqrt{2}-4}$.

12. Обчисліть суму членів нескінченної спадної геометричної прогресії $\{b_n\}$, заданої формулою n-го члена $b_n = 3 \cdot 2^{-n}$.

13. Обчисліть $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = 0{,}6$ та $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

14. Концентрація солі в першому водно-сольовому розчині становить 50%, у другому – 30%. Скільки треба взяти кілограмів першого та другого розчинів, щоб після змішування отримати розчин масою 20 *кг*, концентрація солі в якому становитиме 45%? У відповідь запишіть масу першого розчину (у *кг*).

15. Знайдіть кількість цілих розв'язків рівняння $|x+3|+|x-5|=8$.

16. Розв'яжіть нерівність $\ln(x-2)+\ln(x+3) \leq \ln 14$. У відповідь запишіть суму цілих розв'язків цієї нерівності.

17. Увесь басейн наповнюється водою через першу трубу на 1 *год* швидше, ніж через другу. Через скільки годин буде наповнений увесь басейн через першу трубу, якщо при одночасному відкритті обох труб він наповнюється за 1 *год* 12 *хв*?

18. У коло з діаметром 10 *см* вписаний прямокутник найбільшої площі. Знайдіть площу (у *см*^{2}) цього прямокутника.

19. У трикутній піраміді бічні ребра взаємно перпендикулярні та рівні 2 *см*, 3 *см*, 4 *см*. Обчисліть об'єм піраміди (у *см*^{3}).

20. Знайдіть усі значення параметра a, при яких система $\begin{cases}(x+1)^2+y^2=9,\\(x-a)^2+y^2=4\end{cases}$ має єдиний розв'язок. У відповідь запишіть їхню суму.

Завдання III туру заочного конкурсу, 2015 р.

1. Вкажіть найбільше парне просте число.

А	Б	В	Г	Д
0	2	7	8	інша відповідь

2. У спеціальній пароварці картоплина готується 10 *хв*. Скільки найменше часу необхідно для приготування трьох картоплин, якщо одночасно у пароварці можна розмістити тільки дві картоплини?

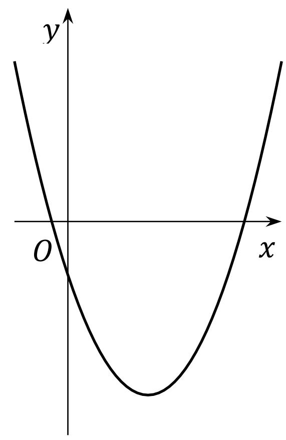
А	Б	В	Г	Д
10 *хв*	12 *хв*	15 *хв*	20 *хв*	30 *хв*

3. Вкажіть вираз, тотожно рівний до виразу x^3-x^2+x-1.

А	Б	В	Г	Д
$(x-1)^3$	$(x-1)(x+1)^2$	$(x+1)(x-1)^2$	$(x^2+1)(x-1)$	$x^2(x-1)$

4. Автомобіль рухався 2 *год* зі швидкістю 80 *км/год* та 3 *год* зі швидкістю 100 *км/год*. Знайдіть середню швидкість автомобіля.

А	Б	В	Г	Д
86 *км/год*	88 *км/год*	90 *км/год*	92 *км/год*	94 *км/год*

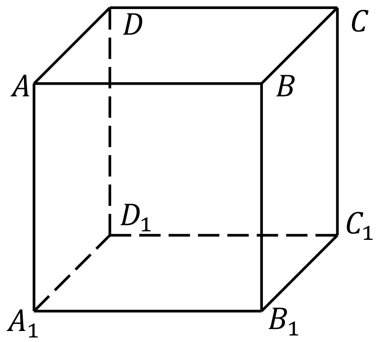


5. За видом графіка функції $y = ax^2 + bx + c$ (див. рисунок) визначте знаки коефіцієнтів a, b, c.

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ c > 0; \end{cases}$	$\begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \\ c > 0; \end{cases}$	$\begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ c < 0; \end{cases}$	$\begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \\ c < 0; \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \\ c > 0. \end{cases}$

6. Серед наведених прямих знайдіть дотичну до кола $x^2 + y^2 + 4y = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$y = 0$	$y = 2$	$y = -2$	$y = 4$	$x = 4$



7. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (див. рисунок) знайдіть кут між векторами $\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{A_1D}$.

А	Б	В	Г	Д
30°	45°	60°	90°	120°

8. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням рівностороннього трикутника навколо своєї сторони, довжина якої дорівнює a *см*.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi a^3}{8}$ $см^3$	$\frac{\pi a^3}{6}$ $см^3$	$\frac{\pi a^3}{4}$ $см^3$	$\frac{\pi a^3}{3}$ $см^3$	$\frac{\pi a^3}{2}$ $см^3$

9. Спростіть вираз $\sin(\arccos a)$, якщо $a \in [-1; 1]$.

А	Б	В	Г	Д
$1 - a^2$	$1 + a^2$	$\pm\sqrt{1 - a^2}$	$\pm\sqrt{1 + a^2}$	$\sqrt{1 - a^2}$

10. При якому a система рівнянь $\begin{cases} ax + 2y = a, \\ 3x + (a+1)y = 3 \end{cases}$ має безліч розв'язків.

А	Б	В	Г	Д
2	−3	−2; 3	2; −3	−3

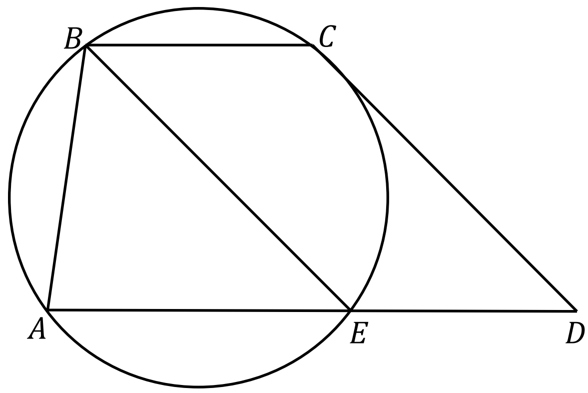
11. Обчисліть $\left(1 - \sqrt{3}\right)\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$.

12. Іван, Петро та Василь збирали гриби. Відомо, що Іван та Петро разом назбирали 25 грибів, Іван та Василь – 28, а Петро та Василь – 27. Скільки всього було зібрано грибів?

13. Числа p, r, s є другим, четвертим та сьомим членами зростаючої арифметичної прогресії. Ці ж числа у тій же послідовності утворюють геометричну прогресію, сума якої рівна 38. Знайдіть знаменник геометричної прогресії.

14. Знайдіть абсцису точки B на осі Ox, при яких ламана ABC має найменшу довжину, якщо $A(1;\ 2), C(2;\ 3)$.

15. Сторони трикутника, одна з яких на 6 *см* більша за другу, утворюють кут 120°, а довжина третьої сторони дорівнює 21 *см*. Знайдіть периметр трикутника (у *см*).



16. Навколо точок A, B, C трапеції $ABCD$ проведене коло, яке перетинає AD у точці E (див. рисунок). Знайдіть радіус кола, якщо $AD = 14$, $AE = 8$, $\angle D = 45^{\circ}$, $BE || CD$.

17. Розв'яжіть нерівність $\frac{9}{81^x} + \frac{17}{27^x} - \frac{2}{9^x} \geq 0$. У відповідь запишіть найбільший розв'язок нерівності.

18. Розв'яжіть нерівність $2^{\sqrt{10x - x^2}} \geq 0{,}5^{x-4}$. У відповіді вкажіть кількість цілих розв'язків.

19. Розв'яжіть рівняння $(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4) = 15$. У відповідь запишіть добуток коренів.

20. Розв'яжіть рівняння $\log_2(\cos 2x) + \log_{\frac{1}{2}}(\cos x - \sin x) = 0$. У відповідь запишіть найменший додатний розв'язок (у *градусах*).

Завдання I туру заочного конкурсу, 2016 р.

1. Скільки цифр має число 20^{16}?

2. У саду ростуть яблуні і вишні у відношенні $3:5$. Скільки всього дерев у саду, якщо число вишень становить 35 штук?

3. У класі третину учнів складали хлопці. Після того, як у цей клас перевели ще одного учня, хлопців стало 37,5% від загальної кількості учнів класу. Знайдіть кількість дівчат у класі.

4. У шаховому турнірі кожний учасник зіграв із суперником 2 партії. Знайдіть кількість учасників турніру, якщо всього було зіграно 90 партій.

5. Знайдіть радіус кола, вписаного у прямокутний трикутник ABC, якщо $\angle C = 90°, \sin \angle A = \frac{12}{13}, AB = 26$.

6. Вершини трикутника знаходяться у точках $A(-1;7)$, $B(5;-1)$, $C(1;1)$. Знайдіть величину внутрішнього кута трикутника (*у градусах*) при вершині C.

7. На меншій основі рівнобічної трапеції побудовано правильний трикутник, висота якого дорівнює висоті трапеції, а площа у 5 разів менша за площу трапеції. Знайдіть кут (*у градусах*) при більшій основі трапеції.

8. Обчисліть добуток коренів рівняння

$$(2x^2 + 3x - 1)^2 - 5 \cdot (2x^2 + 3x + 3) + 24 = 0.$$

9. Розв'яжіть нерівність $|x^2 - 2x - 3| < 4$. У відповідь вкажіть суму цілих розв'язків.

10. Знайдіть кількість значень параметра a, при якому система $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ має 4 розв'язки.

Завдання II туру заочного конкурсу, 2016 р.

1. Знайдіть $[-\pi]$, де $[x]$ – ціла частина числа x.

А	Б	В	Г	Д
-1	-2	-3	-4	-5

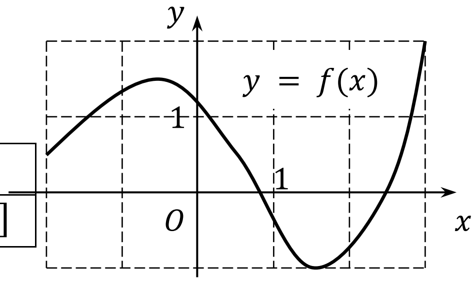
2. Спростіть вираз $\frac{2x+y}{x-y}$, якщо $\frac{x}{y} = 2$.

А	Б	В	Г	Д
3	$3x$	5	$5x$	$-3y$

3. У математичному гуртку приймало участь 10 учнів різних класів, середній вік яких складав 11,8 року. Після того, як у гурток записався ще один учень, середній вік юних математиків зріс до 12 років. Визначте вік нового учасника гуртка.

А	Б	В	Г	Д
10 років	11 років	12 років	13 років	14 років

4. Для функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-2; 3]$ (див. рисунок), вкажіть область значень.



А	Б	В	Г	Д
$[-2; 3]$	$[-1; 1{,}5]$	$[-0{,}5; 1{,}5]$	$[-1; 2]$	$[0{,}5; 1{,}5]$

5. На площині дано точку O та пряму l. Скільки існує різних кіл із центром у т. O, які дотикаються до прямої l?

А	Б	В	Г	Д
жодного	одне	два	одне або жодного	безліч

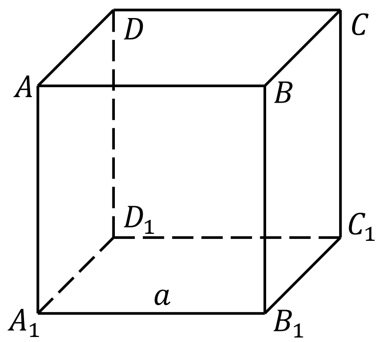
6. Для деякої точки M, яка належить площині трикутника ABC, виконується векторна рівність $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Тоді точка M відносно ΔABC це:

А	Б	В	Г	Д
точка перетину медіан	точка перетину бісектрис	точка перетину висот	центр вписаного кола	центр описаного кола

7. Вкажіть значення параметра k, при якому прямі $y = kx + 3$ та $y = 2x + 5$ перпендикулярні.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$

8. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро рівне a. Знайдіть відстань між прямими AA_1 та B_1D_1.



А	Б	В	Г	Д
a	$a\sqrt{2}$	$a\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$

9. Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x = 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

10. Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{2}} 2x \geq -3$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 4]$	$[0; 4]$	$[4; +\infty)$	$(0; 4]$	$(0; 8]$

11. У арифметичній прогресії сума другого та п'ятого членів рівна 34, а третього та сьомого – 46. Знайдіть різницю прогресії.

12. Для бригади із 4 чоловік нормативний термін виконання певного завдання становить 20 *год*. Який нормативний термін (у *год*) виконання цього ж завдання буде для бригади із 5 чоловік?

13. Обчисліть $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$.

14. Розв'яжіть рівняння $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$. У відповідь запишіть суму дійсних коренів.

15. Розв'яжіть нерівність $2\sqrt{x + 3} - x > 0$. У відповідь запишіть кількість цілих розв'язків.

16. Розв'яжіть рівняння $25^x + 2{,}1 \cdot 10^x - 4^x = 0$.

17. Знайдіть площу трикутника, який утворює з координатними осями дотична до функції $y = \frac{2x-1}{x-1}$, проведена у точці $x_0 = 2$.

18. У коло радіуса $\sqrt{2}$ *см* вписано трикутник, вершини якого поділяють коло на три частини у відношенні $2:5:17$. Знайдіть площу цього трикутника (у $см^2$).

19. У трикутній піраміді бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм піраміди (у *см*³), якщо її основою є прямокутний трикутник із катетами 5 *см* та 12 *см*.

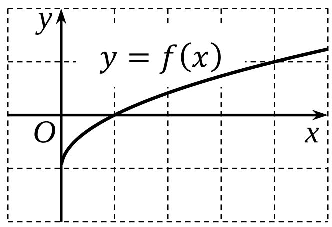
20. Знайдіть значення виразу $\sin 36° + \sin 72° - \frac{1}{2}\operatorname{tg} 72°$.

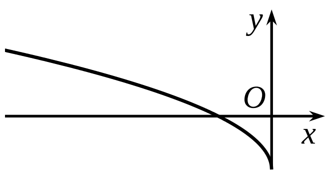
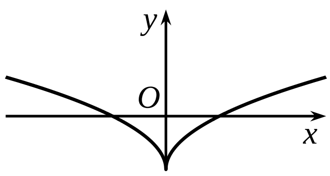
Завдання III туру заочного конкурсу, 2016 р.

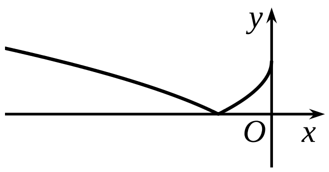
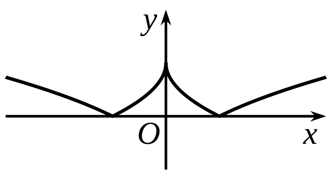
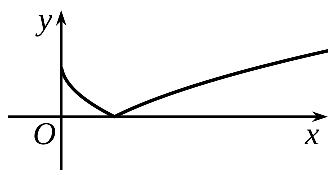
1. Якщо деяке натуральне число при діленні на 3 та на 5 дає остачу 1, то при діленні цього числа на 15 остачею буде:

А	Б	В	Г	Д
1	2	4	7	8

2. Для функції $f(x) = \sqrt{x} - 1$ (див. рисунок) вкажіть ескіз графіка функції $y = f(|x|)$.



А	Б
	

В	Г	Д
		

3. У одній скрині 6 чорних та 8 білих куль, а у другій – 9 чорних та декілька білих. Скільки всього куль у другій скрині, якщо витягнути навмання білу кулю із першої та другої скрині можна із однаковою ймовірністю?

А	Б	В	Г	Д
19	20	21	22	23

4. Вкажіть геометричне місце точок, рівновіддалених від двох різних точок площини.

А	Б	В	Г	Д
точка	пряма	коло	овал	квадрат

5. Знайдіть відстань від точки $A(5; 3)$ до кола $x^2 - 2x - 8 + y^2 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	$\sqrt{2}$	3	$\sqrt{3}$

6. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перетином площин (A_1BD) та (ABC) є пряма:

А	Б	В	Г	Д
AB	A_1B	AD	A_1D	BD

7. Спростіть вираз $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$.

А	Б	В	Г	Д
1	$\frac{1}{2}$	$\cos 2\alpha$	$\cos^2 \alpha$	$\cos^2 2\alpha$

8. Спростіть вираз $\log_4 5 \cdot \log_{25} 8$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	1	$\log_{100} 40$	$\lg 4$

9. Знайдіть похідну функції $f(x) = \sin^2 x$.

