Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
„Ужгородський національний університет“

Ігор Шапочка

КУРС ЛЕКЦІЙ З АЛГЕБРИ

Навчальний посібник

Ужгород
Видавництво УжНУ „Говерла“
2013

УДК 512.6
ББК 22.14
Ш 242

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, професор *А. П. Петравчук*;
кандидат фізико-математичних наук, доцент *О. А. Кирилюк*

Шапочка І. В. Курс лекцій з алгебри. Навчальний посібник. – Ужгород: Видавництво УжНУ „Говерла“, 2013. – 221 с. – ISBN 978-966-2095-79-1.

Навчальний посібник представляє собою курс лекцій з алгебри, що читався автором студентам математичного факультету Ужгородського національного університету. В ньому розглядаються і вивчаються найпростіші властивості таких понять як множина, відображення множин, система лінійних рівнянь, перестановка, підстановка, матриця, детермінант матриці, n-вимірний векторний простір, комплексне число, многочлен з однією та декількома змінними, корінь многочлена з однією змінною, група, кільце, поле, поле раціональних дробів. Посібник містить також завдання для самостійної роботи студентів.

Для студентів вищих навчальних закладів напряму підготовки 6.040201 „математика“.

Рекомендовано до друку Редакційно-видавничою радою ДВНЗ „Ужгородський національний університет“ (протокол №3 від 18 листопада 2013 року).

ISBN 978-966-2095-79-1

Зміст

Передмова

Цей посібник написаний на допомогу студентам математичного факультету, які повинні вивчити навчальну дисципліну „Алгебра“, що читається у першому семестрі студентам, як денної так і заочної форм навчання. Даний курс охоплює наступні теми: множини, відображення множин, множина комплексних чисел, системи лінійних рівнянь, перестановки, підстановки, детермінанти, матриці та дії над ними, n-вимірний векторний простір, ранг матриці, системи лінійних однорідних рівнянь, групи, кільця, поля, многочлени від однієї та кількох невідомих, корені многочленів, незвідні многочлени, поле раціональних дробів, симетричні многочлени. Всі згадувані вище поняття в тій чи іншій мірі зустрічаються в будь-якому розділі математики.

Послідовність викладених тем у даному посібнику продиктована багаторічною традицією читання цієї навчальної дисципліни лекторами кафедри алгебри Ужгородського університету (див. [1]).

Кожен параграф цієї методичної розробки складається із трьох частин. Перша частина має теоретичний характер, тут даються означення, формулюються основні твердження разом з їх доведеннями. У другій частині параграфу наводяться зразки розв'язування типових задач з найбільш важливих питань програми навчальної дисципліни „Алгебра“. Третя частина параграфу складається з вправ, самостійне розв'язання яких дасть можливість читачу глибше зрозуміти теоретичний матеріал першої частини і виробити певні навички оперування вище згаданими поняттями алгебри.

Вважаємо, що систематичне опрацювання студентом кожного із параграфів посібника сприятиме у вивченні навчальної дисципліни „Алгебра“, а також допоможе підготуватися до складання іспиту з цього предмету.

Для більш глибшого розуміння алгебри та й упевненішого поступу у чарівний світ математики ми наполегливо радимо прочитати підручники з алгебри [2–7], що включені до списку літератури. Водночас ми рекомендуємо перелік збірників задач з алгебри [8–12].

Автор

§ 1. Множини. Відображення множин

У математиці деякі поняття є первинними або, ще кажуть, неозначеними. Зокрема, одним із таких понять є поняття *множина*. Його слід розуміти, як довільну сукупність об'єктів, які називають *елементами* множини. Розглядають також *порожню* множину, тобто множину, що не містить жодного елементу.

Множини найчастіше позначають великими буквами латинського алфавіту: A, B, $\ldots$, Z, а їхні елементи — малими буквами: a, b, $\ldots$, z. Для деяких важливих множин прийнято стандартні позначення. Так, буквами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ позначають відповідно множину натуральних чисел, множину цілих чисел, множину раціональних чисел і множину дійсних чисел. Порожню множину позначають символом $\varnothing$.

Множина, що складається із скінченного числа елементів, називається *скінченною*. Число елементів скінченної множини X позначається $|X|$. Скінченні множини можуть бути описані шляхом перерахування всіх її елементів; звичайно ці елементи записуються у фігурних дужках. Наприклад, множину A перших трьох латинських літер записують у вигляді $\{a, b, c\}$. У цьому випадку кажуть, що елемент a належить множині A і записують $a \in A$ або $A \ni a$. Запис $d \notin A$ означає, що d не є елементом множини A.

Множину B називають *підмножиною* множини A, якщо всі елементи множини B належать множині A, і пишуть $B \subset A$ або $A \supset B$. За означенням порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

Дві множини A і B називаються *рівними* (позначають $A = B$), якщо множина A є підмножиною множини B і, навпаки, множина B є підмножиною множини A. Запис $A \neq B$ означає, що множини A і B — не рівні.

Підмножина A множини B називається *власною*, якщо $A \neq \varnothing$ і $A \neq B$.

Для виділення підмножини $A \subset B$ часто використовують деяку властивість, якій задовольняють тільки елементи із A. Наприклад, $\{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2m \text{ для деякого } m \in \mathbb{Z}\}$ — множина всіх парних цілих чисел.

Об'єднанням двох множин називається множина, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній з цих множин. Об'єднання множин A і B позначається $A \cup B$.

Перерізом двох множин називається множина, яка складається з усіх елементів, що належать одночасно обом цим множинам. Переріз множин A і B позначається $A \cap B$.

Твердження 1. *Для довільних скінченних множин A і B справджується рівність $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.*

Дійсно, якщо перераховувати спочатку всі елементи множини A, а опісля — множини B, то всі елементи перерізу $A \cap B$ будуть пераховані двічі. Отже, число елементів об'єднання $A \cup B$ дорівнює сумі чисел елементів кожної з множин A і B без числа елементів перерізу $A \cap B$.

Різницею двох множин A і B називається множина, яка складається з усіх елементів множини A, які не належать множині B. Різницю множин A і B позначають $A \setminus B$.

Нехай X і Y — довільні множини. *Впорядкованою парою* елементів $x \in X$, $y \in Y$ називають символ (x, y). Вважають, що впорядковані пари (a, b) і (c, d) рівні, якщо $a = c$ і $b = d$. *Декартовим добутком* двох множин X і Y називається множина всіх впорядкованих пар (x, y) елементів $x \in X$, $y \in Y$. Декартів добуток множин X і Y позначають $X \times Y$.

Підмножина ρ множини $A \times B$ називається *відповідністю* або *бінарним відношенням* між множинами A і B. Якщо $(a, b) \in \rho$, то кажуть, що елементу a *відповідає* елемент b, або, що елемент a знаходиться у відношенні ρ з елементом b. Замість $(a, b) \in \rho$ часто пишуть $a\rho b$.

Відповідність, при якій кожному елементу множини A відповідає єдиний елемент множини B, називається *відображенням множини A в множину B*.

Відображення множин звичайно позначають буквами: f, g, $h, \ldots,$ і пишуть $f : A \to B$ або $A \xrightarrow{f} B$. При цьому кажуть, що A — *область визначення*, а B — *область значень* відображення f.

Якщо при відображенні f елементу $a \in A$ відповідає елемент $b \in B$, то елемент b називають *образом* елемента a, а елемент a називають *прообразом* елемента b і пишуть $b = f(a)$.

Множину $\operatorname{Im} f = \{f(a) \mid a \in A\}$ називають *образом відображення* $f : A \to B$.

Повним прообразом елемента $b \in B$ при відображенні $f : A \to B$ називається множина $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$.

Відображення $f : A \to B$ називається *сюр'єктивним*, якщо $\operatorname{Im} f = B$. Воно називається *ін'єктивним*, якщо для довільних різних елементів a_1, $a_2 \in A$ $(a_1 \neq a_2)$ образи їх різні, тобто $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Нарешті, відображення $f : A \to B$ називається *бієктивним*, якщо воно одночасно є сюр'єктивним і ін'єктивним.

Теорема 1. *Нехай $f : A \to B$ — бієктивне відображення. Тоді відповідність f^{-1}, визначена за правилом: кожному елементу $b \in B$ відповідає його прообраз $f^{-1}(b)$, є бієктивним відображенням множини B в множину A.*

Доведення. По-перше, оскільки f є бієктивним відображенням, то кожен елемент b із множини B має єдиний прообраз із A, а тому відповідність f^{-1} є відображенням із множини B в множину A.

По-друге, кожен елемент a із A є образом елемента $b = f(a)$ при відображенні $f^{-1} : B \to A$. Тому відображення $f^{-1} : B \to A$ є сюр'єктивним.

Нарешті, образи $f^{-1}(b_1)$, $f^{-1}(b_2)$ будь-яких двох різних елементів b_1, b_2 множини B — різні. Оскільки у протилежному випадку ми одержали б, що

$$b_1 = f(f^{-1}(b_1)) = f(f^{-1}(b_2)) = b_2.$$

Це означає, що відображення $f^{-1} : B \to A$ є ін'єктивним, а отже, і бієктивним. Теорему доведено.

Рівність $f = g$ двох відображень $f : A \to B$ і $g : A \to B$ означає, що для будь-якого $a \in A$ справедлива рівність $f(a) = g(a)$.

Одиничним або *тотожним* відображенням множини A в себе називається відображення $e_A : A \to A$ таке, що $e_A(a) = a$ для довільного $a \in A$. Очевидно тотожне відображення e_A є бієктивним відображенням із множини A у множину A.

Добутком двох відображень $f : A \to B$ і $g : B \to C$ називається відображення $gf : A \to C$, яке визначається умовою $gf(a) = g(f(a))$ для будь-якого $a \in A$.

Очевидно, для довільного відображення $f : A \to B$

$$fe_A = f, \qquad e_B f = f.$$

Теорема 2. *Добуток відображень задовольняє асоціативному закону. Це означає, що для довільних трьох відображень $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ справедлива рівність*

$$h[gf] = [hg]f.$$

Доведення. Нехай $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ довільні відображення, a — довільний елемент множини A. Тоді із означення добутку відображень слідує, що обидва відображення $h[gf]$ і $[hg]f$ є відображеннями із множини A в множину D, а також справедливі наступні рівності

$$h[gf](a) = h(gf(a)) = h(g(f(a))) = hg(f(a)) = [hg]f(a).$$

Тому за означенням рівності відображень відображення $h[gf]$ і $[hg]f$ рівні.

Нехай $f : A \to B$ — деяке відображення. Якщо існує відображення $g : B \to A$ таке, що

$$gf = e_A, \qquad fg = e_B, \tag{1}$$

то кажуть, що f — *оборотне відображення*, а g називають *оберненим відображенням* до f і позначається символом f^{-1}. Це позначення є виправданим. По-перше тому, що відображення $f^{-1} : B \to A$, про яке говориться у теоремі 1 є оберненим до відображення f (нагадаємо, що в умові теореми 1 вимагається бієктивність відображення f). По-друге, обернене відображення до f, якщо воно існує, визначається однозначно. Дійсно, якщо існує ще одне відображення $g' : B \to A$, для якого

$$g'f = e_A, \qquad fg' = e_B, \tag{2}$$

то спираючись на рівності (1), (2) і на теорему 2, одержимо

$$g' = e_A g' = [gf]g' = g[fg'] = ge_B = g.$$

І нарешті, по-третє, справедлива наступна теорема.

Теорема 3. *Відображення $f : A \to B$ є оборотним тоді і тільки тоді, коли воно є бієктивним.*

Доведення теореми спирається на наступну лему, яка представляє самостійний інтерес.

Лема 1. *Якщо $f : A \to B$, $g : B \to A$ — довільні відображення, для яких $gf = e_A$, то f — ін'єктивне, а g — сюр'єктивне відображення.*

Дійсно, нехай a_1, $a_2 \in A$ і $f(a_1) = f(a_2)$. Тоді

$$a_1 = e_A(a_1) = gf(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = gf(a_2) = e_A(a_2) = a_2.$$

Отже, f — ін'єктивне відображення.

Якщо a — довільний елемент із A, то

$$a = e_A(a) = gf(a) = g(f(a)),$$

тобто a є образом елемента $f(a)$ множини B при відображенні g. Це в свою чергу означає, що g — сюр'єктивне відображення. Лему доведено.

Повернемося до доведення теореми. Припустимо спочатку, що відображення f є оборотним, а g — обернене відображення до f. Тоді із рівностей (1) і із попередньої леми слідує, що f одночасно є ін'єктивним та сюр'єктивним відображенням. Іншими словами, відображення f є бієктивним.

Навпаки, нехай f є бієктивним відображення із множини A в множину B. Тоді відповідність f^{-1}, визначена в теоремі 1, є відображенням, для якого справедливі наступні рівності

$$f^{-1}f(a) = f^{-1}(f(a)) = a, \quad ff^{-1}(b) = f(f^{-1}(b)) = b,$$

де a і b — довільні елементи відповідно множин A і B. Тобто $f^{-1}f = e_A$, $ff^{-1} = e_B$. Таким чином, f — оборотне відображення, а f^{-1} — обернене до нього відображення. Теорему доведено.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. У групі із 50 студентів 36 студентів володіють українською мовою, 12 — угорською, 5 — обома українською та угорською мовами. Знайдіть число студентів, які не володіють жодною із цих мов.

Розв'язання. Нехай S — множина всіх студентів групи, U — множина, що складається із усіх студентів цієї групи, які володіють українською мовою, а M — множина всіх студентів групи, що володіють угорською мовою. Тоді шукане число студентів, які не володіють ні українською, ні угорською мовами дорівнює $|S \setminus (U \cup M)|$.

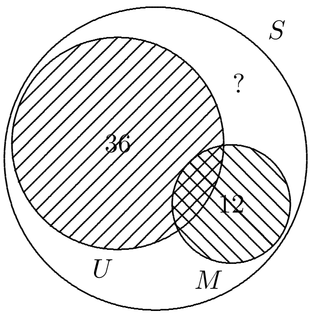

Рис. 1.

Оскільки $U \cup M \subset S$, то

$$|S \setminus (U \cup M)| = |S| - |U \cup M|.$$

Далі, за твердженням 1

$$|U \cup M| = |U| + |M| - |U \cap M| = 36 + 12 - 5 = 43.$$

Тому $|S \setminus (U \cup M)| = 50 - 43 = 7$. Таким чином, 7 студентів групи не володіють ні українською, ні угорською мовами. На рис. 1 проілюстровано розв'язання цієї задачі за допомогою кругів Ейлера-Венна.

Задача 2. Нехай $f : A \to B$ — відображення множини A в множину B. Для довільної підмножини $X \subset A$ позначимо $f(X) = \{f(x) | x \in X\}$. Довести, що для довільних підмножин X і Y множини A

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y), \tag{3}$$

$$f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y). \tag{4}$$

Розв'язання. Доведемо спочатку рівність (3). Для цього досить показати, що

$$f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y), \qquad f(X) \cup f(Y) \subset f(X \cup Y). \tag{5}$$

Нехай $b \in f(X \cup Y)$. Тоді b є образом деякого елемента $z \in X \cup Y$. Оскільки $z \in X$ або $z \in Y$, то $b = f(z) \in f(X)$ або $b = f(z) \in f(Y)$. Отже, $b \in f(X) \cup f(Y)$. Таким чином, перше із включень (5) доведено. Припустимо тепер, що $b \in f(X) \cup f(Y)$. Тоді $b \in f(X)$ або $b \in f(Y)$. Звідси $b = f(z)$ для деякого елемента $z \in X$ або $b = f(z')$ для деякого елемента $z' \in Y$. Але елементи z і z' належать об'єднанню $X \cup Y$. Тому $b \in f(X \cup Y)$, що завершує доведення рівності (3).

Нехай тепер $b \in f(X \cap Y)$. Тоді $b = f(z)$ для деякого елемента $z \in X \cap Y$. Оскільки $z \in X$ і $z \in Y$, то $b \in f(X)$ і $b \in f(Y)$. Отже, $b \in f(X) \cap f(Y)$. Таким чином, справджується включення (4).

Зауважимо, що не завжди має місце рівність

$$f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y).$$

Наприклад, розглянемо відображення $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, визначене за правилом $f(z) = |z|$ $(z \in \mathbb{Z})$. Покладемо $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Тоді $f(X \cap Y) = \varnothing$, $f(X) \cap f(Y) = \mathbb{N}$.

Задача 3. Нехай X — множина, що складається із n елементів $(n \in \mathbb{N})$. Знайти число C_n^m всіх підмножин множини X, які складаються із m елементів (це число називають *числом комбінацій із n елементів по m*).

Розв'язання. Доведемо методом математичної індукції, що

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \tag{6}$$

де $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$ $(k \in \mathbb{N})$. Індукцію проведемо по m.

Очевидно, число C_n^1 всіх підмножин в X, які складаються з одного елемента дорівнює n. А тому $C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!}$.

Припустимо, що рівність (6) справедлива для довільних натуральних чисел m менших від деякого натурального числа k $(k \le n)$. Нехай $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Розглянемо для довільного натурального числа $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ множину $M_i = \{Y \subset X \mid |Y| = k,\ a_i \in Y\}$ (вона складається із усіх підмножин із k елементів множини X, які містять елемент a_i). Очевидно,

$$|M_i| = C_{n-1}^{k-1}, \qquad \left|\bigcup_{j=1}^{n} M_i\right| = C_n^k, \tag{7}$$

де

$$\bigcup_{j=1}^{n} M_i = \bigcup_{j=1}^{n-1} M_i \cup M_n \quad (n = 2,\ 3,\ 4\ \ldots).$$

Далі, якщо $Y = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_k}\} \subset X$, то $Y \in M_i$ тоді і тільки тоді, коли $i \in \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$. Звідси, із рівностей (7) та із припущення індукції слідує, що

$$C_n^k = \frac{n \cdot C_{n-1}^{k-1}}{k} = \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

що й потрібно було довести.

Задача 4. Нехай $f = \{(a, [a]) \mid a \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ (де $[a]$ — ціла частина раціонального числа a). Показати, що відповідність f є сюр'єктивним відображенням множини $\mathbb{Q}$ в множину $\mathbb{Z}$. Чи є відображення f бієктивним?

Розв'язання. Добре відомо, що ціла частина будь-якого раціонального числа визначається цим числом однозначно. Тому відповідність f є відображенням множини $\mathbb{Q}$ в множину $\mathbb{Z}$, оскільки кожному раціональному числу a відповідає цілком певний елемент $[a] \in \mathbb{Z}$.

Далі, будь-який елемент $a \in \mathbb{Z}$ є образом елемента $a \in \mathbb{Q}$, оскільки $f(a) = [a] = a$. Таким чином, $\operatorname{Im} f = \mathbb{Z}$, тобто f — сюр'єктивне відображення.

Але, оскільки $[\frac{1}{2}] = 0$, то $f(0) = 0 = f(\frac{1}{2})$. Тому відображення f не є ін'єктивним, а отже, воно не є бієктивним.

Вправи для самостійної роботи

1. Які з наступних включень вірні? Обґрунтуйте відповідь:

а)$2^{12} \in \{5037,\ 4095,\ 38\}$; б) $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$; в) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$;

г) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}\}$; д) $\varnothing \in \varnothing$; е) $1 \in \{\{1, 2\}\}$.

2. Перерахуйте елементи наступних множин:

а) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$;

б) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$;

в) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2x}{x^2+1} < 30\}$;

г) множина всіх шестизначних телефонних номерів, в яких всі цифри різні і містять однакову кількість парних і непарних цифр;

д) множина всіх натуральних чисел менших за тридцять, які можна представити у вигляді суми квадратів двох натуральних чисел.

3. Яка з наступних множин скінченна:

а) $\{x \in \mathbb{N} | \ \exists y \in \mathbb{N}, 2x+3y = 24\}$; б) $\{x \in \mathbb{N} | \ \exists y \in \mathbb{Z}, 2x+3y = 24\}$?

4. Чи рівні множини:

а) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 2 = 0\}$ і $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2x - 2 = 0\}$;

б) $\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{12}{x} \in \mathbb{Z}\}$ і $\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{12}{x^2} \in \mathbb{Z}\}$;

в) $\{1, 2, 3\}$ і $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

г) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{x-2} < 1\}$ і $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$?

5. Виписати всі підмножини множини A:

а) $A = \{\{1, 2\}, \{3\}, 1\}$; б) $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

6. Наведіть приклад множин A, B, C таких, щоб виконувались наступні умови:

а) $A \in B$, $B \notin C$, $A \subset C$; б) $A \in B$, $A \notin C$, $C \subset B$.

7. Нехай A, B, C — підмножини множини X. Довести, що:

а) $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$; б) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$.

8. Нехай X — множина і $|X| = n$ ($n \in \mathbb{N}$). Знайти число всіх підмножин в X, що складаються із парного числа елементів.

9. Довести формулу бінома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i} \quad (a, b \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}).$$

10. Наведіть приклади відображень:

а) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; б) $\mathbb{R} \to \{0,1\}$; в) $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$; г) $\mathbb{N} \to \{0,1,2\}$.

11. Доведіть, що кожна із наступних відповідностей є відображенням із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ і знайти його образ:

а) $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y = x^2 - 1\}$;

б) $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y = \sin x + 1\}$;

в) $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y = 2^x\}$;

г) $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y = \log_2(x^2 + 3x + 3)\}$.

12. Знайдіть повний прообраз елемента $0 \in \mathbb{R}$ при наступних відображеннях $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $x \to \sin x$; б) $x \to \lg(x^2+1)$; в) $x \to x^2 + x + 2$.

13. Для кожного із наступних відображень дослідити, чи є воно ін'єктивним, сюр'єктивним:

а) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x + 5$;

б) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{x^2+3x+4}$;

в) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+3)^3$;

г) $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f((a,b)) = a + b$;

д) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $f(a) = (a,a)$.

14. Вкажіть всі сюр'єктивні відображення множини $A = \{1,2,3\}$ в множину $B = \{a,b\}$. Чи існують ін'єктивні відображення множини A в множину B?

15. Знайдіть всі відображення множини $A = \{1,2\}$ в себе, вкажіть які з них ін'єктивні, сюр'єктивні.

16. Нехай f — відображення скінченної множини A в себе. Довести, що f — ін'єктивне тоді і тільки тоді, коли f — сюр'єктивне.

17. Нехай X, Y — скінченні множини і $|X| = m$, $|Y| = n$. Знайти число

а) відображень;

б) ін'єктивних відображень;

в) бієктивних відображень;

г) сюр'єктивних відображень

множини X в множину Y.

§ 2. Комплексні числа. Алгебраїчна форма комплексного числа

Нехай $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — декартів добуток множини дійсних чисел на себе. Як і раніше (див. §1), будемо вважати, що дві впорядковані пари (a, b) та (c, d) *рівні* між собою, якщо $a = c$ та $b = d$, і також писатимемо в цьому випадку

$$(a, b) = (c, d). \tag{1}$$

Сумою двох довільних впорядкованих пар (a, b), $(c, d) \in \mathbb{C}$ називається пара цієї множини вигляду

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d). \tag{2}$$

Добутком двох впорядкованих пар (a, b), $(c, d) \in \mathbb{C}$ називається пара множини $\mathbb{C}$ вигляду

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{3}$$

Теорема 1. *Для довільних впорядкованих пар (a, b), (c, d), (e, f) із множини $\mathbb{C}$ справедливі наступні рівності:*

$$(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b), \tag{4}$$

$$[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)], \tag{5}$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b), \tag{6}$$

$$[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)], \tag{7}$$

$$(a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)] = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f). \tag{8}$$

Доведення. Нехай (a, b), (c, d), (e, f) довільні впорядковані пари з множини $\mathbb{C}$. Тоді із означень суми та добутку елементів множини $\mathbb{C}$ та властивостей операцій додавання і множення дійсних чисел слідує справедливість наступних рівностей:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b),$$

$$[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, d) =$$

$$= ([a + c] + e, [b + d] + f) = (a + [c + e], b + [d + f]) =$$

$$= (a, b) + (c + e, d + f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)],$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) = (c, d) \cdot (a, b).$$

Цим саме доведені комутативність та асоціативність операції додавання та комутативність операції множення елементів множини $\mathbb{C}$, тобто рівності (4), (5), (6). Далі, обчисливши та порівнявши наступні вирази

$$\begin{aligned}
[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f) &= (ac-bd, ad+bc)\cdot(e,f) = \\
&= (ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce), \\
(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)] &= (a,b)\cdot(ce-df, cf+de) = \\
&= (ace-adf-bcf-bde, acf+ade+bce-bdf),
\end{aligned}$$

отримаємо справедливість закону асоціативності операції множення елементів множини $\mathbb{C}$ (рівність (7)).

Аналогічно доводиться закон дистрибутивності операції множення відносно операції додавання елементів множини $\mathbb{C}$ (рівність (8)). Він випливає із наступних рівностей

$$\begin{aligned}
[(a,b)+(c,d)]\cdot(e,f) &= (a+c, b+d)\cdot(e,f) = \\
&= (ae+ce-bf-df, af+cf+be+de), \\
(a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f) &= (ae-bf, af+be)+(ce-df, cf+de) = \\
&= (ae-bf+ce-df, af+be+cf+de).
\end{aligned}$$

Теорему доведено.

Таким чином, на множині $\mathbb{C}$ нами визначено дві алгебраїчні операції додавання та множення, які мають ті ж самі основні властивості, що і операції додавання та множення елементів множин дійсних та раціональних чисел, тобто вони обидві комутативні, асоціативні і зв'язані законом дистрибутивності.

Нульовою парою множини $\mathbb{C}$ називається пара (x,y), яка задовольняє рівності $(a,b)+(x,y)=(a,b)$ для довільної пари $(a,b)\in\mathbb{C}$.

Одиничною парою множини $\mathbb{C}$ називається пара (x,y), яка задовольняє рівності $(a,b)\cdot(x,y)=(a,b)$ для довільної пари $(a,b)\in\mathbb{C}$.

Нескладно переконатися (залишимо доведення читачеві), що пари $(0,0)$ і $(1,0)$ є відповідно нульовою та одиничними парами множини $\mathbb{C}$. Причому ці пари є єдиними відповідно нульовою та одиничною парами множини $\mathbb{C}$. Дійсно, якщо (x,y) деяка нульова пара, то

$$(0,0)=(0,0)+(x,y)=(x,y)+(0,0)=(x,y).$$

Аналогічно, якщо (x',y') — деяка одинична пара, то

$$(1,0)=(1,0)\cdot(x',y')=(x',y')\cdot(1,0)=(x',y').$$

Нульова та одиничні пари мають аналогічні властивості, які мають відповідно нуль та одиниця в множинах раціональних чисел та дійсних чисел.

Протилежною до пари $(a, b) \in \mathbb{C}$ називається пара $(x, y) \in \mathbb{C}$ така, що $(a, b) + (x, y) = (0, 0)$. Протилежну пару до пари (a, b) позначатимемо $-(a, b)$.

Оберненою до пари $(a, b) \in \mathbb{C}$ називається пара $(x, y) \in \mathbb{C}$ така, що $(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$. Обернену пару до пари (a, b) позначатимемо $(a, b)^{-1}$.

Теорема 2. *Для довільної пари (a, b) множини $\mathbb{C}$ існує єдина протилежна пара, причому $-(a, b) = (-a, -b)$. Для довільної ненульової пари (a, b) множини $\mathbb{C}$ існує єдина обернена пара, причому*

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

Доведення. Нехай (a, b) — довільна впорядкована пара із множини $\mathbb{C}$. Оскільки $(a, b) + (-a, -b) = (a + (-a), b + (-b)) = (0, 0)$, то пара $(-a, -b)$ є протилежною до пари (a, b). Якщо (x, y) — деяка інша протилежна пара до пари (a, b), то

$$(x, y) = (x, y) + (0, 0) = (x, y) + ((a, b) + (-a, -b)) =$$
$$= ((x, y) + (a, b)) + (-a, -b) = (0, 0) + (-a, -b) = (-a, -b).$$

Цим саме доведена єдиність протилежної пари до пари (a, b).

Нехай тепер (a, b) — довільна ненульова впорядкована пара із множини $\mathbb{C}$. Тоді $a^2 + b^2 \neq 0$ і можна розглянути пару

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

Обчислимо

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) =$$
$$= \left(a \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} - b \cdot \left(-\frac{b}{a^2 + b^2} \right), a \cdot \left(-\frac{b}{a^2 + b^2} \right) + b \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0).$$

Отже, пара

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

є оберненою парою до пари (a, b). Єдиність одиничної пари доводиться аналогічно, як єдиність нульової пари. Теорему доведено.

Звертаємо увагу, що до нульової пари не існує оберненої, оскільки для довільною впорядкованої пари $(x, y) \in \mathbb{C}$

$$(x, y) \cdot (0, 0) = (0, 0).$$

Множина $\mathbb{C}$ всіх впорядкованих пар дійсних чисел із визначеними на ній операціями додавання та множення пар, що задаються формулами (2), (3), називається *множиною комплексних чисел*, а самі елементи цієї множини називаються *комплексними числами*.

Із теореми 2 випливає існування обернених операцій до операцій додавання та множення комплексних чисел. Які відповідно будуть називатися *відніманням* та *діленням* і визначатимуться наступним чином

$$(a, b) - (c, d) = (a, b) + [-(c, d)],$$
$$\frac{(a, b)}{(c, d)} = (a, b) \cdot (c, d)^{-1} \quad ((c, d) \neq 0).$$

Алгебраїчна форма комплексного числа. Розглянемо підмножину $R = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$. Поставимо у відповідність кожному комплексному числу $(a, 0)$ цієї множини дійсне число a $((a, 0) \to a)$. Очевидно, ця відповідність є бієктивним відображенням множини R в множину $\mathbb{R}$ дійсних чисел і

$$(a, 0) + (b, 0) \to a + b, \quad (a, 0) \cdot (b, 0) \to a \cdot b$$

для довільних a, $b \in \mathbb{R}$. Тобто комплексні числа вигляду $(a, 0)$ додаються та перемножуються одне з одним подібно відповідним дійсним числам. Отже, розглядувана множина R за своїми алгебраїчними властивостями нічим не відрізняється від множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Це дозволяє ототожнити комплексне число $(a, 0)$ з дійсним числом a, тобто вважати, що множина комплексних чисел містить як підмножину множину дійсних чисел.

Розглянемо тепер комплексне число $(0, 1)$ і обчислимо квадрат цього числа: $(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$. В результаті одержали комплексне число $(-1, 0)$, яке відповідає дійсному числу -1. Таким чином, на відміну від множини дійсних чисел в множині комплексних чисел існує розв'язок рівняння $x^2 + 1 = 0$.

Оскільки $(b, 0) \cdot (0, 1) = (0, b)$, то довільне комплексне число (a, b) можна представити у вигляді

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1). \tag{9}$$

Позначивши комплексне число $(0, 1)$ через i, яке надалі називатимемо *уявною одиницею*, рівність (9) можна переписати у вигляді $(a, b) = a + b \cdot i$ або $(a, b) = a + bi$.

Запис $a + bi$ називається *алгебраїчною формою запису* комплексного числа $\gamma = (a, b)$. Число a в цьому записі називається *дійсною частиною*, а bi — *уявною частиною* комплексного числа γ.

З означення рівності елементів множини $\mathbb{C}$, тобто впорядкованих пар (a, b) і (c, d), випливає що *комплексні числа $a + bi$ і $c + di$ рівні тоді і тільки тоді, коли відповідно рівні їх дійсні частини і коефіцієнти уявних частин, тобто коли $a = c$ і $b = d$.*

Додавання, віднімання, множення і ділення комплексних чисел записаних в алгебраїчній формі проводяться наступним чином

$$\begin{gathered}(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,\\ (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,\\ (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,\\ \frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i \quad (c + di \neq 0).\end{gathered}$$

Комплексно спряжені числа. Нехай задано комплексне число $\gamma = a + bi$. Комплексне число $a - bi$ називається *комплексно спряженим* (або надалі просто спряженим) до числа γ. Комплексно спряжене до числа γ позначається символом $\overline{\gamma}$. Очевидно, числом, що спряжене до числа $\overline{\gamma}$, є γ. Тому йтиметься про пару спряжених чисел. Кожне дійсне число є спряженим з самим собою. Навпаки, якщо деяке комплексне число є спряженим з самим собою, то це число є дійсним.

Теорема 3. *Сума і добуток спряжених комплексних чисел є дійсними числами.*

Доведення. Справді, нехай $\gamma = a + bi$ — довільне комплексне число, записане в алгебраїчній формі. Тоді

$$\gamma + \overline{\gamma} = (a + bi) + (a - bi) = 2a \in \mathbb{R},$$

$$\gamma \cdot \overline{\gamma} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}.$$

Теорему доведено.

Теорема 4. *Число, спряжене з сумою (добутком) двох комплексних чисел дорівнює сумі (добутку) чисел, спряжених з доданками (співмножниками) :*

$$\overline{\gamma + \delta} = \overline{\gamma} + \overline{\delta} \quad \left(\overline{\gamma \cdot \delta} = \overline{\gamma} \cdot \overline{\delta}\right).$$

Число, спряжене до протилежного (оберненого) до даного числа є протилежним (оберненим) до спряженого до даного числа:

$$\overline{-\gamma} = -\overline{\gamma} \quad \left(\overline{\gamma^{-1}} = \overline{\gamma}^{-1}\right).$$

Доведення. Нехай $\gamma = a + bi$ і $\delta = c + di$ — довільні комплексні числа, записані в алгебраїчній формі. Тоді

$$\overline{\gamma + \delta} = \overline{(a + c) + (b + d)i} =$$

$$= (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{\gamma} + \overline{\delta},$$

$$\overline{\gamma \cdot \delta} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i =$$

$$= (ac - (-b)(-d)) + (a(-d) + (-b)c)i = (a - bi) \cdot (c - di) = \overline{\gamma} \cdot \overline{\delta},$$

$$\overline{-\gamma} = \overline{-a - bi} = -a + bi = -\overline{\gamma}.$$

Для доведення останнього твердження скористаємося вже доведеним. Нехай γ — довільне ненульове комплексне число. Тоді для нього існує обернене γ^{-1} таке, шо $\gamma \cdot \gamma^{-1} = 1$. За доведеним раніше

$$\overline{\gamma} \cdot \overline{\gamma^{-1}} = \overline{\gamma \cdot \gamma^{-1}} = \overline{1} = 1.$$

Отже, $\overline{\gamma^{-1}}$ є оберненим до числа $\overline{\gamma}$, тобто $\overline{\gamma}^{-1} = \overline{\gamma^{-1}}$.

Геометрична інтерпретація комплексних чисел. Подібно до того, як дійсні числа можна зображати точками числової прямої, комплексні числа можна зображати точками площини. Дійсно, якщо розглянути площину на якій задано систему координат Oxy, то кожному комплексному числу $a + bi$ можна поставити у відповідність точку цієї площини з координатами (a, b). Ця відповідність є бієктивним відображенням множини $\mathbb{C}$ в площину Oxy.

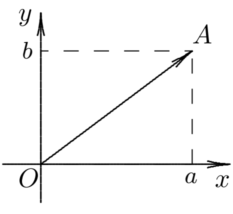

Рис. 2.

Далі, з кожною точкою A координатної площини Oxy можна пов'язати вектор $\overrightarrow{OA}$, який виходить з початку координат і закінчується в точці A. Тому комплексні числа допускають ще одну геометричну інтерпретацію: кожне комплексне число $a+bi$ можна геометрично інтерпретувати як вектор $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) (рис. 2).

Геометрична інтерпретація комплексних чисел дає можливість наочно трактувати суму і різницю двох комплексних чисел. Нехай дано два комплексних числа $\gamma = a + bi$ і $\delta = c + di$. Їх сумою є комплексне число

$\gamma + \delta = (a+c) + (b+d)i$. З іншого боку відомо, що при додаванні векторів їхні відповідні координати додаються. Тому, якщо вектор $\overrightarrow{OA}$ має координати (a, b) (рис. 3), а вектор $\overrightarrow{OB}$ — координати (c, d), то їхня сума (вектор $\overrightarrow{OC}$) матиме координати $(a+c, b+d)$. Вектор $\overrightarrow{OC}$ і є геометричним зображенням суми комплексних чисел γ і δ.

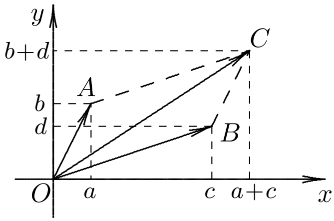

Рис. 3.

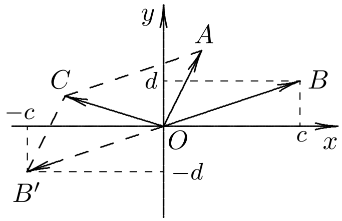

Рис. 4.

Оскільки різниця двох комплексних чисел $\gamma = a + bi$ і $\delta = c + di$ є сумою комплексного числа γ і числа, протилежного комплексному числу δ, то геометрично її можна зобразити як суму вектора $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) і вектора $\overrightarrow{OB'}$ з координатами $(-c, -d)$ (рис. 4), тобто як вектор $\overrightarrow{OC}$ з координатами $(a-c, b-d)$.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Обчислити значення виразу $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$.

Розв'язання. За властивістю добутку комплексних чисел записаних в алгебраїчній формі

$$(2+i)(3-i) = (2\cdot 3 - 1\cdot(-1)) + (2\cdot(-1) + 1\cdot 3)i = 7 + i,$$

$$(2+3i)(3+4i) = (2\cdot 3 - 3\cdot 4) + (2\cdot 4 + 3\cdot 3)i = -6 + 17i.$$

Далі, скориставшись аналогічною властивістю додавання комплексних чисел отримаємо, що

$$(2+i)(3-i) + (2+3i)(3+4i) = (7+i) + (-6+17i) = 1 + 18i.$$

Зауважимо, що множити комплексні числа записані в алгебраїчній формі можна також користуючись асоціативною, комутативною, дистрибутивною властивостями операцій додавання та множення комплексних чисел. Наприклад,

$$(2+i)(3-i) = 2\cdot 3 + 2\cdot(-i) + i\cdot 3 + i\cdot(-i) = 6 - 2i + 3i + 1 = 7 + i.$$

Задача 2. Знайти дійсні числа x та y, що задовольняють рівності

$$(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i.$$

Розв'язання. Очевидно, дійсні числа x та y задовольняють заданій в умові рівності тоді і тільки тоді, коли вони задовольняють рівність $(x+3y)+(2x-5y)i = 1-3i$. Оскільки x, y — дійсні числа, то $x+3y$, $2x-5y$ — також дійсні числа. А тому із умови рівності комплексних чисел звідси одержуємо, що $x+3y=1$, $2x-5y=-3$. Виразивши з першого рівняння x через y ($x = 1-3y$) і підставивши отримане значення для x у друге рівняння, отримаємо $-11y=-5$. Звідси $y = \frac{5}{11}$, $x = -\frac{4}{11}$.

Задача 3. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} (1+i)x + (1-i)y = 1+i, \\ (1-i)x + (1+i)y = 1+3i. \end{cases} \tag{10}$$

Розв'язання. Із першого рівняння системи (10) випливає, що

$$x = \frac{1+i-(1-i)y}{1+i} = \frac{(1+i-(1-i)y)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2+2iy}{2} = 1+iy.$$

Підставимо отримане значення для невідомої x у друге рівняння системи (10)

$$(1-i)(1+iy)+(1+i)y = 1+3i.$$

Звідси

$$(1-i)+2(1+i)y = 1+3i.$$

Далі,

$$y = \frac{4i}{2(1+i)} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1+i.$$

Тепер $x = 1+i\cdot(1+i) = i$. Таким чином, $x=i$, $y=1+i$.

Задача 4. Розв'язати рівняння $z^2-(2+i)z-1+7i=0$.

Розв'язання. Ліва частина заданого в умові рівняння є квадратним тричленом від невідомої z з комплексними коефіцієнтами. Тому розв'язки цього рівняння будемо шукати аналогічно, як у випадку квадратного рівняння з дійсними коефіцієнтами.

Обчислимо спочатку дискримінант квадратного тричлена

$$D = (2+i)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1+7i) = 7-24i.$$

Далі, знайдемо квадратні корені дискримінанта D. Нехай $x+iy$ — будь-який із цих коренів, записаний в алгебраїчній формі (x, $y \in \mathbb{R}$). Тоді $(x+iy)^2 = D$. Звідси $(x^2-y^2)+2xyi = 7-24i$. Отже,

$$\begin{cases} x^2-y^2 = 7, \\ 2xy = -24. \end{cases} \tag{11}$$

Із другого рівняння системи (11) слідує, що $y \neq 0$, а тому $x = -\frac{12}{y}$. Підставивши отримане значення для невідомої x у перше рівняння системи, отримаємо $\frac{144}{y^2} - y^2 = 7$. Звідси $y^4 + 7y^2 - 144 = 0$. За теоремою Вієта $y^2 = 9$ або $y^2 = -16$. Оскільки y — дійсне число, то $y^2 = 9$, а тому $y = 3$ або $y = -3$. У випадку $y = 3$, одержимо, що $x = -4$. Якщо ж $y = -3$, тоді $x = 4$. Таким чином $\sqrt{D} = \{4-3i, -4+3i\}$.

Тоді розв'язками заданого в умові квадратного рівняння є числа

$$z_1 = \frac{(2+i)+(4-3i)}{2} = 3-i, \quad z_2 = \frac{(2+i)+(-4+3i)}{2} = -1+2i.$$

Вправи для самостійної роботи

1. Обчислити вирази:

а) $(4+2i)(1-i)+(5+2i)(3-5i)$;

б) $(5-3i)(2+i)+(-1+i)(8+3i)$;

в) $(7-2i)(3+4i)+(3+i)(1+2i)$;

г) $\frac{(3+i)(4-3i)}{1+2i}$;

д) $\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$;

е) $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$.

2. Обчислити i^{77}; i^{98}; i^n, де n — ціле число.

3. Довести рівності:

а) $(1+i)^{8n} = 2^{4n}$ $(n \in \mathbb{Z})$; б) $(1+i)^{4n} = (-1)^n 2^{2n}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

4. Знайти дійсні числа x і y, що задовольняють рівняння:

а) $(2+i)x+(1+2i)y = 1-4i$;

б) $(3+2i)x+(1+3i)y = 4-9i$.

5. Розв'язати системи лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y = 2+6i, \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6, \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + iy - 2z = 10, \\ x - y + 2iz = 20, \\ ix + 3iy - (1+i)z = 30. \end{cases}$

6. Нехай $\gamma \in \mathbb{C}$ і $\sqrt{\gamma}$ — комплексне число таке, що $(\sqrt{\gamma})^2 = \gamma$. Обчислити:

а) $\sqrt{2i}$; б) $\sqrt{-15+8i}$; в) $\sqrt{-3-4i}$; г) $\sqrt{-11+60i}$;

д) $\sqrt[4]{-1}$; е) $\sqrt{8+6i}$; є) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$; ж) $\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}$.

7. Розв'язати рівняння:

а) $x^2 - (2+i)x - 1 + 7i = 0$;

б) $x^2 - (3-2i)x + 5 - 5i = 0$;

в) $(2+i)x^2 - (5-i)x + 2 - 2i = 0$;

г) $(1-i)x^2 - (2-16i)x - 23 - 39i = 0$.

8. Довести, що

а) комплексне число z є дійсним тоді і тільки тоді, коли $\bar{z} = z$;

б) комплексне число z є чисто уявним тоді і тільки тоді, коли $\bar{z} = -z$.

9. Довести, що для довільних комплексних чисел x, y

а) $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$; б) $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$; в) $\overline{-x} = -\overline{x}$; г) $\overline{y^{-1}} = (\overline{y})^{-1}$ $(y \neq 0)$.

10. Знайти всі комплексні числа, що є спряженими до свого квадрату.

11. Зобразити на комплексній площині точки, що відповідають числам

$$5, \quad -2, \quad -3i, \quad \pm 1 \pm \sqrt{3}i.$$

12. Знайти комплексні числа, що відповідають

а) вершинам квадрату з центром в початку координат, зі сторонами довжиною 1, які паралельні осям координат;

б) вершинам правильного трикутника з центром в початку координат, зі стороною, що паралельна осі ординат, вершиною на від'ємній дійсній півосі і радіусом описаного кола, що дорівнює 1.

13. Як розміщені на комплексній площині точки, що відповідають комплексним числам x, y, z, для яких

$$x + y + z = 0, \quad x\bar{x} = y\bar{y} = z\bar{z} \neq 0.$$

§ 3. Тригонометрична форма комплексного числа. Піднесення до степеня і добування коренів з комплексних чисел

Нехай комплексне число $\gamma = a + bi \neq 0$ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) (рис. 5). Позначимо модуль вектора $\overrightarrow{OA}$ через r, а кут, який він утворює з додатним напрямом осі Ox, — через φ. Тоді

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi \tag{1}$$

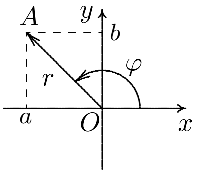

Рис. 5.

і комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

$$\gamma = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = \\ = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2}$$

Із формул (1) випливає, що $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а величина кута φ визначається з умов

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{3}$$

Запис комплексного числа γ у вигляді $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де r — невід'ємне дійсне число, а φ — деяке дійсне число, називається *тригонометричною формою* запису цього комплексного числа. Дійсне число r називається *модулем* комплексного числа γ і позначається $|\gamma|$, а число φ — *аргументом* числа γ. Аргумент комплексного числа γ позначається $\arg\gamma$.

Якщо комплексне число не дорівнює нулю, то модуль його є додатним дійсним числом; якщо ж $\gamma = a + bi = 0$, то й модуль його дорівнює нулю. Модуль будь якого комплексного числа визначається однозначно.

Якщо комплексне число $\gamma = a + bi$ не дорівнює нулю, то його аргумент визначається формулами (3) з точністю до числа, кратного 2π. Якщо ж $\gamma = 0$, то аргумент його не визначено.

Теорема 1. *Для довільних комплексних чисел* $\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, *записаних у тригонометричній формі, справедлива рівність*

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{4}$$

Тобто модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку модулів співмножників; аргумент добутку комплексних чисел дорівнює *сумі аргументів співмножників (з точністю до доданку кратного 2π).*

Доведення. Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі:

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad \gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Перемножимо ці числа

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = [r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)] \cdot [r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] =$$
$$= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1r_2([\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2] + i[\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2]),$$

тобто

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \tag{5}$$

Співвідношення (5) є записом комплексного числа $\gamma_1\gamma_2$ у тригонометричній формі, r_1r_2 — модулем комплексного числа $\gamma_1\gamma_2$, а $\varphi_1+\varphi_2$ — аргументом цього числа. Отже, $|\gamma_1\gamma_2| = r_1r_2$, $\arg(\gamma_1\gamma_2) = \varphi_1+\varphi_2$, або

$$|\gamma_1\gamma_2| = |\gamma_1|\cdot|\gamma_2|, \quad \arg(\gamma_1\gamma_2) = \arg\gamma_1 + \arg\gamma_2.$$

Нагадаємо, що завжди, коли йдеться про рівність аргументів комплексних чисел, цю рівність розуміють з точністю до доданка кратного 2π.

Подібні правила мають місце і для частки комплексних чисел.

Теорема 2. *Для довільних комплексних чисел $\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, записаних у тригонометричній формі,*

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{r_1}{r_2}\Big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\Big). \tag{6}$$

Тобто модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів діленого і дільника, а аргумент частки двох комплексних чисел дорівнює різниці аргументів діленого і дільника (з точністю до доданку кратного 2π).

Доведення. Нехай γ_1 і γ_2 — довільні комплексні числа, записані у тригонометричній формі:

$$\gamma_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad \gamma_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

і $\gamma_2 \neq 0$. Поділимо γ_1 на γ_2

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 - i^2\sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\Big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\Big) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\Big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big).$$

Отже,

$$\left|\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right| = \frac{|\gamma_1|}{|\gamma_2|}, \quad \arg\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) = \arg\gamma_1 - \arg\gamma_2.$$

Геометричний зміст множення і ділення комплексних чисел вияснається тепер без великих труднощів. Дійсно, вектор, що зображає добуток (частку) комплексних чисел γ_1 і γ_2, одержимо в результаті повороту проти (за) годинникової стрілки вектора, що відповідає числу γ_1, на кут φ_2 і розтягом (стиском) його в $|\gamma_2|$ раз (див. рис. 6). Певно, що останню операцію потрібно проводити у випадку $|\gamma_2| > 1$. Коли ж $|\gamma_2| < 1$, тоді потрібно стискати (розтягнути) вектор γ_1 в $|\gamma_2|$ раз.

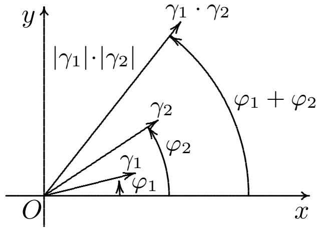

Рис. 6.

Як наслідок із формули (6) одержимо, що для комплексного числа $\gamma = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ оберненим є число

$$\gamma^{-1} = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)), \tag{7}$$

тобто $|\gamma^{-1}| = |\gamma|^{-1}$, $\arg(\gamma^{-1}) = -\arg\gamma$.

Піднесення комплексного числа до цілого степеня. Асоціативний закон множення комплексних чисел дає змогу ввести поняття натурального степеня комплексного числа[1]. Нехай n — довільне

[1] Якщо дано n комплексних чисел, записаних у деякому порядку: $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, то можна кількома способами розставити дужки, які вказиватимуть порядок послідовного виконання операції множення над цими числами. Із асоціативної властивості операції множення комплексних чисел слідує, що результат послідовного виконання операції множення над даними n числами не залежить від способу розставлення дужок (доведення цього факту див. наприклад [2], розд. IV, §4).

натуральне число. n-м *степенем* комплексного числа α називається комплексне число ω, яке одержується в результаті множення числа α самого на себе n раз, тобто

$$\omega = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ множників}} .$$

Позначають n-й степінь комплексного числа α символом α^n. При цьому число α називають *основою степеня*, а натуральне число n — *показником степеня.* Поняття натурального степеня можна розширити до поняття *цілого степеня.* За означенням

$$\alpha^0 = 1, \qquad \alpha^{-n} = \left(\alpha^{-1}\right)^n, \qquad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3. *Для довільних ненульових комплексних чисел α і β та для довільних цілих чисел m і n справедливі рівності*

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^{m+n}, \tag{8}$$

$$\left(\alpha^m\right)^n = \alpha^{mn}, \tag{9}$$

$$\alpha^m \cdot \beta^m = (\alpha\beta)^m. \tag{10}$$

Доведення. Нехай α — довільне комплексне число, m і n — довільні натуральні числа. Тоді безпосередньо із означення натурального степеня і асоціативного закону множення комплексних чисел слідують наступні рівності

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ раз}}) = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m+n \text{ раз}} = \alpha^{m+n}.$$

У випадку, коли $m = 0$ або $n = 0$ і $\alpha \neq 0$ справедливість рівності (8) очевидна.