А	Б	В	Г	Д
$f'(x) = \sin x$	$f'(x) = 2\sin x$	$f'(x) = \sin 2x$	$f'(x) = \cos x$	$f'(x) = 2\cos x$

10. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2x^2 - x - 3} + (3x^2 + x - 2)^2 \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$[-1; 1{,}5]$	$\left[-1; \frac{2}{3}\right]$	$\{-1\}$	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$

11. Обчисліть суму $\frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \cdots + \frac{1}{21\cdot23} + \frac{1}{23\cdot25}$.

12. Знайдіть натуральне число n, для якого сума $1 + 2 + \cdots + n$ рівна трицифровому числу, кратному 100.

13. Знайдіть найбільший член послідовності $\{a_n\}$, заданої формулою n-го члена $a_n = -2n^2 + 9n + 3$.

14. Розв'яжіть рівняння $(x-1)^4 + (x-3)^4 = 16$. У відповідь запишіть суму дійсних коренів.

15. Обчисліть $3^x + 3^{-x}$, якщо $9^x + 9^{-x} = 34$.

16. Із точки до кола проведено дві дотичні, довжина кожної з яких рівна 10 *см*. Знайдіть радіус кола (у *см*), якщо відстань між точками дотику становить 12 *см*.

17. Центр вписаного у трапецію кола віддалений від кінців її меншої основи на 13 та 15 *см*. Менша основа трапеції дорівнює 14 *см*. Знайдіть площу трапеції (у *см*^{2}).

18. Через точку, що лежить на ребрі двогранного кута мірою 90°, на кожній із його граней проведено по прямій під кутом 45° до ребра двогранного кута. Знайдіть величину кута між проведеними прямими.

19. У скільки разів повна поверхня циліндра більша за площу сфери, вписану у цей циліндр?

20. Знайдіть значення параметра a, при якому рівняння $\frac{(x-2)(x+3)}{x-a} = 2$ має один розв'язок. У відповідь запишіть суму таких значень.

Завдання дистанційного етапу Всеукраїнської олімпіади з математики ДВНЗ «УжНУ», 2017 р.

1. Знайдіть найбільший член послідовності $\{a_n\}$, заданої формулою n-го члена

$$a_n = -2n^2 + 9n + 3.$$

2. Обчисліть суму

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{8\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 10}.$$

3. Знайдіть найбільший розв'язок нерівності

$$\frac{4x+29}{x+5} \leq 5 - x.$$

4. У одній скрині 6 чорних та 8 білих куль, а у другій – 9 чорних та декілька білих. Скільки всього куль у другій скрині, якщо витягнути навмання білу кулю із першої та другої скрині можна із однаковою ймовірністю?

5. Спростіть вираз

$$\sin^4 \alpha + \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha + \cos^4 \alpha.$$

6. Якою буде остача від ділення натурального числа на 15, якщо при діленні цього числа на 3 та на 5 остачею є 1.

7. Знайдіть похідну функції $f(x) = \sin^2 x$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{12}$.

8. Обчисліть значення виразу $3^x + 3^{-x}$, якщо

$$9^x + 9^{-x} = 2.$$

9. Із точки до кола проведено дві дотичні, довжина кожної з яких рівна 10 *см*. Знайдіть радіус кола (у *см*), якщо відстань між точками дотику становить 12 *см*.

10. У правильній трикутній піраміді бічні ребра взаємно перпендикулярні. Обчисліть об'єм піраміди (у *см*^{3}), якщо довжина бічного ребра дорівнює 3 *см*.

Завдання очного етапу Всеукраїнської олімпіади з математики ДВНЗ «УжНУ», 2017 р.

Варіант 1

1. Дано систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + ay = 1, \\ -x + 3y = -5. \end{cases}$$

1) Вкажіть значення параметра a, при якому система не має розв'язку.

2) Розв'яжіть систему рівнянь при $a = 3$.

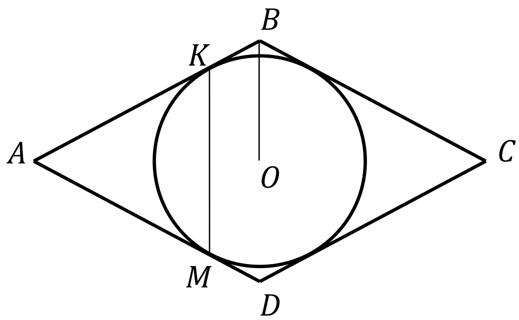
2. Дано нерівність

$$\frac{x-5}{x-1} \leq 2 - \frac{x-3}{x-2}.$$

1) Знайдіть область допустимих значень нерівності.
2) Розв'яжіть нерівність.
3. Дано функцію $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(x+3)$.
1) Розв'яжіть рівняння $f(x) = 2$.
2) Розв'яжіть нерівність $f(x) \leq 2$.
4. Дано точки $A(-2; -3)$ та $B(6; 3)$.
1) Знайдіть координати точки C – середини відрізка AB.
2) Побудуйте рівняння кола з діаметром AB.
5. Прямокутний трикутник з катетами 3 *см* та 4 *см* обертається навколо своєї гіпотенузи.
1) Знайдіть висоту трикутника, проведену до гіпотенузи.
2) Знайдіть об'єм тіла обертання.

Варіант 2

1. Початкова вартість товару становила 180 *грн*. Внаслідок уцінення вартість цього товару було зменшено на 20%.
1) Обчисліть вартість товару після уцінення.
2) Вкажіть скільки відсотків становить початкова вартість товару відносно її вартості після уцінення.
2. Дано вектори $\bar{a}(-2; 3)$, $\bar{b}(x; 5)$.
1) Знайдіть скалярний добуток векторів, якщо $x = 8$.
2) Вкажіть значення x, при якому вектори будуть перпендикулярні.
3. Дано функції $f(x) = \sqrt{x+2}$ та $g(x) = \frac{x}{2} + 1$.
1) Розв'яжіть рівняння $f(x) = g(x)$.
2) Розв'яжіть нерівність $f(x) \leq g(x)$.
4. Дано функцію $f(x) = e^{x-1}$.
1) Обчисліть $f'(1)$.
2) Побудуйте рівняння дотичної до функції $y = f(x)$ у точці $x_0 = 1$.
5. У ромб $ABCD$ вписано коло з центром у точці O, яке дотикається до сторін AB і AD у точках K і M відповідно (див. рисунок). Периметр ромба дорівнює 20 *см*, кут A дорівнює 60°.



1) Знайдіть довжину відрізка OB.
2) Знайдіть довжину відрізка KM.

Завдання дистанційного етапу Всеукраїнської олімпіади з математики ДВНЗ «УжНУ», 2018 р.

1. Андрій, Богдан та Віталій збирали полуницю. Відомо, що Андрій зібрав стільки кілограм, скільки Богдан та Віталій разом, а Богдан – на 3 *кг* більше, ніж Віталій. Скільки *кг* полуниці зібрав Богдан, якщо разом вони зібрали 30 *кг*?

2. Автомобіль проїхав за 2 *год* 180 *км*, а потім за 3 *год* 240 *км*. Знайдіть середню швидкість автомобіля (у *км/год*).

3. Відомо, що

$$\overline{abcd} + \overline{dac} = \overline{bcad},$$

де різним буквам відповідають різні цифри. Знайдіть число $\overline{bcad}$, якщо

$$a + b + c + d = \overline{aa}.$$

4. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \log_3 x^2.$$

У відповідь запишіть добуток його коренів.

5. Розв'яжіть нерівність

$$(x^2 + 2x - 3)\sqrt{x^2 - 4x - 5} \le 0.$$

У відповідь запишіть суму цілих розв'язків нерівності.

6. У прямокутнику $ABCD$ точка M ділить сторону AD у відношенні $1 : 2$ ($AM : MD = 1 : 2$), а точка N сторону CD – навпіл. Знайдіть площу трикутника BMN (у *см*^{2}), якщо $AB = 4$ *см*, $BC = 6$ *см*.

7. Три кола з радіусами 2 *см*, 3 *см* та 10 *см* розміщені так, що кожні два з них мають зовнішній дотик. Обчисліть площу трикутника з вершинами у центрах цих кіл (у *см*^{2}).

8. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$, об'єм якого рівний 27 *см*^{3}, точки M та N – середини ребер BC та CD відповідно. Знайдіть довжину відрізка B_1K (у *см*), де K – точка перетину ребра BB_1 та площини (A_1MN).

9. Функції $u(x)$ та $v(x)$ для всіх дійсних значень x задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} 2u(x) + v(x) = 3x + 4, \\ u(x) - 2v(x) = 4x - 3. \end{cases}$$

Обчисліть значення $u(1) \cdot v(1)$.

10. Знайдіть $f'(1)$, якщо $f(x) = x^x, x > 0$.

Завдання очного етапу Всеукраїнської олімпіади з математики ДВНЗ «УжНУ», 2018 р.

Варіант 1

1. Відомо, що найбільший спільний дільник двох натуральних чисел рівний 2, а найменше спільне кратне цих чисел рівне 180.

1) Знайдіть добуток цих чисел.

2) Знайдіть ці числа, якщо перше число на 2 більше за друге.

2. Дано рівняння $-3x + 7 = ax$ з параметром a.

1) Розв'яжіть рівняння, якщо $a = \frac{1}{2}$.

2) Знайдіть розв'язки рівняння, в залежності від значення параметра a.

3. Розв'яжіть нерівності:

1) $2x^2 - 3x + 1 \leq 0$.

2) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 \leq 0$.

4. У прямокутну трапецію з основами 10 *см* та 30 *см* вписане коло.

1) Знайдіть довжину більшої бічної сторони трапеції.

2) Знайдіть радіус вписаного у трапецію кола.

5. Дано функцію $f(x) = x\ln x$.

1) Знайдіть критичні точки функції.

2) Знайдіть екстремуми функції.

Варіант 2

1. Дано рівняння $\sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{9 - x^2} = 0$.

1) Знайдіть область допустимих значень рівняння.

2) Розв'яжіть рівняння.

2. Відомо, що сума n перших членів геометричної прогресії знаходиться за формулою $S_n = 3(2^n - 1)$.

1) Знайдіть перший член прогресії.

2) Знайдіть знаменник прогресії.

3. Розв'яжіть рівняння (1) та на його основі знайдіть розв'язки системи рівнянь (2).

1) $t^2 - 3t + 2 = 0$.

2) $\begin{cases} -x^2 + 5xy - 2y^2 = 2, \\ x^2 - 4xy + 2y^2 = -1. \end{cases}$

4. У трикутну ABC зі сторонами $AB = 10$ *см*, $BC = 17$ *см* та $AC = 21$ *см* з вершини B до площини трикутника проведено перпендикуляр $BK = 15$ *см*.

1) Знайдіть висоту трикутника ABC, яка опущена з вершини B.

2) Знайдіть відстань від точки K до прямої AC.

5. Знайдіть радіус кола, заданого рівнянням (1), та на його основі обчисліть інтеграл (2).

1) $x^2 - 2x + y^2 = 0$.

2) $\int_0^2 \sqrt{2x - x^2}\,dx$.

КОРОТКІ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ

Розв’язання завдань І туру, 2015 р.

1. $3|x-3|-2|3-x|=5.$

Так як $|a-b|=|b-a|$, то

$$3|x-3|-2|x-3|=5;$$

$$|x-3|=5;$$

$x-3=5$ або $x-3=-5$;

$x_1=8$ $\quad$ $x_2=-2$;

Отже,

$$x_1+x_2=6.$$

Відповідь: 6.

2. $x^3+3x^2-x-3=0.$

$$x^2(x+3)-(x+3)=0;$$

$$(x+3)(x^2-1)=0;$$

$$(x+3)(x+1)(x-1)=0;$$

$x_1=-3;\ x_2=-1$ або $x_3=1.$

Отже, найменший корінь $x_1=-3$.

Відповідь: -3.

3. $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3. \end{cases}$

Помножимо друге рівняння системи на 2:

$$\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ 2xy=6; \end{cases}$$

Сформуємо рівносильну систему як суму та різницю рівнянь:

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=16, \\ x^2-2xy+y^2=4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)^2=16, \\ (x-y)^2=4. \end{cases}$$

Отже,

$\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=-4, \\ x-y=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=-2 \end{cases}$ або $\begin{cases} x+y=-4, \\ x-y=-2. \end{cases}$

Звідси

$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=1, \\ y_3=3; \end{cases}$ або $\begin{cases} x_4=-3, \\ y_4=-1. \end{cases}$

У всіх випадках $|x-y|=2$.

Відповідь: 2.

4. $(x^2-16)\sqrt{x-1}\le 0.$

Область допустимих розв’язків нерівності: $x-1\ge 0, x\in[1;+\infty)$.

I спосіб. Нерівність рівносильна сукупності рівняння

$$(x^2 - 16)\sqrt{x-1} = 0$$

та системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2 - 16 < 0, \\ \sqrt{x-1} > 0. \end{cases}$$

Рівняння

$$(x-4)(x+4)\sqrt{x-1} = 0$$

має розв'язки

$$x_1 = 4;\ x_2 = 1 \text{ (бо } -4 \notin \text{ ОДЗ).}$$

Розв'яжемо систему нерівностей:

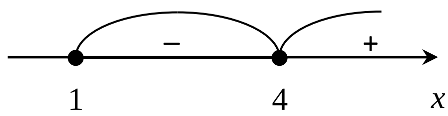
$$\begin{cases} (x+4)(x-4) < 0, \\ \qquad \sqrt{x-1} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-4; 4), \\ x \in (1; +\infty); \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 4).$$

Отже, множиною розв'язків початкової нерівності є проміжок $x \in [1; 4]$.

II спосіб. Розв'яжемо нерівність методом інтервалів.

1) відкладемо нулі функції $f(x) = (x^2 - 16)\sqrt{x-1}$ на числовій осі (див. рисунок);

2) визначимо знак функції на кожному із утворених проміжків (враховуючи область визначення функції);



3) отже, множиною розв'язків нерівності є проміжок $x \in [1; 4]$; нерівність має 4 цілі розв'язки.

Відповідь: 4.

5. Знайдемо масу зерна після першого року зберігання:

$$\begin{matrix} 800 & - & 100\%, \\ a_1 & - & 95\%. \end{matrix} \Rightarrow a_1 = \frac{800 \cdot 95}{100} = 760\ кг.$$

Аналогічно знаходиться маса зерна після другого року зберігання:

$$\begin{matrix} 760 & - & 100\%, \\ a_2 & - & 98\%. \end{matrix} \Rightarrow a_2 = \frac{760 \cdot 98}{100} = 744{,}8\ кг.$$

Відповідь: 744,8.

6. Нехай початкова швидкість поїзда x *км/год*, тоді на зазначену ділянку дороги планувалося затратити $\frac{60}{x}$ *год*. Якщо збільшена швидкість рівна $x + 15$ *км/год*, то затрачений час складе $\frac{60}{x+15}$ *год*. Маємо рівняння (12 *хв* = $1/5$ *год*):

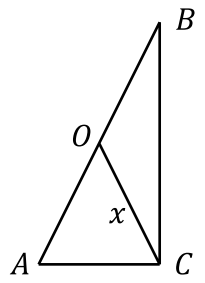
$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+15} = \frac{1}{5}.$$

Розв'язками рівняння є:

$$x_1 = 60;\ x_2 = -75 \text{ (сторонній розв'язок).}$$

Відповідь: 60.

7. Нехай ABC – заданий трикутник (див. рисунок), т. O – середина AB, $P_{AOC} = 16\ см$, $P_{BOC} = 18\ см$. Нехай $CO = x\ см$, оскільки $AO = BO = CO = x$, то $AC = 16 - 2x$, $BC = 18 - 2x$.



За теоремою Піфагора:

$$(16 - 2x)^2 + (18 - 2x)^2 = (2x)^2.$$

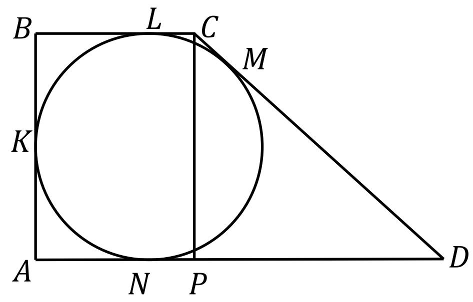
Розв'язками рівняння є:

$$x_1 = 5;\ x_2 = 29 \text{ (сторонній розв'язок).}$$

Отже, $AB = 10\ см$.

Відповідь: 10.

8. Нехай $ABCD$ – задана трапеція (див. рисунок), K, L, M, N – точки дотику вписаного кола до сторін трапеції, тоді $CM = CL = 4\ см$, $DM = DN = 25\ см$.



Проведемо висоту CP. Нехай $CP = 2x$, тоді $AN = AK = BK = BL = x$. Оскільки $PN = CL = 4$, то $DP = DN - PN = 21$, $CD = CM + DM = 29$.
У ΔDPC $(\angle P = 90^o)$ за теоремою Піфагора:

$$(2x)^2 + 21^2 = 29^2.$$

Розв'язками рівняння є:

$$x_1 = 10;\ x_2 = -10 \text{ (сторонній розв'язок).}$$

Отже, площа трапеції:

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot CP = \frac{35+14}{2} \cdot 20 = 490\ см^2.$$

Відповідь: 490.

9. Нехай $\vec{e}(x; y)$ – шуканий вектор. Оскільки вектори $\vec{e}$ та $\vec{a}$ перпендикулярні, то $\vec{e} \cdot \vec{a} = 0$; $\vec{e}$ – одиничний вектор, отже, $|\vec{e}| = 1$. Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 1. \end{cases}$$

Розв'язками системи рівнянь є:

$$\begin{cases} x = 0{,}8, \\ y = -0{,}6 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x = -0{,}8, \\ y = 0{,}6. \end{cases}$$

В обох випадках $x \cdot y = -0{,}48$.

Відповідь: $-0{,}48$.

10. $x^2 + ax + 32 = 0$.

Нехай x_1, x_2 – корені заданого рівняння. Тоді $x_1 = 2x_2$ та $x_1 \cdot x_2 = 32$ (за теоремою Вієта). Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2, \\ x_1 \cdot x_2 = 32. \end{cases}$$

Розв'язками системи рівнянь є:

$$\begin{cases} x_1 = 8, \\ x_2 = 4 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 = -8, \\ x_2 = -4. \end{cases}$$

Знаходимо значення параметра a (за теоремою Вієта) для кожного розв'язку системи:

$$a_1 = -(x_1 + x_2) = -12 \quad \text{або} \quad a_2 = -(x_1 + x_2) = 12.$$

Відповідь: -12.

Розв'язання деяких завдань II туру, 2015 р.

11. $\frac{22}{5-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} - \frac{14}{\sqrt{2}-4}$.

Так як

$$\frac{22}{5-\sqrt{3}} = \frac{22(5+\sqrt{3})}{(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})} = \frac{22(5+\sqrt{3})}{25-3} = 5 + \sqrt{3};$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = -(\sqrt{2}+\sqrt{3});$$

$$\frac{14}{\sqrt{2}-4} = \frac{14(\sqrt{2}+4)}{(\sqrt{2}-4)(\sqrt{2}+4)} = -(\sqrt{2}+4),$$

то початковий вираз рівний: $5 + \sqrt{3} - (\sqrt{2}+\sqrt{3}) + (\sqrt{2}+4) = 9$.

Відповідь: 9.

12. Оскільки $b_1 = 3 \cdot 2^{-1} = \frac{3}{2}$; $b_2 = 3 \cdot 2^{-2} = \frac{3}{4}$, то знаменник прогресії рівний $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{2}$. Отже, $S = \frac{b_1}{1-q} = 3$.

Відповідь: 3.

13. З формули $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ маємо:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-(0{,}6)^2} = \pm 0{,}8.$$

Оскільки кут α належить II четверті, то $\cos\alpha = -0{,}8$. Отже:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{-0{,}8} = -0{,}75.$$

Відповідь: $-0{,}75$.

14. Нехай маса I розчину x *кг*, а II – y *кг.* Тоді загальна маса розчину $x + y = 20$ *кг*, а маса солі – $0{,}5x + 0{,}3y = 0{,}45 \cdot 20$ *кг*. Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ 0{,}5x + 0{,}3y = 9. \end{cases} \text{Звідси} \begin{cases} x = 15, \\ y = 5. \end{cases}$$

Відповідь: 15.

15. $|x+3| + |x-5| = 8$.

Скористаємося властивістю $|a| = \begin{cases} a, \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, \text{якщо } a < 0. \end{cases}$ Розглянемо 3 випадки.

а) якщо $x < -3$, то рівняння буде мати вигляд

$$-(x+3) - (x-5) = 8,$$

розв'язок якого $x = -3$ не задовольняє умову (а), отже, на цьому проміжку рівняння розв'язків не має;

б) якщо $x \in [-3; 5]$, то рівняння буде мати вигляд

$$(x+3) - (x-5) = 8,$$

звідки маємо $0x = 0$, отже, будь-яке значення з проміжку (б) буде розв'язком рівняння;

в) якщо $x > 5$, то рівняння буде мати вигляд

$$(x+3) + (x-5) = 8,$$

яке, аналогічно до випадку (а), розв'язків на проміжку (в) не має.

Отже, серед всіх розв'язків $x \in [-3; 5]$ задане рівняння має 9 цілих.

Відповідь: 9.

16. $\ln(x-2) + \ln(x+3) \leq \ln 14.$

Областю допустимих значень нерівності буде множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x-2 > 0, \\ x+3 > 0, \end{cases}$ тобто інтервал $x \in (2; +\infty)$. На цьому інтервалі нерівність буде рівносильна до такої:

$$\ln(x-2)(x+3) \leq \ln 14;$$
$$(x-2)(x+3) \leq 14;$$
$$x^2 + x - 20 \leq 0;$$
$$(x+5)(x-4) \leq 0;$$

$x \in [-5; 4]$ (за методом інтервалів).

Отже, враховуючи ОДЗ, множиною розв'язків нерівності є проміжок $x \in (2; 4]$; сума цілих розв'язків: $3 + 4 = 7$.

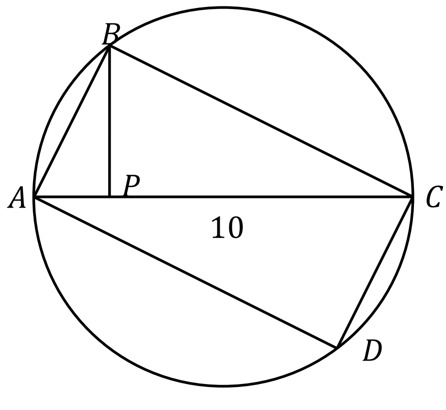
Відповідь: 7.

17. Нехай басейн наповнюється через першу трубу за x *год*, тоді через другу – за $x+1$ *год*. Отже, продуктивність першої труби становить $\frac{1}{x}$ *бас/год*, а другої – $\frac{1}{x+1}$ *бас/год*. Оскільки, при відкритті обох труб їхня продуктивність додається, а час наповнення цілого басейна становить 1 *год* 12 *хв* = 1,2 *год*, то отримуємо рівняння:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) \cdot 1{,}2 = 1.$$

Звідси $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{3}{5}$ (сторонній розв'язок).

Відповідь: 2.



18. **І спосіб.** Якщо прямокутник $ABCD$ вписаний у коло, то його діагональ AC буде діаметром цього кола (див. рисунок). Площа прямокутника складається із суми площ двох рівних трикутників ABC та CDA. Найбільше значення площі трикутника ABC досягається при найбільшому можливому значенні висоти BP, яке рівне радіусу кола. Отже,

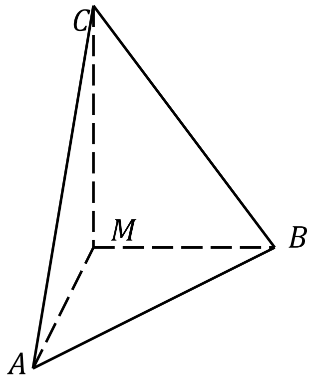
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BP_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25\ см^2;$$

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = 2 \cdot 25 = 50\ см^2.$$

II спосіб. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$, де α – кут між діагоналями прямокутника. Оскільки найбільше значення $\sin\alpha = 1$ при $\alpha = 90^\circ$ (якщо діагоналі перпендикулярні), то найбільша площа прямокутника рівна

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 50\ см^2.$$

Відповідь: 50.

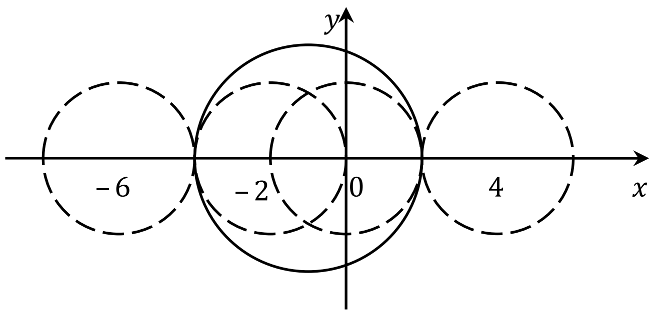


19. Нехай $MABC$ – задана піраміда, у якої M – її вершина; $MA = 2$ *см*, $MB = 3$ *см*, $MC = 4$ *см* – взаємно перпендикулярні бічні ребра піраміди. Розвернемо піраміду так, щоб у її основі був трикутник MAB (див. рисунок), тоді MC – висота піраміди. Отже,

$$V_{MABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{MAB} \cdot MC = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot MA \cdot MB\right) \cdot MC = 4\ см^3.$$

Відповідь: 4.

20. $\begin{cases}(x+1)^2 + y^2 = 9, \\ (x-a)^2 + y^2 = 4.\end{cases}$



Перше рівняння системи – це рівняння кола із центром у точці $(-1; 0)$ та радіусом 3, друге – з центром у точні $(a; 0)$ та радіусом 2.

Отже, система буде мати єдиний розв’язок, якщо кола будуть дотикатися. Таких випадків 4 (див. рисунок) при $x_1 = -6$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 4$. У сумі маємо -4.

Відповідь: -4.

Розв’язання деяких завдань III туру, 2015 р.

11. $(1-\sqrt{3})\sqrt{4+2\sqrt{3}}$.

I спосіб. Оскільки $1 - \sqrt{3} < 0$, то

$$(1-\sqrt{3})\sqrt{4+2\sqrt{3}} = -\sqrt{(1-\sqrt{3})^2(4+2\sqrt{3})} =$$

$$= -\sqrt{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})} = -\sqrt{16-12} = -2.$$

II спосіб. Оскільки $4 + 2\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})^2$, то

$$(1-\sqrt{3})\sqrt{4+2\sqrt{3}} = (1-\sqrt{3})\sqrt{(1+\sqrt{3})^2} =$$
$$= (1-\sqrt{3})|1+\sqrt{3}| = (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) = -2.$$

Відповідь: -2.

12. Нехай Іван, Петро та Василь зібрали x, y, z грибів відповідно. Тоді

$$\begin{cases} x+y=25, \\ x+z=28, \\ y+z=27. \end{cases}$$

Просумувавши всі рівняння системи, отримаємо:

$$2x+2y+2z=80;$$
$$x+y+z=40.$$

Відповідь: 40.

13. Нехай a_1 – перший член арифметичної прогресії, d – її різниця. Тоді

$$\begin{cases} p=a_1+d, \\ r=a_1+3d, \\ s=a_1+6d. \end{cases}$$

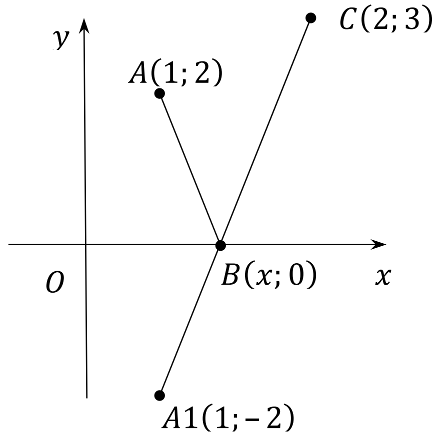
Враховуючи властивості геометричної прогресії, отримаємо:

$$\begin{cases} (a_1+3d)^2=(a_1+d)(a_1+6d), \\ (a_1+d)+(a_1+3d)+(a_1+6d)=38; \end{cases}$$
$$\begin{cases} d(a_1-3d)=0, \\ 3a_1+10d=38. \end{cases}$$

З першого рівняння системи маємо $a_1=3d$ ($d=0$ – сторонній розв'язок). Підставивши у друге рівняння, отримаємо $d=2$, $a_1=6$. Отже,

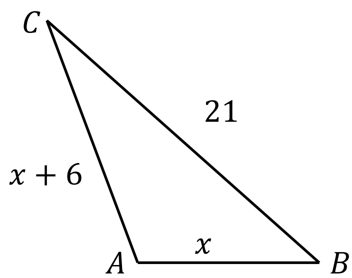
$$\begin{cases} p=8, \\ r=12, \\ s=18, \end{cases}$$ а знаменник геометричної прогресії: $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{r}{p}=1{,}5$.

Відповідь: 1,5.



14. Оскільки довжини ламаних ABC та A_1BC, де $A_1(1;-2)$, співпадають, то найменша довжина ламаної A_1BC і, відповідно, ABC досягається, якщо B – точка перетину прямої A_1C та осі Ox ($y=0$). Знаючи координати точок A_1 та C легко побудувати рівняння прямої A_1C: $y=5x-7$. Звідси, при $y=0$, отримуємо $x=1{,}4$.

Відповідь: 1,4.



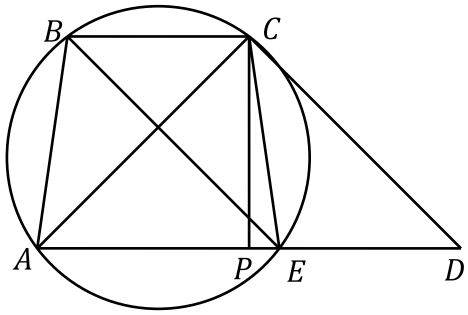
15. Нехай ABC – заданий трикутник, $AB=x$ *см*, $AC=x+6$ *см*, $BC=21$ *см*, $\angle A=120°$. Тоді (за теоремою косинусів):

$$21^2=x^2+(x+6)^2-2\cdot x\cdot(x+6)\cdot\cos 120°;$$
$$x^2+6x-135=0;$$

$x_1 = 9, x_2 = -15$ – сторонній корінь.

Отже, $AB = 9$ *см*, $AC = 15$ *см*, $P_{ABC} = 45$ *см*.

Відповідь: 45.



16. Оскільки $\angle CAE = \angle BEA = \angle D = 45°$, то ACD – рівнобедрений прямокутний трикутник. Проведемо у ΔACD висоту CP, тоді $AP = CP = DP = 7$. З ΔAPC $(\angle P = 90^o)$: $AC = 7\sqrt{2}$; з ΔEPC $(\angle P = 90^o)$: $EC = 5\sqrt{2}$. Шуканий радіус – це радіус кола, описаного навколо ΔACE, отже:

$$R_{\Delta ACE} = \frac{AC \cdot CE \cdot AE}{4 \cdot S_{\Delta ACE}} = 5.$$

Відповідь: 5.

17. $\frac{9}{81^x} + \frac{17}{27^x} - \frac{2}{9^x} \geq 0.$

Помножимо ліву і праву частину нерівності на $81^x > 0$:

$$9 + 17 \cdot 3^x - 2 \cdot 9^x \geq 0.$$

Замінимо $y = 3^x$, отримаємо квадратичну нерівність:

$$2y^2 - 17y - 9 \leq 0.$$

Множиною її розв'язків (за методом інтервалів) є проміжок:

$$y \in \left[-\frac{1}{2}; 9\right].$$

Повертаючись до заміни, отримаємо подвійну нерівність:

$$-\frac{1}{2} \leq 3^x \leq 9.$$

Оскільки ліва частина нерівності виконується завжди, то подвійна нерівність рівносильна такій:

$$3^x \leq 3^2;$$

$$x \in (-\infty; 2].$$

Отже, 2 – найбільший розв'язок початкової нерівності.

Відповідь: 2.