Якщо m і n — цілі від'ємні числа і $\alpha \neq 0$, то за означенням степеня і із доведеного раніше маємо:

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = \left(\alpha^{-1}\right)^{-m} \cdot \left(\alpha^{-1}\right)^{-n} = \left(\alpha^{-1}\right)^{-m-n} = \alpha^{m+n}.$$

Нарешті, доведемо справедливість рівності (8) у випадку, коли одне із чисел m або n є натуральним, а інше цілим від'ємним числом. Нехай $m > 0$, $n < 0$ і $m > |n|$ ($|n| = -n$). Тоді

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^m \cdot \left(\alpha^{-1}\right)^{-n} = (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdots \alpha^{-1}}_{-n \text{ раз}}) =$$

$$= (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m-(-n) \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{-n \text{ раз}} \cdot \underbrace{\alpha^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdots \alpha^{-1}}_{-n \text{ раз}}) = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{m+n \text{ раз}} = \alpha^{m+n}.$$

Інші випадки доводяться аналогічно.

Таким чином рівність (8) доведена для довільних цілих чисел m і n.

Доведення ж рівностей (9) і (10) аналогічні доведенню попередньої рівності. Вони вимагають нескладних технічних обчислень і тому залишаємо їх читачеві на самостійну роботу. Слід зауважити, що для доведення рівності (10) окрім асоціативної властивості потрібно використати ще й комутативну властивість множення комплексних чисел.

Теорема 4. *Для довільного комплексного числа* $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$*, записаного в тригонометричній формі, та довільного цілого числа* n *справедлива рівність*

$$\alpha^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{11}$$

яка називається формулою Муавра.

Доведення. Спочатку методом математичної індукції доведемо справедливість формули (11) для натуральних n. При $n = 1$ формула (11), очевидно, правильна. Припустимо, що вона справедлива для довільного натурального числа, меншого за дане натуральне число n. Тоді

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] \cdot [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{n-1} =$$
$$= [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] \cdot [r^{n-1}(\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi)] =$$
$$= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

тобто формула (11) справедлива і для показника n. Отже, за принципом математичної індукції вона справедлива для будь-якого натурального показника n.

Припустимо, що n — ціле від'ємне число. Тоді $-n$ є натуральним числом. Використовуючи рівності (7), (9) і справедливість формули (11) для натуральних показників, маємо:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \left[[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-1}\right]^{-n} =$$
$$= \left[r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))\right]^{-n} =$$
$$= \left[r^{-1}\right]^{-n}(\cos(-n)(-\varphi) + i\sin(-n)(-\varphi)) = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Отже, і при будь-якому цілому від'ємному показнику формула (11) є правильною.

При $n = 0$ справедливість формули (11) очевидна. Теорему доведено.

Добування кореня з комплексного числа. Нехай n — довільне натуральне число, α — довільне комплексне число. *Коренем n-го степеня* з числа α називається таке комплексне число β, n-ий степінь якого дорівнює α, тобто $\beta^n = \alpha$. Корінь n-го степеня з комплексного числа α позначатимемо $\sqrt[n]{\alpha}$. Наприклад, комплексні числа 1, -1, i, $-i$ є коренями 4-го степеня з 1. Тобто $\sqrt[4]{1} = 1$ або $\sqrt[4]{1} = -1$, або $\sqrt[4]{1} = i$, або $\sqrt[4]{1} = -i$.

***Зауваження* 1**. Якщо a — довільне додатне дійсне число, то символом $\sqrt[n]{a}$ позначається також арифметичний корінь n-го степеня з числа a. Тому надалі у випадку можливого неоднозначного трактування в контексті символу $\sqrt[n]{a}$, ми будемо вказувати на його значення.

***Зауваження* 2**. Оскільки коренів n-го степеня з комплексного числа α може існувати декілька, то символом $\sqrt[n]{\alpha}$ інколи позначають множину всіх коренів n-го степеня з числа α.

Теорема 5. *Для довільного ненульового комплексного числа α та довільного натурального числа n існує точно n різних коренів n-го степеня з числа α. Причому, якщо $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — тригонометрична форма числа α, тоді*

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\tfrac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\tfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{12}$$

де $\sqrt[n]{r}$ — арифметичний корінь n-го степеня з числа r.

Доведення. Нехай $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — тригонометрична форма комплексного числа α і n — деяке натуральне число. Припустимо, спочатку, що корінь n-го степеня з числа α існує і дорівнює $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Тоді із означення кореня випливає, що

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Однак, за формулою Муавра,

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Отже,

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{13}$$

Відомо, що два комплексні числа рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їхні модулі, а аргументи або рівні, або відрізняються доданком, кратним 2π. Тому із рівності (13) випливає, що

$$\rho^n = r, \qquad n\theta = \varphi + 2\pi k,$$

де k — деяке ціле число. Звідси,

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},$$

де $\sqrt[n]{r}$ — арифметичний корінь n-го степеня з дійсного додатного числа r. Навпаки, для будь-якого цілого k n-й степінь числа

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

дорівнює $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \alpha$. Цим саме доведено існування кореня n-го степеня з числа α.

Таким чином,

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{14}$$

де k — деяке ціле число.

Покажемо, тепер, що існує тільки n різних коренів n-го степеня з ненульового комплексного числа α. Нехай l — довільне ціле число. Поділимо l на n з остачею, тобто представимо число l у вигляді $l = nq + s$, де q і s — цілі числа, причому $s \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Тоді

$$\frac{\varphi + 2\pi l}{n} = \frac{\varphi + 2\pi(qn + s)}{n} = \frac{\varphi + 2\pi s}{n} + 2\pi q,$$

тобто значення аргументу кореня (14) при $k = l$ відрізняється від значення аргументу при $k = s$ на число, кратне 2π, а це означає, що корені при цих значеннях k співпадають.

З іншого боку, надаючи k у формулі (14) значення $0, 1, 2, \ldots, n-1$, одержимо n різних значень кореня, бо при $l, s \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ і $l \neq s$

$$\frac{\varphi + 2\pi l}{n} - \frac{\varphi + 2\pi s}{n} = \frac{2\pi(l-s)}{n} \neq 2\pi t,$$

для довільного цілого числа t.

Отже,

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

де k пробігає значення $0, 1, 2, \ldots, n-1$, — це всі n коренів n-го степеня із числа α. Теорема доведена.

Корені з одиниці. Із теореми 5 випливає, що корені n-го степеня з одиниці обчислюються за формулою

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{15}$$

Дійсно, для того, щоб переконатися у цьому досить у формулі (12) покласти $r = 1$ і $\varphi = 0$, оскільки число 1 у тригонометричній формі записується так:

$$1 = \cos 0 + i\sin 0.$$

Теорема 6. *Нехай $\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_{n-1}$ — всі корені n-го степеня з одиниці, β — деякий корінь n-го степеня з комплексного числа α. Тоді $\beta\varepsilon_0,\ \beta\varepsilon_1,\ \ldots,\ \beta\varepsilon_{n-1}$ — всі корені n-го степеня з числа α.*

Доведення. Справді, якщо виконуються умови теореми, то для довільного $k \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\}$

$$(\beta\varepsilon_k)^n = \beta^n\varepsilon_k^n = \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

Отже, $\beta\varepsilon_k$ є коренем n-го степеня з α.

Далі, очевидно, що при $l,\ s \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\}$ і $l \neq s$

$$\beta\varepsilon_l \neq \beta\varepsilon_s.$$

Оскільки у протилежному випадку ми б одержали, що $\varepsilon_l = \varepsilon_s$, а це суперечило б умові теореми.

Таким чином, $\beta\varepsilon_0,\ \beta\varepsilon_1,\ \ldots,\ \beta\varepsilon_{n-1}$ — попарно різні корені n-го степеня з числа α. Їх є n, а тому з теореми 5 слідує, що це всі корені n-го степеня з числа α.

Теорема 7. *Добуток двох коренів n-степеня з одиниці є коренем n-го степеня з одиниці. Число обернене до кореня n-го степеня з одиниці є коренем n-го степеня з одиниці. Довільний степінь кореня n-го степеня з одиниці також є коренем n-го степеня з одиниці.*

Доведення. Доведемо послідовно всі твердження теореми.

Нехай ε, η — корені n-го степеня з одиниці, тобто $\varepsilon^n = 1$ і $\eta^n = 1$. Тоді $(\varepsilon\eta)^n = \varepsilon^n\eta^n = 1$. Тому $\varepsilon\eta$ також є коренем n-го степеня з одиниці.

Далі, із рівності $\varepsilon \cdot \varepsilon^{-1} = 1$ випливає, що

$$1 = (\varepsilon \cdot \varepsilon^{-1})^n = \varepsilon^n \cdot (\varepsilon^{-1})^n = 1 \cdot (\varepsilon^{-1})^n = (\varepsilon^{-1})^n.$$

Тобто ε^{-1} є коренем n-го степеня з одиниці.

Нарешті, нехай m — довільне ціле число. Тоді

$$(\varepsilon^m)^n = \varepsilon^{mn} = (\varepsilon^n)^m = 1^m = 1.$$

Що й потрібно було довести. Теорему доведено.

Із попередньої теореми як наслідок слідує, що всякий корінь n-го степеня з одиниці є також коренем m-го степеня з одиниці для довільного натурального числа m кратного n. У свою чергу, звідси випливає, що серед коренів n-го степеня можуть існувати корені k-го степеня, для деякого k що ділить n. Корінь n-го степеня з одиниці називається *первісним коренем n-го степеня з одиниці*, якщо він не є коренем m-го степеня з одиниці для довільного натурального числа m меншого n. Такі корені існують, наприклад, $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ є первісним коренем n-го степеня з одиниці.

Теорема 8. *Нехай ε є коренем n-го степеня з одиниці. Корінь ε є первісним коренем n-го степеня з одиниці тоді і тільки тоді, коли його степені ε^0, ε^1, $\ldots\varepsilon^{n-1}$ — попарно різні, тобто ними вичерпуються всі корені n-го степеня з одиниці.*

Доведення. Нехай, спочатку, ε є первісним коренем n-го степеня з одиниці. Покажемо від протилежного, що всі, вказані в умові теореми, степені ε попарно різні. Припустимо, що

$$\varepsilon^k = \varepsilon^l \tag{16}$$

для деяких k, $l \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ таких, що $k \neq l$. Не зменшуючи загальності можна вважати, що $k > l$. Тоді помноживши ліву і праву частини рівності (16) на ε^{-l} одержимо, що

$$\varepsilon^{k-l} = 1.$$

Оскільки $1 \leq k - l \leq n - 1$, то ε не є первісним коренем n-го степеня з одиниці, що суперечить умові теореми.

Навпаки, якщо всі степені ε^0, ε^1, ε^2, $\ldots\varepsilon^{n-1}$ кореня n-го степеня з одиниці ε попарно різні, то

$$\varepsilon^1 \neq \varepsilon^0 = 1, \quad \varepsilon^2 \neq \varepsilon^0 = 1, \quad \ldots, \quad \varepsilon^{n-1} \neq \varepsilon^0 = 1.$$

Це означає, що ε є первісним коренем n-го степеня з одиниці. Теорему доведено.

Приведемо ще одну ознаку первісного кореня n-го степеня з одиниці.

Теорема 9. *Нехай ε є первісним коренем n-го степеня з одиниці, а k — деяким натуральним числом. Число ε^k є первісним коренем n-го степеня з одиниці тоді і тільки тоді, коли k і n взаємно прості числа.*

Доведення. Нехай виконується умова теореми, тобто ε є первісним коренем n-го степеня з одиниці.

Доведемо, спочатку, необхідність. Припустимо, що ε^k є первісним коренем n-го степеня з одиниці для деякого натурального числа k. Позначимо через d найбільший спільний дільник чисел n та k. Нам потрібно довести, що $d = 1$. Припустимо протилежне. Нехай $d \neq 1$, тобто $d > 1$.

Оскільки d є дільником чисел n і k, то $n = dn'$, $k = dk'$ для деяких натуральних чисел n' і k', причому $n' < n$. Обчислимо

$$(\varepsilon^k)^{n'} = \varepsilon^{kn'} = \varepsilon^{(k'd)n'} = \varepsilon^{k'(dn')} = \varepsilon^{k'n} = (\varepsilon^n)^{k'} = 1.$$

Таким чином, ε^k виявився також коренем n'-го степеня з одиниці, де $n' < n$. А це суперечить тому, що ε^k є первісним коренем n-го степеня з одиниці. Тобто наше припущення, що $d \neq 1$, є неправильним. Отже, необхідність доведена.

Аналогічно, методом від супротивного доведемо тепер достатність. Нехай k і n взаємно прості числа і припустимо, що ε^k є коренем m-го степеня з одиниці, де $1 \leq m < n$. Тоді

$$(\varepsilon^k)^m = \varepsilon^{km} = 1. \tag{17}$$

Поділимо km на n з остачею: $km = nq + r$, де q і r — деякі цілі числа, причому $0 \leq r \leq n - 1$. Із рівності (17) маємо

$$1 = \varepsilon^{km} = \varepsilon^{nq+r} = \varepsilon^{nq}\varepsilon^r = (\varepsilon^n)^q\varepsilon^r = \varepsilon^r.$$

Оскільки ε є первісним коренем n-го степеня з одиниці, то звідси випливає, що $r = 0$. Це означає, що добуток km ділиться на n. Враховуючи, що числа k і n взаємно прості, одержимо, що m ділиться на n. А це суперечить нерівності $1 \leq m < n$. Знову ж таки наше припущення, що ε^k не є первісним коренем n-го степеня з одиниці неправильне. Теорему доведено.

Як наслідок із останніх двох теорем слідує, що число первісних коренів n-го степеня з одиниці дорівнює числу натуральних чисел менших за n і взаємно простих з n. Це число позначаються символом $\varphi(n)$, а відповідність, яка кожному натуральному числу n ставить число $\varphi(n)$ називають *функцією Ейлера.*

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Знайти тригонометричну форму комплексного числа $-1+i$.

Розв'язання. Обчислимо спочатку модуль числа $-1+i$:

$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Далі, якщо $\varphi = \arg(-1+i)$, то $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Звідси $\varphi = = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$. Отже, $\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$ — тригонометрична форма числа $-1+i$.

Задача 2. Обчислити $(1-\sqrt{3}i)^{-8}$.

Розв'язання. Представимо комплексне число $z = 1-\sqrt{3}i$ в тригонометричній формі. Аналогічно як у попередньому прикладі можна показати, що

$$z = 2\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\right).$$

Далі, за формулою Муавра

$$(1-\sqrt{3}i)^{-8} = \left(2\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\right)\right)^{-8} =$$
$$= 2^{-8}\left(\cos\tfrac{8\pi}{3} + i\sin\tfrac{8\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{256}\left(\cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3}\right) = -\tfrac{1}{512} + \tfrac{\sqrt{3}}{512}i.$$

Задача 3. Представити у вигляді многочленів від $\sin x$ і $\cos x$ функцію $\cos 5x$.

Розв'язання. Розглянемо вираз $(\cos x + i\sin x)^5$. Згідно з формулою Муавра $(\cos x + i\sin x)^5 = \cos 5x + i\sin 5x$. З іншого боку, скориставшись формулою бінома Ньютона, маємо

$$(\cos x + i\sin x)^5 = \cos^5 x + 5\cos^4 x \cdot i\sin x + 10\cos^3 x \cdot i^2\sin^2 x +$$
$$+ 10\cos^2 x \cdot i^3\sin^3 x + 5\cos x \cdot i^4\sin^4 x + i^5\sin^5 x =$$
$$= (\cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x) +$$
$$+ (5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x)i.$$

Із рівності лівих частин одержаних рівностей випливає рівність їх правих частин. Використовуючи умови рівності комплексних чисел, одержуємо

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x.$$

Задача 4. Обчислити $\sqrt[9]{\dfrac{-1+i}{1-\sqrt{3}i}}$.

Розв'язання. Скориставшись результатами попередніх прикладів і теоремою 2, отримаємо, що

$$\frac{-1+i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})}{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)} =$$

$$= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\tfrac{3\pi}{4} + \tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{3\pi}{4} + \tfrac{\pi}{3}\right)\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\tfrac{13\pi}{12} + i\sin\tfrac{13\pi}{12}\right).$$

Тепер із теореми 5 випливає, що

$$\sqrt[9]{\frac{-1+i}{1-\sqrt{3}i}} = \tfrac{1}{\sqrt[18]{2}}\left(\cos\frac{\frac{13\pi}{2}+2\pi k}{9} + i\sin\frac{\frac{13\pi}{2}+2\pi k}{9}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt[18]{2}}\left(\cos\left(\tfrac{13+4k}{18}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{13+4k}{18}\pi\right)\right),$$

де $k \in \{0, 1, \ldots, 8\}$.

Задача 5. Виписати всі корені шостого степеня з 1. Вказати, які з них є первісними коренями шостого степеня з 1.

Розв'язання. За формулою (15) всі шість коренів шостого степеня із 1 вичерпуються наступними числами:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1, && \varepsilon_1 = \cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i,\\
&\varepsilon_2 = \cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i, && \varepsilon_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,\\
&\varepsilon_4 = \cos\tfrac{4\pi}{3} + i\sin\tfrac{4\pi}{3} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i, && \varepsilon_5 = \cos\tfrac{5\pi}{3} + i\sin\tfrac{5\pi}{3} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i.
\end{aligned}$$

За формулою Муавра

$$\varepsilon_k = \varepsilon_1^k \quad (k = 0, 1, \ldots, 5).$$

Оскільки ε_1 — первісний корінь шостого степеня із 1, то із теореми 9 випливає, що ε_k $(k \in \{0, 1, \ldots, 5\})$ є первісним коренем шостого степеня із 1 тоді і тільки тоді, коли числа k і 6 взаємно прості. Серед чисел $0, 1, \ldots, 5$ такими є 1, 5. Таким чином, первісними коренями шостого степеня з 1 є числа $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ та $\varepsilon_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Вправи для самостійної роботи

1. Знайти тригонометричну форму комплексних чисел:

а) -2; б) $1+i$; в) $\sqrt{3}-i$; д) $\sqrt{5}-\sqrt{5}i$; е) $2+\sqrt{3}+i$;

є) $5i$; ж) $1-i$; з) $1+\sqrt{3}i$; и) $1+\frac{\sqrt{3}}{3}i$; і) $\cos\varphi - i\sin\varphi$.

2. Розв'язати рівняння:

а) $|z|+z=8+4i$; б) $|z|-z=8+12i$.

3. Знайти геометричне місце точок комплексної площини, які відповідають числам z, що задовольняють умовам:

а) $1\le|z|<2$; б) $|z-1-i|<1$; в) $\frac{\pi}{6}<\operatorname{Arg} z\le\frac{\pi}{3}$;

г) $|z-2|\le 1$; д) $0<\operatorname{Re} iz<1$; е) $|z-1|+|z-1|=3$.

4. Обчислити вирази:

а) $(1+i)^{100}$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$; в) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$; г) $(2-\sqrt{3}+i)^{12}$.

5. Довести, що $(\sqrt{3}-i)^n = 2^n\left(\cos\frac{\pi n}{6} - i\sin\frac{\pi n}{6}\right)$, де $n\in\mathbb{N}$.

6. Представити у вигляді многочленів від $\sin x$ і $\cos x$ функції:

а) $\sin 4x$; б) $\cos 6x$; в) $\sin 7x$.

7. Обчислити суми:

а) $1-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\cdots$; б) $C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\cdots$.

8. Виписати в тригонометричній формі всі корені:

а) $\sqrt[10]{512(1-\sqrt{3}i)}$; б) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

9. Виписати в алгебраїчній формі всі корені:

а) $\sqrt[3]{i}$; б) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i-8}$; в) $\sqrt[4]{-72(1-i\sqrt{3})}$; г) $\sqrt{2-2i}$;

д) $\sqrt[4]{-4}$; е) $\sqrt[3]{\frac{8+24i}{3-i}}$; є) $\sqrt[3]{\frac{27-54i}{2+i}}$; ж) $\sqrt[4]{-\frac{18}{1+i\sqrt{3}}}$.

10. Знайти двома способами корені п'ятого степеня з 1, виразити в радикалах:

а) $\cos\frac{2\pi}{5}$; б) $\sin\frac{2\pi}{5}$; в) $\cos\frac{4\pi}{5}$; г) $\sin\frac{4\pi}{5}$.

11. Розв'язати рівняння:

а) $(z+1)^n-(z-1)^n=0$; б) $(z+i)^n-(z-i)^n=0$ $(n\in\mathbb{N})$.

12. Виписати всі корені з 1 степеня:

а) 3; б) 4; в) 8; г) 12.

13. Виписати всі первісні корені з 1 степеня:

а) 3; б) 4; в) 8; г) 12.

14. Для кожного кореня а) 16-го; б) 24-го степеня з 1 вказати, первісним коренем якого степеня він є.

15. Знайти суму всіх коренів n-го степеня з 1.

16. Нехай ε — первісний корінь степеня $2n$ з 1. Обчислити суму $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots\varepsilon^{n-1}$.

17. Знайти суму k-х степенів всіх коренів n-го степеня з 1.

18. Обчислити суму всіх первісних коренів а) 16-го; б) 24-го степеня з 1.

19. Нехай k і l — взаємно прості натуральні числа, ε — первісний корінь k-го степеня з 1, а ξ — первісний корінь l-го степеня з 1. Довести, що $\varepsilon\xi$ — первісний корінь kl-го степеня з 1.

20. Нехай $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — функція Ейлера. Довести, що для довільних взаємно простих чисел k і l справедлива рівність $\varphi(kl)=\varphi(k)\varphi(l)$.

21. Довести, що якщо $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$, де p_1, p_2, ..., p_s — різні прості числа, то

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right).$$

§ 4. Системи лінійних рівнянь. Метод Ґаусса розв'язування систем лінійних рівнянь

Нехай до кінця цього параграфу F — множина або раціональних, або дійсних, або комплексних чисел. Під *системою лінійних рівнянь* з n *невідомими* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над множиною F будемо розуміти деяку впорядковану сукупність лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

де s, n — деякі натуральні числа, a_{ij}, b_i $(i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots \ldots, n)$ — деякі числа множини F. Число a_{ij}, яке стоїть в i-му рівнянні при j-му невідомому x_j називається *коефіцієнтом*, число b_i називається *вільним членом* i-го рівняння. Звертаємо увагу на подвійну індексацію коефіцієнтів системи рівнянь. Наприклад, коефіцієнт a_{12} слід читати як "а-один-два", а не "а-дванадцять". В особливих випадках, коли значеннями індексів будуть дво- і більше цифрові числа, ми будемо розділяти індекси комою.

Якщо всі вільні члени системи рівнянь (1) дорівнюють нулю, то така система рівнянь називається *системою лінійних однорідних рівнянь*.

Із коефіцієнтів при невідомих можна скласти прямокутну таблицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

яка називається *матрицею* із s рядків і n стовпців (матрицею розмірності $s \times n$ або $s \times n$-матрицею), а самі числа a_{ij} називаються *елементами матриці*. Якщо $s = n$, то матриця (2) називається *квадратною матрицею порядку* n. Діагональ цієї матриці, що йде з лівого верхнього до правого нижнього кута (тобто, що складається з елементів $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$) називається *головною діагоналлю*.

Матриця A називається *матрицею системи лінійних рівнянь* (1). $s \times (n+1)$-матриця, перші n стовпці якої такі ж як у матриці A, а останній складається із вільних членів системи (1) називається *розширеною матрицею системи лінійних рівнянь* (1).

Розв'язком системи лінійних рівнянь (1) називається така система (впорядкований набір) n чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ множини F, що кожне рівняння цієї системи перетворюється в тотожність після заміни в ньому невідомих x_i відповідно числами γ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Система лінійних рівнянь називається *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку і *сумісною* в протилежному випадку, тобто якщо вона має хоча б один розв'язок. Сумісна система лінійних рівнянь називається *визначеною*, якщо вона має тільки один розв'язок і *невизначеною*, якщо вона має більше як один розв'язок.

Нехай нам дано крім системи рівнянь (1) ще одну систему t лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{t1}x_1 + a'_{t2}x_2 + \cdots + a'_{tn}x_n = b'_t. \end{cases} \tag{3}$$

Системи лінійних рівнянь (1) і (3) називаються *еквівалентними*, якщо вони або обидві несумісні, або сумісні і множини їх розв'язків співпадають. Еквівалентність двох систем рівнянь (1) і (3) будемо позначати символом (1) $\sim$ (3).

Нескладно довести (залишаємо це читачеві на самостійну роботу), що означене вище поняття еквівалентності систем лінійних рівнянь задовольняє наступним властивостям:

1) *довільна система лінійних рівнянь еквівалентна сама собі* (*рефлексивна властивість*);
2) *якщо система лінійних рівнянь* (1) *еквівалентна системі лінійних рівнянь* (3), *то система* (3) *еквівалентна системі* (1) (*симетрична властивість*);
3) *якщо система лінійних рівнянь* (1) *еквівалентна системі рівнянь* (3), *а ця в свою чергу еквівалентна деякій системі лінійних рівнянь* $(*)$, *то система* (1) *еквівалентна системі* $(*)$ (*транзитивна властивість*).

Нехай число t рівнянь системи (3) дорівнює числу s рівнянь системи (1). Будемо говорити, що система рівнянь (3) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою *елементарного перетворення типу*

(I), якщо всі рівняння обох систем, крім i-го та j-го рівнянь, однакові, а i-е рівняння системи (1) таке ж як j-е рівняння системи (3), а j-е рівняння системи (1) співпадає з j-им рівняння системи (3). Якщо ж в системі (3) всі рівняння, крім i-го, ті ж самі, що і в (1), а i-е рівняння системи (3) має вигляд

$$(a_{i1} + ca_{k1})x_1 + (a_{i2} + ca_{k2})x_2 + \cdots + (a_{in} + ca_{kn})x_n = b_i + cb_k,$$

де $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ і $k \neq i$, а c — деяке число з множини F, то будемо говорити, що система рівнянь (3) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою *елементарного перетворення типу* (II).

Теорема 1. *Якщо одна із систем лінійних рівнянь одержана із іншої шляхом скінченного числа елементарних перетворень типу* (I) *або типу* (II), *то ці системи лінійних рівнянь еквівалентні.*

Доведення. Із транзитивної властивості еквівалентності систем лінійних рівнянь слідує, що теорему досить довести у випадку, коли одна із систем лінійних рівнянь одержана із іншої шляхом одного елементарного перетворення.

Нехай $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — довільний розв'язок системи лінійних рівнянь (1) і нехай система рівнянь (3) одержана із системи (1) за допомогою елементарного перетворення типу (I). Тоді $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ є також розв'язком системи (3), оскільки вона складається із тих же рівнянь, що і система (1), тільки помінявся порядок їхнього запису. Аналогічно, довільний розв'язок системи (3) є розв'язком системи (1). Тому множини розв'язків системи лінійних рівнянь (1) і (3) співпадають. Якщо ж система лінійних рівнянь (1) є несумісною, то такою є і система рівнянь (3). Тому що за сказаним вище, у протилежному випадку ми б одержали суперечність.

Нехай тепер система лінійних рівнянь (3) одержана із системи рівнянь (1) за допомогою елементарного перетворення типу (II), тобто до i-го рівняння системи (1) додали k-е рівняння, помножене на деяке число $c \in F$, де $i, k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ й $i \neq k$. Оскільки всі рівняння системи рівнянь (3) крім i-го ті ж самі, що і в системі рівнянь (1), то система чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ задовольняє цим рівнянням системи (3).

Далі, обчислимо

$$\begin{aligned}(a_{i1} + ca_{k1})\gamma_1 + (a_{i2} + ca_{k2})\gamma_2 + \cdots + (a_{in} + ca_{kn})\gamma_n =\\ = (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) + c(a_{k1}\gamma_1 + a_{k2}\gamma_2 + \cdots + a_{kn}\gamma_n) =\\ = b_i + cb_k.\end{aligned}$$

Остання рівність слідує із того, що γ_1, γ_2, ..., γ_n задовольняє i-е та k-е рівняння системи рівнянь (1), тобто

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = b_i,$$
$$a_{k1}\gamma_1 + a_{k2}\gamma_2 + \cdots + a_{kn}\gamma_n = b_k.$$

Це означає, що розв'язок γ_1, γ_2, ..., γ_n системи рівнянь (1) задовольняє також i-е рівняння системи рівнянь (3). З усього сказаного слідує, що γ_1, γ_2, ..., γ_n є розв'язком системи рівнянь (3).

Нехай тепер навпаки γ_1, γ_2, ..., γ_n є розв'язком системи (3). Тоді систему (1) можна отримати із системи (3) за допомогою елементарного перетворення типу (II). Для цього потрібно до i-го рівняння даної системи додати k-е помножене на $-c$. Тому із попередніх міркувань випливає, що γ_1, γ_2, ..., γ_n є розв'язком системи рівнянь (1).

Залишилось відзначити, що несумісність однієї системи тягне за собою несумісність іншої, оскільки у протилежному випадку ми одержали б суперечність. Теорему доведено.

Розглянемо тепер системи лінійних рівнянь специфічного вигляду. Надалі домовимося, що у випадку, коли перші k коефіцієнтів деякого i-го рівняння системи (1) дорівнюють нулю, де $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, а $a_{ik+1} \neq 0$, то це рівняння писатимемо у вигляді

$$a_{ik+1}x_{k+1} + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

Якщо ж всі коефіцієнти при невідомих i-го рівняння дорівнюють нулю, то писатимемо це рівняння у вигляді

$$0 = b_i.$$

Очевидно, якщо система лінійних рівнянь містить рівняння вигляду $0 = b$, де $b \neq 0$, то ця система лінійних рівнянь є несумісною.

Нарешті, якщо система лінійних рівнянь місить рівняння вигляду $0 = 0$, то домовимось його не писати. Це не впливає на множину розв'язків цієї системи лінійних рівнянь, оскільки будь-який впорядкований набір чисел із множини F є розв'язком рівняння вигляду $0 = 0$.

Система лінійних рівнянь з невідомими x_1, x_2, …, x_n вигляду

$$\left\{\begin{array}{r} c_{1k_1}x_{k_1} + \dots + c_{1k_2}x_{k_2} + \dots + c_{1k_r}x_{k_r} + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{2k_2}x_{k_2} + \dots + c_{2k_r}x_{k_r} + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{rk_r}x_{k_r} + \dots + c_{rn}x_n = d_r, \\ 0 = d_{r+1}, \\ \dots\, . \\ 0 = d_s, \end{array}\right. \tag{4}$$

де $r \le n$, $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_r$, $c_{jk_j} \ne 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$, називається *системою лінійних рівнянь східчастого вигляду*. Ця назва не є загальноприйнятою: про систему лінійних рівнянь вигляду (4) інколи говорять, як про систему рівнянь квазітрикутного, або трапецоїдного, або ступінчатого вигляду.

Східчастого вигляду, наприклад, є системи лінійних рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{r} \underline{4x_1} + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ \underline{9x_2} + 7x_3 + 3x_4 = 8, \\ \underline{x_3} - 4x_4 = 1, \\ \underline{6x_4 = 7}; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{r} \underline{-x_1 + 2x_2 + x_3} - 5x_4 = 1, \\ \underline{3x_4 = 5}; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r} \underline{x_1} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = -4, \\ \underline{2x_2 - 3x_3 + 6x_4} + 9x_5 - 8x_6 = 21, \\ \underline{x_5} - 4x_6 = 0, \\ \underline{0 = 15.} \end{array}\right.$$

Нескладно показати, що перша із вказаних вище систем рівнянь є визначеною, друга — невизначеною, а третя — несумісною.

Розглянемо тепер основну задачу теорії систем лінійних рівнянь – знаходження множин їх розв'язків. Почнемо із систем лінійних рівнянь східчастого вигляду.

Нехай задано систему рівнянь

$$\left\{\begin{array}{r} c_{1k_1}x_{k_1} + \dots + c_{1k_2}x_{k_2} + \dots + c_{1k_r}x_{k_r} + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{2k_2}x_{k_2} + \dots + c_{2k_r}x_{k_r} + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{rk_r}x_{k_r} + \dots + c_{rn}x_n = d_r, \end{array}\right. \tag{5}$$

де $r \leq n$, $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r$, $c_{jk_j} \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Припустимо, що система рівнянь (5) є сумісною, і впорядкований набір чисел $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ множини F є розв'язком цієї системи рівнянь. Тоді

$$\begin{cases} c_{1k_1}\chi_{k_1} + \cdots + c_{1k_2}\chi_{k_2} + \cdots + c_{1k_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{1n}\chi_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{2k_2}\chi_{k_2} + \cdots + c_{2k_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{2n}\chi_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rk_r}\chi_{k_r} + \cdots + c_{rn}\chi_n = d_r. \end{cases} \tag{6}$$

Оскільки $c_{rk_r} \neq 0$, то із останньої із рівностей (6) слідує, що

$$\chi_{k_r} = c_{rk_r}^{-1} \cdot (d_r - c_{r\,k_r+1}\chi_{k_r+1} - \cdots - c_{rn}\chi_n), \tag{7}$$

якщо $k_r < n$, і

$$\chi_{rn} = c_{rn}^{-1} \cdot d_r, \tag{8}$$

якщо $k_r = n$. Отже, χ_{k_r} виражається через $\chi_{k_r+1}, \chi_{k_r+2}, \ldots, \chi_n$ (при умові $k_r < n$), причому χ_{k_r} визначається цими числами однозначно. Далі, аналогічно враховуючи, що $c_{r-1\,k_{r-1}} \neq 0$, з передостанньої із рівностей (6) слідує, що

$$\chi_{k_{r-1}} = c_{r-1\,k_{r-1}}^{-1} \cdot (d_{r-1} - c_{r-1\,k_{r-1}+1}\chi_{k_{r-1}+1} - \cdots - c_{r-1\,n}\chi_n). \tag{9}$$

Підставляючи у праву частину рівності (9) замість χ_{k_r} значення правої частини рівності (7) (або (8) в залежності $k_r < n$ чи $k_r = n$), одержимо, що $\chi_{k_{r-1}}$ однозначно визначається числами $\chi_{k_{r-1}+1}, \chi_{k_{r-1}+2}, \ldots, \chi_{k_r-1}, \chi_{k_r+1}, \ldots, \chi_n$.

Продовжуючи цей процес, піднімаючись знизу до верху по системі рівностей (6), врешті решт одержимо, що числа $\chi_{k_1}, \chi_{k_2}, \ldots, \chi_{k_r}$ виражаються через інші із системи чисел $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$. Причому числа $\chi_{k_1}, \chi_{k_2}, \ldots, \chi_{k_r}$ однозначно визначаються набором інших чисел із системи чисел $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$, яка, нагадаємо, є розв'язком системи лінійних рівнянь (5).

Назвемо невідомі $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$ *головними невідомими* системи лінійних рівнянь (5), а інші невідомі, якщо такі існують, — *вільними*.

Із вище сказаного слідує, що надаючи вільним невідомим довільні значення і обчислюючи значення головних невідомих, за вказаним алгоритмом, ми одержимо розв'язок системи лінійних рівнянь (5). Це означає, що довільна система лінійних рівнянь східчастого вигляду, в якій немає рівняння вигляду $0 = b$, де $b \neq 0$, є сумісною.

Очевидно, різним наборам значень вільних невідомих відповідають різні розв'язки. Якщо ж вільних невідомих не існує, тобто всі невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є головними, то система рівнянь (5) має лише один єдиний розв'язок, тобто вона є визначеною. Нами доведена наступна теорема.

Теорема 2. *Система лінійних рівнянь східчастого вигляду є сумісною тоді і тільки тоді, коли вона не містить рівняння вигляду $0 = b$, де $b \neq 0$. Сумісна система лінійних рівнянь східчастого вигляду є визначеною тоді і тільки тоді, коли число її рівнянь дорівнює числу невідомих.*

Загальним розв'язком системи лінійних рівнянь з n невідомими ми будемо називати систему n алгебраїчних виразів, які залежать від деяких параметрів таких, що підставляючи замість цих параметрів довільні значення із множини F, ми одержимо множину всіх розв'язків заданої системи лінійних рівнянь.

Теорема 3 (Ґаусс)**.** *Будь-яка система лінійних рівнянь з n невідомими з коефіцієнтами з множини F еквівалентна системі лінійних рівнянь східчастого вигляду.*

Доведення. Доведемо більш строге твердження. Покажемо, що будь-яку систему лінійних рівнянь за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду. Тоді твердження теореми, яку доводимо, буде слідувати як наслідок із теореми 1. Доведення поведемо методом математичної індукції по числу s рівнянь у системі.

Оскільки система рівнянь, що складається з одного лінійного рівняння є системою рівнянь східчастого вигляду, то база індукції очевидна.

Припустимо, що довільну систему лінійних рівнянь, що складаються з менш як s рівнянь, за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду.

Нехай тепер задано деяку систему s лінійних рівнянь з невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вигляду (1). Якщо всі коефіцієнти цієї системи рівнянь дорівнюють нулю, то вона вже є системою рівнянь східчастого вигляду. Тому вважатимемо, що хоча б один із коефіцієнтів цієї системи не дорівнює нулю.

Якщо серед рівнянь системи (1) є таке, у якого коефіцієнт біля невідомої x_1 не дорівнює нулю, то покладемо $k_1 = 1$. Якщо ж всі коефіцієнти системи рівнянь при невідомому x_1 дорівнюють нулю, а хоча б один із коефіцієнтів при невідомому x_2 не дорівнює нулю, то покладемо $k_1 = 2$ і т. д., тобто позначимо через k_1 найменший із індексів невідомих, біля яких стоять ненульові коефіцієнти. Таке число існує, оскільки хоча б один із коефіцієнтів цієї системи не дорівнює нулю.

Далі, якщо $a_{1k_1} = 0$, то із вибору числа k_1 слідує, що існує число $i \in \{2, 3, \ldots, s\}$ таке, що $a_{ik_1} \neq 0$. Поміняємо місцями перше та i-е рівняння системи рівнянь (1). Ми одержимо систему лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a'_{1k_1}x_{k_1} + a'_{1\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{2k_1}x_{k_1} + a'_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{sk_1}x_{k_1} + a'_{s\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a'_{sn}x_n = b'_s, \end{cases} \tag{10}$$

яка еквівалентна системі рівнянь (1) і в якій коефіцієнт a'_{1k_1} не дорівнює нулю.

Якщо ж $a_{1k_1} \neq 0$, то перепозначивши a_{ij} через a'_{ij} ми одержимо систему вигляду (10).

Далі, виконаємо наступні елементарні перетворення над системою рівнянь (10): додамо до другого рівняння системи перше, помножене на $-\frac{a'_{2k_1}}{a'_{1k_1}}$; до третього — перше, помножене на $-\frac{a'_{3k_1}}{a'_{1k_1}}$ і т. д.; до s-го — перше, помножене на $-\frac{a'_{sk_1}}{a'_{1k_1}}$. Ми одержимо систему лінійних рівнянь, у якої всі коефіцієнти у рівняннях, починаючи з другого, при невідомому x_{k_1} дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} a''_{1k_1}x_{k_1} + a''_{1\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{1n}x_n = b''_1, \\ \qquad\qquad a''_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a''_{s\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{sn}x_n = b''_s. \end{cases} \tag{11}$$

За припущенням індукції систему рівнянь

$$\begin{cases} a''_{2\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a''_{s\,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots + a''_{sn}x_n = b''_s \end{cases} \tag{12}$$

(тому що вона складається з менш як s рівнянь, а саме із $s-1$ рівнянь) за допомогою елементарних перетворень типу (I) або типу (II) можна привести до системи лінійних рівнянь східчастого вигляду:

$$\begin{cases} a'''_{2k_2}x_{k_2} + \dots + a'''_{2k_r}x_{k_r} + \dots + a'''_{2n}x_n = b'''_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'''_{rk_r}x_{k_r} + \dots + a'''_{rn}x_n = b'''_r, \\ 0 = b'''_{r+1}, \\ \dots\dots \\ 0 = b'''_s, \end{cases} \tag{13}$$

де $r \le n$, $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$, $a''_{jk_j} \ne 0$ $(j = 2, 3, \ldots, r)$.

Виконавши, тепер, над системою рівнянь (11) елементарні перетворення відповідні елементарним перетворенням, за допомогою яких із системи (12) одержана система рівнянь (13), ми отримаємо систему лінійних рівнянь східчастого вигляду:

$$\begin{cases} a''_{1k_1}x_{k_2} + \dots + a''_{1k_2}x_{k_2} + \dots + a''_{1k_r}x_{k_r} + \dots + a''_{1n}x_n = b''_1, \\ a'''_{2k_2}x_{k_2} + \dots + a'''_{2k_r}x_{k_r} + \dots + a'''_{2n}x_n = b'''_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'''_{rk_r}x_{k_r} + \dots + a'''_{rn}x_n = b'''_r, \\ 0 = b'''_{r+1}, \\ \dots\dots \\ 0 = b'''_s. \end{cases}$$

Це завершує доведення теореми.

Отже, із доведення теореми 3 випливає, що для того щоб знайти множину розв'язків заданої системи лінійних рівнянь досить привести цю систему до східчастого вигляду. Потім, скориставшись алгоритмом знаходження розв'язків системи лінійних рівнянь східчастого вигляду, викладеним у доведенні теореми 2, знайти загальний розв'язок заданої системи рівнянь. Цей спосіб знаходження множини розв'язків системи лінійних рівнянь називається *методом Ґаусса розв'язування системи лінійних рівнянь*.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних рівнянь з дійсними коефіцієнтами

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{14}$$

Розв'язання. Спочатку виконаємо елементарні перетворення системи (14) такі, що у новій системі буде тільки одне рівняння, яке міститиме ненульовий коефіцієнт при невідомому x_1. Для цього досить до другого рівняння системи (14) додати її перше рівняння, помножене на -1. Маємо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{15}$$

Далі, виконаємо елементарні перетворення системи (15) такі, що у новій системі, починаючи з другого рівняння, буде тільки одне рівняння, яке міститиме ненульовий коефіцієнт при невідомому x_2. Для цього поміняємо місцями друге та третє рівняння системи (15)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{16}$$

А потім послідовно до третього та четвертого рівняння системи (16) додамо друге рівняння, відповідно помножене на 5 та 7. Одержимо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}-2x_3} - 3x_4 = 1, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 2x_3 + 4x_4 = -12, \\ - 4x_3 + 8x_4 = -24. \end{cases} \tag{17}$$

Нарешті, до четвертого рівняння системи (17) додамо її третє рівняння, помножене -2

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}-2x_3} - 3x_4 = 1, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 2x_3 + 4x_4 = -12, \\ 0 = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Очевидно, система рівнянь (18) еквівалентна системі

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\quad - 3x_4 = \ \ 1, \\ \qquad\quad x_2 - x_3 + \ x_4 = -3, \\ \qquad\qquad\quad x_3 - 2x_4 = \ \ 6. \end{cases} \tag{19}$$

Оскільки система рівнянь (19) має східчастий вигляд, то із наслідку 2 випливає, що система лінійних рівнянь (14) є невизначеною. З останнього рівняння маємо $x_3 = 6 + 2x_4$. Підставляючи отримане значення для x_3 у друге рівняння системи (19), визначимо з нього x_2:

$$x_2 = -3 - x_4 + x_3 = -3 - x_4 + 6 + 2x_4 = 3 + x_4.$$

Підставляючи, нарешті, знайдені значення x_2 та x_3 у перше рівняння, визначимо x_1:

$$x_1 = 1 + 3x_4 - 3x_2 = 1 + 3x_4 - 9 - 3x_4 = -8.$$

Отже,

$$x_1 = -8, \qquad x_2 = 3 + x_4, \qquad x_3 = 6 + 2x_4$$

і система дійсних чисел -8, $3 + c$, $6 + 2c$, c є загальним розв'язком, даної в умові завдання, системи лінійних рівнянь.

Зауваження. На прикладі розв'язання попереднього завдання можна пересвідчитися, що при відшуканні розв'язків систем лінійних рівнянь методом Ґаусса всі елементарні перетворення систем доцільно проводити над відповідними їм розширеними матрицями. І якщо A і B — матриці еквівалентних систем лінійних рівнянь, то писатимемо $A \sim B$. Проілюструємо це в наступному прикладі.

Задача 2. Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних рівнянь з раціональними коефіцієнтами

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 + \ \ x_4 = \ \ 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = \ \ 2, \\ 5x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 - 3x_4 = \ \ 4. \end{cases} \tag{20}$$

Розв'язання. Випишемо розширену матрицю системи (20), в якій для зручності стовпець вільних членів відокремимо вертикальною рискою

$$A = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Далі, суто з технічних причин, щоб уникнути арифметичних операцій з нецілими дробовими коефіцієнтами, виконаємо спочатку наступне елементарне перетворення — до першого рядка матриці A додамо другий, помножений на -1. Одержимо

$$A \sim B = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right).$$

Послідовно до другого, третього, четвертого рядків матриці B додамо перший, помножений відповідно на 3, 5, 2. Одержимо

$$B \sim C = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 16 & -16 & 22 & -6 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 2 \end{array} \right).$$

Додамо до третього рядка матриці C четвертий, помножений на -3. Потім поміняємо місцями другий та третій рядки. Будемо мати, що

$$C \sim D = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 2 \end{array} \right).$$

Далі, послідовно додавши до третього та четвертого рядків матриці D її другий рядок, помножений відповідно на -7 і -5, одержимо

$$D \sim F = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & -30 & 62 \end{array} \right).$$

Нарешті, до четвертого рядка матриці D додамо третій, помножений на $-\frac{30}{40}$. Одержимо

$$F \sim G = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{array} \right).$$

Матриця G є розширеною матрицею системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ x_2 - x_3 + 7x_4 = -12, \\ - 40x_4 = 83, \\ 0 = -\frac{1}{4}, \end{cases}$$

в якій ліва частина останнього рівняння дорівнює нулю, а права частина відмінна від нуля. Така система лінійних рівнянь немає розв'язку, тобто є несумісною. Отже, дана в умові система лінійних рівнянь є несумісною.

Вправи для самостійної роботи

1. Розв'язати системи лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} 5x_1+3x_2+5x_3+12x_4=10, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4=4, \\ x_1+7x_2+9x_3+4x_4=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -9x_1+10x_2+3x_3+7x_4=7, \\ -4x_1+7x_2+x_3+3x_4=5, \\ 7x_1+5x_2-4x_3-6x_4=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1-x_2-3x_4=2, \\ 3x_1-x_3+x_4=-3, \\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2-3x_4=1, \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=11, \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=12, \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=13, \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=14; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3-7x_4=0, \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0, \\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0; \end{cases}$

є) $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=1, \\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5=2, \\ x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5=3, \\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5=3; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-2=0, \\ x_1+3x_2+x_3-5=0, \\ x_1+x_2+5x_3+7=0, \\ 2x_1+3x_2-3x_3-14=0; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0, \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+1=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3-1=0, \\ x_1+x_2+x_3-3=0, \\ x_1+2x_2-3x_3-1=0. \end{cases}$

2. Дослідити на сумісність системи лінійних рівнянь і знайти загальний розв'язок в залежності від значення параметра λ:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 10x_4 = 11; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$ г) $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2. \end{cases}$

3. Знайти систему лінійних однорідних рівнянь, розв'язками якої є наступні системи чисел:

$(1, 1, 0, -3, -1)$, $(1, -1, 2, -1, 0)$, $(4, -2, 6, 3, -4)$, $(2, 4, -2, 4, -7)$.

§ 5. Перестановки. Підстановки

Перестановки. Нехай M — скінченна множина, яка складається з n елементів. Перенумеруємо ці елементи, тобто поставимо у відповідність кожному елементу множини M одне із натуральних чисел 1, 2, …, n. Припустимо, що природа елементів множини M не є суттєвою. Тому будемо вважати, що $M = \{1, 2, \ldots, n\}$. Тоді, виписавши елементи множини M у порядку нумерації, ми одержимо деяке розміщення натуральних чисел 1, 2, …, n. Наприклад, числа 1, 2, 3, 4 можна розмістити наступним чином: 3, 2, 4, 1 або 2, 4, 1, 3. *Перестановкою* із n елементів називається будь-яке розміщення чисел 1, 2, …, n.

Позначимо $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ (читається: "ен-факторіал").

Теорема 1. *Число всіх перестановок із n елементів дорівнює $n!$.*

Доведення. Довільну перестановку з n елементів у загальному вигляді записують так: i_1, i_2, …, i_n, де кожне з i_k є одним із чисел 1, 2, …, n, причому жодне з цих чисел не зустрічається двічі.

В якості i_1 можна взяти будь-яке з чисел 1, 2, …, n. Тому для вибору i_1 маємо n можливостей. Якщо i_1 вже вибрано, то в якості i_2 можна взяти будь-яке одне із $n - 1$ чисел, що залишилися після вибору i_1. Звідси випливає, що число можливостей для вибору i_1 і i_2 дорівнює добутку $n(n-1)$. Якщо i_1 і i_2 зафіксовані, то за i_3 можна взяти будь-яке одне з $n-2$ чисел, що залишилися після вибору i_1, i_2, і число можливостей для вибору i_1, i_2, i_3 дорівнює добутку $n(n-1)(n-2)$ і т. д. Таким чином, число можливостей вибору для i_1, i_2, …, i_{n-1}, i_n, а отже, і число перестановок з n елементів дорівнює $n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$. Підкреслимо тільки, що якщо i_1, i_2, …, i_{n-1} вже вибрані, то для вибору i_n залишається лише одна можливість. Теорему доведено.

Якщо у деякій перестановці поміняти місцями які-небудь два елементи, а всі інші залишити на місці, то ми одержимо, очевидно, нову перестановку. Таке перетворення перестановки називається *транспозицією*.

Теорема 2. *Всі $n!$ перестановок із n елементів можна розташувати в такому порядку, що кожна наступна буде одержуватися з попередньої однією транспозицією, причому розташування починати можна з будь-якої перестановки.*

Доведення. Доведення теореми поведемо методом математичної індукції за числом n елементів перестановок.

При $n = 2$ теорема справедлива: розташування

$$1,\ 2;\quad 2,\ 1 \qquad \text{та} \qquad 2,\ 1;\quad 1,\ 2$$

задовольняють вимоги теореми.

Припустимо, що теорема справедлива для довільних натуральних чисел, менших за деяке фіксоване натуральне число k. Доведемо, що вона справедлива і при $n = k$. Нехай $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — довільна (але зафіксована) перестановка з k елементів. Розглянемо всі перестановки з k елементів, у яких першим елементом є i_1. За попередньою теоремою таких перестановок є $(k-1)!$.

Розташуємо відповідно до вимог теореми всі перестановки з елементів $i_2, i_3, \ldots, i_k$, починаючи з перестановки $i_2, i_3, \ldots, i_k$. Це можна зробити за індуктивним припущенням. Потім до кожної з цих перестановок допишемо першим елемент i_1. Одержимо розташування всіх перестановок з k елементів, у яких на першому місці стоїть елемент i_1 і яке задовольняє вимоги теореми. У перестановці з k елементів, що є останньою у цьому розташування, виконаємо транспозицію символів i_1 і i_2. Одержимо перестановку з k елементів, у якій на першому місці стоїть елемент i_2. Починаючи з цієї перестановки, розташуємо описаним вище способом у потрібному порядку всі перестановки з k елементів, у яких першим елементом є елемент i_2. Потім в останній перестановці транспонуємо символи i_2 та i_3 і т. д. В результаті таких дій через скінченне число кроків одержимо розташування всіх $k!$ перестановок з k елементів, яке задовольняє вимоги теореми й починається з довільно вибраної перестановки i_1, $i_2, \ldots, i_k$. Теорему доведено.