18. $2^{\sqrt{10x - x^2}} \geq 0{,}5^{x-4}.$

Оскільки $0{,}5 = 2^{-1}$, то:

$$2^{\sqrt{10x - x^2}} \geq 2^{4-x};$$

$$\sqrt{10x - x^2} \geq 4 - x.$$

Остання нерівність рівносильна сукупності двох систем нерівностей:

$$\begin{cases} 4 - x < 0, \\ 10x - x^2 \geq 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} 4 - x \geq 0, \\ 10x - x^2 \geq (4 - x)^2. \end{cases}$$

Розв'яжемо першу систему:

$$\begin{cases} x > 4, \\ x(x - 10) \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (4; +\infty), \\ x \in [0; 10]; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (4; 10].$$

Аналогічно розв'язуємо другу систему:

$$\begin{cases} x \le 4, \\ x^2 - 9x + 8 \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 4], \\ x \in [1; 8]; \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 4].$$

Множиною розв'язків сукупності буде об'єднання отриманих проміжків:

$$[1; 4] \cup (4; 10] = [1; 10].$$

Отже, початкова нерівність має 10 цілих розв'язків.

Відповідь: 10.

19. $(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4) = 15.$

Помножимо зовнішні та внутрішні множники:

$$(x^2 - 5x + 4) \cdot (x^2 - 5x + 6) = 15.$$

Замінимо $y = x^2 - 5x + 4$, отримаємо квадратне рівняння:

$$y \cdot (y + 2) = 15;$$

$$y_1 = -5, y_2 = 3.$$

Повертаючись до заміни, отримаємо два рівняння:

$$x^2 - 5x + 4 = -5 \text{ та } x^2 - 5x + 4 = 3.$$

Перше рівняння не має дійсних коренів, а друге має два розв'язки:

$$x_1 = \frac{5-\sqrt{21}}{2}; x_2 = \frac{5+\sqrt{21}}{2},$$

добуток яких рівний 1.

Відповідь: 1.

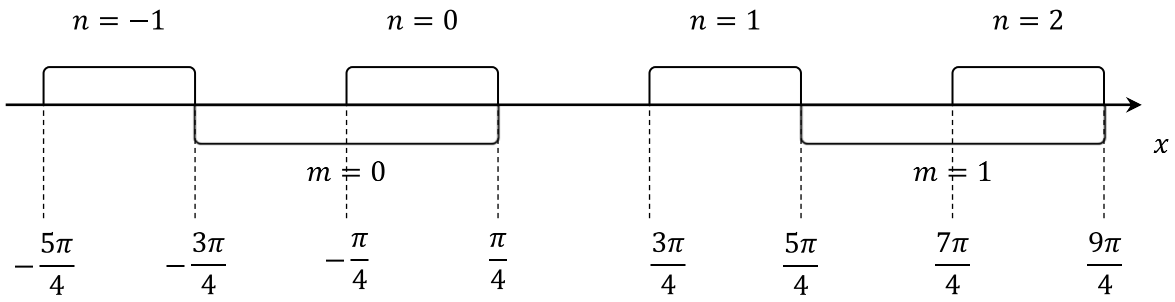
20. $\log_2(\cos 2x) + \log_{\frac{1}{2}}(\cos x - \sin x) = 0.$

Область допустимих значень (ОДЗ) визначається системою нерівностей:

$$\begin{cases} \cos 2x > 0, \\ \cos x - \sin x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < 2x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ -\sqrt{2} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}, \\ x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m; \frac{\pi}{4} + 2\pi m\right), m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

ОДЗ знаходимо як перетин інтервалів із останньої системи нерівностей:



Отже, ОДЗ: $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi l; \frac{\pi}{4} + 2\pi l\right), l \in \mathbb{Z}.$

Повернемося до рівняння:

$\log_2(\cos 2x) = \log_2(\cos x - \sin x);$

$\cos 2x = \cos x - \sin x;$

$\cos^2 x - \sin^2 x - (\cos x - \sin x) = 0;$

$(\cos x - \sin x) \cdot (\cos x + \sin x) - (\cos x - \sin x) = 0;$

$(\cos x - \sin x) \cdot (\cos x + \sin x - 1) = 0.$

Оскільки $\cos x - \sin x \neq 0$ (див. ОДЗ), то останнє рівняння рівносильне до такого:

$\cos x + \sin x = 1;$

$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1;$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}};$

$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$

$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

При непарних значеннях $k = 2s + 1, s \in \mathbb{Z}$ отримаємо $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi s, s \in \mathbb{Z}$ – сторонні розв'язки рівняння (не належать ОДЗ). При парних значеннях $k = 2s, s \in \mathbb{Z}$, отримаємо множину розв'язків рівняння: $x = 2\pi s, s \in \mathbb{Z}$. Найменше додатне значення досягається при $s = 1$: $x_1 = 2\pi = 360°$.

Відповідь: 360.

Розв'язання завдань I туру, 2016 р.

1. Оскільки $20^{16} = 2^{16} \cdot 10^{16} = 2^{16} \cdot 10^{16} = 65536 \cdot 10^{16}$, то дане число має 21 цифру.

Відповідь: 21.

2. Нехай k – коефіцієнт пропорційності. Тоді у саду росте $3k$ яблунь і $5k$ вишень. За умовою вишень – 35, отже, $k = 7$; кількість яблунь: $3k = 21$; всього дерев: $21 + 35 = 56$.

Відповідь: 56.

3. Нехай у класі x хлопців та $2x$ дівчат. Після того, як у цей клас перевели ще одного учня, виконується пропорція:

$x + 1$ – 37,5%;

$3x + 1$ – 100%.

Звідси

$(x + 1) \cdot 100 = (3x + 1) \cdot 37{,}5;$

$x = 5$. Отже, дівчат у класі: $2x = 10$.

Відповідь: 10.

4. Нехай у турнірі брало участь n шахістів. Для запису результатів ігор складемо турнірну таблицю:

№ учасника	1-й	2-й	3-й	...	n-й
1-й	–	$(1;2)$	$(1;3)$	...	$(1;n)$
2-й	$(2;1)$	–	$(2;3)$	...	$(2;n)$
3-й	$(3;1)$	$(3;2)$	–	...	$(3;n)$
...	...	...	...	...	...
n-й	$(n;1)$	$(n;2)$	$(n;3)$	...	–

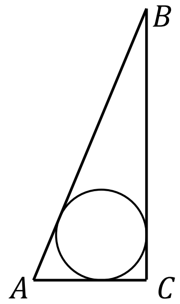
Пояснення: у комірках $(i;j)$ та $(j;i)$, де $i = 1,2,3,\dots n$; $j = 1,2,3,\dots n$; $i \neq j$, записують результати 2-х ігор гравців з порядковими номерами i та j. Серед n^2 комірок таблиці діагональні комірки не використовуються, отже, результати всіх ігор можна записати у $n^2 - n$ комірках. Маємо рівняння:

$n^2 - n = 90$;

$n_1 = 10$; $n_2 = -9$ – сторонній корінь.

Відповідь: 10.

5. Нехай ABC – заданий трикутник (див. рисунок), тоді:



$\sin\angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}$.

Нехай x – коефіцієнт пропорційності, тоді:

$BC = 12x$; $AB = 13x = 26$; $x = 2$;

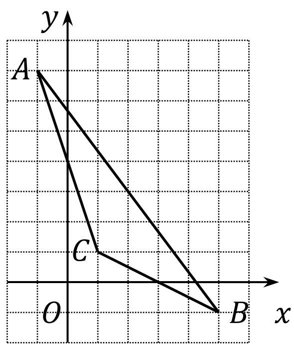
$BC = 24$; $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 10$ (за т. Піфагора).

Отже, радіус вписаного кола у трикутник ABC рівний:

$r = \frac{AC+BC-AB}{2} = 4$.

Відповідь: 4.

6. Нехай ABC – заданий трикутник (див. рисунок).



I спосіб. Знайдемо довжини сторін трикутника:

$|AB| = \sqrt{(5-(-1))^2 + (-1-7)^2} = 10$;

$|AC| = \sqrt{(1-(-1))^2 + (1-7)^2} = \sqrt{40}$;

$|BC| = \sqrt{(1-5)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{20}$.

За т. косинусів:

$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos\angle C$;

$10^2 = \sqrt{40}^2 + \sqrt{20}^2 - 2 \cdot \sqrt{40} \cdot \sqrt{20} \cdot \cos\angle C$;

$\cos\angle C = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, отже, $\angle C = 135°$.

II спосіб. Знайдемо вектори:

$\overrightarrow{CA} = (-1-1; 7-1) = (-2; 6)$, $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{40}$;

$\overrightarrow{CB} = (5-1; -1-1) = (4; -2)$, $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{20}$;

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -2 \cdot 4 + 6 \cdot (-2) = -20$.

З іншого боку:

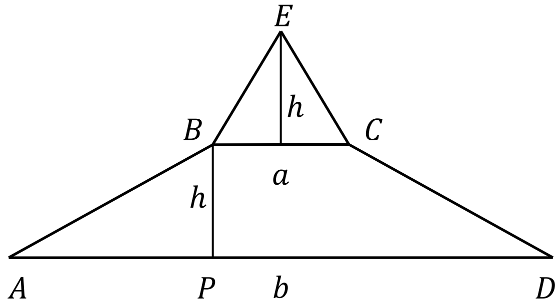
$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos\angle C$;

$-20 = \sqrt{40} \cdot \sqrt{20} \cdot \cos\angle C$;

$\cos\angle C = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, отже, $\angle C = 135°$.

Відповідь: 135.

7. Нехай a, b – основи трапеції, h – її висота (див. рисунок). Тоді з ΔBEC:



$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, S_{\Delta BEC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Оскільки $S_{ABCD} = 5 \cdot S_{\Delta BEC}$, то:

$\frac{a+b}{2} \cdot h = 5 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

$b = 4a$.

Із ΔAPB ($\angle P = 90°$):

$AP = 1{,}5a$;

$\operatorname{tg}\angle A = \frac{BP}{AP} = \frac{a\sqrt{3}/2}{1{,}5a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, отже, $\angle A = 30°$.

Відповідь: 30.

8. $(2x^2 + 3x - 1)^2 - 5 \cdot (2x^2 + 3x + 3) + 24 = 0$.

Нехай $y = 2x^2 + 3x - 1$, тоді:

$y^2 - 5 \cdot (y + 4) + 24 = 0$;

$y_1 = 1, y_2 = 4$.

Отримуємо два рівняння:

$2x^2 + 3x - 1 = 1$;	$2x^2 + 3x - 1 = 4$;
$x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{2}$;	$x_3 = 1, x_4 = -\frac{5}{2}$.

Отже, добуток всіх коренів рівняння рівний 2,5.

Відповідь: 2,5.

9. $|x^2 - 2x - 3| < 4$.

І спосіб. Із означення модуля числа випливає, що для довільного додатного a нерівність $|t| < a$ рівносильна подвійній нерівності $-a < t < a$, або системі нерівностей $\begin{cases} t > -a, \\ t < a. \end{cases}$ Тому задана нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > -4, \\ x^2 - 2x - 3 < 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0, \\ x^2 - 2x - 7 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 > 0, \\ \left(x - 1 + 2\sqrt{2}\right)\left(x - 1 - 2\sqrt{2}\right) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x \in \left(1 - 2\sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}\right). \end{cases}$$

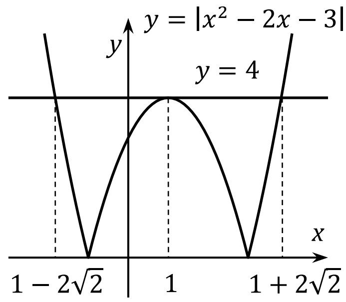
Звідси знаходимо множину розв'язків заданої нерівності:

$x \in \left(1 - 2\sqrt{2}; 1\right) \cup \left(1; 1 + 2\sqrt{2}\right)$.

У відповідь запишемо суму цілих значень, які потрапляють у множину розв'язків: $-1 + 0 + 2 + 3 = 4$.

II спосіб (графічний). Із рівняння $|x^2 - 2x - 3| = 4$, яке рівносильне сукупності $\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 = 4, \\ x^2 - 2x - 3 = -4, \end{array}\right.$ визначаємо точки перетину графіків функцій $y = |x^2 - 2x - 3|$ та $y = 4$:

$$x_1 = 1 - 2\sqrt{2}, x_2 = 1, x_3 = 1 + 2\sqrt{2}.$$



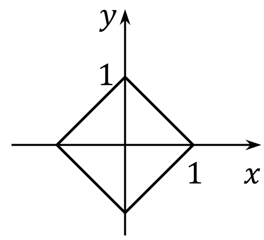
На основі аналізу графіків вказаних функцій (див. рисунок) визначаємо множину розв'язків нерівності:

$$x \in \left(1 - 2\sqrt{2}; 1\right) \cup \left(1; 1 + 2\sqrt{2}\right).$$

У відповідь запишемо суму цілих: $-1 + 0 + 2 + 3 = 4$.

Відповідь: 4.

10. $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$



Оскільки графіком лінії $|x| + |y| = 1$ є ромб (див. рисунок), то коло $x^2 + y^2 = a^2$ може:

а) не перетинати ромб (при $|a| > 1$ або $|a| < \frac{\sqrt{2}}{2}$);

б) перетинати ромб у 4-х вершинах (при $a_1 = 1$ або $a_2 = -1$);

в) перетинати ромб у 8 точках (при $\frac{\sqrt{2}}{2} < |a| < 1$);

г) дотикатися до ромба у 4-х точках (при $a_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ або $a_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$).

Початкова система рівнянь буде мати 4 розв'язки у випадках (б) та (г), отже, можливих значень для параметра a також 4:

$$a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь: 4.

Розв'язання завдань II туру, 2016 р.

1. Оскільки цілою частиною x є найбільше ціле, яке не перевищує число x, то $[-\pi] = -4$.

Відповідь: -4 (Г).

2. Так як $x = 2y$, то $\frac{2x+y}{x-y} = \frac{2\cdot 2y+y}{2y-y} = 5$.

Відповідь: 5 (В).

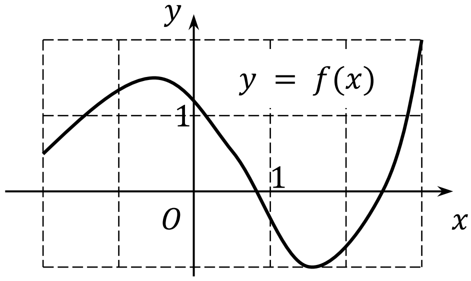
3. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_{10}, a_{11}$ – вік учасників гуртка. За умовою задачі:

$$\begin{cases} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{10}}{10} = 11{,}8; \\ \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{10}+a_{11}}{11} = 12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 118; \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} + a_{11} = 132. \end{cases}$$

Віднявши від другого рівняння перше, отримаємо $a_{11} = 14$.

Відповідь: 14 років (Д).

4. Із графіка функції $y = f(x)$ бачимо, що функція на вказаній області визначення приймає значення від -1 до 2.

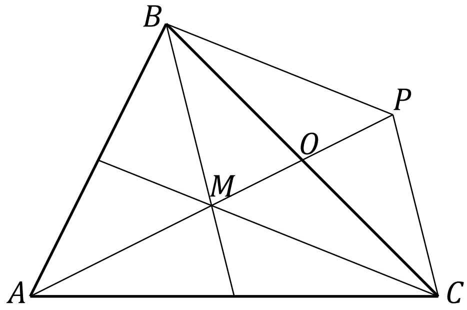


Відповідь: $[-1; 2]$ (Г).

5. Якщо точка O не належить прямій l, то можна провести тільки одне коло, яке матиме центром точку O та буде дотикатися до прямої l. Якщо ж точка O належить прямій l, то будь-яке коло із центром у т. O буде перетинати пряму l.

Відповідь: одне або жодного (Г).

6. Нехай M – точка перетину медіан ΔABC (див. рисунок). Проведемо $BP \parallel MC, CP \parallel MB$. Нехай т. O – точка перетину діагоналей паралелограма $BPCM$. Так як $O \in MP, M \in AO$, то точки A, M, O, P належать одній прямій. Тоді:



$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MP}$ (за правилом паралелограма);

$|AM| = |MP|$ (за властивістю медіани);

$\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MP}$ (як рівні за модулем та протилежно напрямлені).

Отже, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MP} = \vec{0}$.

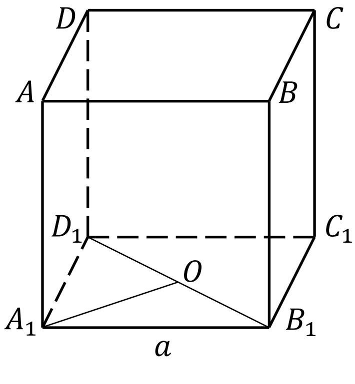
Відповідь: точка перетину медіан (А).