Наслідок 1. *Будь-яка перестановка з n елементів може бути одержана із довільної іншої перестановки з тих самих елементів за допомогою кількох транспозицій.*

Доведення. Припустимо, що від перестановки $i_1, i_2, \ldots, i_n$ потрібно перейти до перестановки $j_1, j_2, \ldots, j_n$. Починаючи з перестановки $i_1, i_2, \ldots, i_n$ розташуємо всі перестановки з n елементів у ряд, так щоб кожна наступна одержувалась з попередньої однією транспозицією. У цьому ряді на деякій k-й позиції знаходиться перестановка $j_1, j_2, \ldots, j_n$, де $k \in \{2, 3, \ldots, n!\}$. Тому від перестановки i_1, $i_2, \ldots, i_n$ до перестановки $j_1, j_2, \ldots, j_n$ можна перейти за допомогою $k-1$ транспозицій. Наслідок доведено.

Кажуть, що в даній перестановці числа i та j утворюють *інверсію*, якщо $i > j$, але i стоїть раніше j. Перестановка називається *парною*, якщо її елементи утворюють парне число інверсій, і *непарною* — в протилежному випадку. Очевидно, перестановка $1, 2, \ldots, n$ є парною для довільного натурального n через те, що число інверсій в ній дорівнює нулю.

Теорема 3. *Усяка транспозиція змінює парність перестановки.*

Доведення. Можливі два випадки: 1) елементи, які транспонуються, стоять у перестановці поряд; 2) елементи, що транспонуються, стоять не поряд. Розглянемо по черзі кожен з цих випадків.

1. Припустимо, що у перестановці

$$i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{r-1},\ i_r,\ i_{r+1},\ i_{r+2},\ \ldots,\ i_n \tag{1}$$

виконано транспозицію символів i_r та i_{r+1}, що стоять поряд. Ця транспозиція перетворює перестановку (1) на перестановку

$$i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{r-1},\ i_{r+1},\ i_r,\ i_{r+2},\ \ldots,\ i_n. \tag{2}$$

У перестановках (1) і (2) кожна пара елементів i_k і i_l відмінна від пари i_r і i_{r+1} одночасно або утворює інверсію, або не утворює її. Тому в обох цих перестановках число інверсій, утворюваних парами i_k і i_l відмінними від пари i_r і i_{r+1} одне й те саме. Щодо пари i_r і i_{r+1}, то в одній з цих перестановок вона утворює інверсію, а в іншій не утворює: якщо в перестановці (1) елементи i_r і i_{r+1} утворюють інверсію, то в перестановці (2) — не утворюють, якщо ж у перестановці (1) вони не утворюють інверсію, то в перестановці (2) — утворюють. Тому число інверсій у перестановці (2) або на 1 менше, або на 1 більше від числа інверсій в перестановці (1). В обох випадках парність перестановки (2) протилежна парності перестановки (1). Отже, транспозиція елементів i_r і i_{r+1}, що стоять поряд, змінює парність перестановки.

2. Припустимо тепер, що в перестановці

$$i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{r-1},\ i_r,\ i_{r+1}, \ldots,\ i_{r+q},\ i_{r+q+1},\ \ i_{r+q+2},\ \ldots,\ i_n \tag{3}$$

виконано транспозицію символів i_r та i_{r+q+1}, між якими розташовано q елементів, де q — деяке натуральне число. Ця транспозиція перетворює перестановку (3) на перестановку

$$i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{r-1},\ i_{r+q+1},\ i_{r+1}, \ldots,\ i_{r+q},\ i_r,\ \ i_{r+q+2},\ \ldots,\ i_n. \tag{4}$$

Проте перестановку (4) можна одержати з перестановки (3) шляхом наступних $2q+1$ транспозицій сусідніх елементів: i_r переставити з i_{r+1}, потім у одержаний перестановці i_r переставити з i_{r+2} і т. д., нарешті, i_r переставити з i_{r+q+1}, далі i_{r+q+1} переставити з i_{r+q}, потім i_{r+q+1} переставити з i_{r+q-1} і т. д., нарешті, i_{r+q+1} переставити з i_{r+1}.

Внаслідок виконання цих транспозиції парність перестановки, за доведеним вище, змінювалась $2q+1$ разів. Оскільки число $2q+1$ непарне, то парність перестановки (4) протилежна парності перестановки (3). Таким чином і у випадку, коли транспозиція здійснюється над елементами, що не стоять поряд у перестановці, парність перестановки змінюється. Теорему доведено.

Наслідок 1. *Для довільного $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ число парних перестановок із n елементів дорівнює числу непарних, тобто дорівнює $\frac{n!}{2}$.*

Доведення. На основі теореми 2 розташуємо всі $n!$ перестановок з n елементів у такому порядку, щоб кожну наступну можна було одержати з попередньої однією транспозицією. Кожні дві сусідні перестановки у цьому розташуванні, за теоремою 3, мають протилежні парності, тобто парні й непарні перестановки чергуються. Звідси випливає, що число парних перестановок дорівнює числу непарних, оскільки при $n \geq 2$ число $n!$ парне.

Підстановки. *Підстановкою степеня n* називається бієктивне відображення множини $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ в себе. У розгорнутій і наочній формі підстановку $\sigma : M \to M$ зображають символом

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \ldots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

де i_1, i_2, …, i_n — довільна перестановка з n елементів. Очевидно, $\sigma(i_1)$, $\sigma(i_2)$, …, $\sigma(i_n)$ також є перестановкою з n елементів. Надалі перестановку i_1, i_2, …, i_n будемо називати верхньою, а $\sigma(i_1)$, $\sigma(i_2)$, …, $\sigma(i_n)$ — нижньою перестановками підстановки σ.

Підстановку σ можна зобразити різними способами вигляду (5), зокрема

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}, \tag{6}$$

де $j_k = \sigma(k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

— це записи однієї і тієї ж підстановки 4-го степеня, для якої образом 1 є 2, образом 2 є 4, образом 3 є 3 і нарешті, образом 4 є 1. При цьому інколи говорять, що 1 переходить у 2, 2 — в 4, 3 — в 3 і 4 — в 1.

Теорема 4. *Число всіх підстановок степеня n дорівнює $n!$.*

Доведення. Із означення рівності двох відображень слідує, що дві підстановки δ і σ степеня n вигляду

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}, \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

рівні тоді і тільки тоді, коли $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2$, ..., $i_n = j_n$. А тому довільна підстановка σ степеня n записана у вигляді (6) однозначно визначається нижньою перестановкою $j_1, j_2, \dots, j_n$. Оскільки всіх перестановок з n елементів є $n!$, то й число всіх підстановок n-го степеня дорівнює $n!$.

Зауваження. Із сказаного вище слідує, що терміни "перестановка" і "підстановка" можна ототожнити. Дійсно, коли йдеться про розміщення перших n натуральних чисел у деякому порядку, то це означає, що розглядається деяка відповідність (яка є бієктивним відображення) між елементами однієї і тієї ж множини, яка складається із перших n натуральних чисел.

Теорема 5. *Нехай σ — довільна підстановка степеня n. У всіх записах підстановки σ у вигляді* (5) *або парності перестановок у першому та другому рядках співпадають, або вони різні.*

Доведення. Розглянемо деяку підстановку n-го степеня

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Верхня і нижня перестановки підстановки σ або можуть мати однакові парності, або протилежні. Припустимо вони мають однакову парність. Нехай

$$\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix}. \tag{8}$$

є інший, довільно вибраний, запис підстановки σ. Покажемо, що в записі (8) верхня і нижні перестановки також мають однакову парність. Перестановку $k_1, k_2, \dots, k_n$, як відомо, можна одержати із перестановки $i_1, i_2, \dots, i_n$ шляхом скінченного числа деяких транспозицій елементів. Якщо одночасно з транспозиціями, що переводять перестановку $i_1, i_2, \dots, i_n$ в перестановку $k_1, k_2, \dots, k_n$ виконаємо і транспозиції відповідних символів у нижній перестановці, то очевидно, від запису (7) підстановки σ ми перейдемо до запису (8). Проте одночасне виконання однієї транспозиції у верхній і нижній перестановках водночас змінює парність цих перестановок на протилежні і, тим самим, зберігає збіг їх парностей. Тому верхня і нижня перестановки у записі (8) мають однакову парність. Якщо ж верхня і нижня перестановки у записі (7) мають протилежні парності, то аналогічно доводиться, що це ж саме має місце й у записі (8). Теорему доведено.

Підстановка степеня n називається *парною*, якщо у записі у вигляді (5) парності перестановок у першому та другому рядках співпадають, і *непарною* у протилежному випадку.

Теорема 6. *Для довільного $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ число парних підстановок степеня n дорівнює числу непарних, тобто дорівнює $\frac{n!}{2}$.*

Доведення. Нехай n — довільне натуральне число, більше за 1. Випишемо всі $n!$ підстановок степеня n у вигляді (6). Оскільки перестановка 1, 2, 3, ..., n є парною, то підстановка, записана у вигляді (6), є парною, якщо парною є перестановка у нижньому рядку і — непарною у протилежному випадку. Оскільки число парних (так як і непарних) перестановок з n елементів дорівнює $\frac{n!}{2}$, то число парних (непарних) підстановок n-степеня також дорівнює $\frac{n!}{2}$.

Нехай σ, δ — довільні підстановки степеня n. Оскільки σ, δ — бієктивні відображення множини $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ в себе, то нескладно показати, що добуток відображень σ і δ є також бієктивним відображенням множини M в себе. А, отже, $\sigma\delta$ є підстановкою, яка називається *добутком підстановок* σ і δ. Якщо

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix},$$

то

$$\sigma\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_{j_1} & i_{j_2} & \ldots & i_{j_n} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Оскільки добуток довільних відображень задовольняє асоціативній властивості, то очевидно, і операція множення підстановок задовольняє цій властивості, тобто для довільних підстановок n-го степеня σ, δ, μ справедлива рівність

$$(\sigma\delta)\mu = \sigma(\delta\mu).$$

Підстановку

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

як і у випадку з довільними відображеннями, ми називатимемо *тотожною* або *одиничною підстановкою степеня* n. Очевидно, для довільної підстановки n-го степеня σ мають місце наступні рівності

$$e\sigma = \sigma e = \sigma.$$

Нехай σ — довільна підстановка степеня n. Оскільки σ є бієктивним відображенням множини $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ саму в себе, то за доведеним раніше для нього існує обернене відображення σ^{-1} таке, що

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e.$$

Відображення σ^{-1} є бієктивним відображенням із множини M в множину M, а отже, є підстановкою степеня n. Причому, якщо

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix},$$

то очевидно,

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Підстановку σ^{-1} надалі називатимемо *оберненою* до підстановки σ.

Множина S_n всіх підстановок степеня n, на якій визначена операція множення підстановок за формулою (9) називається *симетричною групою степеня* n.

Підстановка, яка одержується із тотожної підстановки шляхом однієї транспозиції в нижньому рядку, називається *транспозицією*. Транспозиція має вигляд

$$\begin{pmatrix} \ldots & k & \ldots & l & \ldots \\ \ldots & l & \ldots & k & \ldots \end{pmatrix}, \tag{10}$$

де трикрапками замінені символи, що відображаються самі в себе. Домовимося позначати цю транспозицію символом $(k\ l)$, вказуючи при цьому, якщо потрібно, степінь підстановки. Застосування транспозиції k-го та l-го символів у нижньому рядку в запису (6) підстановки σ рівносильне множенню підстановки σ зліва на транспозицію $(k\ l)$.

Довільну перестановку степеня n можна одержати із перестановки $1, 2, \ldots, n$ за допомогою скінченного числа деяких транспозицій. Це в свою чергу означає, що довільну підстановку n-го степеня можна також одержати із тотожної шляхом скінченного числа деяких транспозицій у нижній перестановці, тобто шляхом послідовно множення на підстановки вигляду (10), інакше кажучи транспозиції. Якщо у цьому добутку упустити множник, що є тотожною підстановкою, то можна стверджувати, що будь-яка підстановка n-го степеня представляється у вигляді добутку скінченного числа деяких транспозицій.

Довільну підстановку можна багатьма різними способами представити у вигляді добутку транспозицій. Завжди можна, наприклад, добавити два однакові множники вигляду $(k\ l)(k\ l)$, добуток яких дорівнює тотожній підстановці e. Наведемо менш тривіальний приклад:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (34)(15)(12) = (13)(34)(45)(24)(14).$$

Але оскільки при множенні будь-якої транспозиції $(k\ l)$ на довільну підстановку σ, записану у вигляді (6), змінюється парність на протилежну лише у нижній перестановці, то це означає, що підстановки σ і $\sigma \cdot (k\ l)$ мають протилежні парності. У свою чергу звідси і того, що тотожна підстановка e є парною, слідує, що при всіх розкладах підстановки у добуток транспозицій парність числа цих транспозицій є однією і тією ж, причому вона співпадає з парністю самої підстановки. Нами доведена наступна теорема.

Теорема 7. *Будь-яка підстановка δ є добутком кількох транспозицій, причому парність числа цих транспозицій співпадає з парністю підстановки δ.*

Наслідок 1. *Добуток двох підстановок з однаковою парністю є парною підстановкою, а добуток двох підстановок з різною парністю — непарною підстановкою.*

Доведення. Нехай σ і δ — довільні підстановки n-го степеня. Можливі наступні випадки: 1) обидві підстановки мають однакову парність; 2) підстановки σ і δ мають різну парність.

Розглянемо перший випадок. Представимо підстановки σ і δ у вигляді добутку скінченного числа деяких транспозицій:

$$\sigma = (i_1\ j_1)(i_2\ j_2)\cdots(i_s\ j_s), \quad \delta = (k_1\ l_1)(k_2\ l_2)\cdots(k_t\ l_t).$$

Підкреслимо, що у розкладі підстановки σ бере участь s транспозицій, а у δ — t транспозицій. За попередньою теоремою парності чисел s і t відповідно співпадають із парностями підстановок σ і δ. Тоді добуток $\sigma\delta$ можна представити у вигляді добутку $s+t$ транспозицій

$$\sigma\delta = (i_1\ j_1)(i_2\ j_2)\cdots(i_s\ j_s)(k_1\ l_1)(k_2\ l_2)\cdots(k_t\ l_t).$$

Оскільки сума натуральних чисел з однаковою парністю є число парне, то $s+t$ є парним числом, а отже, за попередньою теоремою підстановка $\sigma\delta$ є парною. Інший випадок доводиться аналогічно. Наслідок доведено.

Зручним способом запису підстановок, який дозволяє легко знаходити їх парність, є розклад у так звані цикли. Нехай μ — підстановка степеня n і N_μ — підмножина множини $M=\{1,2,\ldots,n\}$, яка складається з усіх таких елементів $i\in M$, що $\mu(i)\neq i$. Підстановка μ називається *циклом*, якщо для довільних $i,j\in N_\mu$ існує таке натуральне число k, що $\mu^k(i)=j$. Число $t=|N_\mu|$ називається *довжиною* циклу μ. Цикл μ позначається символом $(i_1\, i_2\, \ldots\, i_t)$, де i_1 — довільний елемент із N_μ, $i_q=\mu(i_{q-1})$ $(q=2,3,\ldots,t)$.

Цикли μ, $\delta\in S_n$ називаються *незалежними*, якщо $N_\mu\cap N_\delta=\emptyset$.

Теорема 8. *Будь-яка підстановка однозначно з точністю до порядку множників представляється у вигляді добутку попарно незалежних циклів.*

Доведення цієї і наступної теорем не є складними, а тому ми залишаємо їх читачеві.

Нехай k — число циклів у розкладі підстановки $\mu\in S_n$ у добуток незалежних циклів. *Декрементом підстановки* μ називається різниця $|N_\mu|-k$.

Теорема 9. *Парність підстановки співпадає з парністю декремента цієї підстановки.*

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Визначити число інверсій у перестановці

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ 2n-1,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 2n. \tag{11}$$

Розв'язання. Нехай

$$O=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ 2n-1\},\quad E=\{2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 2n\}.$$

Очевидно, що жодні два елементи множини O у перестановці (11) не утворюють інверсії. Аналогічно не утворюють інверсії жодні два елементи множини E у цій перестановці. Тому для обчислення числа інверсій у перестановці (11) досить порахувати число інверсій, які утворюють кожен елемент множини O з кожним елементом множини E: 1 не утворює інверсію з жодним елементом множини E; 3

утворює інверсію тільки з елементом $2 \in E$; і так далі; $2n-1$ утворює інверсії з елементами $2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 2n-2 \in E$. Отже, число інверсій у перестановці (11) дорівнює

$$0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}.$$

Задача 2. Знайти добуток підстановок

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Розкласти в добуток незалежних циклів підстановку

$$\delta=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\begin{gathered} \delta(3)=3, \quad \delta(5)=5; \\ \delta(1)=8, \quad \delta(8)=2, \quad \delta(2)=1; \\ \delta(4)=6, \quad \delta(6)=7, \quad \delta(7)=4, \end{gathered}$$

то $\delta=(1\ 8\ 2)(4\ 6\ 7)$.

Задача 4. Знайти підстановку x, що задовольняє рівності

$$\alpha x\beta=\gamma, \tag{12}$$

де

$$\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \gamma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Нехай x — підстановка, що задовольняє рівність (12). Оскільки існують обернені підстановки α^{-1} і β^{-1} відповідно до підстановок α і β, то помноживши рівність (12) зліва на α^{-1}, а потім отриману рівність справа на β^{-1}, одержимо, що $x=\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}$. Навпаки, очевидно, підстановка $x=\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}$ задовольняє рівність (12). Тому

$$x=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вправи для самостійної роботи

1. Виписати транспозиції, за допомогою яких від перестановки 1, 2, 3, 4, 5 можна перейти до перестановки 2, 5, 3, 4, 1.

2. Довести, що будь-яку перестановку $i_1, i_2, \ldots, i_n$ можна отримати з довільної іншої перестановки $j_1, j_2, \ldots, j_n$ шляхом не більш як $n-1$ транспозицій.

3. Визначити парність перестановок:

а) 7, 5, 6, 4, 1, 3, 2; б) 1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8;

в) $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, 1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1$.

4. В якій перестановці чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ число інверсій найбільше і чому воно дорівнює?

5. Число інверсій у перестановці $i_1, i_2, \ldots, i_n$ дорівнює k. Чому дорівнює число інверсій у перестановці $i_n, i_{n-1}, \ldots, i_2, i_1$.

6. Довести, що для довільного цілого числа k $(0 \le k \le C_n^2)$ існує перестановка чисел $1, 2, 3, \ldots, n$, число інверсій в якій дорівнює k.

7. Обчислити добутки підстановок:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Розкласти в добуток незалежних циклів і визначити парність підстановок:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \ldots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \ldots & 3n-1 & 3n & 3n-2 \end{pmatrix}$.

9. Виписати підстановки сьомого степеня, які розкладаються у добутки незалежних циклів:

а) (1 5)(2 3 4); б) (1 3)(2 5)(4 7); в) (7 5 3 1)(2 4 6).

10. Виписати підстановку степеня $2n$, яка є циклом

$$(1\ \ 2\ \ 3\ \ \ldots\ \ 2n-1\ \ 2n).$$

11. Обчислити добутки підстановок сьомого степеня:

а) $[(1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6\ 7)]\cdot[(1\ 4\ 7)(2\ 3\ 5\ 6)]$;

б) $[(1\ 3)(5\ 7)(2\ 4\ 6)]\cdot[(1\ 3\ 5)(2\ 4)(6\ 7)]$.

12. Довести, що для довільного циклу $\delta \in S_n$ довжини k має місце рівність $\delta^k = e$ (e — тотожна підстановка із S_n).

13. Нехай $\delta \in S_n$ — цикл довжини k і l — натуральне число таке, що $\delta^l = e$. Довести, що l ділиться на k.

14. Нехай

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати рівняння: а) $\alpha\beta x = \gamma$; б) $\beta = \gamma x \alpha$, де x — деяка невідома підстановка п'ятого степеня.

15. Довести, що будь-яка підстановка степеня n може бути представлена у вигляді добутку транспозицій вигляду:

а) $(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n)$; б) $(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ n)$.

§ 6. Детермінанти n-го порядку та їхні властивості

Аналогічно як у §4 позначимо через F одну із наступних множин: множину $\mathbb{Q}$ раціональних чисел, множину $\mathbb{R}$ дійсних чисел або множину $\mathbb{C}$ комплексних чисел. А елементи самої множини F будемо називати просто числами.

Нехай нам дано деяку квадратну матрицю порядку n з елементами із множини F

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Розглянемо всеможливі добутки по n елементів цієї матриці, розміщених в різних рядках і різних стовпцях, тобто добутки вигляду

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}, \tag{2}$$

де індекси i_1, i_2, ..., i_n складають деяку перестановку із чисел 1, 2, 3, ..., n. Кількість таких добутків співпадає з кількістю всіх різних перестановок із n елементів, тобто $n!$.

Якщо через σ позначити підстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

то добуток (2) можна також записати у вигляді $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$.

Детермінантом (*визначником*) *матриці* (1) *n-го порядку,* називається алгебраїчна сума $n!$ всеможливих *членів*, кожен з яких представляє собою добуток елементів цієї матриці взятих по одному із кожного рядка та кожного стовпця (тобто добутками вигляду (2)), причому кожен із цих членів береться із знаком плюс, якщо відповідна йому підстановка парна, і з знаком мінус — у протилежному випадку.

Якщо через A позначити матрицю (1), то детермінант матриці A будемо надалі позначати через

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Отже,

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}, \tag{4}$$

де, нагадаємо, S_n — множина всіх підстановок степеня n, $\mathrm{inv}(\sigma)$ — кількість інверсій у підстановці σ.

Матриця вигляду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

називається *транспонованою до матриці* (1). Позначатимемо матрицю транспоновану до матриці A через A^T. Інколи кажуть також, що матрицю A^T отримали із матриці A за допомогою *транспонування* матриці A.

Теорема 1. *Детермінант матриці A дорівнює детермінанту транспонованої до неї матриці A^T.*

Доведення. Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — це матриця вигляду (1). Кожен член детермінанта (3) матриці A вигляду

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \tag{6}$$

є також членом детермінанта

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

оскільки всі множники цього члена беруться по одному із кожного рядка та кожного стовпчика матриці A, а отже і A^T. Цілком очевидним є і зворотне твердження.

Далі, знак члена (6) у детермінанті (3) визначається парністю підстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}; \tag{8}$$

у детермінанті (7) перші індекси вказують на номер стовпця, другі — на номер рядка, тому члену (6) у детермінанті (7) відповідає підстановка

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Парності підстановок (8) і (9) співпадають, а тому член (6) бере участь в обох детермінантах з однаковим знаком. Таким чином, детермінанти (3) і (7) є сумами однакових членів, взятих з однаковими знаками, тобто рівні між собою. Теорема доведена.

Із теореми 1 випливає, що всяке твердження про детермінант матриці пов'язане із рядками цієї матриці справедливе і для її стовпців і навпаки. Тому наступні теореми 2–9 будуть сформульовані тільки для рядків детермінанта. Зауважимо також, що під рядком або стовпцем детермінанта ми надалі розумітимемо відповідно рядок або стовпець матриці, детермінант якої обчислюємо.

Теорема 2. *Якщо один із рядків детермінанта складається з нулів, то детермінант дорівнює нулю.*

Доведення. Дійсно, нехай всі елементи i-го рядка детермінанта є нулями. У кожний член даного детермінанта повинен ввійти множник із i-го рядка, тому в нашому випадку всі члени детермінанта дорівнюють нулю. Отже, і сам детермінант дорівнює нулю.

Теорема 3. *Якщо в детермінанті поміняти місцями два рядки, то він поміняє знак на протилежний.*

Доведення. Розглянемо детермінант, одержаний із детермінанта (3) перестановкою k-го та l-го рядків ($k \neq l$)

$$\begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow (k\text{-й рядок}) \\ . \\ \leftarrow (l\text{-й рядок}) \\ \\ \\ \end{array} \tag{10}$$

Кожен член детермінанта (3) вигляду $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ є також членом детермінанта (10), оскільки всі його множники знаходяться в різних рядках та різних стовпцях детермінанта (10). Аналогічно, кожен член детермінанта (10) є членом детермінанта (3), тобто детермінанти (3) і (10) складаються із одних і тих же членів. Члену

$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ детермінанта (3) відповідає підстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & l & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & \dots & i_l & \dots & i_n \end{pmatrix}, \tag{11}$$

а в детермінанті (10) йому відповідає підстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & l & \dots & k & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & \dots & i_l & \dots & i_n \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Підстановку (12) можна одержати із підстановки (11) шляхом однієї транспозиції у верхньому рядку. Це в свою чергу означає, що ці підстановки мають протилежну парність. Звідси випливає, що всі члени детермінанта (3) входять в детермінант (10) з протилежним знаком і навпаки. Таким чином, детермінанти (3) і (10), як суми, що складають з відповідно взаємно протилежних доданків, відрізняються тільки знаком. Теорема доведена.

Теорема 4. *Детермінант, що містить два однакові рядки, дорівнює нулю.*

Доведення. Нехай Δ — це детермінант, що містить два однакові рядки. Із теореми 3 слідує, що після перестановки цих двох рядків ми одержимо детермінант, що дорівнюватиме $-\Delta$. Але оскільки ці рядки однакові, то з іншого боку цей детермінант не зміниться і він дорівнюватиме Δ, тобто $\Delta = -\Delta$. Таке можливо лише у випадку, коли $\Delta = 0$.

Теорема 5. *Якщо всі елементи деякого рядка детермінанта помножити на число γ, то і сам детермінант помножиться на γ.*

Доведення. Обчислимо детермінант, одержаний із детермінанта (3) множенням всіх елементів i-го рядка на число: γ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma a_{i1} & \gamma a_{i2} & \cdots & \gamma a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i-1\,\sigma(i-1)} (\gamma a_{i\sigma(i)}) a_{i+1\,\sigma(i+1)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \gamma \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \gamma \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

що й потрібно було довести.

Теорема 6. *Детермінант, що містить два пропорційні рядки, дорівнює нулю.*

Доведення. Справді, нехай елементи k-го рядка відрізняють від відповідних елементів l-го рядка одним і тим же множником γ. Тоді згідно попередньої теореми після того, як ми винесемо цей множник із k-го рядка за знак детермінанта, ми одержимо детермінант з двома однаковими рядками, який, як випливає із теореми 4, дорівнює нулю. Теорема доведена.

Теорема 7. *Якщо всі елементи i-го рядка детермінанта n-го порядку представлені у вигляді суми двох доданків*

$$a_{ij} = b_j + c_j, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

то цей детермінант можна представити у вигляді суми двох детермінантів, у яких всі рядки, крім i-го, — ті ж самі, як і в даному детермінанті, а i-ий рядок в одному із цих детермінантів складається з елементів b_j, а в іншому — із елементів c_j.

Доведення. Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

де $a_{ij} = b_j + c_j$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Тоді за означенням детермінанта

$$\Delta = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots (b_{\sigma(i)} + c_{\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots b_{\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} +$$

$$+ \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots c_{\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \Delta_1 + \Delta_2,$$

де, очевидно,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема доведена.

Користуючись методом математичної індукції, можна узагальнити теорему 7 на випадок, коли кожний елемент i-го рядка представляється у вигляді суми k доданків, де $k \geq 2$.

Будемо говорити, що i-ий рядок детермінанта (3) є *лінійною комбінацією* рядків з номерами $k_1, \ldots, k_s$, якщо існують такі числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, що

$$a_{ij} = \alpha_1 a_{k_1 j} + \cdots + \alpha_s a_{k_s j}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Теорема 8. *Якщо один із рядків детермінанта є лінійною комбінацією деяких інших рядків, то детермінант дорівнює нулю.*

Доведення. Нехай i-й рядок детермінанта Δ є лінійною комбінацією інших рядків цього ж детермінанта з номерами $k_1, k_2, \ldots, k_s$. Оскільки кожен елемент i-го рядка є сумою s доданків, то з теореми 7 випливає, що даний детермінант можна представити у вигляді суми s детермінантів, у кожному з яких i-й рядок є пропорційним деякому іншому рядку (у першого з цих детермінантів пропорційними будуть i-й та k_1-й рядки, у другому — i-й та k_2-й рядки і т. д.). Згідно теореми 6, кожен із цих детермінантів дорівнює нулю. Отже, нулю дорівнює і даний детермінант Δ.

Теорема 9. *Якщо до елементів одного з рядків детермінанта додати відповідні елементи іншого рядка помножені на одне і те ж саме число, а всі інші рядки залишити без зміни, то одержаний детермінант буде рівний даному.*

Доведення. Нехай до i-го рядка детермінанта (3) додається k-й рядок ($i \neq k$), помножений на число γ. Тоді в утвореному детермінанті Δ' i-й рядок складається із елементів $a_{ij} + \gamma a_{kj}$, $j = 1, \ldots, n$. За теоремою 7 детермінант Δ' можна представити у вигляді суми двох детермінантів, один із яких є детермінантом (3), а інший містить два пропорційних рядки, а тому рівний нулю. Це доводить теорему.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Обчислити детермінанти:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. За означенням детермінанта

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5;$

б) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 8 \cdot 6 = 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0.$$

Задача 2. Підібрати значення i та k так, щоб добуток

$$a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$$

входив у детермінант

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

з знаком плюс.

Розв'язання. Для того, що вказаний добуток входив в детермінант необхідно, щоб $(i, k) = (1, 4)$ або $(i, k) = (4, 1)$. Випишемо підстановку, складену з індексів співмножників у першому випадку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки загальна кількість інверсій в обох рядках підстановки дорівнює $2 + 2 = 4$, то ця підстановка парна, а, отже, за означенням детермінанта добуток $a_{11}a_{32}a_{44}a_{25}a_{53}$ входить у детермінант п'ятого порядку з знаком плюс.

Задача 3. Користуючись означенням детермінанта, обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

Розв'язання. Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця, є 0, то і сам добуток дорівнює 0. Виходячи з цього покажемо, що $\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Розглянемо довільну перестановку i_1, i_2, $\dots i_n$ чисел 1, 2, $\dots$, n і відповідний їй добуток $d = a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$, що входить у детермінант Δ, де $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Якщо $i_n \neq n$, тоді $a_{n\,i_n} = 0$, а, отже, $d = 0$. Нехай $i_n = n$. Далі, якщо $i_{n-1} \neq n-1$, тоді $i_{n-1} < n-1$. Тому $a_{n-1\,i_{n-1}} = 0$. Отже, $d = 0$. Нехай $i_{n-1} = n-1$ і так далі. Продовжуючи цей процес на n-му кроці одержимо, що для довільної перестановки i_1, i_2, $\dots i_n$ відмінної від перестановки 1, 2, $\dots$, n справедлива рівність $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} = 0$. Оскільки перестановка 1, 2, $\dots$, n — парна, то $\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Задача 4. Нехай A — *кососиметрична* матриця порядку n, тобто матриця, елементи a_{ij} якої задовольняють умовам $a_{ij} = -a_{ji}$ (i, $j = 1$, 2,$\dots$, n). Довести, якщо n — непарне число, то $|A| = 0$.

Розв'язання. Матриця A має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо помножити кожен рядок матриці A на -1, тоді в результаті отримаємо матрицю A^T транспоновану до матриці A. Із теореми 5 випливає, що $|A^T| = (-1)^n|A|$. З іншого боку із теореми 1 слідує, що $|A^T| = |A|$. Отже $|A| = (-1)^n|A|$. Тому, якщо n — непарне число, то $|A| = -|A|$. Звідси $|A| = 0$.

Вправи для самостійної роботи

1. Виявнити, які з наведених нижче добутків входять у детермінант

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n-го порядку і з якими знаками:

а) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$, за умови $n = 6$;

б) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$, за умови $n = 7$;

в) $a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{kk}$, де $k \in \{1, 2, \dots, n\}$;

г) $a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$.

2. Вибрати значення i, j, k так, щоб добуток $a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$ входив у детермінант шостого порядку з знаком мінус.

3. Знайти всі члени детермінанта четвертого порядку, які містять елемент a_{32} і входять у детермінант із знаком мінус.

4. Знайти всі члени детермінанта

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix},$$

що містять а) x^4 і x^2; б) x^3 і x.

5. Користуючись означенням детермінанта, обчислити детермінанти:

а) $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 2 & a \\ d & 0 & 0 & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & -\lambda & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda + a_4 \end{vmatrix}$.

6. Як зміниться детермінант, якщо:

а) його перший стовпець поставити на останнє місце, а всі інші стовпці зсунути вліво, зберігаючи їхнє взаємне розташування;

б) його рядки записати в зворотному порядку?

7. Як зміниться детермінант, якщо:

а) до кожного його стовпця, починаючи з другого, додати попередній;

б) до кожного його рядка, починаючи з другого, додати всі попередні рядки?

8. Нехай $\Delta = |a_{jk}|$ ($a_{jk} \in \mathbb{C}$) — детермінант порядку n з елементами, що задовольняють умовам: 1) $a_{jk} \in \mathbb{R}$ при $j > k$; 2) $a_{kj} = ia_{jk}$ при $j \geq k$ (тут i — уявна одиниця, тобто $i^2 = -1$.). При яких значеннях n детермінант Δ є дійсним числом?

9. Як зміниться детермінант, якщо кожний його елемент a_{jk} помножити на c^{j-k}, де $c \neq 0$?

10. Цілі числа 20604, 53227, 25755, 20927 і 289 діляться на 17. Довести, що ціле число, якому дорівнює наступний детермінант теж ділиться на 17:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

11. Чому дорівнює детермінант, у якого сума рядків з парними номерами дорівнює сумі рядків з непарними номерами?

12. Довести, що

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

13. Обчислити детермінант

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & x & \dots & x \\ x & a_2 + x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \dots & a_n + x \end{vmatrix}.$$

§ 7. Мінори та їх алгебраїчні доповнення. Обчислення детермінантів

Нехай дано детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

порядку n. Розглянемо деяке натуральне число k менше за n. Нехай i_1, i_2, …, i_k та j_1, j_2, …, j_k — відповідно номера деяких рядків та стовпців детермінанта (1), впорядковані по зростанню, тобто

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_k, \quad j_1 < j_2 < \ldots < j_k.$$

Детермінант порядку k вигляду

$$M = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

називається ***мінором k-го порядку*** розміщеним в рядках з номерами i_1, i_2, …, i_k та стовпцях з номерами j_1, j_2, …, j_k або мінором, що знаходиться на перетині вказаних рядків та стовпців. Інколи кажуть, що мінор (2) отримали з детермінанта (1) внаслідок закреслення рядків з номерами відмінними від i_1, i_2,…, i_k та стовпців з номерами відмінними від $j_1, j_2, \ldots, j_k$. Далі, нехай M' — мінор детермінанта Δ, отриманий внаслідок закреслення рядків з номерами i_1, $i_2, \ldots, i_k$ та стовпців з номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$. Мінор M' називається ***доповнюючим мінором*** до мінору M. Очевидно, мінор M є доповнюючим до мінору M'.

Якщо мінор M детермінанта (1) знаходиться на перетині рядків та стовпців відповідно з номерами i_1, i_2, …, i_k та j_1, j_2, …, j_k, то до кінця цього параграфа, через s_M будемо позначати суму номерів всіх рядків та стовпців, в яких знаходиться мінор M, тобто

$$s_M = i_1 + \cdots + i_k + j_1 + \cdots + j_k.$$

Число $(-1)^{s_M} M'$ називається ***алгебраїчним доповненням*** до мінору M.

Теорема 1. *Добуток довільного мінору M k-го порядку на його алгебраїчне доповнення в детермінанті Δ є алгебраїчною сумою, доданки якої, що одержуються в результаті множення членів мінору M на взяті із знаком $(-1)^{s_M}$ члени доповнюючого мінору M', є членами детермінанта Δ і з тими ж знаками з якими ці члени входять у детермінант Δ.*

Доведення. Спочатку доведемо теорему у випадку, коли мінор M знаходиться у перших k рядках та перших k стовпцях детермінанта (1). Тоді

$$s_M = 1 + \ldots + k + 1 + \ldots + k = 2(1 + \ldots + k),$$

тому алгебраїчним доповненням до мінору M є доповнюючий мінор M'.

Тепер, нехай

$$a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{kq_k} \tag{3}$$

— довільний член мінору M. Його знак в M дорівнює $(-1)^r$, де r — кількість інверсій у підстановці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ q_1 & q_2 & \ldots & q_k \end{pmatrix}.$$

Довільний член

$$a_{k+1,q_{k+1}} a_{k+2,q_{k+2}} \cdots a_{nq_n} \tag{4}$$

мінору M' має в цьому мінорі знак $(-1)^{r'}$, де r' — кількість інверсій у підстановці

$$\begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \ldots & n \\ q_{k+1} & q_{k+2} & \ldots & q_n \end{pmatrix}.$$

Перемноживши члени (3) і (4) відповідно мінорів M і M', ми одержимо добуток

$$a_{1q_1} \cdots a_{kq_k} a_{k+1,q_{k+1}} \cdots a_{nq_n} \tag{5}$$

n елементів детермінанта Δ, які розміщені в різних рядках та різних стовпцях цього детермінанта, а отже, добуток (5) є його членом. Знак члена (5) в добутку MM' дорівнює $(-1)^r \cdot (-1)^{r'} = (-1)^{r+r'}$. Такий знак має також член (5) в детермінанті (1), оскільки підстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & k+1 & \ldots & n \\ q_1 & q_2 & \ldots & q_k & q_{k+1} & \ldots & q_n \end{pmatrix},$$

яка відповідає цьому члену, має $r + r'$ інверсій. Останнє твердження очевидне, так як $q_i \le k < k+1 \le q_j$ для довільних $i \in \{1, \dots, k\}$ та $j \in \{k+1, \dots, n\}$. Таким чином теорема у вказаному вище випадку доведена.

Розглянемо тепер довільний мінор M k-го порядку, розміщений в рядках з номерами i_1, i_2, …, i_k та стовпцях з номерами j_1, j_2, … …, j_k, причому

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_k, \qquad j_1 < j_2 < \ldots < j_k.$$

Нехай M' — доповнюючий мінор до мінору M.

Переставляючи рядки та стовпці детермінанта (1), побудуємо новий детермінант Λ, в якого в перших k рядках та перших k стовпцях знаходиться мінор M, а доповнюючим до нього є мінор M'. Для цього, наприклад, зробимо наступне: поміняємо місцями i_1-ий рядок з $(i_1 - 1)$-им, далі, $(i_1 - 1)$-ий рядок з $(i_1 - 2)$-им і т. д., поки i_1-й рядок детермінанта (1) не стане першим рядком; для цього нам потрібно переставити рядки $i_1 - 1$ разів; аналогічно переставляємо i_2-ий рядок детермінанта (1) доти, поки він не стане другим рядком; для цього потрібно $i_2 - 2$ разів переставляти рядки; цей процес продовжуємо до тих пір, поки i_k-ий рядок детермінанта (1) не стане k-им; всього для цього необхідно виконати

$$(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \cdots + (i_k - k) = (i_1 + i_2 + \cdots + i_k) - (1 + 2 + \cdots + k)$$

транспозицій рядків; аналогічний процес застосуємо до стовпців детермінанта, отриманого після перестановки рядків; для цього потрібно виконати

$$(j_1 + j_2 + \cdots + j_k) - (1 + 2 + \cdots + k)$$

транспозицій стовпців.

Для мінору детермінанта Λ, що знаходить в перших k рядках та перших k стовпцях, тобто мінору M, ми можемо застосувати нашу теорему. Таким чином всі доданки, враховуючи знаки, добутку MM' входять в детермінант Λ. Із теореми 3 параграфу §6 слідує, що

$$\Lambda = (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)-(1+2+\cdots+k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)-(1+2+\cdots+k)}\Delta =$$
$$= (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}\Delta.$$

Звідси

$$\Delta = (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}\Lambda = (-1)^{s_M}\Lambda.$$

З вище сказаного слідує, що всі доданки добутку мінору M детермінанта Δ на його алгебраїчне доповнення $(-1)^{s_M}M'$ входять в детермінант Δ. Теорема доведена.

Теорема 2 (Лаплас). *Нехай в детермінанті порядку n довільно вибрані k рядків (або k стовпців), $1 \leq k \leq n-1$. Тоді цей детермінант дорівнює сумі добутків всіх мінорів k-го порядку, що розміщені в цих рядках (стовпцях), на їх алгебраїчні доповнення.*

Доведення. Із означення детермінанта та теореми 1 випливає, що всі добутки мінорів k-го порядку на їх алгебраїчні доповнення є сумами $k!(n-k)!$ членів детермінанта Δ, взятих з тими ж знаками, з якими вони входять в цей детермінант. З іншого боку число всіх мінорів k-го порядку, що знаходяться у фіксованих k рядках, дорівнює числу всіх комбінацій з n по k, тобто

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Отже, вказана у даній теоремі сума є сумою

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k!(n-k)! = n!$$

членів детермінанта Δ, причому знаки цих членів у цій сумі та детермінанті Δ співпадають. Тому для доведення теореми достатньо лише показати, що у вказану в теоремі суму не входить двічі жоден член детермінанта Δ.

Нехай $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — номера, вибраних k рядків,

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n} \tag{6}$$

— довільний член детермінанта Δ. Розглянемо добуток тих елементів цього члену, які належать рядкам з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$

$$a_{i_1q_{i_1}}a_{i_2q_{i_2}}\cdots a_{i_kq_{i_k}}.$$

Очевидно, цей добуток є членом мінору M, що знаходиться на перетині рядків з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ та стовпців з номерами q_{i_1}, $q_{i_2}, \ldots, q_{i_k}$ і не є членом жодного іншого мінору k-го порядку, що знаходиться в цих же рядках та інших стовпцях. Отже, мінор M, який знаходиться в рядках з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ визначається членом (6) однозначно. Неважко бачити, що добуток інших елементів члена (6), які не належать вище вказаним рядкам, є членом доповнюючого мінору M' до мінору M. Таким чином довільний член (6) детермінанта Δ входить у цілком, причому однозначно, визначений добуток $M \cdot M'$ мінору k-го порядку, який знаходиться у вказаних вище рядках на його доповнюючий мінор. Це завершує доведення теореми.

Цілком зрозуміло, що мінорами першого порядку детермінанта є самі елементи цього детермінанта. В сенсі цього зауваження має місце наступний наслідок із попередньої теореми.

Наслідок 1. *Детермінант дорівнює сумі добутків всіх елементів довільного його рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.*

Тобто, якщо Δ — деякий детермінант n-го порядку (див. (1)), а A_{ij} — алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} у цьому детермінанті, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, то

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \tag{7}$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}. \tag{8}$$

Формули (7) та (8) називаються *розкладом детермінанта Δ за елементами відповідно i-го рядка та j-го стовпця.*

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Обчислити детермінант четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладемо даний детермінант по третьому стовпцю. Так як два елементи цього стовпця дорівнюють нулю матимемо

$$\Delta = (-2) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Обчислюючи вказані вище детермінанти третього порядку, отримаємо

$$\Delta = 2 \cdot 49 + 7 \cdot 10 = 168.$$

Задача 2. Користуючись теоремою Лапласа, обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Зафіксуємо другий і п'ятий рядки детермінанта Δ. Розглянемо мінори

$$M_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix},$$

які розміщені в цих рядках. Всі інші мінори другого порядку в цих рядках дорівнюють нулю, оскільки містять нульовий стовпець.

Обчислимо алгебраїчні доповнення до мінорів M_1, M_2, M_3:

$$(-1)^{s_{M_1}} M_1' = (-1)^{2+5+1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 49,$$

$$(-1)^{s_{M_2}} M_2' = (-1)^{2+5+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -100,$$

$$(-1)^{s_{M_1}} M_1' = (-1)^{2+5+2+4} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Тоді

$$\Delta = \sum_{k=1}^{3} M_k \cdot (-1)^{s_{M_k}} M_k' = 2 \cdot 49 + 1 \cdot (-100) + (-2) \cdot 1 = -4.$$

Задача 3. Обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix},$$

звівши його до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень.

Розв'язання. Додамо до другого, третього і четвертого рядків детермінанта Δ перший рядок помножений відповідно на 3, -1, 2. Тоді, згідно з теоремою 9 §6, детермінант Δ не зміниться. Отже,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 25 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 33 \end{vmatrix}.$$

Далі, додамо до другого та четвертого рядків, одержаного детермінанта, третій помножений відповідно на 2 та 3. А потім поміняємо місцями другий та четвертий рядки. Тоді із теореми 3 §6 випливає, що

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix}.$$

Далі, легко видно (див. приклад 3 на стор. 72), що

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{301}{83} \end{vmatrix} = 301.$$

Вправи для самостійної роботи

Обчислити детермінанти:

1. $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$. **9.** $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$ **11.** $\begin{vmatrix} 2 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$ **12.** $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$

13. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$ **14.** $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}.$ **15.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ y_1 & y_2 & \cos\beta & \sin\beta \\ z_1 & z_2 & \sin\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}.$

16. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$ **17.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$

18. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$ **19.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$

20. $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}.$ **21.** $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}.$

22. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$ **23.** $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & \dots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & \dots & x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$

§ 8. Правило Крамера

Нехай $F \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Розглянемо довільний детермінант Δ порядку n з елементами із множини F

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Розкладемо цей детермінант за елементами j-го стовпця

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, \tag{2}$$

де A_{ij} — алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij}, $i = 1, 2, \dots, n$.

Нехай b_1, b_2, …, b_n — довільні числа із множини F і

$$\Delta' = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}. \tag{3}$$

Із теореми Лапласа випливає, що права частина рівності (3) є розкладом за елементами j-го стовпця детермінанта, одержаного із детермінанта Δ шляхом заміни елементів j-го стовпця відповідно числами b_1, b_2, …, b_n, тобто детермінанта

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Лема 1. *Сума добутків всіх елементів деякого стовпця (рядка) детермінанта на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого стовпця (рядка) дорівнює нулю.*

Доведення. Із теореми 1 §6 слідує, що теорему досить довести тільки для стовпців детермінанта. Нехай задано детермінант Δ вигляду (1) і нехай j і k — довільні різні натуральні числа, що не перевищують n.

Якщо у праву частину рівності (3) замість b_1, b_2, …, b_n відповідно покласти a_{1k}, a_{2k}, …, a_{nk}, то матимемо вказану в умові леми суму добутків всіх елементів k-го стовпця на алгебраїчні доповнення відповідних елементів j-го стовпця. З іншого боку ця сума дорівнює детермінанту (4), в якого стовпці з різними номерами j та k однакові. А, отже, рівному нулеві, що доводить лему.

Розглянемо довільну систему лінійних рівнянь з коефіцієнтами з множини F, в якій число рівнянь n дорівнює числу невідомих, тобто систему вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{5}$$

Детермінант матриці цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{6}$$

будемо називати *детермінантом системи лінійних рівнянь* (5).

Далі, розглянемо детермінанти порядку n вигляду

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (j = 1, 2, \dots, n), \tag{7}$$

які одержуються із детермінанта Δ шляхом заміни його j-го стовпця стовпцем вільних членів системи (5).

Теорема 1 (**Крамер**). *Якщо детермінант Δ системи n лінійних рівнянь від n невідомих відмінний від нуля, тоді ця система лінійних рівнянь є визначеною. Причому, якщо Δ_j — детермінант, одержаний із Δ шляхом заміни j-го стовпця $(j = 1, 2, \dots, n)$ стовпцем вільних членів системи рівнянь, то система чисел*

$$\gamma_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \gamma_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad \gamma_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

є розв'язком цієї системи лінійних рівнянь.

Доведення. Спочатку припустимо, що система лінійних рівнянь (5), детермінант Δ якої не дорівнює нулю, є сумісною і γ_1, γ_2, ..., γ_n — деякий розв'язок цієї системи. Тоді справедливі рівності

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1, \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \cdots + a_{2n}\gamma_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \cdots + a_{nn}\gamma_n = b_n. \end{cases} \tag{8}$$

Позначимо через A_{ij} алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} у детермінанті Δ системи лінійних рівнянь (5) ($i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$).

Нехай надалі j — це довільне із чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Помножимо першу із рівностей (8) на A_{1j}, другу — на A_{2j} і т. д., n-ву рівність — на A_{nj}. Додамо окремо ліві і праві частини, отриманих у результаті цих операцій рівностей. Одержимо наступну рівність

$$\begin{gathered}
(a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \cdots + a_{n1}A_{nj})\gamma_1 + \\
+(a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + \cdots + a_{n2}A_{nj})\gamma_2 + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+(a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj})\gamma_j + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+(a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \cdots + a_{nn}A_{nj})\gamma_j = \\
= b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}.
\end{gathered}$$

Із теореми Лапласа та леми 1 слідує, що коефіцієнт при γ_j в цій рівності дорівнює Δ, а всі інші коефіцієнти при γ_i ($i \neq j$) дорівнюють нулю. В правій же частині цієї рівності стоїть значення детермінанта Δ_j, отриманого із детермінанта Δ шляхом заміни j-го стовпця стовпцем вільних членів системи лінійних рівнянь (5). Отже, останню рівність можна переписати у вигляді $\Delta\gamma_j = \Delta_j$. Оскільки $\Delta \neq 0$, то

$$\gamma_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \tag{9}$$

де, нагадаємо, j є довільним числом із множини $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Таким чином нами доведено, що якщо система лінійних рівнянь (5) є сумісною, то вона є визначеною.

Для доведення теореми залишилось показати, що довільна система лінійних рівнянь, яка задовольняє умові теореми є сумісною. Для цього переконаємося, що підставивши в довільне i-е рівняння системи (5) замість x_j значення $\frac{\Delta_j}{\Delta}$, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, ми одержимо тотожність:

$$\begin{gathered}
a_{i1}\frac{\Delta_1}{\Delta} + \cdots + a_{in}\frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}(a_{i1}\Delta_1 + \cdots + a_{in}\Delta_n) = \\
= \frac{1}{\Delta}(a_{i1}(b_1A_{11} + \cdots + b_nA_{n1}) + \cdots + a_{in}(b_1A_{1n} + \cdots + b_nA_{nn})) = \\
= \frac{1}{\Delta}(b_1(a_{i1}A_{11} + \cdots + a_{in}A_{1n}) + \cdots + b_n(a_{i1}A_{n1} + \cdots + a_{in}A_{nn})) = \\
= \frac{1}{\Delta}(b_i\Delta) = b_i.
\end{gathered}$$

Теорема доведена.

Якщо детермінант системи n лінійних рівнянь від n невідомих відмінний від нуля, то відшукання розв'язку цієї системи рівнянь за допомогою формул (9) називають *розв'язанням системи лінійних рівнянь за правилом Крамера.*

Наслідок 1. *Якщо система n лінійних рівнянь від n невідомих є несумісною або невизначеною, тоді детермінант цієї системи дорівнює нулю.*

Твердження цього наслідку має місце, оскільки воно є оберненим і протилежним до твердження теореми Крамера.

Наслідок 2. *Якщо детермінант Δ системи n лінійних рівнянь від n невідомих дорівнює нулю і хоча б один із детермінантів, одержаних із Δ шляхом заміни його j-го стовпця стовпцем вільних членів системи, не дорівнює нулю, тоді ця система лінійних рівнянь є несумісною.*

Доведення цього наслідку випливає із доведення попередньої теореми. А саме, якщо припустити протилежне, тобто, що система лінійних рівнянь вигляду (5) із нульовим детермінантом є сумісною і $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ є її деяким розв'язком, то за доведеним раніше $0 \cdot \gamma_j = \Delta_j$. Це суперечить тому, що за умовою $\Delta_j \neq 0$.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Розв'язати наступну систему лінійних рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 7, \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -2. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо детермінант даної системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -47.$$

Оскільки він відмінний від нуля, то за теоремою Крамера дана в умові система рівнянь є визначеною і ми можемо обчислити її розв'язок за правилом Крамера. Для цього обчислимо наступні детермінанти

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & -1 \\ 11 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -94, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 5 & -1 \\ 6 & 11 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -47,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & -1 \\ 6 & 2 & 11 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & -1 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 141.$$

Таким чином,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0, \quad x_4 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -3,$$

тобто система чисел 2, 1, 0, -3 є розв'язком даної системи лінійних рівнянь.

Задача 2. Визначити, при яких значеннях параметра λ вказана нижче система рівнянь є несумісною:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + (\lambda - 10)x_3 = -2, \\ 4x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \tag{10}$$

Розв'язання. Обчислимо детермінант даної системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & \lambda - 10 \\ 4 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 25\lambda + 93.$$

Із наслідку 1 випливає, що для того, щоб система рівнянь (10) була несумісною, необхідно, щоб $\Delta = 0$. Розв'язавши квадратне рівняння $-2\lambda^2 + 25\lambda + 93$, одержимо, що $\Delta = 0$ при значеннях параметра $\lambda = -3$ або $\lambda = \frac{31}{2}$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $\lambda = \frac{31}{2}$. Обчислимо детермінант

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & -5 & \frac{31}{2} - 10 \\ 1 & \frac{31}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{703}{4}.$$

Оскільки він відмінний від нуля, то із наслідку 2 випливає, що при $\lambda = \frac{31}{2}$ система рівнянь (10) є несумісною.

Якщо ж $\lambda = -3$, тоді можна показати, що всі три детермінанти, які одержуються з детермінанта системи рівнянь (10) заміною відповідно першого, другого, третього стовпців стовпцем вільних членів системи рівнянь, дорівнюють нулю. Тому у цьому випадку для визначення чи є система рівнянь (10) сумісною, розв'яжемо її методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & -13 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{35}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

Звідси та з теореми 3 §4 випливає, що при $\lambda = -3$ система рівнянь (10) є сумісною.

Таким чином система рівнянь (10) є несумісною тоді і тільки тоді, коли $\lambda = -\frac{31}{2}$.

Вправи для самостійної роботи

1. Наступні системи рівнянь розв'язати за правилом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - 5y + 3z + t - 5 = 0, \\ 3x - 7y + 6z - t + 1 = 0, \\ 5x - 9y + 3z + 4t - 7 = 0, \\ 4x - 6y + 3z + t - 8 = 0. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0. \end{cases}$

д) $\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ е) $\begin{cases} 6x + 5y - 2z + 4t + 4 = 0, \\ 9x - y + 4z - t - 13 = 0, \\ 3x + 4y + 2z - 2t - 1 = 0, \\ 3x - 9y + 2t - 11 = 0. \end{cases}$

є) $\begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0, \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0, \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0, \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0. \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 2x + y + 4z + 8t = -1, \\ x + 3y - 6z + 2t = 3, \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8, \\ 2x - y + 2z = 4. \end{cases}$

2. Перевірити, що система чисел 1, 1, 1, 1 є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - \ 3x_2 + \ 4x_3 - \ 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - \quad x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0, \\ 4x_1 + \ 5x_2 - \ 7x_3 - \ 2x_4 = 0, \\ 13x_1 - 25x_2 + \quad x_3 + 11x_4 = 0, \end{cases}$$

і обчислити детермінант цієї системи.

3. Розв'язати систему рівнянь від невідомих x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_1^2 x_3 = \beta_1, \\ x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2^2 x_3 = \beta_2, \\ x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_3^2 x_3 = \beta_3, \end{cases}$$

де α_1, α_2, α_3 — попарно різні дійсні числа; β_1, β_2, $\beta_3 \in \mathbb{R}$.

§ 9. Дії над матрицями. Обернена матриця

Нехай $F \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$; $F_{m\times n}$ — множина всіх $m\times n$-матриць з елементами з множини F, де m і n — довільні натуральні числа. Матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in F_{m\times n}$$

надалі позначатимемо символом $\|a_{ij}\|_{m\times n}$ або коротко $\|a_{ij}\|$, якщо зрозуміло із контексту, про матрицю яких розмірів йде мова.

Матриці $A = \|a_{ij}\|$ і $B = \|b_{ij}\|$ із $F_{m\times n}$ називаються *рівними*, якщо $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$. У цьому випадку пишуть $A = B$.

Додавання матриць. *Сумою матриць* $A = \|a_{ij}\|$ і $B = \|b_{ij}\|$ із множини $F_{m\times n}$ називається така матриця $C = \|c_{ij}\| \in F_{m\times n}$, що

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n).$$

Суму C матриць A і B позначають через $A + B$.

Теорема 1. *Операція додавання матриць асоціативна і комутативна, тобто для довільних матриць A, B, $C \in F_{m\times n}$ є правильними наступні рівності:*

1) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
2) $A + B = B + A$.

Доведення. Нехай $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$, $C = \|c_{ij}\|$ — довільні матриці із множини $F_{m\times n}$. За означенням суми матриць

$$(A + B) + C = (\|a_{ij}\| + \|b_{ij}\|) + \|c_{ij}\| = \|a_{ij} + b_{ij}\| + \|c_{ij}\| = \\ = \|(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}\|,$$

$$A + (B + C) = \|a_{ij}\| + (\|b_{ij}\| + \|c_{ij}\|) = \|a_{ij}\| + \|b_{ij} + c_{ij}\| = \\ = \|a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})\|.$$

Тепер, оскільки додавання чисел із множини F задовольняє асоціативній властивості, то

$$(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$$

для довільних $i \in \{1,\ 2,\ \dots,\ m\}$ та $j \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$. Отже,

$$\|(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}\| = \|a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})\|,$$

тобто $(A+B)+C = A+(B+C)$, підкреслимо для довільних матриць A, B, $C \in F_{m\times n}$. Це означає, що операція додавання матриць також задовольняє асоціативній властивості.

Аналогічно доводиться комутативна властивість операції додавання матриць. Нехай $A = \|a_{ij}\|$ і $B = \|b_{ij}\|$ — довільні матриці із множини $F_{m\times n}$. Тоді

$$A + B = \|a_{ij}\| + \|b_{ij}\| = \|a_{ij} + b_{ij}\| =$$
$$= \|b_{ij} + a_{ij}\| = \|b_{ij}\| + \|a_{ij}\| = B + A,$$

що й потрібно було довести.

Матриця $\mathbf{0} \in F_{m\times n}$ називається *нульовою матрицею*, якщо для довільної матриці $A \in F_{m\times n}$ є правильною рівність $\mathbf{0} + A = A$.

Теорема 2. *Існує єдина нульова матриця $\mathbf{0} \in F_{m\times n}$, причому, всі елементи матриці $\mathbf{0}$ є нулями.*

Доведення. Розглянемо $m \times n$-матрицю $\|0\|$, всі елементи якої є нулями. Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — довільна матриця із $F_{m\times n}$. За означенням суми матриць

$$\|0\| + A = \|0\| + \|a_{ij}\| = \|0 + a_{ij}\| = \|a_{ij}\| = A.$$

Це означає, що $\|0\|$ є нульовою матрицею, тобто $\mathbf{0} = \|0\|$, і існування такої матриці доведено.

Доведемо єдиність нульової матриці із множини $F_{m\times n}$. Нехай $\mathbf{0}'$ — деяка нульова матриця. Оскільки $\mathbf{0}$ і $\mathbf{0}'$ є нульовими матрицями, то з одного боку $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, а з іншого $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'$. Тому $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$, що й потрібно було довести.

Матриця $-A$ називається *протилежною* до матриці A, якщо $-A + A = \mathbf{0}$.

Теорема 3. *Для довільної матриці $A \in F_{m\times n}$ існує єдина протилежна матриця $-A$, причому, якщо $A = \|a_{ij}\|$, то $-A = \|-a_{ij}\|$.*

Доведення. Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — довільна матриця із $F_{m\times n}$. Розглянемо $m \times n$-матрицю $A' = \| - a_{ij}\|$. За означенням суми матриць

$$A' + A = \| - a_{ij}\| + \|a_{ij}\| = \| - a_{ij} + a_{ij}\| = \|0\| = \mathbf{0}.$$

Таким чином, матриця $A' = \| - a_{ij}\|$ є протилежною до матриці A, тобто $-A = A' = \| - a_{ij}\|$.

Єдиність протилежної матриці до даної матриці A випливає із наступних міркувань. Нехай A'' — деяка протилежна до A матриця.

Тоді

$$A'' = \mathbf{0} + A'' = (-A + A) + A'' = -A + (A + A'') = -A + \mathbf{0} = -A,$$

що й потрібно було довести.

Множення матриць. Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — довільна $m\times n$-матриця, $B = \|b_{ij}\|$ — довільна $n\times r$-матриця (m, n, $r \in \mathbb{N}$, $a_{ij}, b_{ij} \in F$). *Добутком матриці A на матрицю B* називається така $m \times r$-матриця $C = \|c_{ij}\|$, що

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, r).$$

Добуток C матриці A на матрицю B позначають через AB.

***Зауваження* 1.** Звертаємо увагу читача, що добуток матриці A на матрицю B визначений лише у випадку, коли число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B. Тому, навіть якщо добуток матриці A на матрицю B визначений, добуток матриці B на матрицю A може бути не визначеним.

Теорема 4. *Операція множення матриць асоціативна, тобто для довільних матриць $A \in F_{m\times n}$, $B \in F_{n\times r}$, $C \in F_{r\times s}$ є правильною рівність $(AB)C = A(BC)$.*

Доведення. Нехай $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$, $B = \|b_{ij}\|_{n\times r}$, $C = \|c_{ij}\|_{r\times s}$ — довільно вибрані матриці, вказаних розмірів. Введемо такі позначення:

$$AB = U = \|u_{ij}\|_{m\times r}, \quad (AB)C = UC = V = \|v_{ij}\|_{m\times s},$$

$$BC = X = \|x_{ij}\|_{n\times s}, \quad A(BC) = AX = Y = \|y_{ij}\|_{m\times s}.$$

Доведемо, що $(AB)C = A(BC)$, тобто що $V = Y$. Для цього знайдемо v_{ij} і y_{ij} ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$; $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$). За значенням добутку матриць

$$v_{ij} = \sum_{k=1}^{r} u_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk} c_{kj},$$

$$y_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} x_{lj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \left(\sum_{k=1}^{r} b_{lk} c_{kj} \right) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} a_{il} b_{lk} c_{kj}.$$

Оскільки операція додавання чисел із множини F є комутативною, то
$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}c_{kj} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} a_{il}b_{lk}c_{kj}.$$
Звідси і попередніх рівностей слідує, що $v_{ij} = y_{ij}$ для довільних $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$ та $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ s\}$. Це свою чергу означає, що $V = Y$ і, отже, $(AB)C = A(BC)$. Теорема доведена.

***Зауваження* 2.** Якщо $n \geq 2$, то існують матриці $A,\ B \in F_{n\times n}$ такі, що $AB \neq BA$, тобто у загальному випадку операція множення матриць не є комутативною. Наприклад, такими є наступні матриці
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 5. *Операція множення матриць є дистрибутивною відносно операції додавання матриць, тобто для довільних матриць $A,\ A',\ B' \in F_{m\times n},\ B,\ C,\ C' \in F_{n\times r}$ є правильними наступні рівності:*
$$A(B + C) = AB + AC, \qquad (A' + B')C' = A'C' + B'C'.$$

Доведення. Нехай $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$, $B = \|b_{ij}\|_{n\times r}$, $C = \|c_{ij}\|_{n\times r}$ — довільно вибрані матриці, вказаних розмірів. Введемо такі позначення:
$$B + C = U = \|u_{ij}\|_{n\times r}, \quad A(B + C) = AU = V = \|v_{ij}\|_{m\times r},$$
$$AB = X = \|x_{ij}\|_{m\times r}, \quad AC = Y = \|y_{ij}\|_{m\times r},$$
$$AB + AC = X + Y = Z = \|z_{ij}\|_{m\times r}.$$
Доведемо, що $V = Z$, тобто що $v_{ij} = z_{ij}$ для довільних $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$ та $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ r\}$. За означеннями добутку та суми матриць
$$v_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} = x_{ij} + y_{ij} = z_{ij}$$
для довільних $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ та $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Отже, $A(B+C) = AB + AC$. Правильність рівності $(A' + B')C' = A'C' + B'C'$ доводиться аналогічно.

Квадратні матриці. Розглянемо докладніше властивості операції множення квадратних матриць.

Матриця $E \in F_{n\times n}$ називається *одиничною матрицею порядку* n, якщо для довільної матриці $A \in F_{n\times n}$ є правильними рівності $EA = AE = A$.

Теорема 6. *Існує єдина одинична матриця E порядку n, причому,*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведення існування та єдиності одиничної матриці аналогічне доведенню існування та єдиності нульової матриці, а тому залишаємо його читачеві на самостійну роботу.

Теорема 7. *Детермінант добутку матриць порядку n дорівнює добутку детермінантів цих матриць.*

Доведення. Нехай $A = \|a_{ij}\|$ та $B = \|b_{ij}\|$ — довільні матриці n-го порядку з елементами із множини F і нехай $AB = C = \|c_{ij}\|$. Розглянемо такий детермінант Δ порядку $2n$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Обчислимо цей детермінант за теоремою Лапласа, зафіксувавши при цьому перші n рядків. Мінор n-го порядку, що знаходиться у цих рядках та перших n стовпцях дорівнює $|A|$, а алгебраїчне доповнення до нього дорівнює $(-1)^{2(1+2+\dots+n)}|B| = |B|$. Будь-який мінор n-го порядку, що знаходиться у цих рядках і відмінний від мінору $|A|$, дорівнює нулю, оскільки містить нульовий стовпець. А тому за теоремою Лапласа

$$\Delta = |A| \cdot |B|. \tag{2}$$

Обчислимо детермінант Δ іншим способом. Виконаємо наступні перетворення рядків детермінанта (1), не змінюючи при цьому його значення: додамо до першого рядка $(n+1)$-й рядок, помножений на a_{11}, далі $(n+2)$-й рядок, помножений на a_{12} і т. д., останній рядок, помножений на a_{1n}. У результаті цих перетворень ми одержимо детермінант, перші n елементів першого рядка якого дорівнюють нулю, а наступні n елементів цього рядка будуть такими:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2}, \quad \ldots, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kn}.$$

Аналогічно для кожного $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$ до i-го рядка детермінанта (1) додамо $(n+1)$-й рядок, помножений на a_{i1}, далі $(n+2)$-й рядок, помножений на a_{i2} і т. д., останній рядок, помножений на a_{in}. Тоді i-й рядок набере вигляду

$$0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1},\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k2},\ \ldots,\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kn}.$$

Таким чином, після вказаних вище перетворень детермінанта (1), він набуде вигляду

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (3)$$

де

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Отже, $C = A \cdot B$.

Обчислимо детермінант, що стоїть у правій частині рівності (3) за теоремою Лапласа, зафіксувавши при цьому перші n рядків. Подібно, як при обчисленні детермінанта (1), мінор n-го порядку, що знаходиться у цих рядках і останніх n стовпцях дорівнює $|C|$, а інші мінори n-го порядку, що знаходяться у цих рядках, дорівнюють нулю. Алгебраїчне доповнення до мінору $|C|$ у детермінанті (3) дорівнює

$$(-1)^{1+2+\cdot+n+(n+1)+\cdots+2n}|-E| = (-1)^{\frac{1+2n}{2}\cdot 2n}\cdot(-1)^n = (-1)^{2(n+n^2)} = 1,$$

де E — це одинична матриця порядку n. Тому за теоремою Лапласа

$$\Delta = |C|. \tag{4}$$

Прирівнявши тепер праві частини рівностей (2) і (4), одержимо

$$|A|\cdot|B| = |C| = |A\cdot B|,$$

тобто детермінант добутку матриць A і B дорівнює добутку детермінантів $|A|$ і $|B|$ цих матриць. Теорема доведена.

Матриця порядку n називається *невиродженою*, якщо детермінант її не дорівнює нулю.

Теорема 8. *Добуток матриць порядку n є невиродженою матрицею тоді і тільки тоді, коли кожна із перемножуваних матриць є невиродженою.*

Доведення цієї теореми випливає одразу із попередньої теореми. Дійсно, якщо A і B — матриці n-го порядку такі, що AB є невиродженою матрицею, то $|A|\cdot|B| = |AB| \neq 0$. А тому $|A| \neq 0$ і $|B| \neq 0$. Отже, A і B є невиродженими матрицями.

Навпаки, якщо A і B є невиродженими матрицями, то $|A| \neq 0$ і $|B| \neq 0$. А тому $|AB| = |A|\cdot|B| \neq 0$, тобто матриця AB є невиродженою.

Множення числа на матрицю. *Добутком числа $\gamma \in F$ на матрицю $A = \|a_{ij}\| \in F_{m\times n}$* називається така матриця $D = \|d_{ij}\| \in F_{m\times n}$, що

$$d_{ij} = \gamma a_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Добуток числа γ на матрицю A позначають символом γA.

Теорема 9. *Для довільних чисел α, β, $\gamma \in F$ та матриць A, B, $C \in F_{m\times n}$, $D \in F_{n\times r}$ є правильними наступні рівності:*

1) $(\alpha+\beta)C = \alpha C + \beta C$;
2) $\gamma(A+B) = \gamma A + \gamma B$;
3) $\alpha(\beta C) = (\alpha\beta)C$;
4) $\alpha(CD) = (\alpha C)D = C(\alpha D)$;
5) $1\cdot A = A$.

Доведення. Доведемо першу та четверті властивості, а інші залишимо читачеві на самостійну роботу. Нехай α та β — довільні числа із множини F, а $C = \|c_{ij}\|_{m\times n}$, $D = \|d_{ij}\|_{n\times r}$ — довільно вибрані матриці вказаних розмірів.

За означеннями добутку числа на матрицю, суми і добутку матриць

$$(\alpha+\beta)C = (\alpha+\beta)\|c_{ij}\| = \|(\alpha+\beta)c_{ij}\| =$$
$$= \|\alpha c_{ij} + \beta c_{ij}\| = \|\alpha c_{ij}\| + \|\beta c_{ij}\| = \alpha\|c_{ij}\| + \beta\|c_{ij}\| = \alpha C + \beta C,$$

$$\alpha(CD) = \alpha\left\|\sum_{k=1}^{n} c_{ik}d_{kj}\right\| = \left\|\alpha\sum_{k=1}^{n} c_{ik}d_{kj}\right\| =$$
$$= \left\|\sum_{k=1}^{n}(\alpha c_{ik})d_{kj}\right\| = \|\alpha c_{ij}\|\cdot\|d_{ij}\| = (\alpha\|c_{ij}\|)\cdot\|d_{ij}\| = (\alpha C)D =$$
$$= \left\|\sum_{k=1}^{n} c_{ik}(\alpha d_{kj})\right\| = \|c_{ij}\|\cdot\|\alpha d_{ij}\| = \|c_{ij}\|\cdot(\alpha\|d_{ij}\|) = C(\alpha D).$$

Теорема доведена.

Обернена матриця. Матриця $B \in F_{n\times n}$ називається *лівою оберненою* (*правою оберненою*) матриці $A \in F_{n\times n}$, якщо $BA = E$ ($AB = E$) (E — одинична матриця порядку n).

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до матриці $A \in F_{n\times n}$, якщо вона одночасно є лівою і правою оберненою до матриці A. Якщо для матриці $A \in F_{n\times n}$ існує обернена, то кажуть, що A — *оборотна* матриця.

Теорема 10. *Матриця порядку n є оборотною тоді і тільки тоді, коли вона є невиродженою. Причому, якщо $A = \|a_{ij}\|$ — оборотна матриця порядку n, то існує лише одна обернена до неї матриця, що дорівнює матриці*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} — алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} у детермінанті матриці A ($i, j = 1, 2, \ldots, n$).

Доведення. Припустимо, що матриця A порядку n є оборотною. Це означає, що існує обернена матриця A^{-1} до матриці A. Оскільки добуток матриць A і A^{-1} дорівнює одиничній матриці, яка є невиродженою матрицею, то за теоремою матриця A також є невиродженою. Таким чином необхідність доведена.

Припустимо тепер, що матриця A порядку n є невиродженою, тобто що $|A| \neq 0$, і нехай $A = \|a_{ij}\|$. Розглянемо матрицю

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} — алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} у детермінанті матриці A $(i, j = 1, 2, \dots, n)$.

Беручи до уваги наслідок 1 із теореми Лапласа §7 та лему 1 §8, обчислимо добуток матриць

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}A_{2k} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}A_{nk} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}A_{1k} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}A_{2k} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}A_{nk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}A_{1k} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}A_{2k} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}A_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}.$$

Аналогічно

$$A^* \cdot A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}.$$

Далі, із цих рівностей та теореми 9 слідує, що матриця

$$\frac{1}{|A|}A^* = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

є оберненою до матриці A. Дійсно,

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \frac{1}{|A|}(AA^*) = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = E.$$

Аналогічно $\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = E$.

Нарешті, залишилося довести, що для довільної невиродженої матриці A існує тільки одна обернена матриця A^{-1}. Справді, якщо матриця C така, що $AC = CA = E$, то

$$C = CE = C(AA^{-1}) = (CA)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1},$$

і отже, $C = A^{-1}$. Теорема доведена.

Наслідок 1. *Якщо для матриці A порядку n існує права (ліва) обернена матриця, тоді існує і ліва (права) обернена матриця до матриці A, а отже, матриця A є оборотною матрицею.*

Доведення наслідку одразу випливає із того факту, що якщо до матриці A існує ліва (права) обернена матриця, то матриця A є невиродженою. А тому за попередньою теоремою A є оборотною матрицею.

Теорема 11. *Для довільних оборотних матриць A і B порядку n є правильними наступні рівності:*

1) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$;
2) $(A^{-1})^{-1} = A$;
3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Доведення. Нехай A — довільна оборотна матриця порядку n. Тоді з одного боку за теоремою 7 $|AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$, а з іншого за означенням оберненої матриці $|AA^{-1}| = |E| = 1$. Таким чином, $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$, отже $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

Доведення другої рівності випливає із тих міркувань, що оскільки

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

то матриця A є оберненою до матриці A^{-1}, тобто $(A^{-1})^{-1} = A$.

Нарешті, нехай B — також довільно вибрана оборотна матриця порядку n. Обчислимо добутки:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B(AA^{-1})B^{-1} = BEB^{-1} = BB^{-1} = E.$$

Звідси слідує, що
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Теорема доведена.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Знайти добуток матриці A на матрицю B, якщо

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Обчислити $AB - BA$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 11 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \\ 6 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Знайти всі матриці, які комутують з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Потрібно знайти всі такі матриці X, що $AX = XA$. Із означення добутку матриць випливає, що X має бути квадратною матрицею другого порядку. Нехай

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Тоді умова $AX = XA$ набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} x_3 & x_4 \\ x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 + x_2 \\ x_4 & x_3 + x_4 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Із означення рівності матриць та із (5) випливає, що

$$\begin{cases} x_3 = x_2, \\ x_4 = x_1 + x_2, \\ x_1 + x_3 = x_4, \\ x_2 + x_4 = x_3 + x_4. \end{cases}$$

Таким чином елементи x_1, x_2, x_3, x_4 матриці X утворюють систему чисел, яка є розв'язком системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

І навпаки, кожен розв'язок цієї системи визначає матрицю другого порядку, що комутує з матрицею A.

Розв'язавши цю систему лінійних рівнянь методом Гаусса, одержимо, що $(b - a,\ a,\ a,\ b)$ є її загальним розв'язком $(a, b \in \mathbb{R})$.

Отже, кожна матриця наступного вигляду і тільки такого вигляду

$$X = \begin{pmatrix} b - a & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

при довільних дійсних значення a та b, буде комутувати з матрицею A.

Задача 4. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислимо спочатку детермінант матриці A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Таким чином матриця A є невиродженою і за теоремою 10 існує обернена матриця A^{-1}. Знайдемо її. Для цього обчислимо алгебраїчні доповнення A_{ij} до елементів матриці A, що знаходяться на перетині i-го рядка та j-го стовпця $(i, j = 1, 2, 3)$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Тоді

$$A^{-1} = |A|^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. На відміну від попереднього прикладу на цей раз для відшукання оберненої матриці скористаємося її означенням. Нехай матриця

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}$$

є оберненою матрицею до матриці A, тобто $AX = E$ та $XA = E$, де E — одинична матриця четвертого порядку. Із першої рівності одержимо

$$\begin{cases} 2x_{1i} + x_{2i} = \delta_{1i}, \\ 3x_{1i} + 2x_{2i} = \delta_{2i}, \\ x_{1i} + x_{2i} + 3x_{3i} + 4x_{4i} = \delta_{3i}, \\ 2x_{1i} - x_{2i} + 2x_{3i} + 3x_{4i} = \delta_{4i} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

де δ_{kl} — символ Кронекера, тобто

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } k = l; \\ 0, \text{ якщо } k \neq l. \end{cases}$$

Таким чином i-й стовпець матриці X є розв'язком системи лінійних рівнянь, матриця якої співпадає з матрицею A, а стовпець вільних членів — з i-им стовпцем одиничної матриці E $(i = 1, 2, 3, 4)$. Розв'яжемо ці системи методом Гаусса. Оскільки матриці у цих систем співпадають, то будемо розв'язувати їх одночасно:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -8 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & -12 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 19 & -3 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -8 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -23 & 14 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&3&0&92&-56&9&-12\\ 0&1&6&0&183&-112&18&-24\\ 0&0&1&0&31&-19&3&-4\\ 0&0&0&1&-23&14&-2&3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&2&-1&0&0\\ 0&1&0&0&-3&2&0&0\\ 0&0&1&0&31&-19&3&-4\\ 0&0&0&1&-23&14&-2&3 \end{array}\right).$$

Таким чином, звідси та із наслідку 1 одержуємо, що

$$A^{-1}=X=\begin{pmatrix} 2&-1&0&0\\ -3&2&0&0\\ 31&-19&3&-4\\ -23&14&-2&3 \end{pmatrix}.$$

Вправи для самостійної роботи

1. Обчислити добутки матриць:

а) $\begin{pmatrix} 3&-2\\ 5&-4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3&4\\ 2&5 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} a&b\\ c&d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \alpha&\beta\\ \gamma&\delta \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} 2&-3\\ 4&-6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 9&-6\\ 6&-4 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 4&3\\ 7&5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -8&13\\ 3&-16 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7&3\\ 2&1 \end{pmatrix}$,

д) $\begin{pmatrix} 1&-3&2\\ 3&-4&1\\ 2&-5&3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2&5&6\\ 1&2&5\\ 1&3&2 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 5&8&-4\\ 6&9&-5\\ 4&7&-3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3&2&5\\ 4&-1&3\\ 9&6&5 \end{pmatrix}$,

є) $\begin{pmatrix} 4&-1\\ 5&-2 \end{pmatrix}^5$, ж) $\begin{pmatrix} 2&-1\\ 3&-2 \end{pmatrix}^n$, з) $\begin{pmatrix} \cos\alpha&-\sin\alpha\\ \sin\alpha&\cos\alpha \end{pmatrix}^n$,

и) $\begin{pmatrix} 1&1\\ 0&1 \end{pmatrix}^n$, і) $\begin{pmatrix} \lambda&1\\ 0&\lambda \end{pmatrix}^n$, ї) $\begin{pmatrix} 1&1&0\\ 0&1&1\\ 0&0&1 \end{pmatrix}^n$.

2. Як зміниться добуток AB матриць A і B, якщо:

а) поміняти місцями i-ий та j-ий рядки матриці A;

б) до i-го рядка матриці A додати її j-ий рядок, помножений на число α;

в) поміняти місцями i-ий та j-ий стовпці матриці B;

г) до i-го стовпця матриці B додати її j-ий стовпець, помножений на число α.

3. *Слідом* квадратної матриці називається сума її елементів, що знаходяться на головній діагоналі. Довести, що слід добутку AB дорівнює сліду добутку BA.

4. Довести, що для будь-яких квадратних матриць A і B порядку n, $AB - BA \neq E$, де E — одинична матриця порядку n.

5. Нехай A і B — матриці одного й того ж порядку. Довести, що $AB = BA$ тоді і тільки тоді, коли є правильною одна із наступних рівностей:

а) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; б) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

6. Нехай $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Довести, що

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = \mathbf{0},$$

де E, $\mathbf{0}$ — відповідно одинична та нульова матриці другого порядку.

7. Знайти всі матриці другого порядку, квадрати яких дорівнюють нульовій матриці.

8. Знайти всі матриці другого порядку, квадрати яких дорівнюють одиничній матриці.

9. Знайти всі матриці, що комутують з матрицею A, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Знайти обернені матриці до наступних матриць:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$. в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

11. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

§ 10. n-вимірний векторний простір. Лінійна залежність векторів

Будь-яка система, тобто впорядкована сукупність, n дійсних чисел називається *дійсним n-вимірним вектором.* Дійсний n-вимірний вектор, утворений дійсними числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, будемо позначати символом $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і при цьому α_1 називатимемо його *першою компонентою*, α_2 — його *другою компонентою* і т. д., α_n — *n-ою компонентою* цього вектора. Два дійсні n-вимірні вектори називаються *рівними*, якщо рівні всі відповідні компоненти цих векторів. Позначимо через $\mathbb{R}^n$ — множину всіх дійсних n-вимірних векторів.

Сумою векторів $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ із $\mathbb{R}^n$ називається дійсний n-вимірний вектор

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_2 + \beta_2,\ \ldots,\ \alpha_n + \beta_n). \tag{1}$$

Добутком числа $\gamma \in \mathbb{R}$ на вектор $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ називається дійсний n-вимірний вектор

$$\gamma a = (\gamma\alpha_1,\ \gamma\alpha_2,\ \ldots,\ \gamma\alpha_n). \tag{2}$$

***Зауваження* 1.** Очевидно, довільний дійсний n-вимірний вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ можна трактувати, як $1 \times n$-матрицю з елементами, що є дійсними числами. Операції додавання n-вимірних векторів та множення числа на n-вимірний вектор визначаються аналогічним чином, як і відповідні операції над $1 \times n$-матрицями. Тому операції додавання n-вимірних векторів та множення числа на n-вимірний вектор мають аналогічні властивості, як і операції додавання матриць та множення числа на матрицю. Через це наступні три теореми ми приводимо без доведення, залишаючи їх читачеві на самостійну роботу.

Теорема 1. *Для довільних чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ та довільних n-вимірних векторів $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ справедливі наступні рівності:*

1) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
2) $a + b = b + a$;
3) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;
4) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$;
5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;
6) $1 \cdot a = a$.

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається *нульовим вектором*, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справедлива рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2. *Існує єдиний нульовий вектор* $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. *Причому,* $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Вектор $-a$ називається *протилежним* до вектора a, якщо $-a + a = \bar{0}$.

Теорема 3. *Для довільного вектора* $a \in \mathbb{R}^n$ *існує єдиний протилежний вектор* $-a$. *Причому, якщо* $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, *то* $-a = (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$.

Теорема 4. *Нехай* α *— довільне дійсне число,* a *— довільний* n*-вимірний вектор. Рівність* $\alpha a = \bar{0}$ *має місце тоді і тільки тоді, коли або* $\alpha = 0$, *або* $a = \bar{0}$.

Доведення. Достатність теореми є очевидною. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який n-вимірний вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n) = \\ = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$

$$\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = (\alpha \cdot 0,\ \alpha \cdot 0,\ \ldots,\ \alpha \cdot 0) = \\ = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0}.$$

Доведемо тепер необхідність. Нехай для деякого числа α і деякого n-вимірного вектора a є справедливою рівність $\alpha a = \bar{0}$. Якщо $\alpha \neq 0$, то існує обернене число α^{-1} до числа α. Помножимо ліву і праві частини рівності $\alpha a = \bar{0}$ на α^{-1}. Одержимо $\alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1} \cdot \bar{0}$. Оскільки із теорем 1–3 слідує, що $\alpha^{-1}(\alpha a) = (\alpha^{-1}\alpha)a = 1 \cdot a = a$, а $\alpha^{-1} \cdot \bar{0} = \bar{0}$, то $a = 0$. Таким чином, або $\alpha = 0$, або $a = \bar{0}$.

Множина $\mathbb{R}^n$ всіх дійсних n-вимірних векторів, розглядувана із введеними на ній операціями додавання векторів та множення числа на вектор за формулами (1), (2) називається *дійсним* n*-вимірним векторним простором.*

Аналогічно визначається *раціональний* n*-вимірний векторний простір* $\mathbb{Q}^n$ та *комплексний* n*-вимірний векторний простір* $\mathbb{C}^n$.

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається *пропорційним* вектору $a \in \mathbb{R}^n$, якщо існує таке дійсне число γ, що $b = \gamma a$.

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається *лінійною комбінацією* векторів a_1, a_2, a_3, …, $a_s \in \mathbb{R}^n$, якщо існують такі дійсні числа γ_1, γ_2, …, γ_s, що

$$b = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s.$$

Числа γ_1, γ_2, …, γ_s при цьому називають *коефіцієнтами лінійної комбінації.*

Система векторів a_1, a_2, …, $a_s \in \mathbb{R}^n$ називається *лінійно залежною*, якщо існують такі дійсні числа γ_1, …, γ_s, не всі рівні нулю, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}. \tag{3}$$

Система векторів a_1, a_2, …, $a_s \in \mathbb{R}^n$ називається *лінійно незалежною*, якщо вона не є лінійно залежною.

Слід зазначити, що оскільки операція додавання векторів є комутативною, то справедливість рівності (3) не залежить від порядку доданків у її лівій частині. Тому лінійна залежність чи незалежність системи векторів a_1, a_2, …, a_s із $\mathbb{R}^n$ не залежить від порядку цих векторів.

Теорема 5. *Система n-вимірних векторів є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли хоча б один із векторів цієї системи є лінійною комбінацією інших векторів системи.*

Доведення. Справді, припустимо спочатку, що система a_1, a_2, a_3, …, a_s векторів із $\mathbb{R}^n$ є лінійно залежною. Тоді існує система дійсних чисел γ_1, γ_2, …, γ_s, хоча б одне з яких, скажімо γ_j, не дорівнює нулю, для яких є справедливою рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Тоді, очевидно,

$$-\gamma_j a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s. \tag{4}$$

Оскільки $\gamma_j \neq 0$, то можна помножити ліву і праву частини рівності (4) на $-\frac{1}{\gamma_j}$. У результаті одержимо

$$a_j = \left(-\frac{\gamma_1}{\gamma_j}\right) a_1 + \cdots + \left(-\frac{\gamma_{j-1}}{\gamma_j}\right) a_{j-1} + \left(-\frac{\gamma_{j+1}}{\gamma_j}\right) a_{j+1} + \cdots + \left(-\frac{\gamma_s}{\gamma_j}\right) a_s.$$

Це означає, що вектор a_j є лінійною комбінацією системи векторів a_1, …, a_{j-1}, a_{j+1}, …, a_s, а тому необхідність теореми доведена.

Доведемо тепер достатність. Нехай один із векторів системи a_1, a_2, …, a_s, наприклад a_j, є лінійною комбінацією інших її векторів. Тоді

$$a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s,$$

для деяких дійсних чисел γ_1, …, γ_{j-1}, γ_{j+1}, …, γ_s. З цієї рівності слідує справедливість рівності

$$\gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + (-1) \cdot a_j + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Очевидно, не всі із чисел системи γ_1, …, γ_{j-1}, -1, γ_{j+1}, …, γ_s дорівнюють нулю, а тому за означенням система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно залежною. Теорема доведена.

Нехай a_1, a_2, …, a_s — деяка система векторів n-вимірного векторного простору. Система векторів a_{i_1}, a_{i_2}, …, a_{i_k}, де

$$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq s$$

називається *підсистемою* системи a_1, a_2, …, a_s.

Теорема 6. *Якщо деяка підсистема системи n-вимірних векторів є лінійно залежною, тоді і сама система є лінійно залежною.*

Доведення. Припустимо, що деяка підсистема з k векторів системи a_1, a_2, …, $a_s \in \mathbb{R}^n$ є лінійно залежною. Враховуючи, що властивість бути лінійно залежною, не залежить від порядку векторів системи, ми не зменшимо загальності доведення теореми, припустивши, що підсистема a_1, a_2, …, a_k є лінійно залежною. За означенням тоді існує система дійсних чисел γ_1, γ_2, …, γ_k, не всі з яких рівні нулю, така, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_k a_k = \bar{0}.$$

Тоді, очевидно,

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_k a_k + 0 \cdot a_{k+1} + \cdots + 0 \cdot a_s = \bar{0}.$$

Тому система векторів a_1, a_2, …, a_s є лінійно залежною, що й потрібно було довести.

Як наслідок із попередньої теореми випливають наступні твердження:

1) *якщо система n-вимірних векторів містить нульовий вектор, то вона є лінійно залежною*;
2) *якщо система n-вимірних векторів містить пропорційні вектори, то вона є лінійно залежною*;

3) *якщо система n-вимірних векторів є лінійно незалежною, тоді будь-яка її підсистема є лінійно незалежною.*

Доведення цих тверджень є нескладними, а тому залишаємо їх читачеві на самостійну роботу.

Теорема 7. *Якщо система векторів $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s$ із $\mathbb{R}^n$ є лінійно незалежною, а система векторів $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s,\ b$ є лінійно залежною, то n-вимірний вектор b є лінійною комбінацією системи векторів $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s$.*

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Тоді за означенням лінійно залежної системи векторів існує система дійсних чисел $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_s,\ \delta$, які не всі рівні нулю, і для яких є справедливою рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s + \delta b = \bar{0}. \tag{5}$$

Коефіцієнт δ не дорівнює нулю, оскільки у протилежному випадку справедливою була б рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0},$$

де серед коефіцієнтів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ хоча б один не дорівнює нулю. Це в свою чергу означало б, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно залежною, а це суперечить умові теореми.

Тепер, оскільки $\delta \neq 0$, то із рівності (5) випливає, що

$$b = \left(-\frac{\gamma_1}{\delta}\right) a_1 + \left(-\frac{\gamma_2}{\delta}\right) a_2 + \cdots + \left(-\frac{\gamma_s}{\delta}\right) a_s,$$

тобто вектор b є лінійною комбінацією векторів $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s$. Теорема доведена.

Теорема 8. *Будь-яка система із s n-вимірних векторів при $s > n$ є лінійно залежною.*

Доведення. Нехай задано систему векторів

$$\begin{gathered}
a_1 = (\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \ldots,\ \alpha_{1n}),\\
a_2 = (\alpha_{21},\ \alpha_{22},\ \ldots,\ \alpha_{2n}),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_s = (\alpha_{s1},\ \alpha_{s2},\ \ldots,\ \alpha_{sn})
\end{gathered}$$

із n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$. Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь від невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_s$:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \cdots + \alpha_{s1}x_s = 0, \\ \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{s2}x_s = 0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}x_1 + \alpha_{2n}x_2 + \cdots + \alpha_{sn}x_s = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Система лінійних однорідних рівнянь (6) є сумісною, оскільки, очевидно, s-вимірний нульовий вектор є її розв'язком.

Припустимо, що $s > n$. Тоді кількість рівнянь системи (6) менша, ніж кількість невідомих. Із доведення теореми Гаусса випливає, що така система лінійних рівнянь еквівалентна системі лінійних рівнянь східчастого вигляду, в якій також кількість рівнянь менша, ніж кількість невідомих. У свою чергу із теореми 2 §4 слідує, що така система лінійних рівнянь є невизначеною, тобто крім нульового розв'язку існує ще хоча б один, відмінний від нульового, розв'язок $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$.

Далі, розглянемо лінійну комбінацію системи векторів $a_1, \ldots, a_s$ з коефіцієнтами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$:

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s =$$
$$= (\gamma_1\alpha_{11} + \gamma_2\alpha_{21} + \cdots + \gamma_s\alpha_{s1},\ \ldots,\ \gamma_1\alpha_{1n} + \gamma_2\alpha_{2n} + \cdots + \gamma_s\alpha_{sn}) =$$
$$= (\alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{21}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{s1}\gamma_s,\ \ldots,\ \alpha_{1n}\gamma_1 + \alpha_{2n}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{sn}\gamma_s) =$$
$$= (0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0}.$$

Таким чином нами показано, що існують числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$, які не всі дорівнюють нулю, й такі, що $\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}$, і, отже, система векторів a_1, a_2, a_s є лінійно залежною. Теорема доведена.

Система n-вимірних векторів називається *базисом n-вимірного векторного простору*, якщо, по-перше, вона є лінійно незалежною, а по-друге, будь-який n-вимірний вектор є лінійною комбінацією векторів цієї системи.

За теоремою 8 будь-який базис n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$, якщо він існує, повинен складатись із не більш як n векторів. У наступній лемі доводиться, що в n-вимірному векторному просторі $\mathbb{R}^n$ існує базис, що складається з n векторів.

Лема 1. *Система n-вимірних векторів*

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1) \tag{7}$$

є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Справді, легко видно, що лінійною комбінацією системи векторів e_1, e_2, …, e_n з коефіцієнтами α_1, α_2, …, α_n є наступний вектор

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n).$$

Тому

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = \bar{0}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_n = 0.$$

Отже, система векторів e_1, e_2, …, e_n є лінійно незалежною.

Якщо ж $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$ — довільний вектор із $\mathbb{R}^n$, то

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n,$$

тобто a є лінійною комбінацією системи векторів e_1, e_2, …, e_n.

З усього вище сказаного тепер слідує, що система n-вимірних векторів e_1, e_2, …, e_n є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

Базис (7) n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$ називається *канонічним базисом.*

Теорема 9. *Для довільної системи n-вимірних векторів a_1, a_2, a_3, …, a_s справедливе лише одне із наступних тверджень:*
1) *система векторів a_1, a_2, …, a_s є лінійно залежною;*
2) *система векторів a_1, a_2, …, a_s є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$;*
3) *існує n-вимірний вектор b такий, що система векторів a_1, a_2, …, a_s, b є лінійно незалежною.*

Доведення. Нехай a_1, a_2, …, a_s — деяка система n-вимірних векторів. Для доведення теореми нам досить показати, що якщо не виконуються перші два твердження теореми для цієї системи векторів, то справедливим для системи векторів a_1, a_2, …, a_s є третє твердження.

Припустимо, що система векторів a_1, a_2, …, a_s є лінійно незалежною і не є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$. Тоді існує n-вимірний вектор b, який не є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, …, a_s.

Розглянемо систему векторів a_1, a_2, …, a_s, b. Якщо ця система була б лінійно залежною, то за теоремою 7 вектор b повинен бути лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, …, a_s. Оскільки останнє неможливо, то це означає, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$, b є лінійно незалежною. Теорема доведена.

Наслідок 1. *Будь-яка лінійно незалежна система, що складається із n векторів із $\mathbb{R}^n$ є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.*

Доведення цього наслідку одразу випливає із теорем 7 і 9. Якщо $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — лінійно незалежна система n-вимірних векторів, то за теоремою 7 для довільного n-вимірного вектора b система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ є лінійно залежною (оскільки складається з $n+1$ векторів). Нарешті, за теоремою 9 для системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливим є тільки друге її твердження, тобто $a_1, a_2, \ldots, a_n$ є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

Далі будемо досліджувати, чи існують базиси n-вимірного векторного векторного простору $\mathbb{R}^n$, що складаються з менш як n векторів.

Кажуть, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{R}^n$ *лінійно виражається через систему векторів* $b_1, b_2, \ldots, b_s \in \mathbb{R}^n$, якщо кожен із векторів першої системи є лінійною комбінацією векторів другої системи.

Дві системи векторів n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$ називаються *еквівалентними*, якщо кожна з них лінійно виражається через іншу.

Теорема 10. *Якщо система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r$ із $\mathbb{R}^n$ лінійно виражається через систему векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$ із $\mathbb{R}^n$, яка в свою чергу лінійно виражається через систему векторів $c_1, c_2, \ldots, c_t$ із $\mathbb{R}^n$, тоді система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r$ лінійно виражається через систему векторів $c_1, c_2, \ldots, c_t$.*

Доведення. Нехай виконуються умови теореми, тобто

$$a_i = \alpha_{i1}b_1 + \alpha_{i2}b_2 + \cdots + \alpha_{is}b_s = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}b_k \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

$$b_j = \beta_{j1}c_1 + \beta_{j2}c_2 + \cdots + \beta_{jt}c_t = \sum_{l=1}^{t} \beta_{jl}c_l \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ s)$$

для деяких дійсних чисел α_{ik} ($i = 1, 2, \ldots, r$; $j = 1, 2, \ldots, s$) та β_{jl} ($j = 1, 2, \ldots, s$; $l = 1, 2, \ldots, t$). Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

справедливими є наступні рівності

$$a_i = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik} \sum_{l=1}^{t} \beta_{kl} c_l = \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{t} \alpha_{ik}\beta_{kl} c_l = \sum_{l=1}^{t} \left(\sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}\beta_{kl} \right) c_l. \qquad (8)$$

Позначимо $\sum\limits_{k=1}^{s} \alpha_{ik}\beta_{kl}$ через γ_{il} $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r;\ l = 1,\ 2,\ \ldots,\ t)$. Тоді із (8) випливає, що

$$a_i = \sum_{l=1}^{t} \gamma_{il} c_l \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

де, підкреслимо, γ_{il} $(i = 1, 2, \ldots, r; l = 1, 2, \ldots, t)$ є деякими дійсними числами. Це у свою чергу означає, що система векторів a_1, a_2, …, a_r лінійно виражається через систему векторів c_1, c_2, …, c_t. Теорема доведена.

***Зауваження* 2.** Твердження попередньої теореми означає, що бінарне відношення "лінійно виражатися задане на множині Ω всіх систем векторів, задовольняє транзитивній властивості. Очевидно, це відношення задовольняє рефлексивній властивості і нескладно показати, що воно не задовольняє симетричній властивості. Натомість бінарне відношення "бути еквівалентною також задане на множині Ω, задовольняє усім трьом вище згаданим властивостям.

Теорема 11. *Нехай a_1, a_2,…, a_r та b_1, b_2, …, b_s — дві системи n-вимірних векторів такі, що перша з них є лінійно незалежною і лінійно виражається через другу систему. Тоді число векторів першої системи не перевищує числа векторів другої системи, тобто $r \leq s$.*

Доведення. Нехай a_1, a_2,…, a_r та b_1, b_2, …, b_s — дві системи n-вимірних векторів, перша з них є лінійно незалежною і лінійно виражається через другу, тобто

$$a_i = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik} b_k \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

для деяких дійсних чисел α_{ik} $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r;\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ s)$. Покажемо від протилежного, що $r \leq s$. Для цього припустимо, що $r > s$.

Введемо в розгляд наступні s-вимірні вектори:

$$\begin{aligned} u_1 &= (\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \ldots,\ \alpha_{1s}),\\ u_2 &= (\alpha_{21},\ \alpha_{22},\ \ldots,\ \alpha_{2s}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ u_r &= (\alpha_{r1},\ \alpha_{r2},\ \ldots,\ \alpha_{rs}), \end{aligned}$$

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_r$ є лінійно залежною тому, що це система із r s-вимірних векторів, а $r > s$. Звідси слідує, що існують дійсні числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_r$, які не всі рівні нулю і для яких є справедливою рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in \mathbb{R}^s. \tag{9}$$

Обчисливши компоненти вектора, що є лінійною комбінацією $\lambda_1 u_1 + {} + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r$, із рівності (9) одержимо

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \alpha_{k1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \alpha_{k2} = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \alpha_{ks} = 0. \tag{10}$$

Обчислимо, врахувавши рівності (10), лінійну комбінацію

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_r a_r = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_k = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \sum_{l=1}^{s} \alpha_{kl} b_l =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} \lambda_k \alpha_{kl} b_l = \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \alpha_{kl} \right) b_l = \sum_{l=1}^{s} 0 \cdot b_l = \bar{0} \in \mathbb{R}^n.$$

Таким чином, припустивши, що $r > s$, ми показали, що система векторів $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_r$ є лінійно залежною. Це суперечить умові теореми, а тому $r < s$, що завершує доведення теореми.

Із теореми 11 одразу випливають наступні два наслідки. Їх доведення ми залишаємо читачеві на самостійну роботу, зауваживши при цьому, що для доведення другого наслідку слід скористатися лемою 1.

Наслідок 1. *Будь-які дві еквівалентні лінійно незалежні системи векторів складаються із однакового числа векторів.*

Наслідок 2. *Будь-який базис n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$ складається з n векторів.*

Базисом системи n-вимірних векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ називається така її лінійно незалежна підсистема, що кожен вектор системи a_1, a_2, …, a_s є лінійною комбінацією векторів цієї підсистеми.

Число векторів базису системи векторів називається *рангом* цієї системи. Коректність цього означення випливає із наступної теореми.

Теорема 12. *Будь-які два базиси системи n-вимірних векторів складаються із однакового числа векторів.*

Доведення. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — довільна система n-вимірних векторів, а $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ та $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_q}$ — деякі два базиси цієї системи векторів. За означенням базису системи векторів довільний вектор другого базису є лінійною комбінацією векторів першого базису, а, отже, другий базис лінійно виражається через вектори першого базису. Оскільки система векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$, як базис, є лінійно незалежною системою, то за теоремою 11 кількість векторів у системі $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ не перевищує кількості векторів у системі $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_q}$, тобто $r \leq q$.

Аналогічно доводиться, що $q \leq r$. Очевидно, таке можливе лише при умові, що $q = r$. Теорема доведена.

Теорема 13. *Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ та $b_1, b_2, \ldots, b_s$ — дві системи n-вимірних векторів, причому ранг першої системи дорівнює числу k, а другої — числу l. Якщо перша система векторів лінійно виражається через другу, тоді $k \leq l$. Якщо ж ці системи еквівалентні, тоді $k = l$.*

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо довільні базиси $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ та $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_l}$ відповідно систем векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r$ та $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Очевидно, система векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ лінійно виражається через систему векторів a_1, $a_2, \ldots, a_r$, а система векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$ — через систему векторів $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{l_l}$. Оскільки система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r$ лінійно виражається через систему $b_1, b_2, \ldots, b_s$, то за теоремою 10 система векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ лінійно виражається через систему векторів $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_l}$. Враховуючи тепер, що система $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$, як базис, є лінійно незалежною системою, одержимо, що $k \leq l$.