7. Для перпендикулярних прямих $y = k_1 x + b_1$ та $y = k_2 x + b_2$ справджується рівність $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Отже, дані прямі перпендикулярні, якщо

$k = -\frac{1}{2}$.

Відповідь: $-\frac{1}{2}$ (Б).

8. Нехай точка O – середина B_1D_1 (див. рисунок), тоді A_1O – спільний перпендикуляр для мимобіжних прямих AA_1 та B_1D_1. Оскільки $A_1C_1 = a\sqrt{2}$, то $A_1O = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Відповідь: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (Д).

9. $\sin^2 x = 1$.

Розв'язання. І спосіб. Дане рівняння рівносильне сукупності:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 1;\\ \sin x = -1,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};\\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

ІІ спосіб. Оскільки $\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, то дане рівняння рівносильне такому:

$\frac{1-\cos 2x}{2} = 1;$

$\cos 2x = -1;$

$2x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ (А).

10. $\log_{\frac{1}{2}} 2x \geq -3.$

Розв'язання. Враховуючи ОДЗ задана нерівність рівносильне системі:

$$\begin{cases} 2x > 0; \\ 2x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0; \\ x \leq 4, \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 4].$$

Відповідь: $(0; 4]$ (Г).

11. Нехай $\{a_n\}$ – задана прогресія. Тоді за умовою задачі:

$$\begin{cases} a_2 + a_5 = 34; \\ a_3 + a_7 = 46, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + d + a_1 + 4d = 34; \\ a_1 + 2d + a_1 + 6d = 46, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 5d = 34; \\ 2a_1 + 8d = 46, \end{cases} \Leftrightarrow d = 4.$$

Відповідь: 4.

12. Нехай продуктивність роботи одного працівника становить x *роб/год*. За умовою задачі:

$4x \cdot 20 = 1;$

$x = \frac{1}{80}$ *роб/год*.

Отже, для бригади із 5 чоловік нормативний термін виконання завдання буде складати $\frac{1}{5x} = \frac{1}{5 \cdot \frac{1}{80}} = 16$ *год*.

Відповідь: 16.

13. $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$

Нехай $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = x$. Тоді виконується рівність:

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^3 =$$

$$= 2 + \sqrt{5} + 3 \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} +$$

$$+3 \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + 2 - \sqrt{5} =$$

$$= 4 - 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) = 4 - 3x.$$

Отже, числовий вираз рівний дійсному кореню рівняння $x^3 = 4 - 3x$, з якого методом підбору отримуємо $x = 1$. Перетворимо його та покажемо, що рівняння не має більше дійсних коренів:

$x^3 - x^2 + x^2 - x + 4x - 4 = 0;$

$x^2(x-1) + x(x-1) + 4(x-1) = 0;$

$(x-1)(x^2 + x + 4) = 0;$

$x = 1$ або $x^2 + x + 4 = 0$ – рівняння, яке не має дійсних коренів.

Відповідь: 1.

14. $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0.$

Розділимо рівняння на $x^2 \neq 0$:

$$x^2 + 3x - 2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0;$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0.$$

Зробимо заміну $y = x + \frac{1}{x}$, $y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ або $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$:

$$y^2 + 3y - 4 = 0;$$

$y = -4$	або	$y = 1;$
$x + \frac{1}{x} = -4;$		$x + \frac{1}{x} = 1;$
$x + \frac{1}{x} = -4;$		$x + \frac{1}{x} = 1;$
$x^2 + 4x + 1 = 0;$		$x^2 - x + 1 = 0;$
$x_1 = -2 - \sqrt{3}, x_2 = -2 + \sqrt{3};$		рівняння розв’язків не має.

Отже, $x_1 + x_2 = -4.$

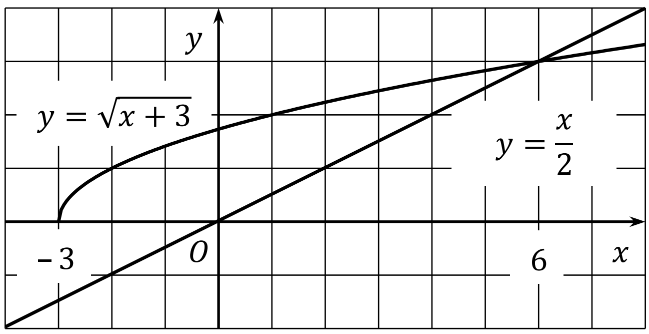
Відповідь: -4.

15. $2\sqrt{x+3} - x > 0.$

I спосіб. Нерівність $2\sqrt{x+3} > x$ рівносильна сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0; \\ x + 3 \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0; \\ 4(x+3) > x^2, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0; \\ x \geq -3, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0; \\ x \in (-2; 6), \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [-3; 0); \\ x \in [0; 6), \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [-3; 6).$$

II спосіб (графічний).



Розглянувши графіки функцій $y = \frac{x}{2}$ та $y = \sqrt{x+3}$, областю визначення якої є $x \in [-3; +\infty)$, знаходимо (див. рисунок) множину розв’язків даної нерівності:

$$x \in [-3; 6).$$

Отже, нерівність має 9 цілих розв’язків.

Відповідь: 9.

16. $25^x + 2{,}1 \cdot 10^x - 4^x = 0.$

Розділимо рівняння на $4^x \neq 0$:

$$\left(\frac{25}{4}\right)^x + 2{,}1 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x - 1 = 0.$$

Зробимо заміну $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$, $y^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^x$:

$$y^2 + 2{,}1y - 1 = 0;$$

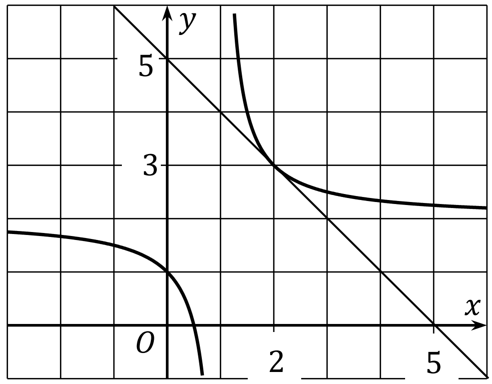
$y = \frac{2}{5}$	або	$y = -\frac{5}{2};$

$\left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{2}{5};$ $\left(\frac{5}{2}\right)^x = -\frac{5}{2};$

$x = -1;$ рівняння розв'язків не має.

Відповідь: -1.

17. Для функції $y = f(x)$ рівняння дотичної у точці x_0 має вигляд:



$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Для даної функції:

$$f'(x) = \left(\frac{2x-1}{x-1}\right)' = \frac{2(x-1)-(2x-1)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2};$$

$$f'(2) = -1;$$

$$f(2) = 3.$$

Отже, шукане рівняння має вигляд:

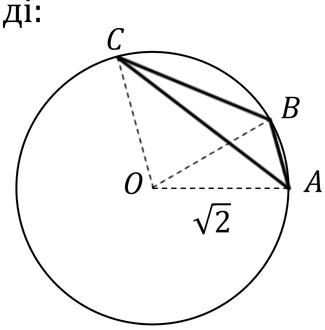
$$y = -(x-2) + 3;$$

$$y = -x + 5.$$

Дотична перетинає координатні осі у точках $(0;5)$ та $(5;0)$, тобто утворюється прямокутний трикутник (див. рисунок) із площею $S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 12{,}5$ *кв. од*.

Відповідь: 12,5.

18. Нехай ABC – заданий трикутник (див. рисунок), тоді:



$\angle AOB = 30°, \angle BOC = 75°;$

$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = 15°$ (спирається на $\breve{AB}$),

$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{75°}{2}$ (спирається на $\breve{BC}$),

$\angle ABC = 180° - 15° - \frac{75°}{2} = \frac{255°}{2}.$

Отже, за т. синусів $\left(\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R\right)$:

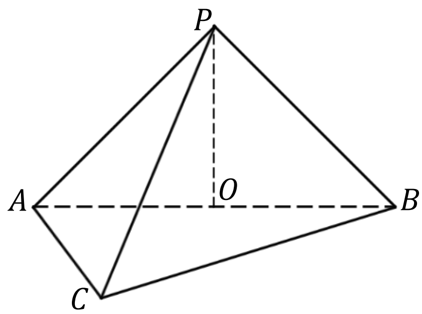
$$AB = 2\sqrt{2}\sin 15°, AC = 2\sqrt{2}\sin\frac{255°}{2}, BC = 2\sqrt{2}\sin\frac{75°}{2};$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} = \frac{2\sqrt{2}\sin 15° \cdot 2\sqrt{2}\sin\frac{255°}{2} \cdot 2\sqrt{2}\sin\frac{75°}{2}}{4\sqrt{2}} =$$

$$= 4\sin 15° \cdot \frac{1}{2}(\cos 90° - \cos 165°) = 2\sin 15° \cos 15° = \sin 30° = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: 0,5.

19. Нехай $PABC$ – задана піраміда з основою ABC (див. рисунок), де $\angle ACB = 90°$, $AC = 5$ *см*, $BC = 12$ *см*. Тоді за т. Піфагора:



$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 13 \text{ см}.$$

Оскільки бічні ребра нахилені до площини основи під одним кутом, то вершина P проектується у т. O – центр описаного кола навколо ΔABC. Отже:

$$AO = \frac{AB}{2} = 6{,}5\ см.$$

З ΔAOP ($\angle AOP = 90°$) знаходимо висоту піраміди:

$$PO = AO \cdot \operatorname{tg} \angle OAP = 6{,}5 \cdot \operatorname{tg} 45° = 6{,}5\ см.$$

Отже, об’єм піраміди рівний:

$$V_{PABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot PO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot PO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 \cdot 6{,}5 = 65\ см^3.$$

Відповідь: 65.

20. $\sin 36° + \sin 72° - \frac{1}{2} \operatorname{tg} 72°$.

I спосіб.

$$2 \sin 18° \cos 18° + \cos 18° - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} 18° =$$

$$\frac{4 \sin^2 18° \cos 18° + 2 \sin 18° \cos 18° - \cos 18°}{2 \sin 18°} = \frac{\cos 18° \cdot (4 \sin^2 18° + 2 \sin 18° - 1)}{2 \sin 18°}.$$

Розглянемо вираз у дужках:

$$4 \sin^2 18° + 2 \sin 18° - 1 = 4 \cdot \frac{1 - \cos 36°}{2} + 2 \sin 18° - 1 =$$

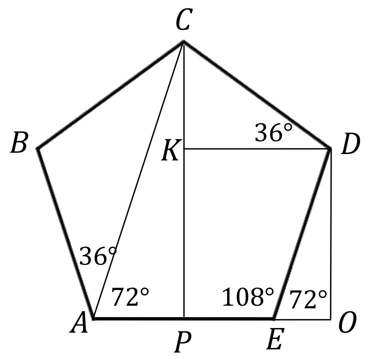
$$= 1 + 2(\sin 18° - \cos 36°) = 1 + 2(\cos 72° - \cos 36°) =$$

$$= 1 - 4 \sin 54° \sin 18° = 1 - \frac{2 \sin 54° 2 \sin 18° \cos 18°}{\cos 18°} =$$

$$= 1 - \frac{2 \sin 54° \sin 36°}{\cos 18°} = 1 - \frac{\sin 54° 2 \sin 36° \cos 36°}{\cos 18° \cos 36°} = 1 - \frac{\sin 54° \sin 72°}{\cos 18° \cos 36°} =$$

$$= 1 - \frac{0{,}5(\cos 18° - \cos 126°)}{0{,}5(\cos 18° + \cos 54°)} = 1 - \frac{0{,}5(\cos 18° + \cos 54°)}{0{,}5(\cos 18° + \cos 54°)} = 1 - 1 = 0.$$

Отже, початковий вираз рівний також 0.



II спосіб. Нехай $ABCDE$ – правильний п’ятикутник зі стороною 1, внутрішні кути якого рівні $\frac{(5-2) \cdot 180°}{5} = 108°$, а зовнішні: $180° - 108° = 72°$ (див. рисунок). Проведемо $CP \perp AE$, $DK \perp CP$, $DO \perp AE$. Тоді з ΔEOD ($\angle O = 90°$):

$$DO = DE \cdot \sin \angle E = \sin 72°.$$

З ΔDKC ($\angle K = 90°; \angle D = 108° - 72° = 36°$):

$$CK = CD \cdot \sin \angle D = \sin 36°.$$

ΔABC – рівнобедрений, тому:

$$\angle BAC = \frac{1}{2}(180° - 108°) = 36°, \angle CAP = 108° - 36° = 72°.$$

З ΔAPC ($\angle P = 90°$):

$$CP = AP \cdot \operatorname{tg} \angle A = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 72°.$$

Оскільки $CP = CK + KP = CK + DO$, то

$$CK + DO - CP = 0;$$

$$\sin 36° + \sin 72° - \frac{1}{2} \operatorname{tg} 72° = 0.$$

Відповідь: 0.

Розв'язання завдань III туру, 2016 р.

1. Нехай n – дане натуральне число. Тоді за умовою задачі:

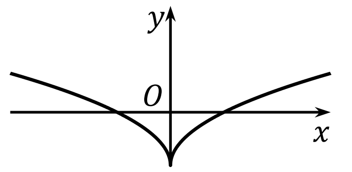
$$\begin{cases} n = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}, \\ n = 5l + 1, l \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n - 1 = 3k, k \in \mathbb{Z}, \\ n - 1 = 5l, l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Тобто число $n - 1$ ділиться на 15, отже, при діленні n на 15 остачею буде 1.

Відповідь: 1 (А).

2. Оскільки $|x| = \begin{cases} x, \text{якщо } x \geq 0, \\ -x, \text{якщо } x < 0, \end{cases}$ то функцію $y = f(|x|) = \sqrt{|x|} - 1$ запишемо так:

$$y = \begin{cases} \sqrt{x} - 1, \text{якщо } x \geq 0, \\ \sqrt{-x} - 1, \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$



$y = \sqrt{|x|} - 1$

На рисунку приведений ескіз графіка цієї функції.

Відповідь: (Б).

3. Нехай у другій скрині x білих куль. Тоді за умовою задачі:

$$\frac{8}{6+8} = \frac{x}{9+x};$$

$$x = 12.$$

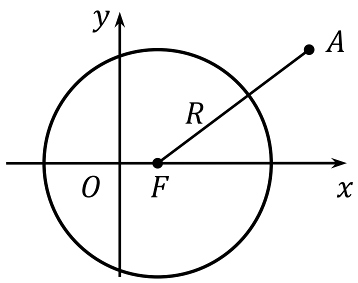
Отже, всього у другій скрині $9 + 12 = 21$ куля.

Відповідь: 21 (В).

4. Якщо A та B деякі точки площини, то точки, рівновіддалені від A та B, знаходяться на серединному перпендикулярі до відрізку AB.

Відповідь: пряма (Б).

5. $x^2 - 2x - 8 + y^2 = 0.$



Перепишемо рівняння кола:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 9.$$

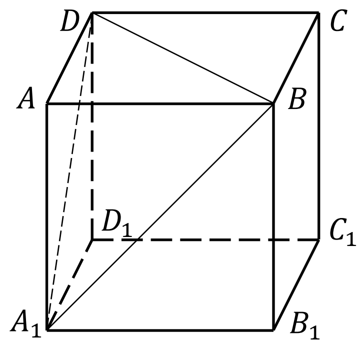
Знайдемо відстань між т. $A(5; 3)$ та центром кола т. $F(1; 0)$:

$$d = \sqrt{(1 - 5)^2 + (0 - 3)^2} = 5,$$

отже, відстань від т. A до кола рівна $d - R = 5 - 3 = 2$, де $R = 3$ – радіус кола.

Відповідь: 2 (Б).

6. Оскільки грань куба $ABCD$ належить площині (ABC), то задані площини перетинаються по спільній прямій BD.



Відповідь: BD (Д).

7. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha =$

$$= \sin^4 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^2 = \cos^2 2\alpha.$$

Відповідь: $\cos^2 2\alpha$ (Д).

8. $\log_4 5 \cdot \log_{25} 8 = \log_{2^2} 5 \cdot \log_{5^2} 2^3 = \frac{1}{2}\log_2 5 \cdot \frac{3}{2}\log_5 2 = \frac{3}{4}$.

Відповідь: $\frac{3}{4}$ (А).

9. $f(x) = \sin^2 x$.

$f'(x) = (\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$.

Відповідь: $\sin 2x$ (В).

10. $\sqrt{2x^2 - x - 3} + (3x^2 + x - 2)^2 \le 0$.

Оскільки доданки у лівій частині нерівності невід'ємні, то задана нерівність рівносильна системі рівнянь:

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 - x - 3} = 0, \\ (3x^2 + x - 2)^2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 3 = 0, \\ 3x^2 + x - 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ або } x = \frac{3}{2}, \\ x = -1 \text{ або } x = \frac{2}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x = -1$.

Відповідь: $\{-1\}$ (В).

11. $\frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \dots + \frac{1}{21\cdot23} + \frac{1}{23\cdot25} =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{1\cdot3} + \frac{5-3}{3\cdot5} + \frac{7-5}{5\cdot7} + \dots + \frac{23-21}{21\cdot23} + \frac{25-23}{23\cdot25}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{21} - \frac{1}{23} + \frac{1}{23} - \frac{1}{25}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{25}\right) = 0{,}48$.

Відповідь: 0,48.

12. Оскільки $1 + 2 + \dots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n$, то $14 \le n \le 44$ (вираз у правій частині рівності перетворюється у трицифрове число). За умовою задачі $\frac{1+n}{2} \cdot n = k \cdot 100$, де k – перша цифра трицифрового числа. Тоді з рівності

$n(n+1) = k \cdot 8 \cdot 25$

робимо висновок, що серед можливих значень n тільки при $n_1 = 24$ або $n_2 = 25$ ліва частина рівності, як і права, ділиться на 25. Перевірка показує, що умова задачі виконується при $n_1 = 24$:

$1 + 2 + \dots + 24 = \frac{1+24}{2} \cdot 24 = 300$.

Відповідь: 24.

13. $a_n = -2n^2 + 9n + 3$.

Так як парабола $f(x) = -2x^2 + 9x + 3$ досягає максимуму у вершині при $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{9}{2\cdot(-2)} = 2{,}25$, то найбільший член послідовності $\{a_n\}$ має номер, найближчий до x_0, тобто

$n = 2$; $a_2 = -2 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 + 3 = 13$.

Відповідь: 13.

14. $(x-1)^4+(x-3)^4=16.$

Заробимо заміну $y=x-2$:

$(y+1)^4+(y-1)^4=16;$

$y^4+4y^3+6y^2+4y+1+y^4-4y^3+6y^2-4y+1=16;$

$y^4+6y^2-7=0;$

$y^2=1$ або $y^2=-7;$

$y_1=-1, y_2=1;$ рівняння не має розв'язків.

$x_1=1, x_2=3.$

Отже, сумою дійсних коренів рівняння є $1+3=4$.

Відповідь: 4.

15. $9^x+9^{-x}=34.$

І спосіб. Нехай $y=9^x$:

$y+\frac{1}{y}=34;$

$y^2-34y+1=0;$

$y_1=17-12\sqrt{2}$ або $y_2=17+12\sqrt{2};$

$x_1=\log_9\left(17-12\sqrt{2}\right)$ $x_2=\log_9\left(17+12\sqrt{2}\right).$

Оскільки $\frac{1}{17+12\sqrt{2}}=\frac{17-12\sqrt{2}}{17^2-\left(12\sqrt{2}\right)^2}=17-12\sqrt{2}$, то вираз 3^x+3^{-x} має однакове значення при x_1 та x_2. Знайдемо значення заданого виразу при $x=x_1$:

$$3^x+3^{-x}=3^{\log_9\left(17-12\sqrt{2}\right)}+3^{-\log_9\left(17-12\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\sqrt{3^{\log_3\left(17-12\sqrt{2}\right)}}+\sqrt{\frac{1}{3^{\log_3\left(17-12\sqrt{2}\right)}}}=\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{1}{17-12\sqrt{2}}}=$$

$$=\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\frac{1}{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}}=3-2\sqrt{2}+\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}=6.$$

ІІ спосіб. Нехай $y=3^x+3^{-x}$, тоді:

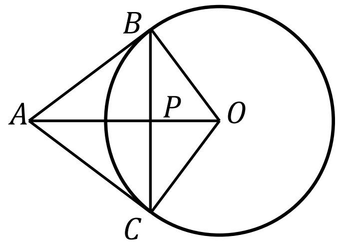
$y^2=(3^x+3^{-x})^2=9^x+2+9^{-x}, 9^x+9^{-x}=y^2-2;$

$y^2-2=34;$

$y^2=36;$

$y_1=6$ або $y_2=-6$ – сторонній розв'язок.

Відповідь: 6.



16. Нехай AB та AC – задані дотичні: $AB=AC=$ $=10$ *см*, $BC=12$ *см*; т. O – центр кола, т. P – перетин AO та BC (див. рисунок). Тоді $BP=6$ *см*; з ΔAPB $(\angle P=90°)$:

$AP=\sqrt{AB^2-BP^2}=8$ *см* (за т. Піфагора);

з ΔABO $(\angle B=90°)$:

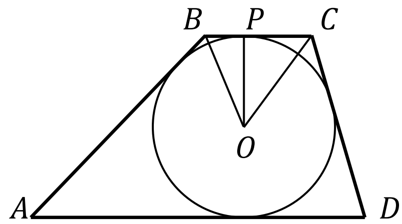
$BP^2=AP\cdot PO$ (за властивістю висоти у прямокутному трикутнику);

$6^2=8\cdot PO, PO=4{,}5$ *см*;

з ΔBPO ($\angle P = 90°$):

$$BO = \sqrt{BP^2 + PO^2} = 7{,}5\ см \text{ (за т. Піфагора).}$$

Відповідь: 7,5.



17. Нехай $ABCD$ – задана трапеція, т. O – центр вписаного кола (див. рисунок), $OB = 13\ см$, $OC = 15\ см$, $BC = 14\ см$. Проведемо $OP \perp BC$ – радіус кола. Тоді з ΔBCO:

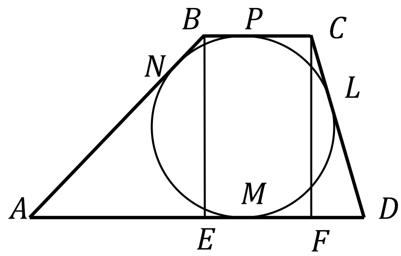
$$p_{BCO} = \frac{BC+OB+OC}{2} = 21\ см;$$

$$S_{BCO} = \sqrt{p_{BCO} \cdot (p_{BCO} - BC) \cdot (p_{BCO} - OB) \cdot (p_{BCO} - OC)} =$$

$$= \sqrt{21 \cdot (21-14) \cdot (21-13) \cdot (21-15)} = 84\ см^2 \text{ (за ф. Герона);}$$

$$OP = \frac{2 \cdot S_{BCO}}{BC} = \frac{2 \cdot 84}{14} = 12\ см \text{ (як висота } \Delta BCO\text{).}$$

Далі з ΔBPO ($\angle P = 90°$) $BP = 5\ см$, з ΔCPO $CP = 9\ см$ (за т. Піфагора). Нехай P, L, M, N – точки дотику кола до трапеції. Тоді $BN = BP = 5\ см$, $CL = CP = 9\ см$ (як дотичні). Нехай $AN = AM = x\ см$, $DL = DM = y\ см$ (див. рисунок). Проведемо $BE \perp AD$ та $CF \perp AD$, тоді $EM = BP = 5\ см$, $FM = CP = 9\ см$. З ΔAEB (за т. Піфагора):



$$AE^2 + BE^2 = AB^2;$$

$$(x-5)^2 + 24^2 = (x+5)^2;$$

$$x = 28{,}8\ см.$$

Аналогічно з ΔCFD:

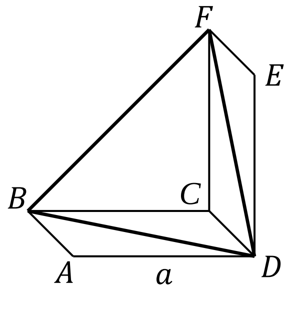
$$CF^2 + DF^2 = CD^2;$$

$$24^2 + (x-9)^2 = (x+9)^2;$$

$$x = 16\ см.$$

Отже, $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BE = \frac{(28{,}8+16)+14}{2} \cdot 24 = 705{,}6\ см^2$.

Відповідь: 705,6.



18. Нехай площини $(ABCD)$ та $(FEDC)$ утворюють заданий двогранний кут, BD та FD – задані прямі, $\angle CDF = \angle CDB = 45°$ (див. рисунок). Тоді $ABCD$ та $FEDC$ – квадрати. Нехай $AD = a$, тоді $BD = a\sqrt{2}$, $FD = a\sqrt{2}$, $BF = a\sqrt{2}$, отже, ΔBDF – рівносторонній, тому $\angle BDF = 60°$.

Відповідь: 60.

19. Якщо у циліндр вписана сфера, то радіус основи циліндра і радіус сфери рівні (нехай R), а висота циліндра рівна діаметру сфери (нехай $H = 2R$). Тоді $\frac{S_ц}{S_с} = \frac{2S_о + S_б}{S_с} = \frac{2\pi R^2 + 2\pi RH}{4\pi R^2} = \frac{6\pi R^2}{4\pi R^2} = 1{,}5$ разу, де $S_ц$, $S_о$, $S_б$ – повна поверхня, площа основи та бічна поверхня циліндра; $S_с$ – площа сфери.

Відповідь: 1,5.

20. $\frac{(x-2)(x+3)}{x-a}=2.$

Розглянемо такі випадки:

1) $a=2$, тоді ОДЗ $x\neq 2$; $x=-1$ – рівняння має 1 розв'язок;

2) $a=-3$, тоді ОДЗ $x\neq -3$; $x=4$ – рівняння має 1 розв'язок;

3) $a\neq -2, a\neq 3$, тоді ОДЗ $x\neq a$;

$$(x-2)(x+3)=2(x-a);$$
$$x^2-x+2(a-3)=0.$$

Дане рівняння може мати 1 розв'язок, якщо його дискримінант рівний 0:

$$D=(-1)^2-4\cdot 2(a-3)=-8a+25;$$
$$-8a+25=0;$$
$$a=3{,}125.$$

Перевірка:

$$x^2-x+2(3{,}125-3)=0;$$
$$x^2-x+0{,}25=0;$$
$$x=0{,}5\in \text{ОДЗ} \text{ – рівняння має 1 розв'язок.}$$

Отже, сумою значень a, при яких рівняння має 1 розв'язок є:

$$2+(-3)+3{,}125=2{,}125.$$

Відповідь: 2,125.

Розв'язання завдань дистанційного етапу, 2017 р.

1. Парабола $f(x)=-2x^2+9x+3$ досягає найбільшого значення у вершині, коли $x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-9}{-4}=2{,}25$. Отже, найбільший член послідовності має номер, найближчий до x_0, тобто $n=2$, $a_2=-2\cdot 2^2+9\cdot 2+3=13$.

Відповідь: 13.

2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{9-8}{8\cdot 9}+\frac{10-9}{9\cdot 10}=$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=1-\frac{1}{10}=0{,}9.$$

Відповідь: 0,9.

3. $\frac{4x+29}{x+5}\leq 5-x;$

$$\frac{4x+29}{x+5}+x-5\leq 0;$$
$$\frac{4x+29+x^2-25}{x+5}\leq 0;$$
$$\frac{(x+2)^2}{x+5}\leq 0;$$
$$\left[\begin{array}{l}(x+2)^2=0,\\ x+5<0;\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x<-5.\end{array}\right.$$

Отже, $x \in (-\infty; -5) \cup \{-2\}$. Найбільший розв'язок $x = -2$.

Відповідь: -2.

4. Нехай у другій скрині x білих куль. Тоді ймовірність події A витягнути навмання білу кулю із першої скрині складає $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{14}$, аналогічно ймовірність події B витягнути навмання білу кулю із другої скрині складає $p(B) = \frac{9}{9+x}$. За умовою задачі

$$\frac{6}{14} = \frac{9}{9+x};$$
$$\frac{6}{14} = \frac{9}{9+x};$$
$$x = 12.$$

Отже, всього у другій скрині $9 + 12 = 21$ куля.

Відповідь: 21.

5. $\sin^4 \alpha + \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha + \cos^4 \alpha = \sin^4 \alpha + \frac{1}{2} \cdot (2\sin\alpha\cos\alpha)^2 + \cos^4 \alpha =$
$= \sin^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 1^2 = 1.$

Відповідь: 1.

6. Нехай n – дане число, тоді $n = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}$; $n = 5m + 1, m \in \mathbb{Z}$. Оскільки, число $n - 1$ ділиться націло на взаємно прості числа 3 і 5, то воно націло ділиться і на 15, тобто $n - 1 = 15p; n = 15p + 1, p \in \mathbb{Z}$. Отже, остачею від ділення числа n на 15 буде 1.

Відповідь: 1.

7. Знайдемо похідну функції.

I спосіб.

$$f'(x) = (\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

II спосіб.

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2x;$$
$$f'(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2x\right)' = 0 - \frac{1}{2} \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' = \sin 2x.$$

Отже,

$$f'(x_0) = f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5.$$

Відповідь: 0,5.

8. **I спосіб.** Нехай $y = 9^x$, тоді

$$y + \frac{1}{y} = 2;$$
$$y^2 - 2y + 1 = 0;$$
$$(y - 1)^2 = 0;$$
$$y = 1.$$

Отже,

$$9^x = 1;$$

$x = 0;$

$3^x + 3^{-x} = 2.$

II спосіб.

$9^x + 9^{-x} = 2;$

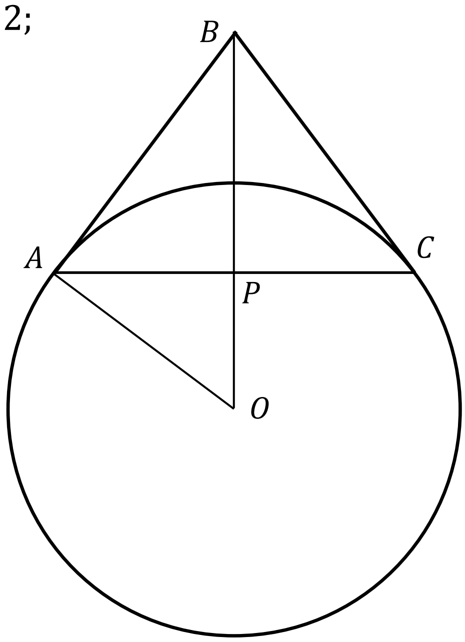
$9^x + 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-x} + 9^{-x} = 2 + 2;$

$(3^x + 3^{-x})^2 = 4;$

$3^x + 3^{-x} = 2$ або $3^x + 3^{-x} = -2;$

$\emptyset.$

Відповідь: 2.



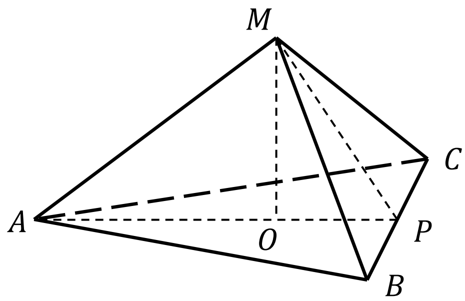
9. Нехай BA, BC – дані дотичні, точка O – центр кола, P – точка перетину AC та BO. У рівнобедреному ΔABC BP буде бісектрисою, отже, і медіаною, і висотою. З ΔAPB (за т. Піфагора):

$$PB = \sqrt{AB^2 - AP^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ см}.$$

Оскільки $\Delta OAB \sim \Delta APB$(за двома кутами), то

$$\frac{OA}{AP} = \frac{AB}{PB}, OA = \frac{10}{8} \cdot 6 = 7{,}5 \text{ см}.$$

Відповідь: 7,5.



10. **I спосіб.** Нехай $MABC$ – дана піраміда, MO – висота, точка P – середина BC (див. рис.). Із міркувань симетрії випливає, що т. O належить AP. Із ΔAMB (за т. Піфагора):

$$AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \text{ см}.$$

Оскільки ΔABC – рівносторонній, то

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ см}^2;$$

$$AP = \frac{AB \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2} \text{ см}$$ (AP – висота рівностороннього трикутника).