Друге твердження теореми є очевидним наслідком вже доведеної першої частини цієї теореми.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Визначити, чи є лінійно залежною система векторів:

$$a_1 = (2, -3, 1),\ a_2 = (3, -1, 5),\ a_3 = (1, -4, 3).$$

Розв'язання. Нехай γ_1, γ_2, γ_3 — довільні дійсні числа. Розглянемо лінійну комбінацію

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3 = (2\gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3, -3\gamma_1 - \gamma_2 - 4\gamma_3, \gamma_1 + 5\gamma_2 + 3\gamma_3).$$

Ця лінійна комбінація дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли справедливі рівності

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\gamma_1 & + & 3\gamma_2 & + & \gamma_3 & = & 0, \\ -3\gamma_1 & - & \gamma_2 & - & 4\gamma_3 & = & 0, \\ \gamma_1 & + & 5\gamma_2 & + & 3\gamma_3 & = & 0, \end{array}$$

тобто система векторів a_1, a_2, a_3 є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли система лінійних однорідних рівнянь з матрицею, стовпці якої співпадають відповідно з векторами a_1, a_2, a_3, має ненульовий розв'язок. Розв'яжемо цю систему лінійних рівнянь:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & 14 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Таким чином, ця система лінійних однорідних рівнянь має лише нульовий розв'язок, а тому задана в умові система векторів a_1, a_2, a_3 є лінійно незалежною.

Задача 2. Довести, що система n-вимірних векторів, що містить два однакових вектора є лінійно залежною.

Розв'язання. Розглянемо підсистему, вказаної в умові системи векторів, яка складається із цих двох однакових векторів: a, a. Ця підсистема є лінійно залежною, оскільки для ненульових чисел 1, -1 лінійна комбінація векторів a, a дорівнює нульовому вектору, тобто $1 \cdot a + (-1) \cdot a = \bar{0}$.

Тоді із теореми 6 випливає, що і вся, вказана в умові система векторів, є лінійно залежною.

Задача 3. Знайти всі базиси системи векторів:

$$a_1 = (1, 2, 0, 0), \quad a_2 = (1, 2, 3, 4), \quad a_3 = (3, 6, 0, 0).$$

Розв'язання. Легко бачити, що вектор a_3 пропорційний вектору a_1 ($a_3 = 3a_1$). Аналогічно попередньому прикладу можна показати, що у цьому випадку система векторів a_1, a_2, a_3 є лінійно залежною. Отже ранг цієї системи менше трьох.

Розглянемо підсистему векторів a_1, a_2. Очевидно, лінійна комбінація цих векторів

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 = (\gamma_1 + \gamma_2, 2\gamma_1 + 2\gamma_2, 3\gamma_2, 4\gamma_2)$$

дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Отже, підсистема векторів a_1, a_2 є лінійно незалежною. Причому кожен із векторів a_1, a_2, a_3 лінійно виражається через вектори цієї підсистеми:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3, \\ a_2 &= 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3, \\ a_3 &= 3 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що підсистема a_1, a_2 є базисом системи a_1, a_2, a_3. Отже, ранг цієї системи дорівнює двом.

Тому для знаходження всіх базисів системи a_1, a_2, a_3 залишилось перевірити чи будуть базисами наступні дві її підсистеми: a_1, a_3 та a_2, a_3. Перша, очевидно, є лінійно залежною. А друга, як неважко показати, є базисом.

Вправи для самостійної роботи

1. Знайти лінійну комбінацію $3a_1 + 5a_2 - a_3$ векторів
$a_1 = (4, 1, 3, -2)$, $a_2 = (1, 2, -3, 2)$, $a_3 = (16, 9, 1, -3)$.

2. Знайти вектори x та y із рівнянь:

а) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4x = \bar{0}$, б) $3(a_1 - y) + 2(a_2 + y) = 4(a_3 - y)$,
де $a_1 = (5, -8, -1, 2)$, $a_2 = (2, -1, 4, -3)$, $a_3 = (-3, 2, -5, 4)$.

3. Визначити, чи є лінійно залежними наступні системи векторів:

а) $a_1 = (5, 4, 3)$, $a_2 = (3, 3, 2)$, $a_3 = (8, 1, 3)$;

б) $b_1 = (2, -4, 1)$, $b_2 = (0, 5, -6)$, $b_3 = (1, -2, 4)$;

в) $c_1 = (4, -5, 2, 6)$, $c_2 = (2, -2, 1, 3)$, $c_3 = (6, -3, 3, 9)$,
$c_4 = (4, -1, 5, 6)$;

г) $d_1 = (1, 0, 0, 2, 5)$, $d_2 = (0, 1, 0, 3, 4)$, $d_3 = (0, 0, 1, 4, 7)$,
$d_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$.

4. Довести, що система векторів, яка містить два пропорційні вектори, є лінійно залежною.

5. Довести, що система векторів, яка містить нульовий вектор, лінійно залежна.

6. Довести, якщо система векторів a_1, a_2, a_3 є лінійно залежною і вектор a_3 не є лінійною комбінацією векторів a_1, a_2, то або вектор a_1 пропорційний вектору a_2, або, навпаки, вектор a_2 пропорційний вектору a_1.

7. Нехай $a_1, a_2, \ldots a_s$ — система n-вимірних векторів рангу k. Довести, що будь-яка її лінійно незалежна підсистема, яка складається із k векторів є її базисом.

8. Довести, що будь-яку лінійно незалежну підсистему, заданої системи векторів, можна доповнити до базису цієї системи.

9. В якому випадку система векторів має єдиний базис?

10. Чи будуть еквівалентними дві системи векторів, якщо вони мають однаковий ранг?

11. Нехай $a_1 = (0, 1, 0, 2, 0)$, $a_2 = (7, 4, 1, 8, 3)$, $a_3 = (0, 3, 0, 4, 0)$, $a_4 = (1, 9, 5, 7, 1)$, $a_5 = (0, 1, 0, 5, 0)$. Чи можна підібрати числа γ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$ так, щоб система векторів

$$b_1 = \sum_{k=1}^{5} \gamma_{1k} a_k, \quad b_2 = \sum_{k=1}^{5} \gamma_{2k} a_k, \quad \ldots, \quad b_5 = \sum_{k=1}^{5} \gamma_{5k} a_k$$

була б лінійно незалежною?

12. Знайти всі значення параметра λ, при яких вектор b лінійно виражається через вектори a_1, a_2, a_3, якщо:

а) $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (3, 7, 8)$, $a_3 = (1, 4, 3)$, $b = (7, -2, \lambda)$;

б) $a_1 = (4, 4, 8)$, $a_2 = (7, 2, 1)$, $a_3 = (4, 1, 6)$, $b = (5, \lambda, 9)$;

в) $a_1 = (3, 2, 5)$, $a_2 = (2, 4, 7)$, $a_3 = (5, 6, \lambda)$, $b = (1, 3, 5)$;

г) $a_1 = (3, 2, 6)$, $a_2 = (7, 3, 9)$, $a_3 = (5, 1, 3)$, $b = (\lambda, 2, 5)$.

13. Знайти всі базиси наступних систем векторів:

а) $a_1 = (1, 2, 3, 4)$, $a_2 = (2, 3, 4, 5)$, $a_3 = (3, 4, 5, 6)$, $a_4 = (4, 5, 6, 7)$;

б) $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (2, 3, 4)$, $a_3 = (3, 2, 3)$, $a_4 = (4, 3, 4)$, $a_5 = (1, 1, 1)$.

14. Скільки базисів має система із $k + 1$ векторів рангу k, що містить пропорційні вектори, відмінні від нульового вектора?

§ 11. Ранг матриці

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

— довільна $s \times n$-матриця з елементами із множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел, де s і n — довільні натуральні числа. Тоді на стовпці цієї матриці можна дивитися як на s-вимірні вектори, а на її рядки — як на n-вимірні вектори. Розглянемо систему векторів-стовпців матриці A:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}.$$

Рангом матриці A називається ранг системи векторів-стовпців цієї матриці, тобто ранг системи векторів v_1, v_2, ..., v_n. Ранг матриці A будемо позначати символом $\operatorname{rank} A$.

Теорема 1. *Якщо всі мінори k-го порядку матриці A дорівнюють нулю, тоді рівні нулю і всі мінори матриці A, порядки яких більші за k.*

Доведення. Нехай A — довільна $s \times n$-матриця, в якій всі мінори k-го порядку дорівнюють нулю, де k — деяке натуральне число, що не перевищує $\min(s, n)$. Розглянемо довільний мінор M матриці A порядку l, де $k < l \leq \min(s, n)$. Обчислимо мінор M за теоремою Лапласа, зафіксувавши в ньому будь-які k рядків. Всі мінори k-го порядку, що знаходяться у зафіксованих k рядках мінору M, є також мінорами k-го порядку матриці A. Оскільки за умовою теореми всі ці мінори дорівнюють нулю, а мінор M є сумою добутків всіх мінорів k-го порядку, що знаходяться у зафіксованих рядках, на відповідні їх алгебраїчні доповнення, то мінор M дорівнює нулю.

Нехай M — довільний мінор матриці A, що знаходиться в рядках з номерами i_1,..., i_k та стовпцях з номерами j_1,..., j_k. Кажуть, що мінор M' матриці A, який знаходиться в рядках з номерами i'_1, ..., i'_l та стовпцях з номерами j'_1,..., j'_l, є *обвідним мінором* для мінору M, якщо

$$\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{i'_1, \ldots, i'_l\}, \qquad \{j_1, \ldots, j_k\} \subset \{j'_1, \ldots, j'_l\}.$$

Теорема 2. *Ранг матриці A дорівнює найвищому порядку відмінних від нуля мінорів цієї матриці.*

Доведення. Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — довільна $s \times n$-матриця з елементами з множини дійсних чисел, M — мінор k-го порядку матриці A ($1 \leq k \leq \min(s, n)$), який є мінором найвищого порядку серед відмінних від нуля мінорів матриці A. Не втрачаючи загальності міркувань, можна вважати, що мінор M знаходиться у лівому верхньому кутку матриці

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1\,k} & a_{1\,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & M & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k\,k} & a_{k\,k+1} & \dots & a_{kn} \\ \cline{1-3} a_{k+1\,1} & \dots & a_{k+1\,k} & a_{k+1\,k+1} & \dots & a_{k+1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sk} & a_{s\,k+1} & \dots & a_{sn} \end{array}\right).$$

Тоді перші k стовпців матриці A утворюють лінійно незалежну систему векторів. Оскільки у протилежному випадку лінійно залежною була б система векторів-стовпців мінору M. Це в свою чергу означало б, що один із стовпців мінору M є лінійною комбінацією інших, а тому мінор M дорівнював би нулю (це суперечить тому, що $M \neq 0$).

Покажемо, що для будь-якого $l \in \{k+1, \dots, n\}$ l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців матриці A. Нехай i — довільне число з множини $\{1, 2 \dots, s\}$. Розглянемо детермінант

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{il} \end{vmatrix}.$$

Звертаємо увагу, що детермінант Δ_i одержаний із мінору M шляхом приєднання останнього $(k+1)$-го стовпця відповідними елементами l-го стовпця матриці A та останнього $(k+1)$-го рядка відповідними елементами i-го рядка цієї матриці. Тому, якщо $i \geq k+1$, то детермінант Δ_i є мінором $k+1$ порядку матриці A (підкреслимо, що цей мінор є обвідним мінором мінору M). За умовою теореми всі мінори $k+1$ порядку матриці A дорівнюють нулю, а отже, $\Delta_i = 0$. Якщо ж $i \leq k$, то детермінант Δ_i має два однакові рядки, а саме i-й та

$(k+1)$-й. Це в свою чергу також означає, що $\Delta_i = 0$. Таким чином детермінант Δ_i дорівнює нулю для довільного $i \in \{1, \dots, s\}$.

Обчислимо, тепер, детермінант Δ_i за теоремою Лапласа, розклавши його за останнім рядком. Алгебраїчним доповненням до елемента a_{ij} цього рядка у випадку, коли $1 \le j \le k$, є число

$$A_j = (-1)^{k+1+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{k\,j-1} & a_{k\,j+1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

А алгебраїчним доповненням до елемента a_{il} останнього рядка є мінор M. Очевидно, числа A_j $(1 \le j \le k)$ та M не залежать від вибору числа i. Тоді за теоремою Лапласа

$$\Delta_i = a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + \dots + a_{ik}A_k + a_{il}M = 0.$$

Оскільки $M \ne 0$, то із цієї рівності одержуємо, що

$$a_{il} = -\frac{A_1}{M}a_{i1} - \frac{A_2}{M}a_{i2} - \dots - \frac{A_k}{M}a_{ik}$$

для довільного числа $i \in \{1, 2, \dots, s\}$. Це означає, що l-й стовпець матриці A є лінійною комбінацією перших k стовпців цієї матриці відповідно з коефіцієнтами $-\frac{A_1}{M}, -\frac{A_2}{M}, \dots, -\frac{A_k}{M}$.

Таким чином перші k стовпців матриці A є базисом системи векторів-стовпців матриці A, тому ранг матриці A дорівнює k. Теорему доведено.

Безпосередньо із доведення теореми випливає наступне твердження.

Наслідок 1. *Нехай M — ненульовий мінор k-го порядку матриці A, причому всі обвідні мінори $(k+1)$-го порядку мінору M дорівнюють нулю. Тоді ранг матриці A дорівнює k.*

Теорема 3. *Детермінант n-го порядку дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його стовпці утворюють лінійно залежну систему векторів.*

Доведення. Достатність теореми одразу слідує із ознаки лінійної залежності системи векторів і властивостей детермінанта.

Доведемо необхідність. Розглянемо деякий детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

що дорівнює нулю. Припустимо протилежне, нехай стовпці детермінанта Δ утворюють лінійно незалежну систему. Тоді ця система векторів є базисом системи векторів-стовпців матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

а отже, ранг матриці A дорівнює n. За теоремою про ранг матриці це означає, що єдиний мінор n-го порядку матриці A не дорівнює нулю. Це суперечить умові, оскільки єдиним мінором n-го порядку матриці A є детермінант Δ.

Теорема 4. *Ранг системи векторів-рядків матриці A дорівнює рангу системи її векторів-стовпців, тобто дорівнює рангу матриці A.*

Доведення. Розглянемо довільну $s \times n$-матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

з дійсними елементами. Нехай ранг матриці A дорівнює k. Тоді ранг транспонованої матриці A^T до матриці A також дорівнює k. Дійсно, довільний мінор r-го порядку матриці A^T, що знаходиться у рядках з номерами $i_1, \dots, i_r$ та стовпцях з номерами $j_1, \dots, j_r$ є транспонованим до мінору матриці A, що знаходиться у рядках з номерами $j_1, \dots, j_r$ та стовпцях з номерами $i_1, \dots, i_r$ і навпаки. Оскільки за властивістю детермінанта ці мінори рівні, то найвищий порядок відмінних від нуля мінорів матриці A^T співпадає з найвищим порядком відмінних від нуля мінорів матриці A. А отже, $\operatorname{rank} A^T = \operatorname{rank} A$. Теорему доведено.

Будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою *елементарного перетворення типу* (I), якщо всі рядки (стовпці) матриці B, крім i-го та j-го, такі ж як відповідні рядки (стовпці) матриці A, а i-ий та j-ий рядки (стовпці) помінялися місцями. Якщо в матриці B всі рядки (стовпці), крім i-го, ті ж самі, що і в матриці A, а i-ий рядок (стовпець) матриці B є сумою i-го рядка (стовпця) матриці A та деякого її іншого рядка (стовпця) помноженого на довільне дійсне число, то будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою *елементарного перетворення типу* (II). Нарешті, будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою *елементарного перетворення типу* (III), якщо всі рядки (стовпці) матриці B, крім i-го, такі ж як відповідні рядки (стовпці) матриці A, а i-ий рядок (стовпець) матриці B є добутком довільного ненульового дійсного числа на i-ий рядок (стовпець) матриці A.

Матриця B називається *еквівалентною* матриці A, якщо її можна одержати із матриці A шляхом скінченного числа елементарних перетворень над рядками або стовпцями матриці A. Якщо матриці A і B еквівалентні, то писатимемо $A \sim B$.

Теорема 5. *Будь-яке елементарне перетворення матриці не змінює її рангу.*

Доведення. Нехай матрицю B одержали із матриці A шляхом деякого елементарного перетворення над рядками (стовпцями) матриці A. Тоді система векторів-рядків (векторів-стовпців) матриці B лінійно виражається через систему векторів-рядків (векторів-стовпців) матриці A. Очевидно для будь-якого елементарного перетворення існує обернене, за допомогою якого із матриці B можна одержати матрицю A. Тому система векторів-рядків (векторів-стовпців) матриці A також лінійно виражається через систему векторів-рядків (векторів-стовпців) матриці B. Отже системи векторів-рядків (векторів-стовпців) матриць A і B еквівалентні, а тому мають однакові ранги. Це означає, що $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$. Теорему доведено.

Наслідок 1. *Ранги еквівалентних матриць рівні.*

Теорема 6. *Будь-яка $s \times t$-матриця A рангу r еквівалентна матриці східчастого вигляду, що містить точно r ненульових рядків, тобто матриці вигляду*

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & b_{1j_1} & \ldots & b_{1j_2-1} & b_{1j_2} & \ldots & b_{1j_r-1} & b_{1j_r} & \ldots & b_{1t} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{2j_2} & \ldots & b_{2j_r-1} & b_{2j_r} & \ldots & b_{2t} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{rj_r} & \ldots & b_{rt} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

де $1 \leq j_1 < j_2 \ldots < j_r \leq t$, b_{kj_k} — ненульове число $(k = 1, 2, \ldots, r)$.

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми Гаусса про зведення системи лінійних однорідних рівнянь до східчастого вигляду. Слід тільки зазначити, що ранг матриці східчастого вигляду (див. (2)) дорівнює числу ненульових рядків цієї матриці. Це випливає одразу з теореми про ранг матриці.

***Зауваження* 1.** Будь-яку $s \times t$-матрицю можна привести до матриці східчастого вигляду (2) за допомогою скінченного числа елементарних перетворень типу (I) або (II) тільки над рядками матриць.

Кажуть, що $s \times t$-матриця A (див. (1)) має *діагональну форму*, якщо для довільних $i \in \{1, \ldots, s\}$ та $j \in \{1, \ldots, t\}$ елемент a_{ij} дорівнює нулю при $i \neq j$. Позначатимемо матрицю A діагональної форми через $\mathrm{diag}[a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{qq}]_{s\times t}$ (q — мінімальне із чисел s і t).

Теорема 7. *Довільна $s \times t$-матриця рангу r еквівалентна матриці діагональної форми вигляду*

$$\mathrm{diag}[\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{r}, 0, \ldots, 0]_{s\times t}.$$

Доведення теореми залишимо читачеві.

Теорема 8. *Ранг добутку матриць A і B не перевищує рангу кожної із матриць A і B, тобто*

$$\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B.$$

Доведення. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \ldots & a_{sn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nt} \end{pmatrix}$$

— довільні відповідно $s \times n$- та $n \times t$-матриці з дійсними елементами. Тоді

$$AB = C = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} & \ldots & c_{st} \end{pmatrix},$$

де

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \quad (i = 1, \ldots, s;\ j = 1, \ldots, t).$$

Розглянемо вектори-стовпці матриць A і C:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix};$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{s1} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{s2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad w_t = \begin{pmatrix} c_{1t} \\ c_{2t} \\ \vdots \\ c_{st} \end{pmatrix}.$$

З формул для c_{ij} випливає, що

$$w_j = \begin{pmatrix} a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \dots + a_{1n}b_{nj} \\ a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + \dots + a_{2n}b_{nj} \\ \vdots \\ a_{s1}b_{1j} + a_{s2}b_{2j} + \dots + a_{sn}b_{nj} \end{pmatrix} =$$

$$= b_{1j}v_1 + b_{2j}v_2 + \dots + b_{nj}v_n$$

для довільного $j \in \{1, 2, \dots, t\}$. Таким чином, система векторів w_1, w_2, ..., w_t лінійно виражається через систему векторів v_1, v_2, ..., v_n. Тому ранг системи векторів-стовпців матриці C не перевищує рангу системи векторів-стовпців матриці A. Отже, ранг матриці C, яка є добутком матриць A і B, не більший за ранг матриці A.

Нерівність $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$ доводиться аналогічно. Замість векторів-стовпців слід розглянути вектори-рядки матриць B і C. Проте її можна довести, виходячи вже із доведеної нами нерівності. Справді,

$$\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} (AB)^T = \operatorname{rank} B^T A^T \leq \operatorname{rank} B^T = \operatorname{rank} B.$$

Теорему доведено.

Теорема 9. *Нехай A — довільна $s \times t$-матриця; B, C — довільні оборотні матриці відповідно порядків s і t. Тоді*

$$\operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AC = \operatorname{rank} A.$$

Доведення. Нехай B — оборотна матриця і $BA = D$. Тоді $A = B^{-1}D$. За теоремою 8

$$\operatorname{rank} D \leq \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} D,$$

і тому $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} D$. Рівність $\operatorname{rank} AC = \operatorname{rank} A$ для оборотної матриці C доводиться аналогічно.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку цієї матриці, дорівнює нулю. Однак в матриці A містяться мінори другого порядку відмінні від нуля, наприклад

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Мінор третього порядку

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

що є обвідним мінором для мінору δ_2, також не дорівнює нулю (переконайтесь, що $\delta_3 = 1$). Але обидва мінору четвертого порядку, що є обвідними мінорами для мінору δ_3, дорівнюють нулю:

$$\delta_4' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \delta_4'' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, ранг матриці A дорівнює трьом.

Задача 2. Користуючись елементарними перетвореннями, знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 8 & 4 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & -2 & 7 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Послідовно виконаємо наступні елементарні перетворення над рядками матриці A: додамо до третього, четвертого, п'ятого рядків перший, відповідно помножений на -4, 2, -1. В результаті одержимо матрицю

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & -3 & -4 & 0 & -7 & -7 \\ 8 & 4 & 5 & 0 & 9 & 9 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Далі, додамо до першого, другого, третього, п'ятого, шостого стовпців четвертий, відповідно помножений на -1, -2, -3, -1, -2. А потім поміняємо місцями перший та четвертий стовпці. Наступним кроком, помноживши третій і п'ятий рядки на -1, ми прийдемо до такої матриці

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 7 & 7 \\ 0 & 4 & 5 & 8 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Продовжуючи виконувати аналогічні елементарні перетворення над рядками та стовпцями матриці A_2, ми одержимо, що

$$A_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, ранг матриці A дорівнює 3.

Задача 3. Довести, що ранг суми двох матриць не перевищує суми їх рангів.

Розв'язання. Нехай A і B — довільні $s \times t$-матриці над $\mathbb{R}$. Позначимо через $a_1, a_2, \ldots, a_t$ та $b_1, b_2, \ldots, b_t$ вектори-стовпці відповідно матриць A та B. Тоді система векторів

$$a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \ldots,\ a_t + b_t, \tag{3}$$

очевидно, є системою векторів-стовпців суми матриць $A + B$.

Припустимо, що $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — базис системи векторів-стовпців матриці A, а $d_1, d_2, \ldots, d_l$ — базис системи векторів-стовпців матриці

B ($k = \operatorname{rank} A$, $l = \operatorname{rank} B$). Тоді

$$a_i = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{ij} c_j, \quad b_i = \sum_{m=1}^{l} \delta_{im} d_m$$

для деяких дійсних чисел γ_{ij}, δ_{im}, де $i = 1, \ldots, t$; $j = 1, \ldots, k$; $m = 1, \ldots, l$. Звідси

$$a_i + b_i = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{ij} c_j + \sum_{m=1}^{l} \delta_{im} d_m \quad (i = 1, \ldots, t).$$

Отже, система векторів (3) лінійно виражається через систему векторів

$$c_1,\ c_2,\ \ldots, c_k,\ d_1,\ d_2,\ \ldots, d_l.$$

А тому ранг системи векторів (3) не перевищує $k + l$. Тобто $\operatorname{rank} A + B \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$, що й потрібно було довести.

Вправи для самостійної роботи

1. Обчислити ранг наступних матриць методом обвідних мінорів:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 11 \\ 3 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення параметра λ, при яких матриця

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

має найменший ранг.

3. Чому дорівнює ранг наступних матриць при різних значеннях параметра λ:

а) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-\lambda^2 \end{pmatrix}$.

4. Обчислити ранг наступних матриць за допомогою елементарних перетворень:

а) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 75 & 0 & 116 & 39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$.

5. Довести, що приєднання до матриці одного рядка (або одного стовпця) або не змінює ранг, або збільшує його на одиницю.

6. Довести, що довільну матрицю рангу r можна представити у вигляді суми r матриць рангу один, але не можна представити у вигляді суми менш ніж r таких матриць.

7. Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — матриця порядку $n > 1$ і r — її ранг. Знайти ранг приєднаної матриці $A^* = \|A_{ij}\|$, де A_{ij} — алгебраїчне доповнення до елемента a_{ji} матриці A.

8. Довести, що за допомогою елементарних перетворень типу (II) над рядками невироджену матрицю $\mathrm{diag}[d_1, d_2]$ можна привести до матриці $\mathrm{diag}[1, d_1 d_2]$.

§ 12. Системи лінійних рівнянь. Теорема Кронекера-Капеллі

Нехай задано систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

де s, $n \in \mathbb{N}$; a_{ij}, $b_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \ldots, s$; $j = 1, 2, \ldots, n$). Позначимо через A матрицю цієї системи, а через $\bar{A}$ — її розширену матрицю. Тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}.$$

Оскільки число стовпців розширеної матриці $\bar{A}$ на одиницю більше числа стовпців матриці A, то із теореми про ранг матриці одразу слідує наступна теорема.

Теорема 1. *Ранг матриці $\bar{A}$ або дорівнює рангу матриці A, або на одиницю більше останнього.*

Теорема 2 (Кронекер, Капеллі)**.** *Система лінійних рівнянь* (1) *сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг матриці A цієї системи рівнянь дорівнює рангу її розширеної матриці $\bar{A}$.*

Доведення. Доведемо спочатку необхідність теореми. Нехай система лінійних рівнянь (1) сумісна і нехай $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — деякий її розв'язок. Тоді

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + \gamma_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \cdots + a_{2n}\gamma_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}\gamma_1 + a_{s2}\gamma_2 + \cdots + a_{sn}\gamma_n = b_s. \end{cases} \tag{2}$$

Розглянемо вектори-стовпці розширеної матриці $\bar{A}$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}.$$

Очевидно, система векторів-стовпців $v_1, \ldots, v_n$ матриці A лінійно виражається через систему векторів-стовпців $v_1, \ldots, v_n, w$ розширеної матриці $\bar{A}$. Із рівностей (2) слідує, що

$$w = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_n v_n.$$

А тому, неважко бачити, що система векторів-стовпців $v_1, \ldots, v_n, w$ розширеної матриці $\bar{A}$ лінійно виражається через систему векторів-стовпців $v_1, \ldots, v_n$ матриці A. Отже, системи векторів-стовпців матриць A і $\bar{A}$ еквівалентні, і таким чином, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A}$. Необхідність доведена.

Доведемо достатність. Припустимо, що ранг матриці A системи лінійних рівнянь (1) і ранг її розширеної матриці $\bar{A}$ рівні і нехай $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r$. Це означає, що базиси систем векторів-стовпців матриць A і $\bar{A}$ складаються із r векторів. Нехай $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$ — базис системи векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Тоді система векторів $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$ є також базисом системи векторів $v_1, \ldots, v_n, w$. Оскільки у протилежному випадку із означення базису слідувало б, що не всі вектори цієї системи, а саме вектор w, не виражаються лінійно через систему векторів не $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$. Це означало б, що система векторів $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}, w$ була б базисом системи векторів-стовпців розширеної матриці $\bar{A}$. Останнє неможливо, тому що базис системи векторів-стовпців матриці $\bar{A}$ за припущенням складається з r векторів. Далі, оскільки вектор w лінійно виражається через систему векторів $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$, а остання, очевидно, лінійно виражається через систему векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n$, то вектор w лінійно виражається через вектори $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Тобто

$$w = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_n v_n \tag{3}$$

для деяких дійсних чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$. Із рівності (3) одержуємо, що вектор $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (1), а тому ця система рівнянь є сумісною. Теорему доведено.

Теорема 3. *Сумісна система лінійних рівнянь* (1) *є визначеною тоді і тільки тоді, коли ранг матриці A цієї системи рівнянь дорівнює числу невідомих.*

Доведення. Розглянемо довільну сумісну систему лінійних рівнянь вигляду (1). Тоді за теоремою Кронекера-Капеллі ранг матриці A цієї системи рівнянь дорівнює рангу розширеної матриці $\bar{A}$ цієї системи і нехай він дорівнює числу r. Тоді базис системи векторів-рядків розширеної матриці $\bar{A}$ складається з деяких r

рядків цієї матриці. Не втрачаючи загальності міркувань, вважатимемо, що перші r рядків матриці $\bar{A}$ утворюють базис системи її векторів-рядків. Тоді всі інші рядки матриці $\bar{A}$ є лінійною комбінацією її перших r рядків. Це означає, що всі рівняння системи лінійних рівнянь (1), починаючи з $(r+1)$-го і до s-го, є сумою перших r рівнянь, помножених на деякі коефіцієнти. Тому система лінійних рівнянь (1) еквівалентна системі лінійних рівнянь

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = b_r. \end{array}\right. \tag{4}$$

Якщо $r = n$, то система лінійних рівнянь (4) є системою рівнянь, в якій число рівнянь дорівнює числу невідомих і детермінант якої не дорівнює нулю. Тому за теоремою Крамера система лінійних рівнянь (4), а отже і система лінійних рівнянь (1), є визначеною. Цим самим доведено достатність теореми.

Доведемо тепер необхідність від протилежного. Припустимо система лінійних рівнянь (1), а отже і система лінійних рівнянь (4), є визначеною, а $r \neq n$. Оскільки r — це ранг $s \times n$-матриці A, тоді $r < n$. Знову, не втрачаючи загальності міркувань, вважатимемо, що мінор M порядку r матриці A, що знаходиться в лівому верхньому кутку матриці A, не дорівнює нулю. Перенесемо у праву частину рівнянь (4) всі члени з невідомими $x_{r+1}, \dots, x_n$. Надалі ці невідомі будемо називати *вільними невідомими.* Надамо вільним невідомим $x_{r+1}, \dots, x_n$ довільно вибраних значень $\gamma_{r+1}, \dots, \gamma_n$ із множини дійсних чисел. Тоді система лінійних рівнянь (4) перепишеться у вигляді

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1\,r+1}\gamma_{r+1} - \dots - a_{1\,n}\gamma_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2\,r+1}\gamma_{r+1} - \dots - a_{2\,n}\gamma_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r\,r+1}\gamma_{r+1} - \dots - a_{r\,n}\gamma_n. \end{array}\right. \tag{5}$$

Система лінійних рівнянь (5) складається з r рівнянь і має r невідомих $x_1, \dots, x_r$. Детермінант цієї системи рівнянь співпадає з ненульовим мінором M матриці A. А тому за теоремою Крамера система рівнянь (5) має єдиний розв'язок $(\gamma_1, \dots, \gamma_r)$. Оскільки

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \dots + a_{1r}\gamma_r = b_1 - a_{1\,r+1}\gamma_{r+1} - \dots - a_{1\,n}\gamma_n, \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \dots + a_{2r}\gamma_r = b_2 - a_{2\,r+1}\gamma_{r+1} - \dots - a_{2\,n}\gamma_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}\gamma_1 + a_{r2}\gamma_2 + \dots + a_{rr}\gamma_r = b_r - a_{r\,r+1}\gamma_{r+1} - \dots - a_{r\,n}\gamma_n, \end{array}\right.$$

то, очевидно, вектор $(\gamma_1, \dots, \gamma_r, \gamma_{r+1}, \dots, \gamma_n)$ є розв'язком системи рівнянь (4), а отже і системи рівнянь (1).

Надаючи вільним невідомим $x_{r+1}, \dots, x_n$ довільні значення $\gamma_{r+1}, \dots, \gamma_n$ з множини дійсних чисел, ми одержимо нескінченну множину розв'язків системи рівнянь (1). Це означатиме, що ця система лінійних рівнянь є невизначеною, що суперечить умові теореми. Таким чином, $r = n$ і Теорему доведено.

Безпосередньо із доведення попередньої теореми випливає наступний алгоритм розв'язування систем лінійних рівнянь.

Правило розв'язання довільної системи лінійних рівнянь. Нехай задано сумісну систему лінійних рівнянь (1) і нехай матриця A цієї системи має ранг r. Вибираємо в A r лінійно незалежних рядків і залишаємо в системі (1) тільки ті рівняння, коефіцієнти яких ввійшли у вибрані рядки. В цих рівняннях залишаємо в лівих частинах такі r невідомих, що детермінант із коефіцієнтів при них відмінний від нуля, а інші невідомі оголошуємо вільними і переносимо в праві частини рівнянь. Надаючи вільним невідомим довільні числові значення і обчислюючи значення інших невідомих за правилом Крамера, ми одержимо всі розв'язки системи (1).

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Виписуємо матрицю

$$A = \left(\begin{array}{|cc|cc} \hline 5 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ \hline 1 & -3 & -6 & 5 \end{array} \right),$$

заданої в умові системи рівнянь і знаходимо її ранг. Мінор M другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку матриці A (він обведений рамкою) відмінний від нуля. Далі виписуємо та обчислюємо всі обвідні мінори мінору M:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином $\operatorname{rank} A = 2$. Тепер знайдемо ранг розширеної матриці $\bar{A}$ системи лінійних рівнянь. Для цього досить обчислити лише так звані *характеристичні мінори* матриці $\bar{A}$, тобто обвідні мінори мінору M третього порядку, які не містяться в матриці A. У нашому випадку такий лише один —

$$M_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -35 \neq 0.$$

Отже, $\operatorname{rank} \bar{A} = 3$. А тому за теоремою Кронекера-Капеллі задана в умові система лінійних рівнянь є несумісною.

Задача 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Можна показати, що система лінійних рівнянь сумісна, оскільки ранг матриці A системи і ранг її розширеної матриці дорівнюють двом. Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку матриці A,

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

відмінний від нуля. Тому розв'язуємо систему, яка складається із перших двох рівнянь заданої в умові системи, від невідомих x_1, x_2. Інші невідомі x_3, x_4, x_5 вважаємо вільними і переносимо їх у праві частини цих рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

Знаходимо розв'язок цієї системи за правилом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 & 1 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - x_3 + 3x_4 + 4x_5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3 & 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{vmatrix} = 1 - 7x_3 - 7x_4;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{M} = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5,$$
$$x_2 = \frac{\Delta_2}{M} = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4.$$

Таким чином, загальний розв'язок заданої в умові системи лінійних рівнянь має вигляд $(\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\alpha - \frac{3}{4}\beta - \delta, -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}\alpha + \frac{7}{4}\beta, \alpha, \beta, \delta)$, де α, β, δ — довільні дійсні числа.

Вправи для самостійної роботи

1. Дослідити на сумісність і знайти загальний розв'язок та один частинний розв'язок наступних систем лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7; \end{cases}$

є) $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1; \end{cases}$ і) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$

2. Дослідити систему і знайти загальний розв'язок в залежності від значення параметра λ:

а) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5, \\ -x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 20x_4 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2. \end{cases}$

3. Дослідити систему лінійних рівнянь і знайти загальний розв'язок в залежності від значень параметрів a, b, c, d:

а) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + cz = d, \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + by + z = 1, \\ x + y + cz = 1. \end{cases}$

§ 13. Системи лінійних однорідних рівнянь

Системою лінійних однорідних рівнянь називається система рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де s, $n \in \mathbb{N}$; $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \dots, s;\ j = 1, 2, \dots, n)$. Очевидно, система рівнянь (1) є сумісною, оскільки має *нульовий розв'язок* $(0, 0, \dots, 0)$. Це також узгоджується з теоремою Кронекера-Капеллі: ранг матриці і ранг розширеної матриці цієї системи лінійних рівнянь рівні, оскільки приєднання до матриці системи стовпця вільних членів, що складається з нулів, не зможе збільшити її рангу.

Якщо ранг матриці системи рівнянь (1) дорівнює n, то за критерієм визначеності (див. теорему 3 §12), вона має єдиний розв'язок — нульовий.

Якщо ж ранг матриці системи рівнянь (1) менше ніж n, тоді ця система рівнянь має нескінченну множину розв'язків і, отже, має розв'язки відмінні від нульового. Для відшукання всіх розв'язків такої системи рівнянь можна застосувати описаний у попередньому параграфі алгоритм знаходження розв'язків сумісної системи лінійних рівнянь, ранг матриці якої менший за число невідомих. Підсумуємо все вище сказане у вигляді наступної теореми.

Теорема 1. *Нехай матриця системи лінійних однорідних рівнянь (1) від n невідомих має ранг r. Якщо $r = n$, тоді система рівнянь (1) є визначеною, тобто нульовий розв'язок є єдиним розв'язком цієї системи рівнянь. У випадку $r < n$ система рівнянь (1) є невизначеною.*

Наслідок 1. *Система n лінійних однорідних рівнянь від n невідомих має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли детермінант матриці цієї системи рівнянь дорівнює нулю.*

Теорема 2. *Нехай n-вимірні вектори $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ і $c = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ є розв'язками системи лінійних однорідних рівнянь (1). Тоді їхня сума $b + c = (\beta_1 + \gamma_1, \dots, \beta_n + \gamma_n)$, а також добуток $\delta b = (\delta\beta_1, \dots, \delta\beta_n)$ довільного дійсного числа δ на вектор b є розв'язками системи рівнянь (1).*

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ справедливі рівності

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n = 0,$$
$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = 0.$$

Використовуючи ці рівності, обчислимо для довільного $i \in \{1, \ldots, s\}$ значення виразу

$$a_{i1}(\beta_1 + \gamma_1) + a_{i2}(\beta_2 + \gamma_2) + \cdots + a_{in}(\beta_n + \gamma_n) =$$
$$= (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n) + (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) =$$
$$= 0 + 0 = 0.$$

Отже, n-вимірний вектор $b + c = (\beta_1 + \gamma_1, \ldots, \beta_n + \gamma_n)$ є розв'язком системи рівнянь (1).

Аналогічно, обчислюючи для довільного дійсного числа δ та довільного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ значення виразу

$$a_{i1}(\delta\beta_1) + a_{i2}(\delta\beta_2) + \cdots + a_{in}(\delta\beta_n) =$$
$$= \delta(a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n) = \delta \cdot 0 = 0,$$

одержимо, що n-вимірний вектор $\delta b = (\delta\beta_1, \ldots, \delta\beta_n)$ є також розв'язком системи рівнянь (1).

Наслідок 1. *Довільна лінійна комбінація розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь також є розв'язком цієї системи рівнянь.*

Доведення. Доведемо наслідок методом математичної індукції. База індукції очевидна (це слідує одразу із попередньої теореми).

Нехай для деякого натурального числа k лінійна комбінація довільних k розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) є розв'язком цієї системи рівнянь. Розглянемо лінійну комбінацію $k + 1$ розв'язків $b_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}$ системи рівнянь (1) відповідно з коефіцієнтами $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \delta_{k+1}$

$$b = \delta_1\beta_1 + \delta_2\beta_2 + \cdots + \delta_k\beta_k + \delta_{k+1}\beta_{k+1}.$$

За припущенням індукції лінійна комбінація $\delta_1\beta_1 + \delta_2\beta_2 + \cdots + \delta_k\beta_k$ є розв'язком системи рівнянь (1). Оскільки за попередньою теоремою добуток $\delta_{k+1}\beta_{k+1}$ є розв'язком цієї системи рівнянь, то вектор b

як сума розв'язків є також розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь (1). Наслідок доведений.

Множина всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) називається *простором розв'язків* цієї системи рівнянь. Нехай S — простір розв'язків невизначеної системи лінійних однорідних рівнянь (1). Із §10 слідує, що існує лінійно незалежна система векторів $a_1, \ldots, a_q \in S$ така, що будь-який вектор із S є лінійною комбінацією векторів цієї системи. У цьому випадку систему векторів a_1, $\ldots$, a_q називають *фундаментальною системою розв'язків* системи лінійних однорідних рівнянь (1). У невизначеної системи лінійних однорідних рівнянь існує безліч фундаментальних систем розв'язків. Будь-які дві фундаментальні системи розв'язків еквівалентні. А, отже, складаються із одного й того ж числа розв'язків.

Теорема 3. *Якщо ранг r матриці системи лінійних однорідних рівнянь* (1) *менше ніж число невідомих n, тоді будь-яка фундаментальна система розв'язків системи* (1) *складається із $n - r$ розв'язків.*

Доведення. Розглянемо довільну систему лінійних однорідних рівнянь вигляду (1) і нехай ранг r матриці A цієї системи рівнянь менше ніж число n невідомих цієї системи рівнянь. Тоді розглядувана система рівнянь є невизначеною і всі її розв'язки можна знайти, користуючись алгоритмом, описаним у попередньому параграфі. Не втрачаючи загальності міркувань, вважатимемо що мінор r-го порядку, що знаходиться у лівому верхньому кутку матриці A, відмінний від нуля. Тоді невідомі x_1, x_2, $\ldots x_r$ можна лінійно виразити через вільні невідомі x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots$, x_n, тобто

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 = d_{11}x_{r+1} + d_{12}x_{r+2} + \cdots + d_{1\,n-r}x_n, \\ x_2 = d_{21}x_{r+1} + d_{22}x_{r+2} + \cdots + d_{2\,n-r}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = d_{r1}x_{r+1} + d_{r2}x_{r+2} + \cdots + d_{r\,n-r}x_n \end{array}\right. \tag{2}$$

для деяких дійсних чисел d_{ij} $(i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, n - r)$.

Розглянемо довільний відмінний від нуля детермінант Δ порядку $n - r$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \gamma_{1\,r+1} & \gamma_{1\,r+2} & \cdots & \gamma_{1\,n-r} \\ \gamma_{2\,r+1} & \gamma_{2\,r+2} & \cdots & \gamma_{2\,n-r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n-r\,r+1} & \gamma_{n-r\,r+2} & \cdots & \gamma_{n-r\,n-r} \end{vmatrix}.$$

Беручи елементи i-го рядка ($i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$) детермінанта Δ в якості значень для вільних невідомих x_{r+1}, x_{r+2}, $\ldots x_n$, ми за формулами (2) обчислимо відповідні значення перших r невідомих x_1, x_2, $\ldots$, x_r. Позначимо їх відповідно через γ_{i1}, γ_{i2}, $\ldots$, γ_{ir}. Тоді, очевидно, для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$ вектор

$$v_i = (\gamma_{i1}, \ldots, \gamma_{ir}, \gamma_{i\,r+1}, \ldots, \gamma_{in})$$

є розв'язком заданої системи лінійних однорідних рівнянь. Покажемо, що система n-вимірних векторів v_1, v_2, $\ldots$, v_{n-r} є фундаментальною системою розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1).

По-перше, система векторів v_1, v_2, $\ldots$, v_{n-r} є лінійно незалежною. Дійсно, $(n-r) \times n$-матриця

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|}
\gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1r} & \gamma_{1\,r+1} & \cdots & \gamma_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \Delta & \vdots \\
\gamma_{n-r\,1} & \cdots & \gamma_{n-r\,r} & \gamma_{n-r\,r+1} & \cdots & \gamma_{n-r\,n}
\end{array}\right),$$

складена з цих векторів як із рядків, має відмінний від нуля мінор Δ порядку $n-r$. Тому ранг системи її рядків дорівнює $n-r$.

Залишилось довести, що довільний розв'язок $w = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ системи лінійних однорідних рівнянь (1) є лінійною комбінацією системи векторів v_1, v_2, $\ldots$, v_{n-r}. Для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n-r\}$ позначимо через v'_i i-й рядок детермінанта Δ, розглядуваний як $(n-r)$-вимірний вектор, а через w' — вектор $(\delta_{r+1}, \ldots, \delta_n)$. Система векторів v'_1, v'_2, $\ldots$, v'_{n-r} — лінійно незалежна, оскільки $\Delta \neq 0$. Однак система із $(n-r)$-вимірних векторів v'_1, v'_2, $\ldots$, v'_{n-r}, w' — лінійно залежна, оскільки число векторів цієї системи більше ніж їх розмірності. Тому вектор w' є лінійною комбінацією системи векторів v'_1, v'_2, $\ldots$, v'_{n-r}, тобто існують такі дійсні числа λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_{n-r}, що

$$w' = \lambda_1 v'_1 + \lambda_2 v'_2 + \cdots + \lambda_{n-r} v'_{n-r}. \tag{3}$$

Розглянемо тепер n-вимірний вектор

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r} - w.$$

Вектор u є лінійною комбінацією розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь, а тому і сам є розв'язком цієї системи рівнянь. Із (3) випливає, що останні $n-r$ компонент вектора u дорівнюють нулю. Перші ж r компонент цього вектора також дорівнюють нулю, оскільки їх значення можна обчислити із рівностей (2), беручи в якості значень вільних невідомих нулі. Таким чином, $u = 0$, тобто

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r}.$$

Теорему доведено.

Нехай дано довільну неоднорідну систему лінійних рівнянь з дійсними коефіцієнтами

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{4}$$

Система лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{5}$$

одержана із системи (4) заміною всіх вільних членів нулями, називається *зведеною однорідною системою* для системи (4). Припустимо, що система лінійних рівнянь (4) сумісна. Тоді справедливі наступні твердження які, характеризують зв'язок між розв'язками неоднорідної системи (4) і зведеної однорідної системи рівнянь (5).

Теорема 4. *Сума будь-якого розв'язку неоднорідної системи лінійних рівнянь* (4) *і будь-якого розв'язку зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5) *є розв'язком неоднорідної системи рівнянь* (4).

Доведення. Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ і $d = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ — довільні розв'язки відповідно систем лінійних рівнянь (4) і (5). Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ обчислимо

$$a_{i1}(\gamma_1 + \delta_1) + a_{i2}(\gamma_2 + \delta_2) + \cdots + a_{in}(\gamma_n + \delta_n) =$$
$$= (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n) + (a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \cdots + a_{in}\delta_n) =$$
$$= b_i + 0 = b_i.$$

Отже, вектор $c + d$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (4).

Теорема 5. *Різниця будь-яких двох розв'язків системи лінійних рівнянь* (4) *є розв'язком зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5).

Доведення. Нехай $c = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ і $d = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ — довільні розв'язки системи лінійних рівнянь (4). Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ обчислимо

$$a_{i1}(\gamma_1 - \delta_1) + a_{i2}(\gamma_2 - \delta_2) + \dots + a_{in}(\gamma_n - \delta_n) =$$
$$= (a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \dots + a_{in}\gamma_n) - (a_{i1}\delta_1 + a_{i2}\delta_2 + \dots + a_{in}\delta_n) =$$
$$= b_i - b_i = 0.$$

Таким чином, вектор $c - d$ є розв'язком зведеної однорідної системи лінійних рівнянь (5).

Наслідок 1. *Нехай* c — *довільний* (*частинний*) *розв'язок системи лінійних рівнянь* (4), S — *простір розв'язків зведеної однорідної для неї системи рівнянь* (5). *Тоді множина* $\{c + d \mid d \in S\}$ *є множиною розв'язків системи рівнянь* (4).

Доведення. Дійсно, якщо d — довільний вектор з множини S, то за теоремою 4 сума $c + d$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (4), а тому множина $\{c + d \mid d \in S\}$ є підмножиною множини розв'язків системи рівнянь (4).

Якщо ж, e — довільний розв'язок системи рівнянь (4), то за теоремою 5 різниця $e - c$ є розв'язком зведеної однорідної системи рівнянь 5, тобто $e - c \in S$. Тому вектор $e = c + (e - c)$ належить множині $\{c + d \mid d \in S\}$. Отже, множина розв'язків системи рівнянь (4) є підмножиною множини $\{c + d \mid d \in S\}$. Звідси слідує, що ці множини рівні.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Розв'язання. Обчислимо спочатку ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

системи лінійних рівнянь (6). Мінор

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

розташований в лівому верхньому кутку матриці A, не дорівнює нулю. Обчислюємо всі обвідні мінори третього порядку мінора M матриці A. При цьому звернемо увагу на те, що третій і четвертий стовпці матриці A пропорційні відповідно першому та другому її стовпцям. Тому мінори, утворені облямуванням за допомогою як третього, так і четвертого стовпців, дорівнюють нулю. Залишилось обчислити наступні два мінори:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, $\operatorname{rank} A = 2$. Враховуючи, що базовий мінор M розташований у лівому верхньому кутку матриці A, залишаємо в системі рівнянь (6) перші два рівняння, а в їх лівих частинах — лише перші дві невідомі. Інші три невідомі x_3, x_4, x_5 оголошуємо вільними

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_4 + 2x_5, \\ \qquad\;\; x_2 = x_4 + x_5. \end{cases} \tag{7}$$

Складаємо таблицю для значень невідомих $x_1, \ldots, x_5$, відокремивши в ній вільні та головні невідомі, і надаємо вільним невідомим вказані в таблиці значення.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		1	0	0
		0	1	0
		0	0	1

Таблиця 1.

Для кожного з цих трьох наборів значень вільних невідомих розв'язуємо систему лінійних рівнянь (7) і знаходимо відповідні значення головних невідомих x_1, x_2:

1) для першого набору $x_3 = 0$, $x_4 = x_5 = 0$ із (7) одержуємо, що $x_2 = 0$, $x_1 = 1 - x_2 = 1$;

2) для другого набору $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ із (7) одержуємо, що $x_2 = 1$, $x_1 = 1 - x_2 = 0$;

3) для третього набору $x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 1$ із (7) одержуємо, що $x_2 = 1$, $x_1 = 2 - x_2 = 1$.

Таким чином, заповнивши вільні місця в таблиці 1, одержимо нову таблицю.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	1	0	0
0	1	0	1	0
1	1	0	0	1

Таблиця 2.

Таблиця 2 задає три розв'язки $a_1 = (1, 0, 1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 0, 0, 1)$ системи лінійних однорідних рівнянь (6). Вони утворюють фундаментальну систему розв'язків заданої в умові системи лінійних однорідних рівнянь. Останнє випливає із теореми 3 і того, що система тривимірних векторів $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ є лінійно незалежною.

Загальним розв'язком системи рівнянь (6) є довільна лінійна комбінація розв'язків фундаментальної системи

$$\delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \delta_3 a_3 = (\delta_1 + \delta_3, \delta_2 + \delta_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3),$$

де δ_1, δ_2, δ_3 — довільні дійсні числа.

Задача 2. Чи утворюють рядки матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0? \end{cases} \tag{8}$$

Розв'язання. Неважко переконатися, що кожен рядок матриці A є розв'язком системи (8). Далі, $\operatorname{rank} A = 3$, оскільки мінор

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

третього порядку, який знаходиться в останніх трьох стовпцях матриці A не дорівнює нулю. Таким чином рядки матриці утворюють лінійно незалежну систему векторів.

Нарешті, знаходимо ранг матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

системи рівнянь (8). Мінор

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

розташований у лівому верхньому кутку матриці B не дорівнює нулю. Обчислюємо всі обвідні мінори мінора M_1:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad M_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, $\operatorname{rank} B = 2$. Звідси і з теореми 3 слідує, що фундаментальна система розв'язків системи (8) складається із трьох розв'язків. А тому з лінійної незалежності системи рядків матриці A випливає, що будь-який розв'язок системи (8) лінійно виражається через рядки матриці A. Тобто рядки матриці утворюють фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь (8).

Вправи для самостійної роботи

1. Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок для систем рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0, \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0, \\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+4x_4+8x_5=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3=0, \\ 4x_1+7x_2+5x_3=0, \\ x_1+x_2-4x_3=0, \\ 2x_1+9x_2+6x_3=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1-x_3=0, \\ x_2-x_4=0, \\ -x_1+x_3-x_5=0, \\ -x_2+x_4-x_6=0, \\ -x_3+x_5=0, \\ -x_4+x_6=0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1-x_3+x_5=0, \\ x_2-x_4+x_6=0, \\ x_1-x_2+x_5-x_6=0, \\ x_2-x_3+x_6=0, \\ x_1-x_4+x_5=0. \end{cases}$

2. Чи утворюють рядки кожної із матриць

$$A=\begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

фундаментальну систему розв'язків для системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3+x_4+6x_5=0, \\ 5x_1+9x_2+7x_3+4x_4+7x_5=0, \\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4+11x_5=0, \\ x_1+6x_2+8x_3+5x_4-4x_5=0? \end{cases}$$

3. Які із рядків матриці

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -14 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & 13 \\ 4 & -2 & -7 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків для системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 \phantom{{}+3x_5} = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0? \end{cases}$$

4. Знайти системи лінійних однорідних рівнянь, для яких наступні системи векторів були б фундаментальними системами розв'язків:
а) $(3, 4, 2, 1, 6)$, $(5, 9, 7, 4, 7)$; б) $(4, 3, -1, -1, 11)$, $(1, 6, 8, 5, -4)$.

5. Довести, що якщо ранг системи лінійних однорідних рівнянь на одиницю менше числа невідомих, то довільні два розв'язки цієї системи пропорційні.

6. Нехай A — матриця системи $n-1$ лінійних однорідних рівнянь від n невідомих, M_i — мінор матриці A, що одержується викреслюванням i-го стовпця матриці A. Довести, що одним із розв'язків системи лінійних рівнянь є система чисел

$$M_1, \quad -M_2, \quad M_3, \quad -M_4, \ldots, (-1)^{n-1}M_n,$$

причому, якщо цей розв'язок — ненульовий, тоді будь-який інший розв'язок йому пропорційний.

7. Користуючись результатом попередньої задачі знайти загальний розв'язок систем рівнянь:

а) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

8. Довести, що k-ва компонента довільного розв'язку системи лінійних однорідних рівнянь дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ранг матриці цієї системи зменшується на одиницю при закресленні k стовпця.

9. За якої умови лінійна комбінація довільних розв'язків a_1, a_2, a_3, …, a_k даної неоднорідної системи лінійних рівнянь з коефіцієнтами α_1, α_2, α_3, … α_k є розв'язком цієї системи рівнянь.

§ 14. Групи. Кільця. Поля

Нехай M — довільна множина. *Бінарною алгебраїчною операцією* на множині M називається довільне відображення $\tau : M \times M \to M$. Образ $\tau(a,b)$ впорядкованої пари $(a,b) \in M \times M$ позначають іноді через $a\tau b$, а ще частіше бінарну операцію на M позначають деяким спеціальним символом: $*$, $\circ$, $\cdot$ або $+$. У останніх двох випадках образи $a \cdot b$ (або просто ab) та $a + b$ пари (a,b) будемо називати відповідно *добутком* та *сумою* елементів $a, b \in M$, а самі операції $\cdot$ та $+$ — відповідно множенням та додаванням.

***Зауваження* 1.** Названі вище операції — умовні. На множині M може бути задано декілька алгебраїчних операцій.

Непорожня множина G, на якій задана бінарна алгебраїчна операція множення, називається *групою*, якщо виконуються наступні умови:

1) алгебраїчна операція є асоціативною, тобто для довільних елементів a, b, $c \in G$ справедлива рівність $(ab)c = a(bc)$;
2) існує *одиничний елемент*, тобто існує такий елемент e множини G, що для довільного елемента $a \in G$ справедливі рівності $ae = ea = a$;
3) для всякого елемента $a \in G$ існує *обернений елемент* a^{-1} із множини G, тобто такий елемент, що $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

***Зауваження* 2.** Якщо множина G, на якій задана бінарна алгебраїчна операція додавання, є групою, тоді одиничний елемент групи G будемо називати *нульовим*, а обернений елемент до елемента $a \in G$ — *протилежним до* a і позначатимемо його через $-a$.

Якщо для довільних елементів a, b групи G виконується рівність $ab = ba$, то група G називається *абелевою*.

Якщо множина G скінченна, то група G називається *скінченною*, а число елементів множини G називається *порядком групи* G і позначається $|G|$.

Нехай G_1 та G_2 — групи, на яких задано бінарні алгебраїчні операції множення. Групи G_1 та G_2 називаються *ізоморфними*, якщо існує бієктивне відображення $f : G_1 \to G_2$ таке, що $f(ab) = f(a)f(b)$ для довільних елементів a, $b \in G_1$. Ізоморфізм груп G_1 і G_2 будемо символічно позначати $G_1 \cong G_2$.

Підмножина H групи G називається *підгрупою* групи G, якщо відносно алгебраїчної операції, заданої на G, H є групою.

Теорема 1. *Підмножина H групи G є підгрупою групи G тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів a і b із H виконуються такі умови:* 1) $ab \in H$; 2) $a^{-1} \in H$.

Непорожня множина K, на якій задано дві бінарні алгебраїчні операції додавання і множення, називається *кільцем*, якщо виконуються такі умови:

1) множина K відносно операції додавання є абелевою групою (цю групу називатимемо *адитивною групою кільця*);
2) бінарна алгебраїчна операція множення є асоціативною, тобто для довільних елементів a, b, $c \in K$ справедлива рівність $(ab)c = a(bc)$;
3) бінарні алгебраїчні операції додавання і множення пов'язані дистрибутивними законами, тобто для довільних елементів a, b, $c \in K$ справедливі рівності $a(b+c) = ab+ac$, $(a+b)c = ac+bc$.

Кільце K називається *комутативним*, якщо $ab = ba$ для довільних елементів a, $b \in K$.

Кільце K називається *кільцем з одиницею*, якщо в кільці K існує елемент (позначатимемо його звичною одиницею) 1 такий, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для довільного елемента $a \in K$.

Нехай K — кільце з одиницею. Елемент a кільця K називається *оборотним*, якщо існує елемент $a^{-1} \in K$ такий, що $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Теорема 2. *Нехай K — кільце з одиницею. Множина всіх оборотних елементів кільця K відносно бінарної алгебраїчної операції множення елементів цього кільця є групою.*

Групу всіх оборотних елементів кільця K з одиницею називають *мультиплікативною групою кільця K* і позначають K^*.

Кільця K_1 та K_2 називаються *ізоморфними*, якщо існує бієктивне відображення $f : K_1 \to K_2$ таке, що

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \qquad f(ab) = f(a)f(b)$$

для довільних елементів a, $b \in K_1$. Ізоморфізм кілець K_1 і K_2 також будемо символічно позначати $K_1 \cong K_2$.

Підмножина R кільця K називається *підкільцем* кільця K, якщо відносно алгебраїчних операцій, заданих на K, R є кільцем.

Теорема 3. *Підмножина R кільця K є підкільцем кільця K тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів a і b із R виконуються такі умови:* 1) $a + b \in R$; 2) $-a \in R$; 3) $ab \in R$.

Комутативне кільце P з одиницею називається *полем*, якщо довільний ненульовий елемент кільця P є оборотним, тобто $P^* = P \setminus \{0\}$.

Якщо поле P є підкільцем поля F, то кажуть, що P — *підполе* поля F. Поля P_1 і P_2 називаються *ізоморфними*, якщо кільця P_1 і P_2 — ізоморфні.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Довести, що множина $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел відносно звичайної операції додавання цілих чисел є групою і не є групою відносно звичайної операції множення. Привести приклад бінарної алгебраїчної операції, заданої на $\mathbb{Z}$, яка б не задовольняла асоціативній властивості.

Розв'язання. Очевидно, операція додавання цілих чисел є бінарною алгебраїчною операцією на $\mathbb{Z}$, оскільки за означенням сумою цілих чисел є ціле число. Далі, добре відомо, що ця операція задовольняє асоціативній властивості, тобто $(a + b) + c = a + (b + c)$ для довільних $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Серед цілих чисел є число 0 таке, що $a + 0 = 0 + a = a$ для довільного елемента $a \in \mathbb{Z}$. Нарешті для довільного цілого числа a існує протилежне ціле число $-a$ з властивістю $a+(-a) = (-a)+a = 0$. Зауважимо, що додавання цілих чисел задовольняє також комутативній властивості і, отже, множина $\mathbb{Z}$ є абелевою групою відносно операції додавання.

У другому випадку, коли на множині $\mathbb{Z}$ задано операцію множення, бачимо, що: 1) ця операція є бінарною алгебраїчною операцією, оскільки $ab \in \mathbb{Z}$ для довільних елементів a, $b \in \mathbb{Z}$; 2) $(ab)c = a(bc)$ для довільних цілих чисел a, b, c; 3) серед цілих чисел є число 1 таке, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для довільного цілого числа a. Однак, не для будь-якого елемента $a \in \mathbb{Z}$ існує обернений елемент $a^{-1} \in \mathbb{Z}$. Справді, наприклад для цілого числа 2 не існує такого цілого числа x, щоб $2x = 1$. Таким чином, множина $\mathbb{Z}$ не є групою відносно операції множення цілих чисел.

Нарешті, розглянемо бінарну алгебраїчну операцію на $\mathbb{Z}$:

$$m \circ n = -m + (-n) \qquad (m, n \in \mathbb{Z}),$$

де $+$ — звичайна операція додавання цілих чисел, а $-a$ — протилежне число до цілого числа a (очевидно, що $m \circ n \in \mathbb{Z}$ для довільних $m, n \in \mathbb{Z}$). Тоді

$$(1 \circ 2) \circ 3 = (-1 + (-2)) \circ 3 = -(-1 + (-2)) + (-3) = 0 \neq 4 = 1 \circ (2 \circ 3).$$

Останнє означає, що бінарна алгебраїчна операція $\circ$ не задовольняє асоціативній властивості.

Задача 2. Показати, що множина $GL(n,\mathbb{R})$ всіх оборотних матриць порядку n з дійсними елементами відносно операції множення матриць є групою.

Розв'язання. Згідно теореми 8 § 9 добуток двох довільних невироджених матриць із $GL(n,\mathbb{R})$ є невиродженою матрицею із $GL(n,\mathbb{R})$. Отже, операція множення матриць є бінарною алгебраїчною операцією на $GL(n,\mathbb{R})$. За теоремою 4 § 9 ця операція задовольняє асоціативній властивості. З теореми 6 § 9 випливає, що в множині $GL(n,\mathbb{R})$ існує одиничний елемент відносно операції множення, роль якого відіграє одинична матриця порядку n. І, нарешті, з теореми 10 § 9 слідує, що для довільної невиродженої матриці $A \in GL(n,\mathbb{R})$ існує обернена матриця $A^{-1} \in GL(n,\mathbb{R})$. Таким чином, множина $GL(n,\mathbb{R})$ відносно операції множення матриць є групою. Ця група називається *повною лінійною групою степеня n над* $\mathbb{R}$. Зауважимо (див. § 9), що група $GL(1,\mathbb{R})$ — абелева, а група $GL(n,\mathbb{R})$ $(n > 1)$ — не є абелевою.

Розглянемо в групі $GL(n,\mathbb{R})$ підмножину $SL(n,\mathbb{R})$ всіх матриць, детермінант яких дорівнює одиниці: $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid |A| = 1\}$. Для довільних матриць A, $B \in SL(n,\mathbb{R})$

$$AB \in SL(n,\mathbb{R}) \qquad A^{-1} \in SL(n,\mathbb{R}),$$

оскільки $|AB| = |A| \cdot |B| = 1$, $|A^{-1}| = |A|^{-1} = 1$. Отже, за теоремою 1 множина $SL(n,\mathbb{R})$ є підгрупою групи $GL(n,\mathbb{R})$. Група $SL(n,\mathbb{R})$ називається *спеціальною лінійною групою степеня n над* $\mathbb{R}$.

Розглянемо в групі $GL(n,\mathbb{R})$ підмножину $GL(n,\mathbb{Q})$ всіх матриць, елементами якої є раціональні числа (тобто множину всіх невироджених $n \times n$-матриць над $\mathbb{Q}$). З означення добутку двох матриць та правила знаходження оберненої матриці (див. § 9) випливає, що добуток двох довільних матриць із $GL(n,\mathbb{Q})$ є матрицею з $GL(n,\mathbb{Q})$ і обернена матриця для довільної матриці з $GL(n,\mathbb{Q})$ є матрицею з $GL(n,\mathbb{Q})$. Аналогічно попередньому випадку звідси одержуємо, що $GL(n,\mathbb{Q})$ — підгрупа групи $GL(n,\mathbb{R})$.

Задача 3. Довести, що множина S_M всіх бієктивних відображень множини M в себе відносно операції множення відображень є групою.

Розв'язання. Нехай f, g — довільні бієктивні відображення множини M в себе. Покажемо спочатку, що fg — також бієктивне відображення множини M в себе, тобто, що множення відображень із S_M є бінарною алгебраїчною операцією на S_M.

Нехай m_1, m_2 — довільні різні елементи із M. Тоді $g(m_1) \neq g(m_2)$ (оскільки g — бієктивне). Звідси $f(g(m_1)) \neq f(g(m_2))$ (оскільки f — бієктивне). Тому $fg(m_1) \neq fg(m_2)$. Це в свою чергу означає, що добуток fg є ін'єктивним відображенням множини M в себе. Далі, нехай m — довільний елемент із M. Тоді в M існує елемент n такий, що $f(n) = m$ (через бієктивність відображення f). Аналогічно в M існуватиме елемент r такий, що $g(r) = n$. Отже, $fg(r) = f(g(r)) = = f(n) = m$. Нами показано, що для довільного елемента $m \in M$ існує елемент $r \in M$, що $fg(r) = m$. Тобто, що добуток fg є сур'єктивним відображенням, а тому і бієктивним відображенням множини M в себе.

Із теореми 2 § 1 випливає, що операція множення відображень із S_M задовольняє асоціативній властивості. Роль одиничного елемента в S_M відіграє тотожне відображення e_M множини M в себе (див. §1; нагадаємо $e_M(m) = m$ $(m \in M)$; e_M — очевидно бієктивне відображення). Залишається довести, що для довільного відображення $f \in S_M$ існує обернене відображення $f^{-1} \in S_M$.

Нехай f — довільне бієктивне відображення множини M в себе. Тоді для довільного елемента $m \in M$ існує єдиний прообраз $n \in M$ елемента m, тобто такий елемент, що $f(n) = m$. Позначимо прообраз n елемента m через $f^{-1}(m)$. Розглянемо відображення $g : M \to M$, визначене за правилом $g : m \to f^{-1}(m)$ $(m \in M)$. Відображення g є бієктивним. Дійсно, довільний елемент $m \in M$ є образом елемента $f(m)$ при відображенні g, оскільки $g(f(m)) = f^{-1}(f(m)) = m$. Далі, $g(m_1) \neq g(m_2)$ для довільних різних елементів $m_1, m_2 \in M$. Оскільки в протилежному випадку $m_1 = f(g(m_1)) = f(g(m_2)) = m_2$, що неможливо. Нарешті покажемо, що відображення g є оберненим для відображення f. Для довільного елемента $m \in M$

$$fg(m) = f(g(m)) = f(f^{-1}(m)) = m,$$
$$gf(m) = g(f(m)) = f^{-1}(f(m)) = m.$$

Тобто $fg = gf = e_M$. Таким чином, S_M є групою відносно операції множення відображень.

Зауваження 3. Якщо $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, тоді елементами групи S_M є підстановки n-го степеня. Отже, множина S_n всіх підстановок n-го степеня відносно операції множення підстановок є групою (нагадаємо, див. § 5, цю групу називають симетричною групою n-го степеня.)

Задача 4. Довести, що група

$$UT(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$$

відносно операції множення матриць ізоморфна групі $\mathbb{Z}^+$ цілих чисел відносно операції додавання.

Розв'язання. Розглянемо відображення $f : UT(2,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}^+$, визначене за правилом

$$f : \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to m \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Очевидно, f — бієктивне відображення. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— довільні матриці із $UT(2,\mathbb{Z})$. Тоді

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & m+n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

А тому $f(AB) = m + n = f(A) + f(B)$. Отже, $UT(2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^+$ за означенням ізоморфізму груп.

Задача 5. Чи є множина $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел відносно звичайних операцій додавання і множення кільцем, полем?

Розв'язання. Із розв'язання прикладу 1 слідує, що операції додавання і множення цілих чисел є бінарними операціями на $\mathbb{Z}$, причому відносно операції додавання множина $\mathbb{Z}$ є абелевою групою, а операція множення цілих чисел задовольняє асоціативній та комутативній властивостям. Крім того в $\mathbb{Z}$ існує одиничний елемент відносно операції множення. Далі, добре відомо, що операції додавання і множення цілих чисел пов'язані законом дистрибутивності, тобто $a(b + c) = ab + ac$ для довільних a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Все вище наведене означає, що множина $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел відносно операцій додавання і множення є комутативним кільцем з одиницею. Однак кільце $\mathbb{Z}$ не є полем, оскільки, наприклад, ненульовий елемент 2 не є оборотним в $\mathbb{Z}$.

Задача 6. Чи є множина всіх непарних цілих чисел кільцем відносно звичайних операцій додавання і множення цілих чисел?

Розв'язання. Очевидно, сума довільних непарних цілих чисел є парним числом. А тому операція додавання непарних цілих чисел не є бінарною алгебраїчною операцією на множині всіх непарних цілих чисел. Отже, ця множина не є кільцем відносно вказаних в умові операцій.

Задача 7. Довести, що підмножина $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ множини дійсних чисел є полем відносно звичайних операцій додавання і множення дійсних чисел.

Розв'язання. Звичайні операції додавання і множення дійсних чисел із множини $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ є бінарними операціями на цій множині, оскільки для довільних $a_1 + b_1\sqrt{3}$, $a_2 + b_2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}),$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1a_2 + 3b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

Добре відомо, що операції додавання і множення дійсних чисел, зокрема і чисел із $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, задовольняють асоціативній та комутативній властивостям. Крім того вони пов'язані законом дистрибутивності.

Множина $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ містить числа 0 і 1 ($0 = 0 + 0\sqrt{3}$, $1 = 1 + 0\sqrt{3}$). Ці числа відіграють роль нульового і одиничного елемента відповідно для операцій додавання і множення.

Оскільки для довільних чисел a, $b \in \mathbb{Q}$ існують протилежні числа $-a$, $-b \in \mathbb{Q}$, то для довільного числа $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ існує протилежне число $-(a + b\sqrt{3}) = (-a) + (-b)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ (очевидно, $(a + b\sqrt{3}) + ((-a) + (-b)\sqrt{3}) = 0$). Нарешті, покажемо, що для довільного ненульового числа $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ існує обернене число в $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Оскільки a і b одночасно не дорівнюють нулю, то $a^2 - 3b^2 \neq 0$. Бо в протилежному випадку це б означало існування раціонального числа, квадрат якого дорівнює 3. Розглянемо число

$$\frac{a}{a^2 - 3b^2} + \frac{-b}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

Обчисливши добуток

$$(a + b\sqrt{3})\left(\frac{a}{a^2 - 3b^2} + \frac{-b}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3}\right) = \frac{a^2 - 3b^2}{a^2 - 3b^2} + \frac{ba - ab}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3} = 1,$$

переконуємося, що це число є оберненим до числа $a + b\sqrt{3}$.

З усього вище сказаного випливає, що множина $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ є полем відносно операцій додавання і множення дійсних чисел із $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Задача 8. Нехай K — кільце з нульовим елементом 0. Довести, що $a \cdot 0 = 0$ для довільного елемента $a \in K$.

Розв'язання. Нехай a — довільний елемент кільця K. Тоді

$$a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0,$$

оскільки 0 — нульовий елемент в K. З іншого боку із дистрибутивної властивості операцій додавання і множення звідси одержимо, що

$$a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0.$$

Додавши до цієї рівності елемент протилежний до елемента $a \cdot 0$ (такий існує, бо K — кільце), одержимо

$$-(a \cdot 0) + (a \cdot 0 + a \cdot 0) = -(a \cdot 0) + a \cdot 0.$$

Звідси, з асоціативної властивості додавання та означення протилежного елемента випливає, що $a \cdot 0 = 0$.

Задача 9. Нехай K — кільце з нульовим елементом 0. Ненульові елементи a і b кільця K називаються ***дільниками нуля***, якщо $ab = 0$. Довести, що жодне поле не містить дільників нуля.

Розв'язання. Доведемо це методом від супротивного. Нехай P — поле, яке містить дільники нуля a і b. Тоді за означенням $ab = 0$, $a \neq 0$ і $b \neq 0$. Оскільки $a \neq 0$, то в полі P існує обернений елемент a^{-1} до елемента a. Помноживши рівність $ab = 0$ зліва на a^{-1}, одержимо $a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0$. Звідси $1 \cdot b = 0$, тобто $b = 0$. Одержана суперечність доводить, що жодне поле не містить дільників нуля.

Зауваження 4. Існують кільця, які містять дільники нуля. Наприклад в кільці $\mathbb{R}_2$ всіх 2×2-матриць з дійсними елементами відносно операцій додавання і множення матриць матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

є дільниками нуля (переконатися самостійно).

Вправи для самостійної роботи

1. Вияснити, чи утворюють групу кожна з наступних множин при вказаній операції над елементами:

а) множина всіх раціональних чисел відносно операції додавання;
б) множина всіх раціональних чисел відносно операції множення;
в) множина всіх додатних раціональних чисел відносно операції множення;
г) множина степенів даного дійсного числа $a \neq 0$ з цілими показниками відносно операції множення;
д) множина дійсних чисел, якщо операція визначена так: $a*b = a^b$;
е) множина дійсних чисел, якщо операція визначена так: $a * b = a^2b^2$;
є) множина комплексних чисел з заданим аргументом φ відносно операції множення;
ж) множина всіх комплексних коренів з одиниці фіксованого степеня n відносно операції множення;
з) множина всіх комплексних коренів всіх натуральних степенів з одиниці відносно операції множення;
і) множина ненульових комплексних чисел з модулем, що не перевищує фіксоване число r, відносно операції множення;
й) множина всіх парних підстановок степеня n відносно операції множення;
к) множина всіх непарних підстановок степеня n відносно операції множення;
л) множина $\mathbb{R}^n$ всіх n-вимірних векторів над $\mathbb{R}$ відносно операції додавання;
м) множина всіх поворотів площини навколо фіксованої точки відносно операції послідовного виконання поворотів;
о) множина всіх паралельних переносів площини відносно операції послідовного виконання паралельних переносів.

2. Довести, що в довільній групі G існує єдиний одиничний елемент та єдиний обернений елемент для довільного елемента групи G.

3. Нехай G — довільна група з одиничним елементом e відносно операції множення. Довести, якщо $a^2 = e$ для довільного елемента $a \in G$, то група G — абелева.

4. Нехай G_1, G_2 — ізоморфні групи відповідно з одиницями e_1, e_2 і $f : G_1 \to G_2$ — бієктивне відображення таке, що $f(ab) = f(a)f(b)$ для довільних a, $b \in G_1$. Довести, що $f(e_1) = e_2$ і $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ для довільного елемента $a \in G_1$.

5. Довести, що група $\mathbb{Z}$ цілих чисел відносно операції додавання ізоморфна групі $n\mathbb{Z}$ цілих чисел кратних даному натуральному числу n відносно операції додавання.

6. Довести, що група дійсних чисел відносно операції додавання ізоморфна групі додатних дійсних чисел відносно операції множення.

7. Довести, що довільна група порядку n ізоморфна деякій підгрупі групи S_n підстановок степеня n.

8. Знайти всі групи (з точністю до ізоморфізму) порядку 3.

9. Знайти всі підгрупи групи $\mathbb{Z}^+$ цілих чисел відносно операції додавання.

10. Виписати всі підгрупи групи S_3 підстановок степеня 3.

11. Вияснити, чи утворюють кільце (поле) кожна із наступних множин при вказаних операціях над елементами:

а) множина всіх парних цілих чисел відносно операцій додавання і множення;

б) множина всіх цілих чисел кратних даному натуральному числу n відносно операцій додавання і множення;

в) множина всіх раціональних чисел відносно операцій додавання і множення;

г) множина всіх дійсних чисел відносно операцій додавання і множення;

д) множина всіх комплексних чисел відносно операцій додавання і множення;

е) множина дійсних чисел вигляду $a + b\sqrt{2}$, де a, b — цілі числа, відносно операцій додавання і множення;

є) множина дійсних чисел вигляду $a + b\sqrt[3]{3}$, де a, b — раціональні числа, відносно операцій додавання і множення;

ж) множина комплексних чисел вигляду $a+bi$, де a, b — цілі числа, відносно операцій додавання і множення;

з) множина комплексних чисел вигляду $a + bi$, де a, b — раціональні числа, відносно операцій додавання і множення;

і) множина всіх $n \times n$-матриць з цілими елементами відносно операцій додавання і множення матриць;

й) множина всіх $n \times n$-матриць з дійсними елементами відносно операцій додавання і множення матриць;

к) множина всіх матриць вигляду $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ з раціональними a, b відносно операцій додавання і множення матриць.

12. Нехай K — кільце з одиницею 1. Довести, що для довільних елементів a, $b \in K$ справедливі рівності: $-(-a) = a$, $(-1) \cdot a = -a$, $(-a)(-b) = ab$.

13. Довести, що в кільці $n \times n$-матриць з дійсними елементами вироджені матриці, і тільки вони, є дільниками нуля.

14. Довести, що множина всіх матриць вигляду $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, де a, b — дійсні числа, відносно операції додавання і множення матриць є полем, яке ізоморфне полю комплексних чисел.

15. Довести, що поле матриць вигляду $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ з раціональними a, b (вправа 11к)) ізоморфне полю чисел вигляду $a + b\sqrt{2}$ також з раціональними a і b.

§ 15. Кільце многочленів. Подільність у кільці многочленів

Нехай P — довільне поле, n — невід'ємне ціле число і a_0, a_1, … …, a_{n-1}, a_n — довільні елементи поля P, причому a_n — ненульовий елемент поля P. Алгебраїчний вираз (символ)

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

називається *многочленом n-го степеня від невідомої* (*змінної*) *x над полем P*. Елемент a_i називають *коефіцієнтом многочлена* (1) *при i-му степеню невідомої x* (тобто x^i) $(i = 0, 1, \ldots, n)$. При цьому коефіцієнт a_n називають *старшим коефіцієнтом* цього многочлена.

***Зауваження* 1.** Многочленами нульового степеня над полем P є ненульові елементи поля P і тільки вони.

Розглядають також *нульовий многочлен*, який співпадає з нульовим елементом поля P. Степінь нульового многочлена за означенням вважається невизначеною.

Многочлени

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \\ g(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \end{aligned} \tag{2}$$

відповідно степенів n і m від невідомої x над полем P називаються *рівними* (позначатимемо $f(x) = g(x)$), якщо $n = m$ і $a_k = b_k$ для довільного $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Сумою многочленів $f(x)$ і $g(x)$ (див. (2)) називається многочлен

$$f(x) + g(x) = c_s x^s + c_{s-1}x^{s-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

де s — максимальне серед чисел n і m, а $c_k = a_k + b_k$ $(k = 0, 1, \ldots, s)$, де в свою чергу $a_{n+1}, \ldots, a_s$ $(b_{m+1}, \ldots, b_s)$ всі рівні нулю, якщо $n < s$ $(m < s)$.

Добутком многочленів $f(x)$ і $g(x)$ (див. (2)) називається многочлен

$$f(x)g(x) = d_{n+m}x^{n+m} + d_{n+m-1}x^{n+m-1} + \cdots + d_1 x + d_0,$$

де $d_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1}b_1 + a_k b_0$ $(k = 0, 1, \ldots, n+m)$, вважаючи, що $a_i = 0$ при $i > n$ і $b_j = 0$ при $j > m$.

Зауваження 2. Коефіцієнт d_k добутку многочленів $f(x)$ і $g(x)$ дорівнює сумі всіляких добутків коефіцієнтів a_i і b_j відповідно многочленів $f(x)$ і $g(x)$ таких, що $i+j=k$, тобто $d_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i b_j$.

Зауваження 3. Означення суми і добутку многочленів природно переноситься на випадок, коли один із доданків або множників є нульовим многочленом.

Очевидно, вище наведені означення суми і добутку многочленів визначають бінарні алгебраїчні операції відповідно додавання і множення на множині $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P (включно з нульовим многочленом).

Теорема 1. *Множина $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення многочленів є комутативним кільцем з одиницею. Одиницею кільця $P[x]$ є одиниця поля P. Добуток довільних ненульових многочленів кільця $P[x]$ є ненульовим многочленом.*

Доведення. Оскільки додавання двох многочленів зводиться до додавання їх коефіцієнтів, які є елементами поля P, то зазначимо одразу, що комутативність та асоціативність операції додавання многочленів випливають із справедливості цих властивостей для операції додавання елементів поля P. Роль нульового елемента в множині $P[x]$ відіграє нульовий многочлен, а протилежним елементом до многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in P[x]$ є многочлен

$$f(x) = (-a_n)x^n + (-a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (-a_1)x + (-a_0) =$$
$$= -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0.$$

Отже, множина $P[x]$ є абелевою групою відносно операції додавання многочленів.

Доведемо, тепер, що операція множення многочленів аналогічно як і операція додавання задовольняє комутативній та асоціативній властивостям. Нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

— довільні многочлени від невідомої x над полем P відповідно степенів n і m, та нехай

$$f(x)g(x) = d_{n+m}x^{n+m} + d_{n+m-1}x^{n+m-1} + \cdots + d_1 x + d_0,$$
$$g(x)f(x) = d'_{n+m}x^{n+m} + d'_{n+m-1}x^{n+m-1} + \cdots + d'_1 x + d'_0.$$

За означенням добутку многочленів для довільного $k \in \{0,\ 1,\ \ldots$ $\ldots,\ n+m\}$ мають місце наступні рівності

$$d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{j+i=k} b_j a_i = d'_k.$$

Таким чином $f(x)g(x) = g(x)f(x)$, тобто операція множення многочленів є комутативною. Нехай, окрім розглянутих вище многочленів $f(x)$ і $g(x)$, дано ще один довільний многочлен над полем P

$$h(x) = c_t x^t + c_{t-1}x^{t-1} + \cdots + c_1 x + c_0, \qquad (c_t \neq 0).$$

Тоді для довільного $r \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n+m+t\}$ коефіцієнтом при x^r у добутку $[f(x)g(x)]h(x)$ є число

$$\sum_{k+l=r} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) c_l = \sum_{i+j+l=r} a_i b_j c_l,$$

а в добутку $f(x)[g(x)h(x)]$ — рівне йому число

$$\sum_{i+k=r} a_i \left(\sum_{j+l=k} b_j c_l \right) = \sum_{i+j+l=r} a_i b_j c_l.$$

Це означає, що $[f(x)g(x)]h(x) = f(x)[g(x)h(x)]$ для довільних многочленів $f(x)$, $g(x)$, $h(x) \in P[x]$, тобто, що операція множення многочленів задовольняє асоціативній властивості.

Нарешті, справедливість дистрибутивної властивості операції множення многочленів відносно операції додавання:

$$f(x)(g(x)+h(x)) = f(x)g(x) + f(x)h(x) \quad (f(x), g(x), h(x) \in P[x])$$

слідує із наступної рівності

$$\sum_{i+j=k} a_i(b_j + c_j) = \sum_{i+j=k} a_i b_j + \sum_{i+j=k} a_i c_j.$$

Отже, множина $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення многочленів є комутативним кільцем з одиницею. Одиницею кільця $P[x]$ є одиниця поля P.

Добуток довільних ненульових многочленів $f(x)$ і $g(x)$ кільця $P[x]$ є ненульовим многочленом, оскільки старший коефіцієнт добутку $f(x)g(x)$ дорівнює добутку старших коефіцієнтів a_n і b_m відповідно многочленів $f(x)$ і $g(x)$, що не дорівнюють нулю. Теорему доведено.

Теорема 2. *Многочлен $f(x)$ над полем P є оборотним елементом кільця $P[x]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ є многочленом нульового степеня.*

Доведення. Очевидно, якщо многочлен $f(x) \in P[x]$ є многочленом нульового степеня, то він є деяким ненульовим елементом a поля P, а тому до нього існує обернений елемент $a^{-1} \in P \subset P[x]$.

Навпаки, нехай многочлен $f(x)$ степеня n є оборотним елементом кільця $P[x]$, тоді до нього існує обернений многочлен $f^{-1}(x)$ із $P[x]$ деякого степеня m, такий що

$$f(x)f^{-1}(x) = 1.$$

З цієї рівності слідує, що з одного боку степінь добутку многочленів $f(x)f^{-1}(x)$ дорівнює $n + m$, а з іншого — нулю, тобто $n + m = 0$. Оскільки n і m — невід'ємні цілі числа, то остання рівність можлива лише у випадку, коли $n = m = 0$. Що й потрібно було довести.

Теорема 3 (про ділення з остачею)**.** *Нехай $g(x)$ — довільний ненульовий многочлен над полем P. Тоді для довільного многочлена $f(x) \in P[x]$ існує єдина пара многочленів $q(x)$, $r(x) \in P[x]$ таких, що*

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \tag{3}$$

причому степінь многочлена $r(x)$ менша за степінь многочлена $g(x)$ або $r(x) = 0$.

Многочлени $q(x)$ і $r(x)$ у рівності (3) називаються відповідно *часткою* і *остачею* при *діленні* многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$.

Доведення теореми. Нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

— довільні многочлени над полем P відповідно степенів n і m.

Якщо $n < m$, то покладемо $q(x) = 0$, а $r(x) = f(x)$. Тоді $f(x) = g(x)q(x)+r(x)$ і оскільки степінь многочлена $r(x)$ менша за степінь многочлена $g(x)$, то перше твердження теореми доведено.

Якщо ж $n \geq m$, то враховуючи, що $b_m \neq 0$, ми можемо розглянути многочлен (вірніше казати одночлен) $\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$. Покладемо

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m} \cdot g(x).$$

Очевидно, або $f_1(x) = 0$, або степінь многочлена $f_1(x)$ менша за n. Позначимо цей степінь символом n_1, а старший коефіцієнт многочлена $f_1(x)$ — символом $a^{(1)}_{n_1}$. Якщо $n_1 \geq m$, то повторюючи для $f_1(x)$ ті самі міркування, що й для $f(x)$, дістанемо

$$f_2(x) = f_1(x) - \frac{a^{(1)}_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m} \cdot g(x),$$

де або $f_2(x) = 0$, або $f_2(x)$ є многочленом степеня, меншого від n_1.

Позначимо через n_2 степінь, а через $a^{(2)}_{n_2}$ — старший коефіцієнт многочлена $f_2(x)$. Якщо $n_2 \geq m$, то, повторивши наведені вище міркування, дістанемо

$$f_3(x) = f_2(x) - \frac{a^{(2)}_{n_2}}{b_m}x^{n_2-m} \cdot g(x)$$

і т. д.

Оскільки степені многочленів $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... спадають, $n > n_1 > n_2 > \ldots$, то після скінченного числа кроків дістанемо многочлен

$$f_k(x) = f_{k-1}(x) - \frac{a^{(k-1)}_{n_{k-1}}}{b_m}x^{n_{k-1}-m} \cdot g(x),$$

який або дорівнює нулю, або має степінь n_k менший від m.

Додавши почастинно щойно записані рівності, дістанемо

$$f_k(x) = f(x) - \left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + \frac{a^{(1)}_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m} + \cdots + \frac{a^{(k-1)}_{n_{k-1}}}{b_m}x^{n_{k-1}-m}\right) g(x).$$

Звідси, поклавши

$$q(x) = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + \frac{a^{(1)}_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m} + \cdots + \frac{a^{(k-1)}_{n_{k-1}}}{b_m}x^{n_{k-1}-m}, \quad r(x) = f_k(x),$$

матимемо

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

де $r(x)$ або дорівнює нулю, або є многочленом степеня, меншого ніж степінь многочлена $g(x)$.

Доведемо, що в кільці $P[x]$ є лише одна пара многочленів $q(x)$ і $r(x)$, що задовольняють умови теореми. Припустимо протилежне, нехай $q_1(x)$ і $r_1(x)$ — деяка інша пара многочленів, для яких справджується рівність

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x), \tag{4}$$

причому $r_1(x)$ є або нульовим многочленом, або многочленом степеня, меншого ніж степінь $g(x)$. Прирівнявши праві частини рівностей (3) і (4), одержимо

$$g(x)q(x) + r(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x).$$

Звідси слідує, що

$$g(x)[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x). \tag{5}$$

Припустимо, що $r_1(x) - r(x) \neq 0$. Тоді $q(x) - q_1(x) \neq 0$, оскільки інакше з рівності (5) випливало б, що $r_1(x) - r(x) = 0$. У такому разі права частина $r_1(x) - r(x)$ рівності (5) була б многочленом степеня меншого ніж степінь $g(x)$, а ліва частина $g(x)[q(x) - q_1(x)]$ — многочленом степеня не меншого ніж степінь $g(x)$, чого не може бути. Припущення, що $r_1(x) - r(x) \neq 0$ приводить до суперечності і тому воно неправильне. Отже, $r_1(x) - r(x) = 0$. Тоді $g(x)[q(x) - q_1(x)] = 0$. Оскільки $g(x) \neq$, то за теоремою 1 справджується рівність $q(x) - q_1(x) = 0$. Тому $r_1(x) = r(x)$, $q_1(x) = q(x)$. Одержана суперечність доводить теорему.

Якщо остача при діленні многочлена $f(x)$ над полем P на ненульовий многочлен $g(x) \in P[x]$ дорівнює нулю, тоді кажуть що многочлен $f(x)$ *ділиться* на многочлен $g(x)$, а многочлен $g(x)$ називають *дільником* многочлена $f(x)$. Із теореми про ділення з остачею одразу випливає наступна теорема.

Теорема 4. *Многочлен $g(x)$ над полем P є дільником многочлена $f(x) \in P[x]$ тоді і тільки тоді, коли існує многочлен $h(x) \in P[x]$ такий, що $f(x) = g(x)h(x)$.*

Теорема 5. *Нехай P — довільне поле. Справедливі наступні твердження для многочленів над полем P:*

1) *якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$, тоді $f(x)$ ділиться на $h(x)$.*

2) *якщо многочлени* $f(x)$ *і* $g(x)$ *діляться на* $h(x)$, *тоді сума* $f(x)+g(x)$ *діляться на* $h(x)$.

3) *якщо* $f(x)$ *ділиться на* $g(x)$, *тоді добуток* $f(x)h(x)$ *ділиться на* $g(x)$ *для довільного многочлена* $h(x)$.

4) *Якщо кожний із многочленів* $f_1(x)$, $f_1(x)$, $\ldots$, $f_k(x)$ *ділиться на* $g(x)$, *тоді на* $g(x)$ *буде ділитися многочлен*

$$f_1(x)h_1(x)+f_2(x)h_2(x)+\cdots+f_k(x)h_k(x),$$

де $h_1(x)$, $h_2(x)$, $\ldots$, $h_k(x)$ *— довільні многочлени.*

5) *довільний многочлен* $f(x)$ *ділиться на будь-який многочлен нульового степеня.*

6) *якщо* $f(x)$ *ділиться на* $g(x)$, *тоді* $f(x)$ *ділиться на* $cg(x)$, *де* c *— довільний ненульовий елемент поля* P.

7) *многочлени* $f(x)$ *і* $g(x)$ *тоді і тільки діляться один на одного, коли* $g(x)=cf(x)$ *для деякого ненульового елемента* c *поля* P.

8) *Довільний дільник одного з двох многочленів* $f(x)$ *та* $cf(x)$ $(c\in P,\ c\neq 0)$ *є дільником і для іншого многочлена.*

Доведення. 1) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$. Тоді $f(x)=g(x)u(x)$, $g(x)=h(x)v(x)$ для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Звідси $f(x)=[h(x)v(x)]\,u(x)=h(x)[v(x)u(x)]$. Це означає, що многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $h(x)$.

2) Нехай многочлени $f(x)$ і $g(x)$ діляться на $h(x)$. Тоді $f(x)=$ $=h(x)u(x)$, $g(x)=h(x)v(x)$ для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Із цих рівностей одержуємо, що

$$f(x)+g(x)=h(x)u(x)+h(x)v(x)=h(x)[u(x)+v(x)].$$

3) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$. Тоді $f(x)=g(x)u(x)$ для деякого многочлена $u(x)$ із $P[x]$. Далі, для довільного многочлена $h(x)$ із $P[x]$ справедливі рівності $f(x)h(x)=[g(x)u(x)]h(x)=g(x)[u(x)h(x)]$. Це в свою чергу означає, що многочлен $f(x)h(x)$ ділиться на $g(x)$.

4) Доведення четвертого твердження залишаємо читачеві. Зазначимо тільки, що воно слідує із попередніх двох тверджень, а також, що при цьому слід використати метод математичної індукції.

5) нагадаємо, що будь-який многочлен нульового степеня є ненульовим, а отже і оборотним, елементом поля P. Тому доведення

п'ятого твердження одразу слідує із наступної рівності

$$f(x) = c[c^{-1}f(x)],$$

де (x) — довільний многочлен із $P[x]$, а c — довільний ненульовий елемент поля P.

6) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$. Тоді $f(x) = g(x)u(x)$ для деякого многочлена $u(x)$ із $P[x]$. Для довільного ненульового елемента c поля P справедлива рівність $f(x) = [cg(x)][c^{-1}u(x)]$.

7) Нехай $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $f(x)$. Тоді $f(x) = g(x)u(x)$, $g(x) = f(x)v(x)$ для деяких многочленів $u(x)$, $v(x)$ із $P[x]$. Із цих рівностей одержуємо, що

$$f(x) = [f(x)v(x)]u(x) = f(x)[v(x)u(x)].$$

Звідси $f(x)[v(x)u(x) - 1] = 0$. Оскільки $f(x) \neq 0$, то за теоремою 1 $v(x)u(x) - 1 = 0$, Це означає, що $v(x)$ є оборотним елементом кільця $P[x]$, тобто $v(x) = c$ — деякий ненульовий елемент поля P.

8) Доведення восьмого твердження одразу слідує із першого та сьомого тверджень.

Найбільший спільний дільник многочленів. *Спільним дільником* многочленів $f(x)$ і $g(x)$ над полем P називається многочлен $h(x) \in P[x]$, який є дільником для кожного із многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Якщо спільними дільниками многочленів $f(x)$ і $g(x)$ є тільки многочлени нульового степеня, тоді многочлени $f(x)$ і $g(x)$ називаються *взаємно простими.*

Найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$, $g(x) \in P[x]$ називається многочлен $d(x) \in P[x]$, який є їх спільним дільником і, разом з тим, сам ділиться на будь-який спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Позначатимемо найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$ символом $(f(x), g(x))$.

***Зауваження* 4.** З теореми 5 випливає, що найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$, якщо він існує, визначається цими многочленами неоднозначно.

Теорема 6. *Для довільних ненульових многочленів $f(x)$ і $g(x)$ над будь-яким полем P існує найбільший спільний дільник цих многочленів. Нехай $d(x) = (f(x), g(x))$ — деякий найбільший спільний дільник $f(x)$ і $g(x)$. Тоді многочленами множини $\{cd(x) \mid c \in P, c \neq 0\}$ вичерпуються всі найбільші спільні дільники многочленів $f(x)$ і $g(x)$.*

Доведення. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — довільні ненульові многочлени із кільця $P[x]$. Поділимо $f(x)$ на $g(x)$, дістанемо, за теоремою 3, частку $q_1(x)$ і остачу $r_1(x)$. Якщо остача $r_1(x)$ не дорівнює нулю, то поділимо далі многочлен $g(x)$ на $r_1(x)$. При цьому одержимо частку $q_2(x)$ і остачу $r_2(x)$. Знову, якщо $r_2(x) \neq 0$ поділимо $r_1(x)$ на $r_2(x)$, дістанемо частку $q_3(x)$ і остачу $r_3(x)$ і т. д. За теоремою 3 степені остач $r_1(x)$, $r_2(x)$, $r_3(x)$, … спадають. Тому через скінченне число ділень одержимо остачу $r_n(x)$, на яку попередня остача $r_{n-1}(x)$ поділиться без остачі, і на цьому процес послідовного ділення закінчиться.

Отже, в результаті послідовного ділення нами одержано наступні рівності:

$$\begin{aligned}
&f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x),\\
&g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x),\\
&r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&r_{n-3}(x) = r_{n-2}(x)q_{n-1}(x) + r_{n-1}(x),\\
&r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x)q_n(x) + r_n(x),\\
&r_{n-1}(x) = r_n(x)q_{n+1}(x).
\end{aligned} \tag{6}$$

Підкреслимо, що за теоремою про ділення з остачею многочлени $r_i(x)$ та $q_j(x)$ $(i = 1, \dots n;\ j = 1, \dots, n+1)$ є многочленами над полем P.

Із останньої рівності слідує, що $r_n(x)$ є дільником многочлена $r_{n-1}(x)$. Тоді за теоремою 5 многочлен $r_n(x)$ є також дільником правої частини передостанньої із рівностей (6), а отже, і многочлена $r_{n-2}(x)$. Далі, міркуючи аналогічним чином, піднімаючись вгору, ми одержимо, що $r_n(x)$ є дільником многочленів $r_{n-3}(x)$, …, $r_2(x)$, $r_1(x)$, $g(x)$, $f(x)$. Таким чином, $r_n(x)$ є спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

Покажемо, тепер, що $r_n(x)$ є найбільшим спільним дільником цих многочленів. Нехай $u(x)$ — довільний спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Тоді із першої з рівностей (6) слідує, що многочлен $r_1(x)$, як різниця многочленів $f(x)$ і $g(x)q_1(x)$, ділиться на $u(x)$. Використовуючи наступну рівність одержимо, що многочлен $r_2(x)$, як різниця многочленів $g(x)$ і $r_1(x)q_2(x)$, також ділиться на $u(x)$. Далі, міркуючи аналогічним чином, спускаючись вниз, ми одержимо, що многочлени $r_3(x)$, …, $r_{n-1}(x)$ і нарешті $r_n(x)$ діляться на $u(x)$. Таким чином, будь-який який спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$ є дільником

$r_n(x)$. Останнє означає, що многочлен $r_n(x)$ є найбільшим спільним дільником даних многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

Нарешті, нехай $d(x)$ — деякий спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Із шостого та восьмого тверджень теореми 5 слідує, що для довільного ненульового елемента c поля P добуток $cd(x)$ є найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$. З іншого боку, якщо $d_1(x)$ — довільний інший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$, то $d(x)$ ділиться на $d_1(x)$ і водночас $d(x)$ є дільником $d_1(x)$. За сьомим твердженням теореми 5 $d_1(x) = cd(x)$ для деякого ненульового елемента c поля P. Теорему доведено.

Викладений метод знаходження найбільшого спільного дільника многочленів $f(x)$ і $g(x)$ називають *алгоритмом Евкліда.*

Зауваження 5. Зважаючи на попередню теорему, можна завжди вважати, що старший коефіцієнт найбільшого спільного дільника многочленів дорівнює одиниці. А тому, наприклад, можна стверджувати, що два многочлени взаємно прості тоді і тільки тоді, коли їх найбільший спільний дільник дорівнює одиниці.

Теорема 7. *Якщо $d(x)$ є найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$ над полем P, тоді існують такі многочлени $u(x)$, $v(x) \in P[x]$, що*

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x). \tag{7}$$

Можна вважати при цьому, що у випадку, коли $f(x)$ і $g(x)$ є многочленами натурального степеня, то степінь $u(x)$ менша за степінь $g(x)$, а степінь $v(x)$ менша за степінь $f(x)$.

Доведення. Застосувавши до многочленів $f(x)$ і $g(x)$ алгоритм Евкліда, одержимо рівності (6). Запишемо ці рівності в такому вигляді:

$$\begin{aligned}
&r_1(x) = f(x) - g(x)q_1(x),\\
&r_2(x) = g(x) - r_1(x)q_2(x),\\
&r_3(x) = r_1(x) - r_2(x)q_3(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&r_{n-1}(x) = r_{n-3}(x) - r_{n-2}(x)q_{n-1}(x),\\
&r_n(x) = r_{n-2}(x) - r_{n-1}(x)q_n(x).
\end{aligned} \tag{8}$$

Узявши до уваги, що $r_n(x) = cd(x)$ (c — деякий ненульовий елемент поля P), з останньої із рівностей (8) одержимо

$$r_{n-2}(x) \cdot c^{-1} + r_{n-1}(x)\left[-c^{-1}q_n(x)\right] = d(x).$$

Позначивши c^{-1} символом $u_1(x)$, а $-c^{-1}q_n(x)$ — символом $v_1(x)$, запишемо останню рівність так:

$$r_{n-2}(x)u_1(x) + r_{n-1}(x)v_1(x) = d(x).$$

Підставивши в останню рівність замість $r_{n-1}(x)$ його вираз через $r_{n-2}(x)$ і $r_{n-3}(x)$, з передостанньої з рівностей (8) одержимо

$$r_{n-3}(x)u_2(x) + r_{n-2}(x)v_2(x) = d(x),$$

де

$$u_2(x) = v_1(x), \qquad v_2(x) = u_1(x) - v_1(x)q_{n-1}(x).$$

У знайдену рівність замість r_{n-2} підставимо вираз через $r_{n-3}(x)$ і $r_{n-4}(x)$ і т. д. Виконавши $n-1$ таких послідовних підставлянь, знайдемо потрібну рівність

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x).$$

З побудови многочленів $u(x)$ і $v(x)$ видно, що вони належать до кільця $P[x]$. Отже, многочлени $u(x)$ і $v(x)$, для яких справджується рівність (7), існують. Доведення другого твердження теореми залишаємо читачеві, вказавши тільки наступне: якщо степінь многочлена $u(x)$ більша або рівна за степінь многочлена $g(x)$, то поділимо $u(x)$ на $g(x)$; нехай $q(x)$ — частка, $r(x)$ — остача при діленні $u(x)$ на $g(x)$; тоді рівність (7) можна переписати у вигляді

$$f(x)r(x) + g(x)[v(x) + f(x)q(x)] = d(x);$$

слід лише показати, що степінь многочлена $v(x)+f(x)q(x)$ менша за степінь многочлена $f(x)$.

Теорема 8. *Многочлени $f(x)$, $g(x) \in P[x]$ тоді і тільки тоді взаємно прості, коли існують многочлени $u(x)$, $v(x) \in P[x]$ такі, що*

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1. \tag{9}$$

Доведення. Доведемо спочатку необхідність теореми. Припустимо, що многочлени $f(x)$ і $g(x)$ — взаємно прості, тобто найбільший спільний дільник їх дорівнює 1. Тоді за теоремою 7 існують такі многочлени $u(x)$ і $v(x)$ із $P[x]$, для яких справджується рівність (9).