Оскільки $AO : OP = 2 : 1$ (т. O – центр трикутника ABC), то

$$AO = \frac{2}{3} \cdot AP = \sqrt{6} \text{ см}.$$

З ΔAOM (за т. Піфагора):

$$MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{3^2 - \sqrt{6}^2} = \sqrt{3} \text{ см}.$$

Отже,

$$V_{MABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot MO = \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = 4{,}5 \text{ см}^3.$$

II спосіб (див. №19 на ст. 7).

$$V_{MABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot MA \cdot MB \cdot MC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^3 = 4{,}5 \text{ см}^3.$$

Відповідь: 4,5.

Розв'язання завдань очного етапу, 2017 р.

Варіант 1

1.1. Задана система рівнянь не має розв'язку, якщо виконується співвідношення

$$\frac{2}{-1} = \frac{a}{3} \neq \frac{1}{-5}.$$

Отже, $a = -6$.

Відповідь: -6.

1.2. Якщо $a = 3$, то система рівнянь буде мати вигляд:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ -x + 3y = -5. \end{cases}$$

Додамо до першого рівняння друге, помножене на -1:

$$3x = 6;$$

$$x = 2.$$

Підставимо знайдене значення x у перше рівняння:

$$4 + 3y = 1; \; y = -1.$$

Відповідь: $(2; -1)$.

2.1. Областю допустимих значень заданої нерівності є вся множина дійсних чисел, крім чисел, які перетворюють знаменник у 0. Тобто ОДЗ $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

2.2. $\frac{x-5}{x-1} \leq 2 - \frac{x-3}{x-2}$;

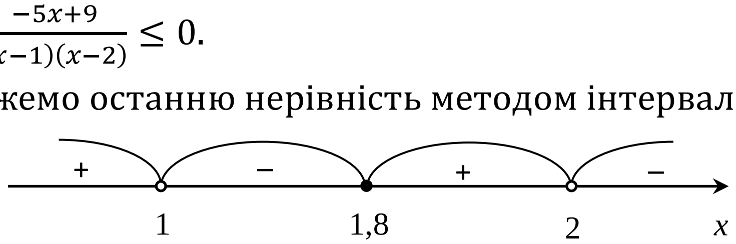
$$\frac{x-5}{x-1} + \frac{x-3}{x-2} - 2 \leq 0;$$

$$\frac{(x-5)(x-2)+(x-3)(x-1)-2(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} \leq 0;$$

$$\frac{x^2-7x+10+x^2-4x+3-2x^2+6x-4}{(x-1)(x-2)} \leq 0;$$

$$\frac{-5x+9}{(x-1)(x-2)} \leq 0.$$

Розв'яжемо останню нерівність методом інтервалів:



Отже, нерівність має множину розв'язків $x \in (1; 1{,}8] \cup (2; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (1; 1{,}8] \cup (2; +\infty)$.

3.1. $\log_{\sqrt{2}}(x + 3) = 2$.

ОДЗ: $x > -3$.

$$x + 3 = \sqrt{2}^2;$$

$$x = -1.$$

Відповідь: -1.

3.2. $\log_{\sqrt{2}}(x+3) \le 2;$

$0 < x + 3 \le \sqrt{2}^2;$

$-3 < x \le -1.$

Відповідь: $x \in (-3; -1]$.

4.1. Нехай $C(x_0; y_0)$. Тоді

$x_0 = \frac{-2+6}{2} = 2, y_0 = \frac{-3+3}{2} = 0.$

Відповідь: $C(2; 0)$.

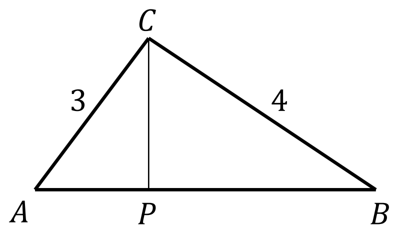
4.2. Знайдемо радіус кола – довжину відрізка AC:

$|AC| = \sqrt{(2+2)^2 + (0+3)^2} = 5.$

Оскільки т. C – центр кола, то його рівняння буде мати вигляд

$(x-2)^2 + y^2 = 25.$

Відповідь: $(x-2)^2 + y^2 = 25$.



5.1. Нехай ABC – заданий трикутник, $AC = 3$ *см*, $BC = 4$ *см*, $\angle C = 90°$ (див. рисунок). Проведемо висоту CP. Тоді

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$ *см* (за т. Піфагора);

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CP.$

Отже,

$AC \cdot BC = AB \cdot CP;$

$CP = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2{,}4$ *см*.

Відповідь: 2,4 *см*.

5.2. При обертанні ΔABC навколо гіпотенузи утворюються 2 конуси з твірними AC, BC та висотами AP, BP відповідно. Отже, об'єм V утвореного тіла обертання буде рівний сумі об'ємів конусів:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R_1^2 \cdot H_1 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R_2^2 \cdot H_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot CP^2 \cdot AP + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot CP^2 \cdot BP =$

$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot CP^2 \cdot (AP + BP) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot CP^2 \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2{,}4^2 \cdot 5 = 9{,}6\pi$ *см*^{3}.

Відповідь: $9{,}6\pi$ *см*^{3}.

Варіант 2

1.1. Нехай після уцінення вартість товару стала x *грн*. Складемо пропорцію

180 *грн* – 100%

x грн – 80%

Отже,

$x = \frac{180 \cdot 80}{100} = 144$ *грн*.

Відповідь: 144 *грн*.

1.2. Нехай початкова вартість товару відносно її вартості після уцінення становить $p\%$. Складемо пропорцію

$180\ грн \quad - \quad p\%$

$144\ грн \quad - \quad 100\%$

Отже, $p = \frac{180 \cdot 100}{144} = 125\%$.

Відповідь: 125%.

2.1. При $x = 8$ маємо вектори $\bar{a}(-2; 3)$, $\bar{b}(8; 5)$. Тоді їхній скалярний добуток буде рівний

$\bar{a} \cdot \bar{b} = -2 \cdot 8 + 3 \cdot 5 = -1.$

Відповідь: -1.

2.2. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ будуть перпендикулярні, якщо їхній скалярний добуток буде рівний 0. Отже, x знаходимо з рівняння

$-2 \cdot x + 3 \cdot 5 = 0;$

$x = 7{,}5.$

Відповідь: 7,5.

3.1. $\sqrt{x+2} = \frac{x}{2} + 1.$

ОДЗ: $x \geq -2$.

Помножимо обидві частини рівняння на 2 та піднесемо їх до квадрату:

$4(x+2) = (x+2)^2;$

$4x + 8 = x^2 + 4x + 4;$

$x^2 = 4;$

$x_1 = -2, x_2 = 2.$

Перевірка підтверджує, що обидва розв'язки задовольняють рівняння.

Відповідь: $x_1 = -2, x_2 = 2$.

3.2. $\sqrt{x+2} \leq \frac{x}{2} + 1.$

Оскільки ОДЗ нерівності $x \geq -2$, то обидві частини нерівності невід'ємні і їх можна піднести до квадрату:

$$\begin{cases} x + 2 \leq \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2, \\ x \geq -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 8 \leq x^2 + 4x + 4, \\ x \geq -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 4, \\ x \geq -2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty), \\ x \geq -2; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-2\} \cup [2; +\infty).$$

Відповідь: $x \in \{-2\} \cup [2; +\infty)$.

4.1. $f'(x) = (e^{x-1})' = e^{x-1} \cdot (x-1)' = e^{x-1};$

$f'(1) = e^{1-1} = 1.$

Відповідь: 1.

4.2. Рівняння дотичної до функції $y = f(x)$ у точці x_0 має вигляд

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$

У точці $x_0 = 1$ маємо

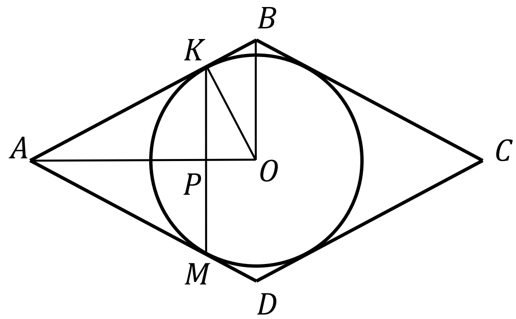
$$f'(x_0) = 1, f(x_0) = 1.$$

Отже, рівняння дотичної буде

$$y = 1 \cdot (x - 1) + 1;$$

$$y = x.$$

Відповідь: $y = x$.



5.1. У ΔAOB:

$$\angle O = 90°, \angle A = 30°, AB = 5\ см,$$

$$OB = AB \cdot \sin\angle A = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5\ см.$$

Відповідь: 2,5 *см*.

5.2. У ΔOKB:

$$\angle K = 90°, \angle B = 60°, KB = OB \cdot \cos\angle B = 2{,}5 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}25\ см.$$

Отже, $AK = AB - KB = 3{,}75\ см$. Оскільки ΔAKM рівносторонній, то

$$KM = AK = 3{,}75\ см.$$

Відповідь: 3,75 *см*.

Розв'язання завдань дистанційного етапу, 2018 р.

1. Нехай Андрій, Богдан та Віталій зібрали x, y, z *кг* полуниці відповідно. Тоді

$$\begin{cases} x = y + z, \\ y = z + 3, \\ x + y + z = 30; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15, \\ y = 9, \\ z = 6. \end{cases}$$

Відповідь: 9.

2. Для знаходження середньої швидкості $\bar{v}$ розділимо загальний шлях, який проїхав автомобіль, на загальний час руху:

$$\bar{v} = \frac{180+240}{2+3} = 84\ (км/год).$$

Відповідь: 84.

3. З рівності

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ & d & a & c \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} b & c & a & d \end{array} \end{array}$$

отримуємо, що $d + c = d$, тобто $c = 0$. Тому

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{cccc} a & b & 0 & d \\ & d & a & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} b & 0 & a & d \end{array} \end{array}$$

З останньої рівності та умови $a + b + c + d = \overline{aa}$ отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} b + d = 10, \\ b = a + 1, \\ a + b + c + d = 10a + a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 2, \\ c = 0, \\ d = 8. \end{cases}$$

Відповідь: 2018.

4. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \log_3 x^2$.

Область допустимих значень: $x \neq 0$. За формулою суми нескінченної геометричної прогресії $S = \frac{b_1}{1-q}$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Отримуємо рівняння

$\log_3 x^2 = 1$;

$x^2 = 3$;

$x_1 = \sqrt{3}$ або $x_2 = -\sqrt{3}$.

Обчислимо добуток коренів: $x_2 \cdot x_2 = -3$.

Відповідь: -3.

5. $(x^2 + 2x - 3)\sqrt{x^2 - 4x - 5} \leq 0$;

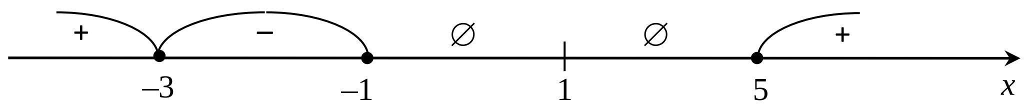
$(x + 3)(x - 1)\sqrt{(x + 1)(x - 5)} \leq 0$.

Знайдемо область допустимих значень:

$(x + 1)(x - 5) \geq 0$;

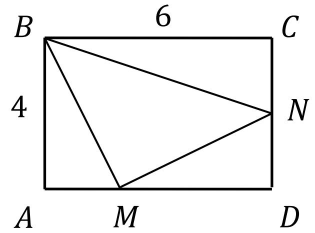
$x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

Враховуючи область визначення, розв'яжемо нерівність методом інтервалів:



Отже, нерівність має множину розв'язків $x \in [-3; -1] \cup \{5\}$. Обчислимо суму цілих розв'язків нерівності: $-3 - 2 - 1 + 5 = -1$.

Відповідь: -1.



6. Оскільки $AD = BC; DC = AB$, то $AM = \frac{1}{3}AD = 2$ *см*, $DM = \frac{2}{3}AD = 4$ *см*, $CN = DN = 2$ *см*.

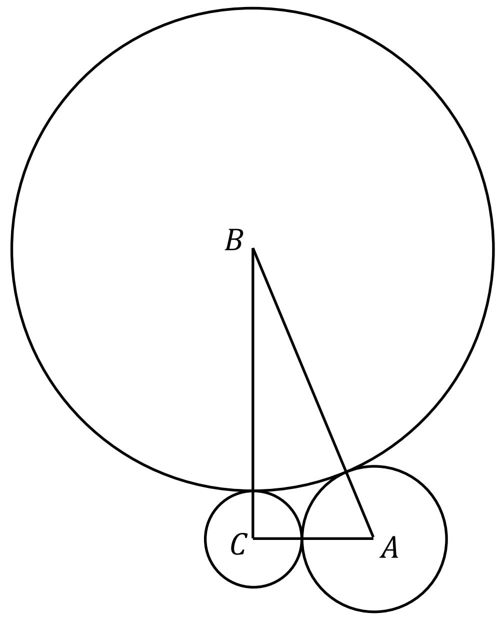
І спосіб. З ΔBAM (за т. Піфагора):

$$BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = 2\sqrt{5} \text{ см}.$$

Аналогічно, з ΔBCN $BN = 2\sqrt{10}$ *см*, з ΔMDN $MN = 2\sqrt{5}$ *см*. Отже, півпериметр ΔBMN рівний $p = \frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{10}+2\sqrt{10}}{2} = 2\sqrt{5} + \sqrt{10}$ *см*. За ф. Герона:

$$S_{\Delta BMN} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \sqrt{\left(2\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)\cdot\sqrt{10}\cdot\left(2\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)\cdot\sqrt{10}} = \sqrt{10\cdot(20-10)} = 10\ см^2.$$



II спосіб. Оскільки $S_{ABCD} = 24$ $см^2$, $S_{\Delta BAM} = 4$ $см^2$, $S_{\Delta BCN} = 6\ см^2$, $S_{\Delta MDN} = 4\ см^2$, то

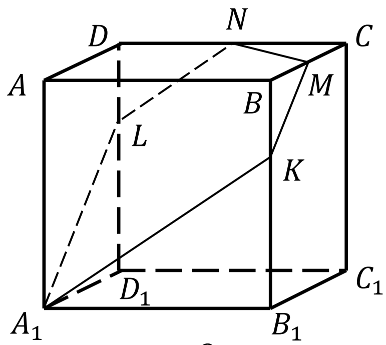
$$S_{\Delta BMN} = S_{ABCD} - S_{\Delta BAM} - S_{\Delta BCN} - S_{\Delta MDN} =$$
$$= 24 - 4 - 6 - 4 = 10\ см^2.$$

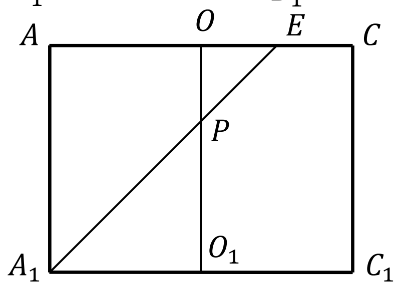
Відповідь: 10.

7. Нехай C, A, B – центри заданих кіл відповідно (див. рис.). Тоді $AB = 13\ см$, $AC = 5$ $см$, $BC = 12$ $см$. За теоремою, оберненою до т. Піфагора, трикутник ABC – прямокутний. Отже,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC = 30\ см^2.$$

Відповідь: 30.





8. Нехай L – точка перетину ребра DD_1 та площини (A_1MN) (див. рис.), O, O_1 – центри граней $ABCD$ та $A_1B_1C_1D_1$ відповідно, E – середина MN. Нехай P – точка перетину OO_1 та площини (A_1KMNL). Оскільки $\Delta A_1O_1P \sim \Delta EOP$ (див. рис.), $EO = \frac{1}{2}CO = \frac{1}{2}A_1O_1$, то $OP = \frac{1}{2}O_1P$. Так як $AB = \sqrt[3]{27} = 3\ см$, то $OP = 1\ см$, $O_1P = 2\ см$.

Відповідь: 2.