Достатність теореми слідує із наступних міркувань. Припустимо, що в кільці $P[x]$ існують многочлени $u(x)$ і $v(x)$, для яких справджується рівність (9), і нехай $h(x)$ — довільний спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Тоді за теоремою 5 многочлен $h(x)$ є дільником лівої частини рівності (9), а отже, і правої. Тобто $1 = h(x)w(x)$, для деякого многочлена $w(x)$ із $P[x]$. Останнє означає, що $h(x)$ є оборотним елементом кільця $P[x]$, а тому є многочленом нульового степеня. Таким чином, довільний спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$ є многочленом нульового степеня. Це означає, що ці многочлени — взаємно прості. Теорему доведено.

Теорема 9. *Якщо многочлен $f(x)$ взаємно простий з кожним із многочленів $g(x)$ і $h(x)$, тоді він взаємно простий і з їх добутком $g(x)h(x)$.*

Доведення. За попередньою теоремою, в кільці $P[x]$ є такі многочлени $u(x)$ і $v(x)$, що $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$. Помноживши цю рівність на $h(x)$, одержимо

$$f(x)[u(x)h(x)] + [g(x)h(x)]v(x) = h(x).$$

Звідси, всякий спільний дільник многочленів $f(x)$ і добутку $g(x)h(x)$ є також дільником і для многочлена $h(x)$. Оскільки за умовою теореми многочлени $f(x)$ і $h(x)$ — взаємно прості, тобто не мають спільних дільників натурального (тобто ненульового) степеня, то многочлени $f(x)$ і $g(x)h(x)$ також не мають спільних дільників натурального степеня. Теорему доведено.

Теорема 10. *Якщо добуток многочленів $f(x)$ і $g(x)$ ділиться на $h(x)$, але $f(x)$ і $h(x)$ — взаємно прості, тоді $g(x)$ ділиться на $h(x)$.*

Доведення. Оскільки многочлени $f(x)$ і $h(x)$ — взаємно прості, то в кільці $P[x]$ існують такі многочлени $u(x)$ і $v(x)$, що $f(x)u(x) + h(x)v(x) = 1$. Помноживши цю рівність на $g(x)$, одержимо

$$[f(x)g(x)]u(x) + h(x)[g(x)v(x)] = g(x).$$

Ліва частина цієї рівності ділиться на $h(x)$, а тому і права частина — многочлен $g(x)$ — ділиться на $h(x)$.

Теорема 11. *Якщо многочлен $f(x)$ ділиться на кожен із многочленів $g(x)$ і $h(x)$, які між собою взаємно прості, тоді $f(x)$ ділиться на добуток $g(x)h(x)$.*

Доведення. Оскільки $f(x)$ ділиться на $g(x)$, то $f(x) = g(x)u(x)$, для деякого $u(x) \in P[x]$. За умовою $f(x)$ ділиться на $h(x)$, а тому добуток $g(x)u(x)$ ділиться на $h(x)$. Проте оскільки многочлени $g(x)$ і $h(x)$ — взаємно прості, то за теоремою 10 многочлен $u(x)$ ділиться на $h(x)$, тобто $u(x) = h(x)v(x)$ для деякого $v(x) \in P[x]$. Звідси $f(x) = [g(x)h(x)]v(x)$ і, отже, $f(x)$ ділиться на добуток $g(x)h(x)$.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Знайти добуток многочленів $(x^3+x^2-x-1)(x^2-2x-1)$ над полем дійсних чисел.

Розв'язання. Довільний многочлен $a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$ представляється у вигляді суми $n+1$ многочленів (їх ще називають *одночленами*) $a_nx^n, \dots, a_1x, a_0$. Зважаючи на це і використовуючи асоціативну, комутативну, дистрибутивну властивості операцій додавання і множення многочленів, одержуємо

$$(x^3 + x^2 - x - 1)(x^2 - 2x - 1) =$$
$$= x^5 - 2x^4 - x^3 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x^3 + 2x^2 + x - x^2 + 2x + 1 =$$
$$= x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x + 1.$$

Задача 2. Поділити многочлен $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$ на многочлен $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$ над полем раціональних чисел.

Розв'язання. Для того, щоб представити многочлен $f(x)$ у вигляді (3), підберемо одночлен $a_{k_1}x^{k_1}$ таким чином, щоб степінь многочлена $f_1(x) = f(x) - a_{k_1}x^{k_1}g(x)$ була меншою за степінь $g(x)$. Далі виберемо одночлен $a_{k_2}x^{k_2}$ так, щоб степінь $f_2(x) = f_1(x) - a_{k_2}x^{k_2}g(x)$ була меншою за степінь $g(x)$ і т. д. На деякому кроці степінь многочлена $f_n(x)$ буде меншою за степінь $g(x)$ або $f_n(x) = 0$. Тоді рівність

$$f(x) = (a_{k_1}x^{k_1} + a_{k_2}x^{k_2} + \dots + a_{k_{n-1}}x^{k_{n-1}})g(x) + f_n(x)$$

і буде необхідним для нас розкладом многочлена $f(x)$ у вигляді (3).

Для даних в умові многочленів вище вказаний процес продемонструємо на діаграмі:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x^2 - \ \ x - 1 & 3x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2}
x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x \phantom{{}-1} & \frac{1}{3}x - \frac{7}{9} \\ \cline{1-1}
-\frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 & \\
-\frac{7}{3}x^2 + \frac{14}{9}x - \frac{7}{9} & \\ \cline{1-1}
-\frac{26}{9}x - \frac{2}{9} &
\end{array}$$

Отже, часткою і остачею при ділення заданих в умові многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ будуть відповідно многочлени $\frac{1}{3}x - \frac{7}{9}$ та $-\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$.

Задача 3. При якій умові многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$ $(p, q, m \in \mathbb{R})$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$, тобто

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)h(x) \tag{10}$$

для деякого многочлена $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Із означення добутку многочленів випливає, що $h(x)$ є многочленом першого степеня і тому має вигляд $h(x) = ax + b$ $(a,\ b \in \mathbb{R};\ a \neq 0)$. Тоді з рівності (10) одержимо рівність

$$x^3 + px + q = ax^3 + (am + b)x^2 + (bm - a)x - b.$$

Звідси $a = 1$, $am + b = 0$, $bm - a = p$, $-b = q$. Із цих рівностей в свою чергу випливає, що необхідною умовою подільності многочлена $x^3 + px + q$ на многочлен $x^2 + mx + 1$ є система рівностей: $m = q$, $p = -q^2 - 1$. Неважко переконатися, що з цих рівностей слідує подільність вказаних в умові многочленів.

Задача 4. Знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + 7x^2 - 12x + 10$ та $g(x) = 3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2$.

Розв'язання. Найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$ будемо шукати за допомогою алгоритму Евкліда. Оскільки найбільший спільний дільник многочленів визначається з точністю до множника, що є ненульовим числом, то для того, щоб запобігти виникнення дробових коефіцієнтів (для зручності), дозволяється множити ділене та дільник на будь-яке відмінне від нуля число. Причому це дозволяється робити не тільки на початку якого-небудь з послідовних ділень, але і в процесі самого цього ділення.

<u>1-й крок</u>. Ділимо многочлен $3f(x)$ на $g(x)$

$$3x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 21x^2 - 36x + 30 =$$

$$= x(3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2) + (-2x^3 + 19x^2 - 34x + 30).$$

Одержимо остачу $r_1(x) = -2x^3 + 19x^2 - 34x + 30$.

<u>2-й крок</u>. Ділимо многочлен $2g(x)$ на $-r_1(x)$. Зробимо це, користуючись діаграмою

$$
\begin{array}{rl}
 & \begin{array}{r|l} 6x^4 - 12x^3 + 10x^2 + 4x - 4 & 2x^3 - 19x^2 + 34x - 30 \\ \cline{2-2} 6x^4 - 57x^3 + 102x^2 - 90x & 3x + 45 \end{array} \\ \cline{2-2}
\text{(множимо на 2)} & 45x^3 - 92x^2 + 94x - 4 \\ \cline{2-2}
 & 90x^3 - 184x^2 + 188x - 8 \\
 & 90x^3 - 855x^2 + 1530x - 1350 \\ \cline{2-2}
\text{(множимо на } \frac{1}{671}\text{)} & 671x^2 - 1342x + 1342 \\ \cline{2-2}
 & x^2 - 2x + 2
\end{array}
$$

Зауваження 6. Многочлен $r_2(x) = x^2 - 2x + 2$ не є остачею при діленні $2g(x)$ на $-r_1(x)$, але $(f(x), g(x)) = (-r_1(x), r_2(x))$.

<ins>3-й крок</ins>. Ділимо многочлен $-r_1(x)$ на $r_2(x)$

$$2x^3 - 19x^2 + 34x - 30 = (2x - 15)(x^2 - 2x + 2).$$

Оскільки остача при останньому діленні дорівнює нулю, то найбільшим спільним дільником заданих в умові многочленів $f(x)$ і $g(x)$ є многочлен $r_2(x) = x^2 - 2x + 2$.

Вправи для самостійної роботи

1. Обчислити добутки многочленів над полем комплексних чисел:

а) $(2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 1)$;

б) $(3x^5 + 2x^2 - 1)(2x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4)$;

в) $((1 - i)x^3 + (2 + 3i)x^2 - ix + 1 + i)((1 + i)x - 3)$;

г) $(ix^3 - 4)(-x^4 + (3 - i)x^2 + 7 - i)$.

2. Поділити многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$ над полем комплексних чисел, якщо:

а) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \quad g(x) = x^2 - 3x + 1$;

б) $f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 1, \quad g(x) = 2x^3 - 3x - 2$;

в) $f(x) = (-1 + 5i)x^3 - (6 + 11i)x^2 + (3 + 5i)x + 2 - 5i$,
$g(x) = (1 + i)x - 3$;

г) $f(x) = (-1 + 3i)x^4 + 9x^3 + (-9 + 3i)x^2 + (7 + 6i)x - (2 + 2i)$,
$g(x) = ix^2 + (2 - i)x - 2 + 3i$.

3. При якій умові многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $g(x)$ над полем дійсних чисел, якщо:

а) $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1, \quad g(x) = (x-1)^2 \quad (a, b \in \mathbb{R})$;

б) $f(x) = x^4 + px^2 + q, \quad g(x) = x^2 + mx + 1 \quad (p, q, m \in \mathbb{R})$?

4. Визначити найбільший спільний дільник многочленів:

а) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ і $x^3 + x^2 - x - 1$;

б) $x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$ і $3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$;

в) $x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$ і $3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$;

г) $x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ і $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$;

д) $x^4 - 10x^2 + 1$ і $x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1$;

е) $x^4 - 4x^3 + 1$ і $x^3 - 3x^2 + 1$.

5. Користуючись алгоритмом Евкліда, підібрати многочлени $u(x)$ і $v(x)$ так, щоб $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$, де $d(x) = (f(x), g(x))$, якщо:

а) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, \quad g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;

б) $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1, \quad g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$;

в) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2, \quad g(x) = x^2 - x + 1$;

г) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1, \quad g(x) = x^2 - x - 1$.

6. Способом невизначених коефіцієнтів підібрати многочлени $u(x)$ і $v(x)$ так, щоб $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$, якщо:

а) $f(x) = x^3, \quad g(x) = (x-1)^2$;

б) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1, \quad g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

7. Визначити многочлен найменшого степеня, який при діленні на $(x-1)^2$ дає остачу $2x$, а при діленні на $(x-2)^3$ — остачу $3x$.

8. Нехай $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$, де $d(x)$ — найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Чому дорівнює найбільший спільний дільник многочленів $u(x)$ і $v(x)$?

§ 16. Корені многочленів

Нехай P — деяке числове поле, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ — деякий многочлен[2] степеня n над полем P і c — деякий елемент поля P. Елемент поля P, що є результатом обчислення алгебраїчного виразу

$$a_0c^n + a_1c^{n-1} + \cdots + a_{n-1}c + a_n$$

називається *значенням многочлена $f(x)$ при $x = c$*. Значення многочлена $f(x)$ при $x = c$ позначається через $f(c)$.

Якщо $f(x)$ і $g(x)$ — рівні многочлени над полем P, то для довільного елемента c поля P справджується рівність $f(c) = g(c)$.

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — довільні многочлени над полем P і $u(x) = f(x)+g(x)$, $v(x) = f(x)g(x)$ — відповідно сума і добуток цих многочленів. Тоді з означень суми і добутку многочленів та властивостей операцій у полі P випливає, що $u(c) = f(c) + g(c)$ і $v(c) = f(c)g(c)$ для будь-якого елемента c поля P.

Елемент c поля P називається *коренем* многочлена $f(x) \in P[x]$, якщо $f(c) = 0$.

***Зауваження* 1.** Існують многочлени з дійсними коефіцієнтами, які над полем дійсних чисел не мають коренів, а над полем комплексних чисел мають. Наприклад, таким многочленом є $x^2 + 1$ (для довільного дійсного числа a має місце нерівність $a^2 + 1 \neq 0$; з іншого боку $i^2 + 1 = 0$).

Многочлени першого степеня ми далі називатимемо *лінійними многочленами.*

Теорема 1 (Безу). *Остача при діленні многочлена $f(x) \in P[x]$ на лінійний многочлен $x - c$ ($c \in P$) дорівнює значенню $f(c)$ многочлена $f(x)$ при $x = c$.*

Доведення. Нехай $f(x)$ — довільний многочлен із $P[x]$, а c — довільний елемент поля P. Поділимо многочлен $f(x)$ на $x - c$:

$$f(x) = (x - c)q(x) + r(x). \tag{1}$$

Оскільки остача $r(x)$ або дорівнює кулю, або є многочленом нульового степеня, то можна вважати, що $r(x) = r$ є елементом поля P. Із рівності многочленів, що стоять у лівій і правій частинах рівності (1), випливає рівність їх значень при $x = c$. Отже, $f(c) = (c - c) \cdot q(c) + r = r$. Теорему доведено.

[2]Звертаємо увагу читача, що у цьому параграфі, на відміну від попереднього, індексацію коефіцієнтів многочленів проведемо у зворотному порядку.

Наслідок 1. *Елемент c поля P тоді і тільки тоді є коренем многочлена $f(x) \in P[x]$, коли $f(x)$ ділиться на $x - c$.*

Доведення. Справді, якщо $c \in P$ є коренем многочлена $f(x)$, тобто $f(c) = 0$, то в рівності (1) остача r дорівнює 0, оскільки за теоремою Безу $r = f(c)$, і, отже, двочлен $x - c$ є дільником многочлена $f(x)$.

Навпаки, якщо $x-c$ є дільником многочлена $f(x)$, то в рівності (1) остача r дорівнює 0. Тому за теоремою Безу, $f(c) = 0$, тобто c є коренем многочлена $f(x)$.

Якщо деякий лінійний многочлен $ax + b$ є дільником многочлена $f(x)$, то за властивістю подільності многочленів многочлен $f(x)$ ділиться і на лінійний многочлен $a^{-1}(ax+b) = x-(-a^{-1}b) = x-\left(-\frac{b}{a}\right)$. Тому $-\frac{b}{a}$ є коренем многочлена $f(x)$.

Таким чином, відшукання коренів многочлена $f(x)$ рівносильне відшуканню його лінійних дільників. У зв'язку з цим при розв'язуванні різних задач пов'язаних з поняттям кореня многочлена, часто доводиться виконувати ділення многочленів на лінійні многочлени. Розглянемо простий метод ділення з остачею многочлена $f(x)$ на лінійний двочлен $x - c$. Нехай $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ — деякий многочлен над полем P і нехай

$$f(x) = (x - c)q(x) + r, \tag{2}$$

де $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}$ — частка, а r — остача при діленні $f(x)$ на лінійний многочлен $x - c \in P[x]$. Тоді із рівності (2) одержимо, що

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1 - cb_0,\ \dots, a_{n-1} = b_{n-1} - cb_{n-2},\ a_n = r - cb_{n-1}.$$

Звідси

$$b_0 = a_0, \quad b_k = cb_{k-1} + a_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad r = cb_{n-1} + a_n,$$

тобто коефіцієнт b_k частки $q(x)$ одержується в результаті множення попереднього коефіцієнта b_{k-1} на c і додавання відповідного коефіцієнта a_k. Аналогічно обчислюється остача r, яка рівна $f(c)$ (див. теорему 1). Результати обчислень записують у вигляді такої схеми:

a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_k	$\dots$	a_{n-1}	a_n
$b_0 =$ $= a_0$	$b_1 =$ $= cb_0+$ $+a_1$	$b_2 =$ $= cb_1+$ $+a_2$	$\dots$	$b_k =$ $= cb_{k-1}+$ $+a_k$	$\dots$	$b_{n-1} =$ $= cb_{n-2}+$ $+a_{n-1}$	$r =$ $= cb_{n-1}+$ $+a_n$

Цю схему називають *схемою Горенера*, а викладений метод знаходження частки і остачі при діленні многочлена на лінійний многочлен $x - c$ — *методом Горнера.*

Корінь c многочлена $f(x)$ називається *k-кратним коренем* цього многочлена, якщо $f(x)$ ділиться на $(x-c)^k$, але не ділиться на $(x-c)^{k+1}$ для деякого натурального k. Число k при цьому називають *кратністю* кореня c многочлена $f(x)$. Якщо $k = 1$, то кажуть, що корінь c — *простий.* Очевидно, елемент c поля P є k-кратним коренем многочлена $f(x) \in P[x]$ тоді і тільки тоді, коли

$$f(x) = (x-c)^k g(x), \tag{3}$$

де $g(x)$ — многочлен над полем P, для якого c не є коренем.

Умовимося далі, підраховуючи число коренів многочлена $f(x)$ у полі P, кожен k-кратний корінь c лічити k разів.

Теорема 2. *Многочлен $f(x) \in P[x]$ степеня n може мати в полі P не більш як n коренів.*

Доведення. Для многочленів нульового степеня, тобто для ненульових елементів поля P теорема справедлива, оскільки будь-який із них не має жодного кореня. Нехай $f(x)$ — довільний многочлен із кільця $P[x]$ натурального степеня n.

Припустимо, що в полі P многочлен $f(x)$ має m різних коренів: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ кратностей відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Тоді, згідно з (3), можна записати

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} g_1(x), \tag{4}$$

де $g_1(x)$ не ділиться на $x - \alpha_1$. Многочлени $x - \alpha_1$ і $x - \alpha_2$ — взаємно прості, а тому взаємно простими є многочлени $(x-\alpha_1)^{k_1}$ і $(x-\alpha_2)^{k_2}$. Оскільки $f(x)$ ділиться на $(x-\alpha_2)^{k_2}$ (але не на $(x-\alpha_2)^{k_2+1}$), то звідси і із (4) слідує, що $g_1(x)$ ділиться на $(x-\alpha_2)^{k_2}$ (але не на $(x-\alpha_2)^{k_2+1}$), тобто

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} g_2(x),$$

де $g_1(x)$ — многочлен, який не має своїми кореня α_1 та α_2.

Продовжуючи так міркувати (тобто застосовуючи метод математичної індукції), одержимо

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} \cdots (x-\alpha_m)^{k_m} g_m(x), \tag{5}$$

де $g_m(x)$ — многочлен деякого степеня s, для якого жодний з елементів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ не є коренем.

З рівності (5) випливає, що

$$n = k_1 + k_2 + \cdots + k_m + s,$$

тобто

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m \leq n.$$

Теорему доведено.

Наслідок 1. *Якщо многочлени $f(x)$, $g(x) \in \mathbb{C}[x]$, степені яких не перевищують натуральне число n, мають рівні значення більш ніж при n різних значеннях невідомої, тоді $f(x) = g(x)$.*

Доведення. Припустимо, що $f(x) \neq g(x)$. Тоді $h(x) = f(x) - g(x)$ — многочлен, відмінний від 0, степінь якого не перевищує n і за умовою теореми має у полі P більш ніж n коренів. Це суперечить теоремі 2. Отже, наше припущення, що $f(x) \neq g(x)$, неправильне.

Нехай $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ — деякий многочлен над полем P. Многочлен

$$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}$$

називається *похідною* (або *першою похідною*) многочлена $f(x)$. Похідна від многочлена нульового степеня і від нульового многочлена вважається рівною нульовому многочлену. Індукцією визначається *k-ва похідна* $f^{(k)}(x)$ многочлена $f(x)$, тобто

$$f^{(k)}(x) = \left[f^{(k-1)}\right]'(x) \qquad (k = 2,\ 3,\ \ldots).$$

Очевидно, що

$$f^{(n)}(x) = n!a_0$$

і тому $f^{(n+1)}(x) = 0$, тобто $(n+1)$-ша похідна від будь-якого многочлена степеня n дорівнює нулю.

Теорема 3. *Для довільних многочленів $f(x)$ і $g(x)$ над полем P*

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x), \tag{6}$$

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \tag{7}$$

Доведення теореми залишаємо читачеві.

Формули (6) і (7) не складно узагальнити на довільне число відповідно доданків та множників, зокрема для довільного натурального k справедлива рівність

$$\left[f^k(x)\right]' = kf^{k-1}(x)f'(x). \tag{8}$$

Теорема 4. *Нехай елемент c поля P є k-кратним коренем многочлена $f(x) \in P[x]$ $(k \in \mathbb{N})$. Для довільного натурального числа s меншого k елемент c є $(k-s)$-кратним коренем s-ї похідної многочлена $f(x)$. Елемент c не є коренем k-ї похідної многочлена $f(x)$.*

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Тоді

$$f(x) = (x-c)^k g(x),$$

де $g(x)$ — многочлен, для якого c не є коренем. Обчислимо першу похідну многочлена $f(x)$, використовуючи при цьому формули (6)–(8):

$$f'(x) = k(x-c)^{k-1}g(x) + (x-c)^k g'(x) =$$
$$= (x-c)^{k-1}\left[kg(x) + (x-c)g'(x)\right].$$

Оскільки $g(x)$ не ділиться на $x-c$, то за властивостями подільності многочлен $g_1(x) = kg(x) + (x-c)g'(x)$ також не ділиться на $x-c$. Це означає, що многочлен $f'(x)$ ділиться на $(x-c)^{k-1}$ і не ділиться на $(x-c)^k$, тобто, що якщо $k > 1$, то c є $(k-1)$-кратним коренем многочлена $f'(x)$, якщо ж $k = 1$, то c не є коренем многочлена $f'(x)$.

Якщо $2 \leq k$, тоді обчислимо другу похідну многочлена $f(x)$:

$$f''(x) = \left[f'\right]'(x) = \left[(x-c)^{k-1}g_1(x)\right]' =$$
$$= (x-c)^{k-2}\left[(k-1)g_1(x) + (x-c)g_1'(x)\right] = (x-c)^{k-2}g_2(x).$$

Многочлен $g_2(x)$ не ділиться на $x-c$, а тому із попередньої рівності слідує, що якщо $k > 2$, то c є $(k-2)$-кратним коренем многочлена $f''(x)$, якщо ж $k = 2$, то c не є коренем многочлена $f''(x)$.

Якщо, тепер, s довільне натуральне число, менше ніж k, тоді міркуючи аналогічно методом математичної індукції можна показати, що c є $(k-s)$-кратним коренем многочлена $f^{(k-s)}(x)$ і не є коренем многочлена $f^{(k)}(x)$. Теорему доведено.

Із попередньої теореми одразу слідує наступне твердження.

Наслідок 1. *Елемент c поля P є k-кратним коренем многочлена $f(x) \in P[x]$ тоді і тільки тоді, коли*

$$f(c) = f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(k-1)}(c), \quad f^{(k)}(c) \neq 0.$$

Теорема 5 (основна теорема алгебри)**.** *Будь-який многочлен натурального степеня над полем комплексних чисел має хоча б один корінь.*

Наслідок 1. *Будь-який многочлен $f(x)$ натурального степеня n над полем комплексних чисел має n коренів, якщо кожний із коренів рахувати стільки разів, яка його кратність.*

Доведення. Нехай $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ — довільний многочлен над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ натурального степеня n. Тоді за основною теоремою алгебри цей многочлен в полі $\mathbb{C}$ має корінь ξ_1. За наслідком теореми Безу многочлен $f(x)$ ділиться на $x - \xi_1$. Нехай k_1 — кратність кореня ξ_1 многочлена $f(x)$. Тоді

$$f(x) = (x - \xi_1)^{k_1} g_1(x),$$

де $g_1(x)$ — многочлен, для якого ξ_1 не є коренем. Якщо $g_1(x)$ — многочлен натурального степеня, тобто $n - k_1$ є натуральним числом, то за основною теоремою алгебри він має корінь ξ_2 в полі $\mathbb{C}$. Нехай k_2 — кратність кореня ξ_2 многочлена $g_1(x)$. Тоді

$$g_2(x) = (x - \xi_2)^{k_2} g_2(x),$$

де $g_2(x)$ — многочлен, для якого ξ_1, ξ_2 не є коренями. Тоді

$$f(x) = (x - \xi_1)^{k_1}(x - \xi_2)^{k_2} g_2(x). \tag{9}$$

Оскільки $\xi_1 \neq \xi_2$ і $g_2(x)$ не ділиться на $x - \xi_2$, то добуток $(x - \xi_1)^{k_1} \times \times g_2(x)$ не ділиться на $x - \xi_2$. Звідси і рівності (9) випливає, що ξ_2 є також k_2-кратним коренем многочлена $f(x)$.

Знову, якщо $g_2(x)$ — многочлен натурального степеня, тобто

$$n - k_1 - k_2 \in \mathbb{N},$$

то за основною теоремою алгебри він має корінь ξ_3 в полі $\mathbb{C}$ і нехай k_3 — кратність цього кореня. Тоді

$$f(x) = (x - \xi_1)^{k_1}(x - \xi_2)^{k_2}(x - \xi_3)^{k_3} g_3(x),$$

де $g_3(x)$ — многочлен, для якого ξ_1, ξ_2, ξ_3 не є коренями і його степінь дорівнює

$$n - k_1 - k_2 - k_3$$

і т. д. Оскільки n — фіксоване натуральне число, то цей процес на деякому s-му кроці зупиниться. Це означає, що

$$f(x) = (x - \xi_1)^{k_1}(x - \xi_2)^{k_2} \cdots (x - \xi_s)^{k_s} g_s(x), \tag{10}$$

де $g_s(x)$ є многочленом нульового степеня, тобто деяким ненульовим елементом поля P. Порівнюючи старші коефіцієнти а також степені многочленів, що знаходять у лівій і правій частинах рівності (10), одержимо, що

$$g_s(x) = a_0, \qquad n = k_1 + k_2 + \cdots + k_s.$$

Таким чином, комплексними числами ξ_1, ξ_2, …, ξ_s — вичерпуються всі попарно різні корені многочлена $f(x)$. Якщо кожен із цих коренів лічити відповідно стільки разів яка його кратність, то одержимо, що число коренів многочлена $f(x)$ дорівнює n.

Безпосередньо із доведення попереднього наслідку випливає наступне твердження.

Наслідок 2. *Будь-який многочлен $f(x)$ натурального степеня n над полем комплексних чисел представляється у вигляді добутку n лінійних множників*

$$f(x) = a_0(x - \xi_1)(x - \xi_2)\cdots(x - \xi_n), \quad (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C})$$

де a_0 — старший коефіцієнт многочлена $f(x)$. Цей розклад є однозначним з точністю до порядку слідування множників.

Нехай $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ — довільний многочлен натурального степеня n над полем комплексних чисел (підкреслимо, що старший коефіцієнт його дорівнює 1) і нехай ξ_1, ξ_2, …, ξ_n — всі його корені (кожен кратний корінь тут береться відповідне число разів). Тоді $f(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2)\cdots(x - \xi_n)$, тобто

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = (x - \xi_1)(x - \xi_2)\cdots(x - \xi_n).$$

Перемноживши множники правої частини цієї рівності і звівши подібні члени, одержимо

$$\begin{aligned}
&a_1 = -(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n),\\
&a_2 = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \cdots + \xi_1\xi_n + \xi_2\xi_3 + \cdots + \xi_{n-1}\xi_n,\\
&a_3 = -(\xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_2\xi_4 + \cdots + \xi_{n-2}\xi_{n-1}\xi_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n-1} = (-1)^{n-1}(\xi_1\xi_2\cdots\xi_{n-1} + \xi_1\xi_2\cdots\xi_{n-2}\xi_n + \cdots + \xi_2\xi_3\cdots\xi_n),\\
&a_n = (-1)^n\xi_1\xi_2\cdots\xi_{n-1}\xi_n.
\end{aligned}$$

Ці співвідношення називають *формулами Вієта.*

Многочлени з дійсними коефіцієнтами. З основної теореми алгебри випливають деякі наслідки, що стосуються коренів многочленів з дійсними коефіцієнтами.

Теорема 6. *Нехай $f(x)$ — многочлен з дійсними коефіцієнтами. Якщо комплексне число α є коренем многочлена $f(x)$, тоді комплексно спряжене до нього число $\bar{\alpha}$ є також коренем цього многочлена, причому корені α і $\bar{\alpha}$ мають однакову кратність.*

Доведення. Нехай $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ — довільний многочлен з дійсними коефіцієнтами. Очевидно, на многочлен $f(x)$ можна дивитися, як на многочлен над полем комплексних чисел. Нехай α — деякий корінь многочлена $f(x)$. Обчислимо $f(\bar{\alpha})$. За властивістю спряжених комплексних чисел маємо

$$\begin{gathered}
f(\bar{\alpha}) = a_0(\bar{\alpha})^n + a_1(\bar{\alpha})^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\bar{\alpha} + a_n = \\
= \bar{a}_0(\bar{\alpha})^n + \bar{a}_1(\bar{\alpha})^{n-1} + \cdots + \bar{a}_{n-1}\bar{\alpha} + \bar{a}_n = \\
= \bar{a}_0\overline{\alpha^n} + \bar{a}_1\overline{\alpha^{n-1}} + \cdots + \bar{a}_{n-1}\bar{\alpha} + \bar{a}_n = \\
= \overline{a_0\alpha^n} + \overline{a_1\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_{n-1}\alpha} + \bar{a}_n = \\
= \overline{a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n} = \overline{f(\alpha)} = \bar{0} = 0.
\end{gathered}$$

Отже, $\bar{\alpha}$ є коренем многочлена $f(x)$.

Нехай α є коренем многочлена $f(x)$ кратності k. Тому

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \ldots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

Оскільки всі похідні многочлена $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами є також многочленами з дійсними коефіцієнтами, то за вище доведеним

$$f(\bar{\alpha}) = f'(\bar{\alpha}) = f''(\bar{\alpha}) = \ldots = f^{(k-1)}(\bar{\alpha}) = 0.$$

Крім того, $f^{(k)}(\bar{\alpha}) \neq 0$, бо інакше $f^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\bar{\bar{\alpha}}) = \overline{f^{(k)}(\bar{\alpha})} = 0$, чого не може бути. Отже,

$$f(\bar{\alpha}) = f'(\bar{\alpha}) = f''(\bar{\alpha}) = \ldots = f^{(k-1)}(\bar{\alpha}) = 0, \quad f^{(k)}(\bar{\alpha}) \neq 0.$$

Це означає, що число $\bar{\alpha}$ є коренем многочлена $f(x)$ кратності k. Теорему доведено.

Нехай α — будь-яке комплексне число з відмінною від нуля уявною частиною (тобто $\alpha \notin \mathbb{R}$) і $\bar{\alpha}$ — спряжене з ним число. Як відомо, числа $\alpha + \bar{\alpha}$ і $\alpha\bar{\alpha}$ — дійсні. Отже, многочлен

$$\varphi_\alpha(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha} \tag{11}$$

є многочленом з дійсними коефіцієнтами, коренями якого є числа α і $\bar{\alpha}$.

Теорема 7. *Будь-який многочлен над полем дійсних чисел натурального степеня n однозначно (з точністю до порядку слідування множників) представляється у вигляді добутку свого старшого коефіцієнта, деякого числа m лінійних многочленів вигляду $x - \alpha$, що відповідають дійсним кореням $f(x)$ та $\frac{n-m}{2}$ многочленів другого степеня вигляду (11), що відповідають парам спряжених комплексних коренів.*

Доведення. Нехай $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ — довільно вибраний многочлен з дійсними коефіцієнтами і нехай α_1, α_2, …, α_n — корені цього многочлена. Тоді, як доведено вище,

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n), \tag{12}$$

причому розклад такого вигляду, з точністю до порядку множників, існує тільки один.

Серед коренів α_1, α_2, …, α_n можуть бути як дійсні так і комплексні числа. Вважатимемо, що дійсними ж перші m коренів α_1, α_2, …, α_m (цього завжди можна досягти, змінивши нумерацію коренів), а решта коренів — комплексні. Комплексні корені, як відомо, попарно спряжені.

Позначимо у розкладі (12) комплексно спряжені корені символами β_1, $\bar{\beta}_1$, β_2, $\bar{\beta}_2$, …, β_s, $\bar{\beta}_s$ ($s = \frac{n-m}{2}$) і змінивши в разі потреби порядок співмножників, дістанемо

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_m) \times$$
$$\times [(x - \beta_1)(x - \bar{\beta}_1)][(x - \beta_2)(x - \bar{\beta}_2)] \cdots [(x - \beta_s)(x - \bar{\beta}_s)].$$

Перемноживши лінійні многочлени, що стоять у квадоатних дужках, матимемо

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_m)\varphi_{\beta_1}(x)\varphi_{\beta_2}(x) \cdots \varphi_{\beta_s}(x),$$

де нагадаємо (див. (11)) $\varphi_{\beta_i}(x) = x^2 - (\beta_i + \bar{\beta}_i)x + \beta_i\bar{\beta}_i$ ($i = 1, \ldots, s$). Теорему доведено.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Поділити многочлен $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ на многочлен $g(x) = x - 1$.

Розв'язання. Оскільки $g(x)$ — лінійний многочлен зі старшим коефіцієнтом 1, то поділимо $f(x)$ на $g(x)$ за допомогою методу Горнера, використовуючи при цьому схему Горнера. У першому рядку, нижче наведеної таблиці, розмістимо коефіцієнти многочлена $f(x)$, починаючи зі старшого. А у другому — відповідні коефіцієнти частки і остачу, які будемо послідовно обчислювати, а також поруч зліва для зручності розмістимо корінь $g(x)$, тобто у нашому випадку 1.

	1	-2	4	-6	8
1	1	$1 \cdot 1 - 2 = -1$	$1 \cdot (-1) + 4 = 3$	$1 \cdot 3 - 6 = -3$	$1 \cdot (-3) + 8 = 5$

Таким чином, $x^3 - x^2 + 3x - 3$ — частка, а 5 — остача при діленні многочлена $f(x)$ на $g(x)$.

Задача 2. Розкласти многочлен $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ із $\mathbb{R}[x]$ за степенями лінійного многочлена $x + 1$ (тобто представити його у вигляді $f(x) = a_n(x+1)^n + \cdots + a_1(x+1) + a_0$ для деяких $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ і $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$).

Розв'язання. Нехай $f(x) = a_n(x+1)^n + \cdots + a_1(x+1) + a_0$ для деяких $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ і $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Тоді очевидно, що $n = 4$ і a_0 — остача, а $f_1(x) = a_4(x+1)^3 + a_3(x+1)^2 + a_2(x+1) + a_1$ — частка при діленні многочлена $f(x)$ на $x+1$. Далі, аналогічно одержуємо, що a_1 — остача, а $f_2(x) = a_4(x+1)^2 + a_3(x+1) + a_2$ — частка при діленні $f_1(x)$ на $x+1$; a_2 — остача, а $f_3(x) = a_4(x+1) + a_3$ — частка при діленні $f_2(x)$ на $x+1$; нарешті, a_3 — остача, а $f_4(x) = a_4$ — частка при діленні $f_3(x)$ на $x+1$. Отже, для знаходження коефіцієнтів $a_0, \ldots, a_4$ потрібно послідовно ділити спочатку $f(x)$, а потім відповідні частки на $x+1$. Зробимо це за допомогою методу Горнера, використовуючи "розширену" схему Горнера.

	1	2	-3	-4	1
-1	1	1	-4	0	**1**
-1	1	0	-4	**4**	
-1	1	-1	$\mathbf{-3}$		
-1	1	$\mathbf{-2}$			
-1	**1**				

Виділені у таблиці числа є шуканими коефіцієнтами $a_0, \ldots, a_4$. Отже, $f(x) = (x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1$.

Задача 3. Визначити кратність кореня -2 многочлена $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$.

Розв'язання. Оскільки кратність кореня -2 многочлена $f(x)$ дорівнює максимальному серед натуральних чисел k таких, що $f(x)$ ділиться на $(x+2)^k$, то, як і в попередніх прикладах, використаємо метод Горнера для визначення цього числа.

	1	7	16	8	-16	-16
-2	1	5	6	-4	-8	**0**
-2	1	3	0	-4	**0**	
-2	1	1	-2	**0**		
-2	1	-1	**0**			
-2	1	$\mathbf{-3}$				

Отже, $f(x) = (x+2)^4(x-1)$. Звідси одержуємо, що кратність кореня -2 многочлена $f(x)$ дорівнює 4.

Задача 4. Довести, що для довільного натурального числа n більшого трьох, 1 є трикратним коренем многочлен $f(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$.

Розв'язання. Переконаємось спочатку, що 1 є коренем многочлена $f(x)$: $f(1) = 1^{2n} - n \cdot 1^{n+1} + n \cdot 1^{n-1} - 1 = 0$.

Далі обчислимо перші три похідні многочлена $f(x)$, а потім відповідно значення цих похідних при значенні невідомої $x = 1$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2nx^{2n-1} - n(n+1)x^n + (n-1)nx^{n-2},\\
f''(x) &= (2n-1)2nx^{2n-2} - n^2(n+1)x^{n-1} + (n-2)(n-1)nx^{n-3},\\
f'''(x) &= (2n-2)(2n-1)2nx^{2n-3} - (n-1)n^2(n+1)x^{n-2} +\\
&\quad +(n-3)(n-2)(n-1)nx^{n-4};\\
f'(1) &= 2n - n(n+1) + (n-1)n = 0,\\
f''(1) &= (2n-1)2n - n^2(n+1) + (n-2)(n-1)n = 0,\\
f'''(1) &= (2n-2)(2n-1)2n - (n-1)n^2(n+1) +\\
&\quad +(n-3)(n-2)(n-1)n = 2n^3 - n^2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Звідси і з наслідку теореми 4 випливає, що -1 є трикратним коренем многочлена $f(x)$.

Задача 5. Знайти суму квадратів коренів многочлена $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ над полем комплексних чисел.

Розв'язання. Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — всі корені, вказаного в умові многочлена. Тоді

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)^2 -$$
$$- 2(\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \dots + \xi_1\xi_n + \dots + \xi_{n-1}\xi_n) = (-a_1)^2 - 2a_2 = a_1^2 - 2a_2.$$

Вправи для самостійної роботи

1. За допомогою методу Горнера обчислити значення $f(c)$ многочлена $f(x)$ при $x = c$, якщо:

а) $f(x) = 5x^5 - 19x^3 - 7x^2 + 9x + 3, \quad c = 2;$

б) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + x + 33, \quad c = -2;$

в) $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7, \quad c = -2 - i.$

2. Розкласти многочлен $f(x)$ за степенями $x - c$ і знайти значення його похідних при $x = c$, якщо:

а) $f(x) = x^5, \quad c = 1;$

б) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90, \quad c = 2;$

в) $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1 + i)x^2 - 3x + 7 + i, \quad c = -i;$

г) $f(x) = x^4 + (3 - 8i)x^3 - (21 + 18i)x^2 - (33 - 20i)x + 7 + 18i,$ $c = -1 + 2i.$

3. Визначити кратність кореня c многочлена $f(x)$:

а) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8, \quad c = 2;$

б) $f(x) = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 36x^2 - 27x - 54, \quad c = 3.$

4. При якому значенню a корінь -1 многочлена $x^5 - ax^2 - ax + 1$ має кратність не менше двох?

5. При яких значення a і b многочлен а) $ax^4 + bx^3 + 1$; б) $ax^n + bx^{n-1} + 1$ ділиться на $(x - 1)^2$?

6. Знайти умову, при якій многочлен $x^5 + ax^3 + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ має ненульовий корінь кратності два.

7. Довести, що многочлен $1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$ не має кратних коренів.

8. Побудувати многочлен над полем комплексних чисел найменшого степеня по заданим кореням:

а) 1 — двократний корінь, $2, 3, 1 + i$ — прості корені;

б) i — трикратний корінь, $-1, -i$ — прості корені.

9. Побудувати многочлен над полем дійсних чисел найменшого степеня по заданим (комплексним) кореням:

а) 1 — двократний корінь, $2, 3, 1 + i$ — прості корені;

б) $(2 - 3i)$ — трикратний корінь, $-i$ — простий корінь.

10. Довести, що многочлен $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ для довільних натуральних чисел m, n і p ділиться на многочлен $x^2 + x + 1$.

11. При якій умові многочлен $x^{3m} - x^{3n+1} + x^{3p+2}$ ділиться на многочлен $x^2 - x + 1$?

12. Многочлен $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ має корені ξ_1, ξ_2, ξ_3, $\ldots$, ξ_n. Які корені мають многочлени:

а) $a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_0$;

б) $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$;

в) $a_n x^n + a_{n-1} b x^{n-1} + a_{n-1} b^2 x^{n-2} + \cdots + a_0 b^n$.

13. Знайти співвідношення між коефіцієнтами многочлена $x^3 + {} + px^2 + qx + r$, у якого один із коренів дорівнює сумі двох інших.

14. Визначити λ таким чином, щоб один із коренів многочлена $x^3 - 7x + \lambda$ був би у два рази більший за інший його корінь

15. Сума двох коренів многочлена $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$ дорівнює 1. Визначити λ.

16. Визначити a, b, c таким чином, щоб вони були розв'язками рівняння $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$.

§ 17. Незвідні многочлени

Нехай P — довільне числове поле, $P[x]$ — кільце многочленів над полем P. Многочлен $f(x) \in P[x]$ натурального степеня n називається *звідним над полем* P, якщо він має дільник ненульового степеня k меншого за n. У протилежному випадку многочлен $f(x)$ називається *незвідним над полем* P.

Пригадуючи означення дільника, можна сказати, многочлен $f(x)$ із $P[x]$ натурального степеня n називається звідним, якщо його можна записати у вигляді добутку двох многочленів натурального степеня із $P[x]$; многочлен $f(x)$ натурального степеня n називається незвідним, якщо його не можна записати у вигляді добутку двох многочленів натурального степеня із кільця $P[x]$.

***Приклад* 1.** Многочлен $f(x) = x^2 - 3x + 2$ звідний над полем раціональних чисел, оскільки $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

***Приклад* 2.** Многочлен $g(x) = x^2 - 2$ є незвідним над полем раціональних чисел. Справді, припустимо протилежне. Тоді $g(x)$ розкладається у добуток лінійних многочленів, тобто $x^2 - 2 = (ax + b)(cx + d)$, де a, b, c, d — раціональні числа, причому $a \neq 0$, $c \neq 0$. Тоді $-\frac{b}{a}$ є коренем многочлена $g(x)$, тобто $\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 = 0$. Остання рівність неможлива, оскільки добре відомо, що не існує раціонального числа квадрат, якого дорівнює 2.

***Приклад* 3.** Многочлен $h(x) = x^2 + 1$ незвідний над полем дійсних чисел, а отже, і над полем раціональних чисел. Доведення цього факту подібне до попереднього випадку. Але многочлен $h(x)$ є звідним над полем комплексних чисел, тому що $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ (i — уявна одиниця).

Всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ першого степеня є незвідним над полем P, оскільки він не може мати дільників степеня більшого ніж 0, і меншого ніж 1.

Розглянемо основні властивості незвідних многочленів. Зазначимо, що йдеться про многочлени з кільця $P[x]$, незвідні над полем P.

I. *Якщо многочлен $p(x)$ — незвідний, тоді для будь-якого ненульового елемента c поля P многочлен $cp(x)$ є незвідним.*

   Доведення. Справді, припустимо, що многочлен $cp(x)$ — звідний над полем P. Отже, в кільці $P[x]$ є дільники цього многочлена, степені яких більші від 0, але менші від степеня $cp(x)$. За властивістю 8 подільності (див. теорему 5 §15) ці дільники є також дільниками многочлена $p(x)$, то многочлен $p(x)$ — звідний.

Це суперечить умові. Отже, наше припущення неправильне.

II. *Якщо незвідний многочлен $q(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, то $q(x) = cp(x)$, де c — деякий відмінний від нуля елемент поля P.*

Доведення. За означенням подільності $q(x) = p(x)h(x)$, для деякого многочлена $h(x) \in P[x]$. Оскільки $q(x)$ — незвідний многочлен, а $p(x)$ як незвідний многочлен має натуральний степінь, то степінь $h(x)$ дорівнює нулю. Отже $h(x) = c$ ($c \in P$, $c \neq 0$), а тому $q(x) = cp(x)$.

III. *Якщо $f(x)$ — довільний многочлен, $p(x)$ — незвідний многочлен, тоді або $f(x)$ ділиться на $p(x)$, або ці многочлени — взаємно прості.*

Доведення. Нехай $d(x)$ — найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $p(x)$. Оскільки $d(x)$ — дільник многочлена $p(x)$, то степінь $d(x)$ дорівнює або 0, або степені многочлена $p(x)$, і, отже, $d(x)$ — або відмінний від нуля елемент c поля P, або за ознакою подільності многочленів, многочлен вигляду $cp(x)$ ($c \in P$, $c \neq 0$). У першому випадку $f(x)$ і $p(x)$ взаємно прості, у другому — $f(x)$ ділиться на $p(x)$.

IV. *Якщо добуток многочленів $f(x)$ і $g(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, то принаймні один із цих многочленів ділиться на $p(x)$.*

Доведення. Якщо $f(x)$ не ділиться на $p(x)$, то за попередньою властивістю $f(x)$ і $p(x)$ взаємно прості. Тоді за теоремою 10 §15 $g(x)$ ділиться на $p(x)$.

V. *Якщо добуток многочленів $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_s(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, тоді хоча б один із цих многочленів ділиться на $p(x)$.*

Доведення. Якщо $f_1(x)$ не ділиться на $p(x)$, то за попередньою властивістю $f_2(x)f_3(x)\cdots f_s(x)$ ділиться на $p(x)$. Якщо $f_2(x)$ не ділиться на $p(x)$, то знову ж таки за попередньою властивістю $f_3(x)f_4(x)\cdots f_s(x)$ ділиться на $p(x)$ і т. д. Очевидно, на деякому скінченому кроці цей процес зупиниться і для деякого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ многочлен $f_i(x)$ ділитиметься на $p(x)$.

Теорема 1. *Довільний многочлен $f(x)$ натурального степеня n із кільця $P[x]$ можна представити у вигляді добутку многочленів*

$p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_m(x)$, *незвідних над полем* P*:*

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x). \tag{1}$$

Доведення. Якщо многочлен незвідний над полем P, то для нього теорема справедлива: добуток про який йдеться в теоремі, складається лише з одного множника $f(x)$. Звідси випливає, що теорема справедлива для всіх многочленів першого степеня, оскільки кожен такий многочлен незвідний.

Припустимо, що теорема справедлива для всякого многочлена, степінь якого більший від 1 і менший від n, і доведемо, що тоді вона справедлива, й для будь-якого многочлена степеня n.

Нехай $f(x)$ — будь-який многочлен з кільця $P[x]$ степеня n. Для цього многочлена є тільки дві можливості: або $f(x)$ — незвідний над полем P, або $f(x)$ — звідний над полем P. У першому випадку для многочлена $f(x)$ теорема справедлива. Розглянемо другий випадок. Якщо $f(x)$ — звідний над полем P, то

$$f(x) = g(x)h(x), \tag{2}$$

де $g(x)$ і $h(x)$ — многочлени з кільця $P[x]$, степені яких більші від 0 і менші від n. За припущенням, кожний з многочленів $g(x)$ і $h(x)$ можна представити у вигляді добутку незвідних над полем P многочленів, тобто

$$g(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x), \qquad h(x) = p_{k+1}(x)p_{k+2}(x)\cdots p_m(x),$$

де $p_i(x)$ — незвідний многочлен над полем P $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Підставивши у рівність (2) замість $g(x)$ і $h(x)$ добутки, через які вони представляються, одержимо

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x)p_{k+1}(x)\cdots p_m(x).$$

Отже, і в другому випадку для многочлена $f(x)$ теорема справедлива. Оскільки теорема справедлива для кожного многочлена першого степеня і із припущення, що вона справедлива для кожного многочлена степінь якого менший від n, випливає її справедливість для будь-якого многочлена степеня n, то, за принципом математичної індукції, теорема справедлива для будь-якого многочлена довільного натурального степеня. Теорему доведено.

Запис (1) називають *розкладом многочлена* $f(x)$ *на незвідні множники* або *розкладом у добуток незвідних над полем* P *многочленів.*

Неважко зрозуміти, що якщо $f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x)$ є розкладом многочлена $f(x)$ у добуток незвідних над полем P множників і c_1, c_2, $\ldots$, c_m — елементи поля P такі, що $c_1c_2\cdots c_m = 1$, то $f(x) = [c_1p_1(x)][c_2p_2(x)]\cdots[c_mp_m(x)]$ також є розкладом многочлена у добуток незвідних множників. Виявляється, що цим вичерпуються всі розклади многочлена, оскільки справедливе таке твердження.

Теорема 2. *Якщо многочлен $f(x)$ із кільця $P[x]$ двома способами розкладається у добуток незвідних множників:*

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x), \tag{3}$$

тоді $m = s$ і при відповідній нумерації множників справджуються рівності $q_i(x) = c_ip_i(x)$ $(i = 1, \ldots, s)$, де c_1, $\ldots$, c_m — деякі відмінні від нуля елементи поля P.