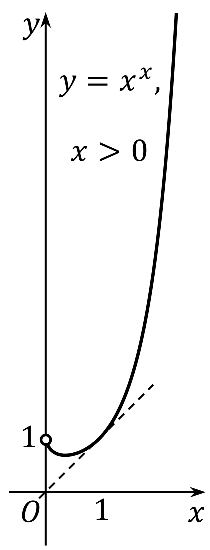
9. $\begin{cases} 2u(x) + v(x) = 3x + 4, \\ u(x) - 2v(x) = 4x - 3. \end{cases}$

Для знаходження невідомих функцій до другого рівняння додаємо перше, помножене на 2, а до першого рівняння – друге, помножене на -2:

$$\begin{cases} 5u(x) = 10x + 5, \\ 5v(x) = -5x + 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = 2x + 1, \\ v(x) = -x + 2. \end{cases}$$

Отже, $u(1)\cdot v(1) = (2\cdot 1 + 1)(-1 + 2) = 3$.

Відповідь: 3.



10. Оскільки $f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$, то

$$f'(x) = e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)' = x^x\cdot\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) =$$
$$= x^x\cdot(\ln x + 1);\ f'(1) = 1^1\cdot(\ln 1 + 1) = 1.$$

Також із співвідношення $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$ знаходимо кут нахилу дотичної $\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ (див. рис.).

Відповідь: 1.

Розв'язання завдань очного етапу, 2018 р.

Варіант 1

1.1. Нехай a і b – задані числа. Тоді

$$ab = \text{НСД}(a, b) \cdot \text{НСК}(a, b) = 2 \cdot 180 = 360.$$

Відповідь: 360.

1.2. $\begin{cases} a = b + 2, \\ ab = 360; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2, \\ b^2 + 2b - 360 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2, \\ b_1 = -20, b_2 = 18. \end{cases}$

Оскільки $b_1 = -20$ – сторонній розв'язок, то шукані числа $a = 20$, $b = 18$.

Відповідь: 20, 18.

2.1. $-3x + 7 = \frac{1}{2}x;$

$-3\frac{1}{2}x = -7;$

$x = 2.$

Відповідь: 2.

2.2. $-3x + 7 = ax;$

$(a + 3)x = 7.$

Якщо $a = -3$, то рівняння розв'язків не має;

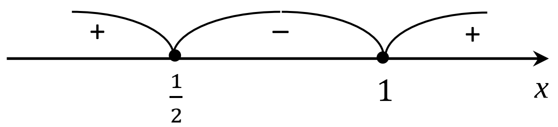
якщо $a \neq -3$, то рівняння має один розв'язок $x = \frac{7}{a+3}$.

Відповідь: $\left[\begin{array}{l} \emptyset, \text{якщо } a = -3, \\ \frac{7}{a+3}, \text{якщо } a \neq -3. \end{array}\right.$

3.1. $2x^2 - 3x + 1 \leq 0;$

$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1) \leq 0;$

$x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ (див. рис.).



Відповідь: $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

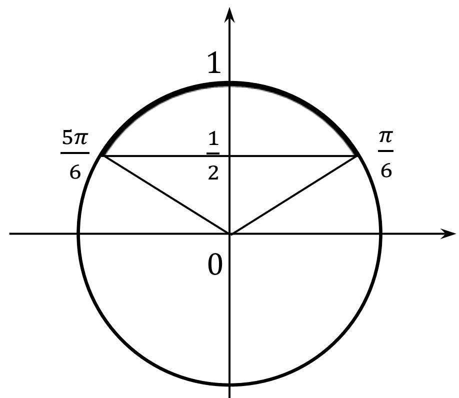
3.2. $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 \leq 0.$

Нехай $t = \sin x$, тоді

$2t^2 - 3t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right];$

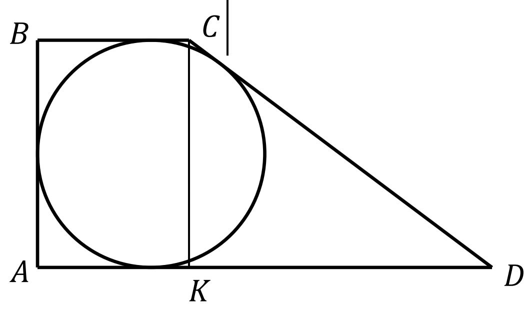
$\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow \sin x \geq \frac{1}{2};$

$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$ (див. рис.).



Відповідь: $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$.

4.1. Нехай $ABCD$ – задана трапеція, $BC = 10$ *см*, $AD = 30$ *см* (див. рис.). Нехай $AB = x$ *см*, $CD = y$ *см*. Проведемо висоту $CK = AB = x$ *см*. Оскільки $KD = 30 - 10 = 20$ *см*, то з ΔCKD (за т. Піфагора):



$$x^2 + 20^2 = y^2.$$

Оскільки у трапецію вписане коло, то сума її протилежних сторін рівна, тобто

$$x + y = 10 + 30.$$

Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 40 - x, \\ x^2 + 400 = y^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 40 - x, \\ x^2 + 400 = (40 - x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15, \\ y = 25. \end{cases}$$

Відповідь: 25 *см*.

4.2. Оскільки діаметр вписаного у трапецію кола рівний її висоті, то радіус кола рівний

$$R = \frac{CK}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5 \text{ см}.$$

Відповідь: 7,5 *см*.

5.1. Область визначення функції $f(x) = x \ln x$: $x \in (0; +\infty)$.

Знайдемо похідну функції

$$f'(x) = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Знайдемо критичні точки

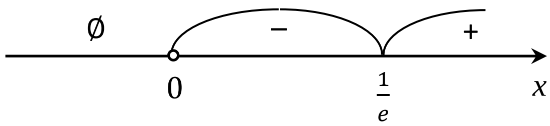
$$\ln x + 1 = 0;$$

$$\ln x = -1;$$

$$x = \frac{1}{e}.$$

Відповідь: $\frac{1}{e}$.

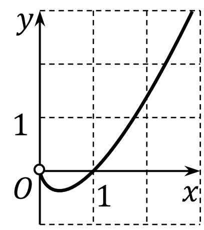
5.2. Знайдемо проміжки знакосталості похідної функції, на які критична точка розбиває область визначення (див. рис.):



$x \in \left(0; \frac{1}{e}\right)$	$x = \frac{1}{\mathrm{e}}$	$x \in \left(\frac{1}{e}; +\infty\right)$
$f(x) \searrow$	т. мін.	$f(x) \nearrow$

Отже, критична точка $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ – є точкою мінімуму, а мінімум функції:

$$f_{\min} = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \text{ (див. рис.).}$$



Відповідь: $f_{\min} = f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

Варіант 2

1.1. $\sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{9 - x^2} = 0.$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 + 6x + 9 \geq 0, \\ 9 - x^2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 3)^2 \geq 0, \\ (x + 3)(x - 3) \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ x \in [-3; 3] \leq 0; \end{cases}$

$$x \in [-3; 3].$$

Відповідь: $x \in [-3; 3]$.

1.2. Оскільки у лівій частині рівняння сума двох невід'ємних вирізів, то вона може бути рівня 0 тільки у випадку рівності 0 обох доданків:

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 9 = 0, \\ 9 - x^2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ x_1 = -3, x_2 = 3; \end{cases}$$

$x = -3.$

Відповідь: -3.

2.1. $S_n = 3(2^n - 1);$

$S_1 = 3(2^1 - 1) = 3 \Rightarrow b_1 = 3.$

Відповідь: 3.

2.2. $S_2 = 3(2^2 - 1) = 9 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 3, \\ b_1 + b_2 = 9; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 3, \\ b_2 = 6; \end{cases} \Rightarrow q = \frac{b_2}{b_1} = 2.$

Перевірка:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} = 3(2^n - 1).$$

Відповідь: 2.

3.1. $t^2 - 3t + 2 = 0;$

$t_1 = 1, t_1 = 2.$

Відповідь: $t_1 = 1, t_2 = 2.$

3.2. $\begin{cases} -x^2 + 5xy - 2y^2 = 2, \\ x^2 - 4xy + 2y^2 = -1. \end{cases}$

Зауважимо, що $y \neq 0$. Додамо до першого рівняння друге, помножене на 2:

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0.$

Розділимо рівняння на $y^2 \neq 0$:

$\frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y} + 2 = 0.$

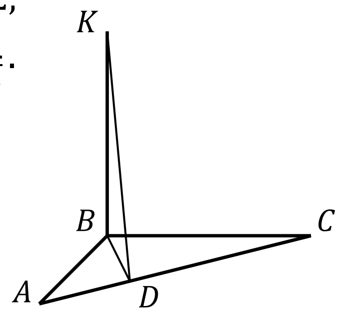
Зробимо заміну $t = \frac{x}{y}$:

$t^2 - 3t + 2 = 0;$

$t_1 = 1$	або	$t_1 = 2;$
$\frac{x}{y} = 1;$		$\frac{x}{y} = 2;$
$x = y;$		$x = 2y.$

Підставимо у друге рівняння системи:

$y^2 - 4y^2 + 2y^2 = -1;$	$4y^2 - 8y^2 + 2y^2 = -1;$
$y^2 = 1;$	$y^2 = \frac{1}{2};$
$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -1; \end{cases}$	$\begin{cases} x_3 = \sqrt{2}, \\ y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases} \begin{cases} x_4 = -\sqrt{2}, \\ y_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$



Відповідь: $(1; 1), (-1; -1), \left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\sqrt{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

4.1. Проведемо $KD \perp AC$ (див. рис.). Тоді $BD \perp AC$ (за т. про три перпендикуляри). З ΔABC:

$p_{ABC} = \frac{AB+BC+AC}{2} = \frac{10+17+21}{2} = 24\ см;$

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$= \sqrt{24(24-10)(24-17)(24-21)} =$

$= 84\ см^2$ (за ф. Герона);

$BD = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{AC} = \frac{2 \cdot 84}{21} = 8\ см.$

Відповідь: 8 $см$.

4.2. З ΔDBK (за т. Піфагора):

$KD = \sqrt{BD^2 + BK^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17\ см.$

Відповідь: 17 $см$.

5.1. $x^2 - 2x + y^2 = 0;$

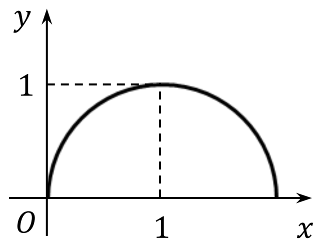
$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1;$

$(x-1)^2 + y^2 = 1^2.$

Отже, нам дано коло з центром у т. $(1;0)$ та радіусом $R = 1$.

Відповідь: 1.

5.2. **І спосіб.** $\int_0^2 \sqrt{2x - x^2}dx = \int_0^2 \sqrt{1^2 - (x-1)^2}dx.$



Оскільки функція $y = \sqrt{1^2 - (x-1)^2}$ задає півколо з центром у т. $(1;0)$ та радіусом $R = 1$, то з геометричного змісту визначеного інтегралу випливає, що він рівний площі цього півкола, тобто $\frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$.

ІІ спосіб. Зробимо заміну $x = 1 + \sin t$, $dx = (1 + \sin t)' dt = \cos t\, dt$:

$\int_0^2 \sqrt{1 - (x-1)^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1) dt = \left(\frac{1}{2}\sin 2t + t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \left(\frac{1}{2}\sin \pi + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\sin 0 + 0\right) = \frac{\pi}{2}.$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

ВІДПОВІДІ

I тур, 2015 р.

№ завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Відповідь	6	-3	2	4	744,8	60	10	490	–0,48	–12

II тур, 2015 р.

№ завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Відповідь	Г	В	Б	В	А	Б	А	Б	Д	В
№ завдання	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Відповідь	9	3	–0,75	15	9	7	2	50	4	–4

III тур, 2015 р.

№ завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Відповідь	Б	В	Г	Г	Г	А	В	В	Д	Г
№ завдання	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Відповідь	–2	40	1,5	1,4	45	5	2	10	1	360

I тур, 2016 р.

№ завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Відповідь	21	56	10	10	4	135	30	2,5	4	4

II тур, 2016 р.

№ завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Відповідь	Г	В	Д	Г	Г	А	Б	Д	А	Г
№ завдання	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Відповідь	4	16	1	–4	9	–1	12,5	0,5	65	0

III тур, 2016 р.

№ завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Відповідь	А	Б	В	Б	Б	Д	Д	А	В	В
№ завдання	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Відповідь	0,48	24	13	4	6	7,5	705,6	60	1,5	2,125

Дистанційний етап, 2017 р.

№ завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Відповідь	13	0,9	–2	21	1	1	0,5	2	7,5	4,5

Очний етап, 2017 р.

Варіант 1

1.1. -6

1.2. $(2; -1)$

2.1. $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

2.2. $x \in (1; 1{,}8] \cup (2; +\infty)$

3.1. -1

3.2. $x \in (-3; -1]$

4.1. $C(2; 0)$

4.2. $(x-2)^2 + y^2 = 25$

5.1. 2,4 *см*

5.2. $9{,}6\pi$ $см^3$

Варіант 2

1.1. 144 *грн*

1.2. 125%

2.1. -1

2.2. 7,5

3.1. $x_1 = -2, x_2 = 2$

3.2. $x \in \{-2\} \cup [2; +\infty)$

4.1. 1

4.2. $y = x$

5.1. 2,5 *см*

5.2. 3,75 *см*

Дистанційний етап, 2018 р.

№ завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Відповідь	9	84	2018	–3	–1	10	30	2	3	1

Очний етап, 2018 р.

Варіант 1

1.1. 360

1.2. 20; 18

2.1. 2

2.2. $\left[\begin{array}{l}\emptyset, \text{якщо } a = -3,\\ \frac{7}{a+3}, \text{якщо } a \neq -3.\end{array}\right.$

3.1. $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

3.2. $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$

4.1. 25 *см*

4.2. 7,5 *см*

5.1. $\frac{1}{e}$

5.2. $f_{\min} = f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$

Варіант 2

1.1. $x \in [-3; 3]$

1.2. -3

2.1. 3

2.2. 2

3.1. $t_1 = 1, t_2 = 2$

3.2. $(1; 1), (-1; -1), \left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$
$\left(-\sqrt{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

4.1. 8 *см*

4.2. 17 *см*

5.1. 1

5.2. $\frac{\pi}{2}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Конкурсні задачі з математики. – К.: Вища школа, 2001. – 432 с.
2. Гече Ф.Е. Збірник конкурсних тестових завдань з математики. – Ужгород: SHARK, 2015. – 238 с.
3. Збірник завдань з математики для професійної орієнтації вступників: методичні рекомендації для студентів спеціальності «Середня освіта. Математика (Математика. Інформатика)» математичного факультету УжНУ / М.М. Повідайчик, М.І. Глебена. – Ужгород: Говерла, 2017. – 44 с.
4. Капіносов А. та ін. ЗНО 2018. Математика. Комплексна підготовка. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2018. – 560 с.
5. Математичні олімпіади школярів України 1991–2000. – Київ, 2003. – 544 с. 12. Нікулін О.В., Кукуш О.Г. Геометрія. Поглиблений курс 7–9 класи. – Київ, Ірпінь: ВТФ «Перун», 1999. – 332 с.
6. Орос В.М., Петечук В.М., Петечук К.М. Контрольно–практичні роботи з математики. Частина I. – Ужгород: ІВЦ ЗІППО, 2006. – 200 с.
7. Орос В.М., Петечук В.М., Петечук К.М. Параметр. Посібник для абітурієнта та вчителя. – Ужгород: ІВЦ ЗІППО, 2005. – 44 с.
8. Полонський В.Б., Рабинович Ю.М., Якір М.С. Вчимося розв'язувати задачі з геометрії. – К.: Магістр–Б, 1998. – 256 с.
9. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник. – К.: А.С.К., 2004. – 344 с.
10. Федак І.В. Методи розв’язування олімпіадних завдань з математики і не тільки їх. – Чернівці: Зелена Буковина, 2002. – 340 с.
11. Шапочка І.В., Шапочка В.І. Збірник конкурсних завдань з математики. – Ужгород: Патент, 2004. –116 с. (частина 1), 128 с. (частина 2).
12. Ясінський В.А. Практикум з розв'язування задач математичних олімпіад. – Харків: Основа, 2006. – 126 с.

Підписано до друку 22.05.2018. Формат 60х84/16.
Гарнітура Cambria. Ум. друк. арк. 2,3.
Наклад 100 прим. Віддруковано на різографі.

Видавництво УжНУ «Говерла»
88000, м. Ужгород, вул. Капітульна, 18.
Свідоцтво про внесення до державного реєстру видавців вигoтівників, і розповсюджувачів видавничої продукції
Серія 3т №32 від 31 травня 2006 року