Доведення. Для многочленів першого степеня теорема справедлива, оскільки вони незвідні. Припустимо, що теорема справедлива для многочленів з кільця $P[x]$, степені яких менші ніж n, і доведемо, що вона справедлива для довільного многочлена степеня n. Нехай $f(x)$ — довільний многочлен степеня n і він двома способами представляється у вигляді (3) добутку незвідних многочленів. Оскільки $p_1(x)$ є дільником многочлена $f(x)$, тобто добутку $q_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x)$, то за п'ятою властивістю незвідних многочленів, принаймні, один із многочленів $q_1(x)$, $q_2(x)$, $\ldots$, $q_s(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p_1(x)$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $q_1(x)$ ділиться на $p_1(x)$ (цього завжди можна досягти, змінивши нумерацію многочленів $q_1(x)$, $\ldots$, $q_s(x)$). Оскільки многочлен $q_1(x)$ — також незвідний, то за другою властивістю незвідних многочленів $q_1(x) = c_1p_1(x)$, де c_1 — відмінний від нуля елемент поля P. Підставивши вираз $q_1(x)$ у рівність (3), одержимо

$$p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x) = cp_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x). \tag{4}$$

За теоремою про ділення з остачею частка $g(x)$ при ділення многочлена $f(x)$ на $p_1(x)$ визначається однозначно. Тому поділивши ліву і праві частини рівності (4) на $p_1(x)$ одержимо, що

$$g(x) = p_2(x)p_3(x)\cdots p_m(x) = cq_2(x)q_3(x)\cdots q_s(x). \tag{5}$$

Права і ліва частина рівності (5) є розкладами в добуток незвідних множників многочлена $g(x)$, степінь якого більший від нуля і менший від n. Тому за індуктивним припущенням для $g(x)$ теорема справедлива, тобто $m-1=s-1$ і $c_1q_2(x)=c_2'p_2(x)$, $q_3(x)=c_3p_3(x)$, $\ldots$, $q_m(x)=c_mp_m(x)$. Звідси випливає, що

$$m=s,\quad q_2(x)=c_1^{-1}c_2'p_2(x),\ q_3(x)=c_3p_3(x),\ \ldots,\ q_m(x)=c_mp_m(x).$$

Приєднавши до цих рівностей рівність $q_1(x)=c_1p_1(x)$ і позначивши $c_1^{-1}c_2'$ символом c_2, матимемо

$$m=s,\quad q_1(x)=c_1p_1(x),\ q_2(x)=c_2p_2(x),\ \ldots,\ q_m(x)=c_mp_m(x).$$

Отже, для вибраного многочлена $f(x)$ степеня n теорема справедлива. Тому за принципом математичної індукції теорема справедлива для довільного многочлена з кільця $P[x]$ натурального степеня n. Теорему доведено.

Многочлен $f(x)\in P[x]$ натурального степеня n будемо називати *нормованими*, якщо його старший коефіцієнт дорівнює одиниці.

Наслідок 1. *Будь-який многочлен $f(x)$ із кільця $P[x]$ натурального степеня n можна єдиним способом записати у вигляді добутку елемента поля P і нормованих незвідних у кільці $P[x]$ многочленів:*

$$f(x)=a_0p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x),\tag{6}$$

де a_0 — старший коефіцієнт многочлена $f(x)$.

Нехай незвідний многочлен $p(x)$ є дільником многочлена $f(x)$. Тоді існує натуральне число k таке, що многочлен $f(x)$ ділиться на $p(x)^k$ і не ділиться на многочлен $p(x)^{k+1}$. У цьому випадку многочлен $p(x)$ називають *k-кратним множником для $f(x)$*. Якщо незвідний многочлен $p(x)$ є однократним множником для многочлена $f(x)$, то його ще називають *простим* множником.

Нехай у розкладі (6) незвідні множники $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_s(x)$ — попарно різні і будь-який інший множник дорівнює одному з них. Якщо $p_i(x)$ є k_i-кратним множником многочлена $f(x)$ $(i=1,2,\ldots,s)$, то розклад (6) можна переписати у вигляді

$$f(x)=a_0p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x).\tag{7}$$

Розклад (7) називається *канонічним розкладом многочлена $f(x)$ з кільця $P[x]$ на незвідні над P (нормовані) множники.*

Теорема 3. *Якщо $p(x)$ є k-кратним незвідним множником многочлена $f(x)$ і $k \geq 2$, тоді він є $(k-1)$-кратним множником похідної цього многочлена. Якщо ж $p(x)$ — простий множник многочлена $f(x)$, тоді многочлени $f'(x)$ і $p(x)$ — взаємно прості.*

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 4 §16.

Теорема 4. *Якщо дано канонічні розклади многочленів $f(x)$ і $g(x)$ на незвідні множники, то найбільший спільний дільник $d(x)$ цих многочленів дорівнює добутку множників, що одночасно входять в обидва розклади, причому кратність кожного із множників $p(x)$ многочлена $d(x)$ дорівнює меншій із кратностей $p(x)$ для многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Якщо спільних незвідних множників у розкладах $f(x)$ і $g(x)$ немає, многочлени $f(x)$ і $g(x)$ — взаємно прості.*

Доведення. Нехай

$$f(x) = a_0 p_1^{m_1}(x) p_2^{m_2}(x) \cdots p_j^{m_j}(x) u_1^{k_1}(x) u_2^{k_2}(x) \cdots u_s^{k_s}(x)$$

і

$$g(x) = b_0 p_1^{n_1}(x) p_2^{n_2}(x) \cdots p_j^{n_j}(x) v_1^{l_1}(x) v_2^{l_2}(x) \cdots v_t^{l_t}(x)$$

є канонічні розклади многочленів $f(x)$ і $g(x)$ на звідні над полем P множники. Тоді за п'ятою властивістю незвідних многочленів довільний нормований незвідний спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$ дорівнює одному із многочленів $p_1(x)$, $p_2(x)$, …, $p_j(x)$. Звідси, з третьої властивості незвідних многочленів та теореми 11 §15 слідує, що будь-який нормований спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$ має вигляд

$$p_1^{i_1}(x) p_2^{i_2}(x) \cdots p_j^{i_j}(x),$$

де $0 \leq i_l \leq \min\{m_l, n_l\}$ $(l = 1, 2, \ldots, j)$. Таким чином, за означенням найбільшого спільного дільника многочлен

$$d(x) = p_1^{r_1}(x) p_2^{r_2}(x) \cdots p_j^{r_j}(x),$$

де $r_l = \min\{m_l, n_l\}$ $(l = 1, 2, \ldots, j)$, є найбільшим спільним спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

Якщо спільних незвідних множників у канонічних розкладах многочленів $f(x)$ і $g(x)$ немає, то $f(x)$ і $g(x)$ — взаємно прості. Дійсно, у протилежному випадку, якби найбільший спільний дільник цих многочленів мав натуральний степінь, то за теоремами 1 і 2, $f(x)$ і $g(x)$ мали б принаймні один незвідний спільний дільник, що неможливо. Теорему доведено.

Із результатів попереднього параграфу (див. наслідок 2 і теорему 7 §16) одразу слідують наступні два твердження.

Теорема 5. *Незвідними многочленами над полем комплексних чисел є лінійні многочлени і тільки вони.*

Теорема 6. *Незвідними многочленами над полем дійсних чисел є лінійні многочлени та многочлени другого степеня, що не мають дійсних коренів, і тільки вони.*

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Використовуючи задачу 5 на стор. 198, довести наступне твердження (критерій Ейзенштейна). Нехай

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

— многочлен натурального степеня n над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел, коефіцієнти якого є цілими числами. Якщо існує ціле просте число p таке, що: 1) старший коефіцієнт a_0 не ділиться на p, 2) всі інші коефіцієнти діляться на p, 3) вільний член a_n не ділиться на p^2, то многочлен $f(x)$ є незвідним над полем $\mathbb{Q}$.

Розв'язання. Доведемо від протилежного, що многочлен $f(x)$, який задовольняє умові задачі, є незвідним. Припустимо, що $f(x)$ є звідним над $\mathbb{Q}$ многочленом. Тоді, враховуючи задачу 5 на стор. 198, многочлен $f(x)$ можна представити у вигляді добутку двох многочленів натурального степеня з цілими коефіцієнтами:

$$f(x) = (b_0x^k + b_1x^{k-1} + \cdots + b_k) \cdot (c_0x^l + c_1x^{l-1} + \cdots + c_l),$$

де $k,\ l \in \mathbb{N}$; $k + l = n$; $b_0,\ b_1,\ \ldots,\ b_k,\ c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_l \in \mathbb{Z}$. Порівнюючи коефіцієнти в обох частинах цієї рівності, одержимо, що

$$\begin{aligned} a_n &= b_kc_l, \\ a_{n-1} &= b_kc_{l-1} + b_{k-1}c_l, \\ a_{n-2} &= b_kc_{l-2} + b_{k-1}c_{l-1} + b_{k-2}c_l, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 &= b_1c_0 + b_0c_1, \\ a_0 &= b_0c_0. \end{aligned} \tag{8}$$

Оскільки a_n ділиться на p, а p — просте число, то з першої із рівностей (8) слідує, що один з множників b_k, c_l ділиться на p. Одночасно b_k і c_l не діляться на p, бо у протилежному випадку коефіцієнт

a_n ділився б на p^2, що суперечить умові задачі. Нехай, наприклад, b_k ділиться на p, а c_l — взаємно просте з p. Перейдемо до другої з рівностей (8). Ліва частина цієї рівності ділиться на p. Отже, і права її частина ділиться на p. Оскільки перший доданок $b_k c_{l-1}$ ділиться на p, то і другий, що є добутком $b_{k-1}c_l$, також ділиться на p. Але c_l не ділиться на p. Тому b_{k-1} ділиться на p. Подібним чином із третьої із рівностей (8) слідує, що b_{k-1} ділиться на p і т. д. Врешті із n-ї рівності слідуватиме, що b_0 ділиться на p. Як наслідок, із останньої з рівностей (8) випливає, що a_0 ділиться на p, що суперечить умові задачі.

Насамкінець підкреслимо, що критерій Ейзенштейна є лише достатньою умовою незвідності многочлена над полем раціональних чисел.

Задача 2. Нехай p — довільне натуральне просте число. Довести, що многочлен $f_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ є незвідним над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел.

Розв'язання. Нехай $g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ — довільний многочлен над полем $\mathbb{Q}$. Для будь-якого елемента $c \in \mathbb{Q}$ позначимо через $g(x+c)$ многочлен

$$a_n \cdot (x+c)^n + a_{n-1} \cdot (x+c)^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot (x+c) + a_0.$$

Якщо $g(x) = u(x)v(x)$ для деяких многочленів $u(x)$, $v(x) \in \mathbb{Q}[x]$, тоді

$$g(x+c) = u(x+c) \cdot v(x+c) \tag{9}$$

для будь-якого $c \in \mathbb{Q}$. Дійсно, $g(\gamma) = u(\gamma)v(\gamma)$ для довільного $\gamma \in \mathbb{Q}$, а тому

$$g(\gamma + c) = u(\gamma + c) \cdot v(\gamma + c)$$

для довільного $\gamma \in \mathbb{Q}$. Звідси і наслідку 1 §16 випливає (9).

Очевидно, $(x-1) \cdot f_p(x) = x^p - 1$. Звідси

$$\begin{gathered} x \cdot f_p(x+1) = (x+1)^p - 1 = \\ = x^p + C_p^{p-1}x^{p-1} + C_p^{p-2}x^{p-2} + \cdots + C_p^1 x + 1 - 1 = \\ = x(x^{p-1} + C_p^{p-1}x^{p-2} + C_p^{p-3}x^{p-2} + \cdots + C_p^1). \end{gathered}$$

Звідси за теоремою 2 одержимо рівність

$$f_p(x+1) = x^{p-1} + C_p^{p-1}x^{p-2} + C_p^{p-3}x^{p-2} + \cdots + C_p^1. \tag{10}$$

За критерієм Ейзенштейна многочлен, що стоїть у правій частині рівності (10), є незвідним над полем $\mathbb{Q}$, оскільки для довільного $j \in \{1, \ldots, p\}$ коефіцієнт C_p^j ділиться на p, а вільний член $C_p^1 = p$ не ділиться на p^2. А отже, многочлен $f_p(x+1)$ є незвідним над $\mathbb{Q}$. Це в свою чергу означає, що і многочлен $f_p(x)$ є незвідним над полем $\mathbb{Q}$.

Задача 3. Розкласти на незвідні множники многочлен $x^5 - 1$ над кожним із полів раціональних, дійсних та комплексних чисел.

Розв'язання. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \tag{11}$$

Із попереднього прикладу слідує, що многочлен $f_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є незвідним над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Тому рівність (11) є шуканим розкладом на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$.

Далі, розкладемо многочлен $x^5 - 1$ на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Відомо, що довільний многочлен натурального степеня над полем $\mathbb{C}$ розкладається у добуток лінійних множників вигляду $x - \xi$, де ξ — деяке комплексне число, що є коренем даного многочлена. Коренями ж многочлена $x^5 - 1$ є корені 5-го степеня з 1:

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \cos\tfrac{2\pi}{5} + i\sin\tfrac{2\pi}{5} = \tfrac{\sqrt{5}-1}{4} + \tfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i,$$

$$\varepsilon_2 = \cos\tfrac{4\pi}{5} + i\sin\tfrac{4\pi}{5} = -\tfrac{\sqrt{5}+1}{4} + \tfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i,$$

$$\varepsilon_3 = \cos\tfrac{6\pi}{5} + i\sin\tfrac{6\pi}{5} = -\tfrac{\sqrt{5}+1}{4} - \tfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i,$$

$$\varepsilon_4 = \cos\tfrac{8\pi}{5} + i\sin\tfrac{8\pi}{5} = \tfrac{\sqrt{5}-1}{4} - \tfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i.$$

Через це $x^5 - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)$ є шуканим розкладом, даного в умові задачі многочлена, на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$.

Нарешті, скориставшись розкладом многочлена $x^5 - 1$ на лінійні множники над полем $\mathbb{C}$, знайдемо розклад цього многочлена на незвідні множники над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлени 2-го степеня, коренями яких є пари комплексно спряжених чисел відповідно ε_1, ε_4 та ε_2, ε_3:

$$(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_4) = x^2 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1,$$

$$(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3) = x^2 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1.$$

Ці многочлени є незвідними над полем $\mathbb{R}$, а тому

$$x^5 - 1 = (x-1)\left(x^2 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1\right)\left(x^2 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1\right)$$

є розкладом многочлена на незвідні множники над полем $\mathbb{R}$.

Вправи для самостійної роботи

1. Нехай P — підполе поля F і $g(x) \in P[x]$. Які з наступних тверджень істинні:

а) якщо $g(x)$ — незвідний многочлен над полем P, тоді він є незвідним над F;

б) якщо $g(x)$ — незвідний многочлен над полем F, тоді він є незвідним над P;

в) якщо $g(x)$ — звідний многочлен над полем P, тоді він є звідним над F;

г) якщо $g(x)$ — звідний многочлен над полем P, тоді він є звідним над F?

2. Нехай F — поле. Довести, що многочлен степеня 2 або 3 є незвідним над F тоді і тільки тоді, коли він має корінь в F. Чи істинне дане твердження для многочлена степеня 4?

3. Розкласти на незвідні множники многочлен $f(x)$ над полем комплексних чисел, якщо:

а) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; б) $f(x) = x^4 + 10x^2 + 1$;

в) $f(x) = x^8 + 27x^2$; г) $f(x) = x^4 + 10x^2 + 1$.

4. Розкласти на незвідні множники многочлен $f(x)$ над полем дійсних чисел, якщо:

а) $f(x) = x^6 + 27$; б)$f(x) = x^{2n} - 2x^n + 2$;

в) $f(x) = x^{2n} + x + 1$; г) $f(x) = x^4 - ax^2 + 1$ $(-2 < a < 2)$;

д) $f(x) = x^6 - x^3 + 1$; е) $f(x) = x^{12} + x^8 + x^4 + 1$.

5.* Нехай $f(x)$ є многочленом натурального степеня над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел з цілими коефіцієнтами. Довести, що многочлен $f(x)$ є незвідним над $\mathbb{Q}$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ не можна представити у вигляді добутку двох многочленів натурального степеня над $\mathbb{Q}$ з цілими коефіцієнтами.

6. Користуючись критерієм Ейзенштейна, довести незвідність многочленів над $\mathbb{Q}$:

а) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$; б) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$;

в) $x^4 - x^3 + 2x + 1$; г) $x^{(p-1)p^k} + x^{(p-2)p^k} + \dots + x^{p^k} + 1$,

де p — просте натуральне число, $k \in \mathbb{N}$.

7. Довести, що многочлен $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел з цілими коефіцієнтами є незвідним над полем $\mathbb{Q}$, якщо він не має цілих коренів і не ділиться на жоден многочлен вигляду $x^2 + \frac{cm-am^2}{d-m^2}x + m$, де m — дільник числа d.

8. За допомогою попередньої задачі розкласти на множники многочлени або довести їх незвідність:

а) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 9$; б) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 6$.

9. Знайти найбільший спільний дільник многочленів:

а) $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x+4)$ і $(x-1)^2(x+2)(x+5)$;

б) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$ і $(x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)$;

в) $x^n - 1$ і $x^m - 1$ $(n, m \in \mathbb{N})$.

§ 18. Поле раціональних дробів

Нехай до кінця цього параграфу P — довільне поле; $P[x]$ — кільце многочленів від невідомої x над полем P.

Дробово раціональною функцією або просто *раціональним дробом* від невідомої (змінної) x з коефіцієнтами із множини P називається алгебраїчний вираз (символ) $\frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$ — довільний, а $g(x)$ — довільний ненульовий многочлен із кільця многочленів $P[x]$. При цьому многочлен $f(x)$ називається *чисельником*, а $g(x)$ — *знаменником* раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Позначимо через $P(x)$ множину всіх раціональних дробів від невідомої x з коефіцієнтами із множини P.

Два раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називаються *рівними*, якщо

$$f(x)v(x) = g(x)u(x). \tag{1}$$

Якщо раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ рівні, то писатимемо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ (рефлексивна властивість);

2) якщо $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, то $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ (симетрична властивість);

3) якщо $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$, то $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$ (транзитивна властивість).

Доведення рефлексивної та симетричної властивості очевидне, оскільки відразу слідує із означення рівності раціональних дробів та комутативної властивості множення многочленів. Доведемо транзитивну властивість. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$. Тоді

$$f(x)v(x) = g(x)u(x), \qquad u(x)r(x) = v(x)q(x).$$

Звідси

$$f(x)v(x) - g(x)u(x) = 0, \qquad u(x)r(x) - v(x)q(x) = 0.$$

Розглянемо многочлен $v(x)[f(x)r(x) - g(x)q(x)]$. Він дорівнює многочлену

$$v(x)f(x)r(x) - v(x)g(x)q(x) =$$
$$= f(x)v(x)r(x) - g(x)u(x)r(x) + g(x)u(x)r(x) - g(x)v(x)q(x) =$$
$$= [f(x)v(x) - g(x)u(x)]r(x) + g(x)[u(x)r(x) - v(x)q(x)] =$$
$$= 0 \cdot r(x) + g(x) \cdot 0 = 0.$$

Отже, $v(x)[f(x)r(x) - g(x)q(x)] = 0$. Оскільки $v(x)$ — ненульовий многочлен, то $f(x)r(x) - g(x)q(x) = 0$, що в свою чергу означає, що $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$.

Зауваження 1. Із рефлективної, симетричної та транзитивної властивостей випливає, що множину $P(x)$ всіх раціональних дробів можна розбити на підмножини, такі що будь-які два елементи кожної з цих підмножин рівні між собою, а самі ці підмножини при цьому не перетинаються. Ці підмножини називають класами еквівалентності. Тому кожен раціональний дріб можна трактувати як клас еквівалентності, представником якого він є. Два рівні раціональні дроби представляють один і той клас еквівалентності.

Сумою раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)v(x) + g(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \tag{2}$$

Добутком раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \tag{3}$$

Зауваження 2. Операції додавання та множення раціональних дробів задано коректно. Можна показати (доведення залишаємо читачеві), що якщо $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u_1(x)}{v_1(x)}$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{u_1(x)}{v_1(x)}, \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{u_1(x)}{v_1(x)}.$$

Теорема 1. *Множина $P(x)$ всіх раціональних дробів від невідомої x над полем P відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання та множення раціональних дробів є полем.*

Доведення. Доведемо спочатку комутативну властивість операції додавання дробів. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ довільні раціональні дроби із $P(x)$. Із означенням суми дробів та із комутативних властивостей операцій додавання і множення многочленів слідує, що

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)v(x)+g(x)u(x)}{g(x)v(x)} =$$
$$= \frac{u(x)g(x)+v(x)f(x)}{v(x)g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)} + \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Аналогічно доводимо комутативну властивість множення раціональних дробів, асоціатині властивості додавання і множення раціональних дробів та дистрибутивну властивість. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{q(x)}{r(x)}$ довільні раціональні дроби із $P(x)$, тоді:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)} = \frac{u(x)f(x)}{v(x)g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)};$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)}\right] + \frac{q(x)}{r(x)} = \frac{f(x)v(x)+g(x)u(x)}{g(x)v(x)} + \frac{q(x)}{r(x)} =$$
$$= \frac{[f(x)v(x)+g(x)u(x)]r(x)+[g(x)v(x)]q(x)}{[g(x)v(x)]r(x)} =$$
$$= \frac{f(x)[v(x)r(x)]+g(x)[u(x)r(x)+v(x)q(x)]}{g(x)[v(x)r(x)]} =$$
$$= \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)r(x)+v(x)q(x)}{v(x)r(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} + \left[\frac{u(x)}{v(x)} + \frac{q(x)}{r(x)}\right];$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)}\right] \cdot \frac{q(x)}{r(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)} \cdot \frac{q(x)}{r(x)} = \frac{[f(x)u(x)]q(x)}{[g(x)v(x)]r(x)} =$$
$$= \frac{f(x)[u(x)q(x)]}{g(x)[v(x)r(x)]} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)q(x)}{v(x)r(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \left[\frac{u(x)}{v(x)} \cdot \frac{q(x)}{r(x)}\right];$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \left[\frac{u(x)}{v(x)} + \frac{q(x)}{r(x)}\right] = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)r(x)+v(x)q(x)}{v(x)r(x)} =$$
$$= \frac{f(x)[u(x)r(x)+v(x)q(x)]}{g(x)[v(x)r(x)]} = \frac{f(x)u(x)r(x)+v(x)f(x)q(x)}{g(x)v(x)r(x)} =$$
$$= \frac{f(x)u(x)r(x)}{g(x)v(x)r(x)} + \frac{v(x)f(x)q(x)}{g(x)v(x)r(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)} + \frac{f(x)q(x)}{g(x)r(x)} =$$
$$= \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} + \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{q(x)}{r(x)}.$$

У множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є нульовий елемент (або просто нуль). Це раціональний дріб $\frac{0}{1}$. Дійсно для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ справедлива рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{0}{1} = \frac{f(x)\cdot 1+g(x)\cdot 0}{g(x)\cdot 1} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Очевидно будь-який раціональний дріб вигляду $\frac{0}{g(x)}$ є нульовим раціональним дробом.

Також у множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є одиниця. Це раціональний дріб $\frac{1}{1}$, тому що для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ справедлива рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1}{1} = \frac{f(x)\cdot 1}{g(x)\cdot 1} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Будь-який раціональний дріб вигляду $\frac{f(x)}{f(x)}$ є одиничним раціональним дробом.

Для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$ із $P(x)$ існує протилежний раціональний дріб із $P(x)$, а саме $\frac{-f(x)}{g(x)}$. Дійсно

$$\frac{-f(x)}{g(x)} + \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(x)+f(x)}{g(x)} = \frac{0}{g(x)} = \frac{0}{1}.$$

Для довільного ненульового раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$ із $P(x)$ існує обернений раціональний дріб із $P(x)$. Оскільки $f(x) \neq 0$, то можна розглянути раціональний дріб $\frac{g(x)}{f(x)}$ із $P(x)$. Тоді

$$\frac{g(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f(x)}{f(x)g(x)} = \frac{1}{1}.$$

Теорему доведено.

Розглянемо множину R всіх раціональних дробів над полем P вигляду $\frac{f(x)}{1}$, де $f(x) \in P[x]$.

Будемо називати раціональний дріб вигляду $\frac{f(x)}{1}$ *цілим раціональним дробом.*

Оскільки для довільних цілих раціональних дробів $\frac{f(x)}{1}, \frac{g(x)}{1} \in R$ справедливі відношення

$$\frac{f(x)}{1} + \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x)+g(x)}{1} \in R, \qquad \frac{f(x)}{1} \cdot \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x)g(x)}{1} \in R$$

і R є підмножиною поля $P(x)$, то R є кільцем відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення раціональних дробів.

Неважко показати, що відображення $\varphi : R \to P[x]$, яке задається за правилом $\varphi\big(\frac{f(x)}{1}\big) = f(x)$ $\big(\frac{f(x)}{1} \in R\big)$, є ізоморфізмом кілець R і $P[x]$. Тому, надалі, за домовленістю ми будемо ототожнювати цілий раціональний дріб $\frac{f(x)}{1}$ з многочленом $f(x)$.

Раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ називається *правильним*, якщо степінь чисельника $f(x)$ менший ніж степінь знаменника $g(x)$. У протилежному випадку раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ називається *неправильним*. Нульовий многочлен відносять до правильних раціональних дробів.

Теорема 2. *Будь-який раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ можна записати, притому єдиним способом, у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу.*

Доведення. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ — довільний раціональний дріб із $P(x)$. За теоремою про ділення з остачею, у кільці $P[x]$ існують такі многочлени $q(x)$ і $r(x)$, що $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, причому степінь многочлена $r(x)$ менший ніж степінь $g(x)$ або $r(x) = 0$. Тоді

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)q(x)+r(x)}{g(x)} = \frac{g(x)q(x)}{g(x)} + \frac{r(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$

Доведемо, що многочлен $q(x)$ і правильний дріб $\frac{r(x)}{g(x)}$ визначаються однозначно. Припустимо, що справджується також рівність $\frac{f(x)}{g(x)} = \bar{q}(x) + \frac{u(x)}{v(x)}$, де $\bar{q}(x)$ — деякий многочлен із $P[x]$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ — деякий правильний дріб. Тоді матимемо рівність $q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} = \bar{q}(x) + \frac{u(x)}{v(x)}$.

Звідси $q(x) - \bar{q}(x) = \frac{u(x)}{v(x)} - \frac{r(x)}{g(x)}$ або

$$q(x) - \bar{q}(x) = \frac{u(x)g(x)-r(x)v(x)}{v(x)g(x)}.$$

Ліва частина цієї рівності — многочлен, а права, як легко зрозуміти, — правильний дріб. Рівність ця може справджуватися тоді і тільки тоді, коли $q(x) - \bar{q}(x)$, а отже $\frac{u(x)}{v(x)} - \frac{r(x)}{g(x)}$, дорівнюють нулю. Таким чином,

$$q(x) = \bar{q}(x), \qquad \frac{r(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Теорему доведено.

Теорема 3. *Якщо $g_1(x)$ і $g_2(x)$ — взаємно прості многочлени над полем P і $\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)}$ — правильний раціональний дріб над цим полем, то в кільці $P[x]$ є такі многочлени $f_1(x)$ і $f_2(x)$, що*

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)},$$

причому дроби $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ і $\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ — правильні.

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Оскільки многочлени $g_1(x)$ і $g_2(x)$ — взаємно прості, то за ознакою взаємної простоти многочленів у кільці $P[x]$ існують такі многочлени $u(x)$ і $v(x)$, що $g_1(x)u(x)+g_2(x)v(x)=1$. Помножимо обидві частини цієї рівності на $f(x)$, одержимо

$$g_1(x)[u(x)f(x)] + g_2(x)[v(x)f(x)] = f(x). \tag{4}$$

Поділивши многочлен $u(x)f(x)$ на $g_2(x)$, матимемо

$$u(x)f(x) = g_2(x)q(x) + f_2(x),$$

де $f_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь $g_2(x)$. Добутий вираз для $u(x)f(x)$ підставимо у рівність (4). Тоді матимемо

$$g_1(x)f_2(x) + g_2(x)f_1(x) = f(x), \tag{5}$$

де $f_1(x) = g_1(x)q(x) + v(x)f(x)$. Оскільки степінь $g_1(x)f_2(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$ і за умовою степінь $f(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$, то і степінь $g_2(x)f_1(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$, а тому степінь $f_1(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)$. Тепер із рівності (5) одержимо рівність $\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$, у правій частині якої стоять правильні дроби. Теорему доведено.

Методом математичної індукції теорему 3 нескладно узагальнити на випадок, коли знаменник правильного раціонального дробу розкладається у добуток довільного натурального числа взаємно простих множників. Тобто справедлива наступна теорема.

Теорема 4. *Якщо $g_1(x)$, $g_2(x)$, …, $g_n(x)$ — попарно взаємно прості многочлени над полем P і $\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)}$ — правильний раціональний дріб над цим полем, то в кільці $P[x]$ є такі многочлени $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$, що*

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} + \cdots + \frac{f_n(x)}{g_n(x)},$$

причому кожний дріб $\frac{f_i(x)}{g_i(x)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — правильний.

Правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ називається *елементарним над полем P*, якщо його знаменник $g(x)$ є степенем деякого незвідного над полем P многочлена $p(x)$, тобто $g(x) = p^k(x)$ $(k \in \mathbb{N})$, а степінь чисельника $f(x)$ менший ніж степінь $p(x)$.

Теорема 5. *Довільний правильний раціональний дріб над полем P можна представити у вигляді суми елементарних дробів*

Доведення. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ — довільний правильний раціональний дріб над полем P. Якщо знаменник цього дробу незвідний над полем P, то цей дріб уже елементарний. Якщо многочлен $g(x)$ — звідний над полем P, то розкладемо його у добуток незвідних над полем P множників:

$$g(x) = p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x).$$

Оскільки $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_s(x)$ як попарно різні незвідні многочлени попарно взаємно прості, то такими є і многочлени $p_1^{k_1}(x)$, $p_2^{k_2}(x)$, ..., $p_s^{k_s}(x)$. Тоді за теоремою 4 маємо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)} = \frac{f_1(x)}{p_1^{k_1}(x)} + \frac{f_2(x)}{p_2^{k_2}(x)} + \cdots + \frac{f_s(x)}{p_s^{k_s}(x)}, \qquad (6)$$

де $\frac{f_i(x)}{p_i^{k_i}(x)}$ — правильний дріб ($i = 1, 2, \ldots, s$).

З огляду на рівність (6) теорему досить для випадку, коли правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ має знаменник, який є степенем деякого незвідного над полем P многочлена $p(x)$, тобто $g(x) = p(x)^k$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$).

Розглянемо правильний дріб $\frac{f(x)}{p^k(x)}$, де $p(x)$ — незвідний многочлен, k — деяке відмінне від одиниці натуральне число. Поділимо $f(x)$ на $p^{k-1}(x)$, застосовуючи алгоритм ділення з остачею. Одержимо

$$f(x) = p^{k-1}(x)u_1(x) + r_1(x), \qquad (7)$$

де $r_1(x)$ — многочлен степеня, меншого ніж степінь $p^{k-1}(x)$. Степінь частки $u_1(x)$ менший за степінь $p(x)$. Оскільки у протилежному випадку степінь добутку $p^{k-1}(x)u_1(x)$ був би не менший за степінь $p^k(x)$, а тому степінь правої частини рівності (7), а, отже, і $f(x)$, був би не менший ніж степінь $p^k(x)$. Останнє суперечить тому, що дріб $\frac{f(x)}{p^k(x)}$ — правильний.

Якщо $3 \leq k$, то поділимо остачу $r_1(x)$ на $p^{k-2}(x)$, матимемо

$$r_1(x) = p^{k-2}(x)u_2(x) + r_2(x),$$

де $r_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь многочлена $p^{k-2}(x)$, а $u_2(x)$, аналогічно як у попередньому випадку, многочлен, степінь якого менший за степінь $p(x)$ і т. д. У результаті одержимо рівності:

$$\begin{aligned} f(x) &= p^{k-1}(x)u_1(x) + r_1(x), \\ r_1(x) &= p^{k-2}(x)u_2(x) + r_2(x), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_{k-2}(x) &= p(x)u_{k-1}(x) + r_{k-1}(x), \end{aligned} \tag{8}$$

де нагадаємо $u_1(x), u_2(x), \dots, u_{k-1}(x), r_{k-1}(x)$ — многочлена, степінь яких менший ніж степінь $p(x)$.

З рівностей (8) випливає, що

$$f(x) = p^{k-1}(x)u_1(x) + p^{k-2}(x)u_2(x) + \dots + p(x)u_{k-1}(x) + r_{k-1}(x).$$

Звідси

$$\frac{f(x)}{p^k(x)} = \frac{u_1(x)}{p(x)} + \frac{u_2(x)}{p^2(x)} + \dots + \frac{u_{k-1}(x)}{p^{k-1}(x)} + \frac{r_{k-1}(x)}{p^k(x)},$$

де $\frac{u_i(x)}{p^j(x)}$ $(i = 1, 2, \dots, k-1)$, $\frac{r_{k-1}(x)}{p^k(x)}$ є елементарними раціональними дробами. Теорему доведено.

До того ж можна довести (див. [2, 3]), що розклад правильного раціонального дробу в суму елементарних раціональних дробів є однозначним з точністю до порядку слідування доданків.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Розкласти в суму елементарних дробів над полем дійсних чисел раціональний дріб $\frac{3x^2+4x+15}{x^3-27}$.

Розв'язання. Розкладемо знаменник даного в умові раціонального дробу у добуток незвідних многочленів над полем дійсних чисел: $x^3 - 27 = (x-3)(x^2+3x+9)$. Раціональний дріб $\frac{3x^2+4x+15}{x^3-27}$ є правильним, а тому за теоремами 3 і 5 його можна представити у вигляді суми елементарних дробів

$$\frac{3x^2+4x+15}{x^3-27} = \frac{f(x)}{x-3} + \frac{g(x)}{x^2+3x+9},$$

де $f(x)$, $g(x)$ — деякі многочлени над полем $\mathbb{R}$, степені яких відповідно менші за 1 і 2. На відміну від доведення теорем 3 і 5, многочлени $f(x)$ і $g(x)$ будемо шукати, так званим, методом невизначених коефіцієнтів. Нехай $f(x) = a$, $g(x) = bx + c$, де a, b, $c \in \mathbb{R}$. Із рівності

$$\frac{3x^2+4x+15}{x^3-27} = \frac{a}{x-3} + \frac{bx+c}{x^2+3x+9}$$

слідує, що

$$3x^2 + 4x + 15 = a(x^2 + 3x + 9) + (bx + c)(x - 3).$$

Звідси дістаємо

$$3x^2 + 4x + 15 = (a + b)x^2 + (3a - 3b + c)x + (9a - 3c).$$

Отже, $a+b = 3$, $3a-3b+c = 4$, $9a-3c = 15$. Розв'язавши цю систему лінійних рівнянь з невідомими a, b, c, одержимо $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$. Таким чином,

$$\frac{3x^2 + 4x + 15}{x^3 - 27} = \frac{2}{x - 3} + \frac{x + 1}{x^2 + 3x + 9}.$$

Задача 2. Розкласти в суму елементарних дробів над полем комплексних чисел раціональний дріб $\frac{8}{x^3+4x}$.

Розв'язання. Аналогічно, як і у попередньому прикладі розкладемо знаменник, даного в умові раціонального дробу, у добуток незвідних многочленів над полем комплексних чисел:

$$x^3 + 4x = x(x + 2i)(x - 2i).$$

Тоді $\frac{8}{x^3+4x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2i} + \frac{c}{x-2i}$ для деяких комплексних чисел a, b, c. Звідси

$$8 = a(x + 2i)(x - 2i) + bx(x - 2i) + cx(x + 2i).$$

Послідовно підставимо у праву частину цієї рівності замість x числові значення 0, $-2i$, $2i$. Одержимо рівності $8 = 4a$, $8 = -8b$, $8 = -8c$. Звідси $a = 2$, $b = c = -1$. Отже,

$$\frac{8}{x^3 + 4x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x + 2i} - \frac{1}{x - 2i}$$

є шуканим розкладом на елементарні раціональні дроби над полем комплексних чисел.

Вправи для самостійної роботи

1. Довести, що для довільних ненульових многочленів $f(x)$, $g(x)$ над полем P справедлива рівність

$$\frac{(f(x)g(x))'}{f(x)g(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

2. Нехай $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$, де α_1, α_2, …, α_n — деякі елементи поля P, $n \in \mathbb{N}$. Довести, що

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{x-\alpha_n}.$$

3. Розкласти в суму елементарних дробів над полем комплексних чисел раціональні дроби:

а) $\dfrac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; б) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$;

в) $\dfrac{3+x}{(x-1)(x^2+1)}$; г) $\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$; д) $\dfrac{1}{x^3-1}$; д) $\dfrac{1}{x^4+4}$;

е) $\dfrac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}$; є) $\dfrac{1}{x^n-1}$; ж) $\dfrac{1}{x^n+1}$;

з) $\dfrac{n!}{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}$; ж) $\dfrac{(2n)!}{x(x^2-1)(x^2-4)\cdots(x^2-n^2)}$,

де $n \in \mathbb{N}$.

4. Розкласти в суму елементарних дробів над полем дійсних чисел раціональні дроби:

а) $\dfrac{x^2}{x^4-16}$; б) $\dfrac{1}{x^4+4}$; в) $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+1)}$; г) $\dfrac{1}{(x^4-1)^2}$;

д) $\dfrac{1}{x^3-1}$; е) $\dfrac{x^2}{x^6+27}$; є) $\dfrac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$.

§ 19. Кільце многочленів від кількох невідомих. Симетричні многочлени

Нехай P — довільне поле. *Одночленом від невідомих* x_1, x_2, …, x_n над полем P називається алгебраїчний вираз вигляду $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$, де a із P, а k_1, $k_2, \ldots, k_n$ — деякі невід'ємні цілі числа. Показники k_1, k_2, …, k_n називаються *степенями одночлена відносно відповідних невідомих*, а число $k_1+k_2+\cdots+k_n$ — називається *степенем одночлена*. Позначимо через X n-вимірний вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, через K — вектор $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, а через X^K — одночлен вигляду $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$.

Многочленом від невідомих x_1, x_2, …, x_n над полем P називається алгебраїчний вираз, що є формальною сумою одночленів від цих невідомих, тобто вираз вигляду

$$a_1X^{K_1} + a_2X^{K_2} + \cdots + a_tX^{K_t}, \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{N}$, a_1, a_2, …, $a_t \in P$, а K_1, K_2, …, K_t — деякі попарно різні n-вимірні вектори з невід'ємними цілими компонентами. *Степенем многочлена* (1) називається максимальний із степенів одночленів, що його складають.

Многочлени

$$\begin{aligned} f(X) &= a_1X^{K_1} + a_2X^{K_2} + \cdots + a_tX^{K_t}, & (2)\\ g(X) &= b_1X^{L_1} + b_2X^{L_2} + \cdots + a_sX^{L_s}, & (3)\end{aligned}$$

називаються *рівними*, якщо $s = t$ і знайдеться підстановка δ степеня t така, що

$$a_i = b_{\delta(i)}, \quad K_i = L_{\delta(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, t).$$

***Зауваження* 1.** Тобто многочлени $f(X)$ і $g(X)$ рівні тоді і тільки тоді, коли вони складені із однакових одночленів, розміщених можливо в різному порядку.

Далі, якщо перепозначити коефіцієнти многочленів (2) і (3) наступним чином:

$$a_{K_i} = a_i, \quad (i = 1, \ldots, t); \quad b_{L_j} = b_j, \quad (j = 1, \ldots, s),$$

то ці многочлени можна записати у вигляді

$$f(X) = \sum_{K\in\mathcal{K}} a_KX^K, \quad g(X) = \sum_{L\in\mathcal{L}} b_LX^L,$$

де $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \ldots, K_t\}$, $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_s\}$.

Сумою многочленів $f(X)$ і $g(X)$ називається многочлен

$$f(X) + g(X) = \sum_{M \in \mathcal{M}} c_M X^M, \tag{4}$$

де $\mathcal{M} = \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$, $c_M = a_M + b_M$ $(M \in \mathcal{M})$, вважаючи $a_M = 0$ $(b_M = 0)$, якщо $M \notin \mathcal{K}$ $(M \notin \mathcal{L})$.

Добутком многочленів $f(X)$ і $g(X)$ називається многочлен

$$f(X) \cdot g(X) = \sum_{M \in \mathcal{N}} d_M X^M, \tag{5}$$

де $\mathcal{N} = \{K + L \mid K \in \mathcal{K},\ L \in \mathcal{L}\}$,

$$d_M = \sum_{K+L=M} a_K b_L \quad (M \in \mathcal{M}).$$

Теорема 1. *Множина $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ всіх многочленів від невідомих x_1, x_2, $\ldots$, x_n над полем P із введеними на ній відношенням рівності та бінарними алгебраїчними операціями додавання і множення многочленів є комутативним кільцем з одиницею.*

Доведення цієї і наступних теорем цього параграфу ми залишаємо читачеві на самостійну роботу. Їх можна знайти також у підручниках [2, 3].

Теорема 2. *Степінь добутку двох ненульових многочленів із кільця $P[x_1, \ldots, x_n]$ дорівнює сумі степенів перемножуваних многочленів.*

Многочлен $g(X) \in P[x_1, \ldots, x_n]$ називається *дільником* многочлена $f(X) \in P[x_1, \ldots, x_n]$, якщо існує многочлен $h(X) \in P[x_1, \ldots, x_n]$ такий, що $f(X) = g(X) \cdot h(X)$.

Многочлен $f(X) \in P[x_1, \ldots, x_n]$ степеня k $(k \in \mathbb{N})$ називається *незвідним*, якщо він не представляється у вигляді добутку двох многочленів, степені яких менші за k.

Теорема 3. *Будь-який многочлен із кільця $P[x_1, \ldots, x_n]$ натурального степеня розкладається у добуток незвідних многочленів. Цей розклад є однозначним з точністю до множників нульового степеня і порядку слідування незвідних множників.*

Нехай

$$f(X) = \sum_{K \in \mathcal{K}} a_K X^K \quad (a_K \in P,\ K \in \mathcal{K}) \tag{6}$$

— многочлен від невідомих x_1, …, x_n ($X = (x_1, \ldots, x_n)$) над полем P, де $\mathcal{K}$ — деяка скінченна множина n-вимірних векторів із цілими невід'ємними компонентами. Припустимо, що

$$a_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}, \tag{7}$$

$$a_{(l_1,l_2,\ldots,l_n)} x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n} \tag{8}$$

— два різні одночлени, які входять у многочлен $f(X)$, з ненульовими коефіцієнтами. Кажуть, що одночлен (7) *вище* одночлена (8), якщо існує таке число $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, що

$$k_1 = l_1,\ k_2 = l_2,\ \ldots,\ k_{i-1} = l_{i-1},\ k_i > l_i.$$

Запис многочлена $f(X)$, у якому кожен одночлен вище наступного, називається *лексикографічним* записом многочлена $f(X)$. Перший одночлен у лексикографічному записі $f(X)$ називається *вищим одночленом* многочлена $f(X)$.

Теорема 4. *Вищий одночлен добутку двох многочленів від n невідомих дорівнює добутку вищих одночленів співмножників.*

Многочлен $f(X)$ (див. (6)) називається *симетричним*, якщо для будь-якого вектора $K = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathcal{K}$ і для будь-якої підстановки δ степеня n виконуються умови:

$$L = (k_{\delta(1)}, k_{\delta(2)}, \ldots, k_{\delta(n)}) \in \mathcal{K}, \qquad a_L = a_K.$$

Зауваження 2. Тобто многочлен $f(X)$ є симетричним, якщо він не змінюється при всіх перестановках невідомих x_1, x_2, …, x_n.

Теорема 5. *Многочлени*

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\
&\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\sigma_{n-1} = x_1x_2\cdots x_{n-1} + \cdots + x_2x_3\cdots x_n, \\
&\sigma_n = x_1x_2\cdots x_n
\end{aligned}$$

є симетричними многочленами із кільця $P[x_1, \ldots, x_n]$.

Многочлени, приведені у теоремі 5, називаються *елементарними симетричними многочленами* від невідомих x_1, x_2, …, x_n.

Якщо $g_1(X)$, $g_2(X)$, $\dots$, $g_n(X)$ — деякі многочлени із кільця $P[x_1, \dots, x_n]$, то для многочлена

$$f(X) = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathcal{K}} a_{(k_1,\dots,k_n)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \quad (a_{(k_1,\dots,k_n)} \in P)$$

через $f(g_1, g_2, \dots g_n)$ будемо позначати многочлен

$$\sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathcal{K}} a_{(k_1,\dots,k_n)} \cdot g_1(X)^{k_1} \cdot g_2(X)^{k_2} \cdots g_n(X)^{k_n}. \tag{9}$$

Якщо ж для многочлена $h(X) \in P[x_1, \dots, x_n]$ і деяких многочленів $g_1(X)$, $g_2(X)$, $\dots$, $g_n(X) \in P[x_1, \dots, x_n]$ існує представлення $h(x)$ у вигляді (9), то кажуть, що многочлен $h(X)$ є многочленом від $g_1(X)$, $g_2(X)$, $\dots$, $g_n(X)$.

Теорема 6. *Будь-який многочлен від елементарних симетричних многочленів σ_1, σ_2, $\dots$, σ_n із коефіцієнтами із поля P, розглядуваний як многочлен від невідомих x_1, x_2, $\dots$, x_n є симетричним.*

Теорема 7. *Будь-який симетричний многочлен із кільця $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ є многочленом від елементарних симетричних многочленів σ_1, σ_2, $\dots$, σ_n цього кільця.*

Наслідок 1. *Будь-який симетричний многочлен від коренів многочлена $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ є многочленом від коефіцієнтів a_0, a_1, $\dots$, a_{n-1}.*

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Чи є незвідним многочлен $f(x, y) = 3x^2 + y$ із кільця $\mathbb{Q}[x, y]$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $f(x, y)$ є звідним. Оскільки $f(x, y)$ — многочлен другого степеня, тоді він розкладається у добуток многочленів першого степеня:

$$3x^2 + y = (a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2)$$

де $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$ $(i = 1, 2)$. Звідси

$$\begin{aligned} 3x^2 + y \;=\; & a_1 a_2 x^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) xy + b_1 b_2 y^2 + \\ & + (a_1 c_2 + a_2 c_1) x + (b_1 c_2 + b_2 c_1) y + c_1 c_2. \end{aligned} \tag{10}$$

Із рівності (10) многочленів випливає система рівностей

$$a_1a_2 = 3, \tag{11}$$
$$a_1b_2 + a_2b_1 = 0, \tag{12}$$
$$b_1b_2 = 0, \tag{13}$$
$$b_1c_2 + b_2c_1 = 1. \tag{14}$$

Із рівностей (11–13) слідує, що $b_1 = b_2 = 0$, що в свою чергу суперечить рівності (14). Одержане протиріччя доводить незвідність многочлена $3x^2 + y$.

Задача 2. Виразити через елементарні симетричні многочлени симетричний многочлен $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$ із кільця $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$.

Розв'язання. Вищим одночленом многочлена $f(x_1, x_2, x_3)$ є одночлен $x_1^2x_2$ із степенями 2, 1, 0 відповідно відносно невідомих x_1, x_2, x_3. Тоді цей одночлен співпадає з вищим одночленом симетричного многочлена

$$\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0 = \sigma_1\sigma_2 =$$
$$= x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + 3x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2.$$

Покладемо $f_1(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) - \sigma_1\sigma_2 = -3x_1x_2x_3$. Очевидно, $f_1(x_1, x_2, x_3) = -3\sigma_3$. Тому $f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$ є шуканим представлення $f(x_1, x_2, x_3)$ у вигляді многочлена від елементарних симетричних многочленів.

Вправи для самостійної роботи

1. Знайдіть всі оборотні елементи в кільці $\mathbb{Q}[x, y]$.

2. Чи незвідні в $\mathbb{Q}[x, y]$ наступні многочлени:

а) $x^2 + y^2 - 1$; б) $x^2 + y^2 - 2xy$?

3. Розкласти наступні многочлени на незвідні множники в кільці $\mathbb{C}[x, y, z]$:

а) $x^2 + y^2$; б) $x^2 + y^2 + 2x + 1$;

в) $x^4 + y^4$; д) $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$.

4. Чи має місце аналог теореми 3 §15 для многочленів кільця $\mathbb{Q}[x, y]$?

5. Які із наступних многочленів є симетричними в кільці $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$:

а) $3x_1^2 + x_2 + 3x_3^2$; б) $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$;

в) $x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2$; д) $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$?

6. Записати в лексикографічному порядку многочлен $x_2^8x_3^6 + 5x_1^3x_2^2x_3 - 8x_1^2x_2^5x_3 - x_1^3$.

7. Знайти вищі одночлени многочленів:

а) $(x_2^3 + x_1^2x_3 - x_3^3)(x_1^2 - x_1x_2x_3)(x_1^3x_2^2 - x_1^4 + x_2^4)$;

б) $2\sigma_1^4\sigma_2^3\sigma_3^2$, де $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, $\sigma_3 = x_1x_2x_3$.

8. Виразити через елементарні симетричні многочлени наступні многочлени від невідомих x_1, x_2, x_3:

а) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$;

б) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_2^2x_3^2 - 2x_1^2x_3^2$;

в) $x_1^5x_2^2 + x_1^2x_2^5 + x_1^5x_3^2 + x_1^2x_3^5 + x_2^5x_3^2 + x_2^2x_3^5$;

г) $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$;

д) $(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2)$;

е) $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$.

9. Виразити через елементарні симетричні многочлени наступні многочлени від невідомих x_1, x_2, x_3, x_4:

а) $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)(x_3 + x_4)$;

б) $(x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3)$.

10. Виразити через елементарні симетричні многочлени многочлен $\sum\limits_{i>j}(x_i - x_j)^2$ від невідомих x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

11. Знайти суму кубів комплексних коренів многочлена $2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 6x + 1$.

12. Знайти значення елементарних симетричних многочленів від комплексних коренів n-го степеня з одиниці.

13. Обчислити суму кубів коренів n-го степеня з одиниці.

14. Довести, що якщо $a + b + c = 0$, тоді $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

15. *Дискримінантом* многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ називається вираз

$$a_0^{2n-2} \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2,$$

де x_1, x_2, ..., x_n — корені цього многочлена. Обчислити дискримінанти многочленів

а) $ax^2 + bx + c$; б) $x^3 + px + q$; в) $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Література

1. Практикум з алгебри і теорії чисел для студентів першого курсу / *Гудивок П. М., Погоріляк Є. Я., Шапочка І. В.* – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2002. – 127 с.
2. *Завало С. Т.* Курс алгебри. – К.: Вища школа, 1985. – 503 с.
3. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
4. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры: Учебник для вузов. – 3-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 272 с.
5. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 416 с.
6. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 624 с.
7. *Виноградов І. М.* Основи теорії чисел. – К.: Радянська школа, 1952. – 159 с.
8. Алгебра і теорія чисел. Прктикум. Частина I / *Завало С. Т., Левищенко С. С., Пилаєв В. В., Рокицький І. О.* – К.: Вища школа, 1983. – 232 с.
9. *Безущак О. О., Ганюшкін О. Г.* Завдання до практичних занять з лінійної алгебри (векторні простори). – К.: ВПЦ „Київський університет“, 2010. – 257 с.
10. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. – 9-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. – 383 с.
11. Сборник задач по алгебре / Под редакцией Кострикина А. И. – 3-е изд. – М.: Физико-математическая литература, 2001. – 464 с.
12. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре.– М.: Наука, 1972. – 304 с.

Предметний покажчик

ШАПОЧКА Ігор Валерійович

Курс лекцій з алгебри

Навчальний посібник

Формат $60 \times 84/16$. Друк офсетний.
Умов. друк. арк. 12,85. Замовлення №84.
Наклад 100 прим.

Видавництво Ужгородського національного університету „Говерла“.
88000, м. Ужгород, вул. Капітульна, 18.
e-mail: hoverla@i.ua

*Свідоцтво про внесення до державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції —
Серія Зт №32 від 31 травня 2006 року*