УДК 517.9

А.П. Креневич (Київський нац. ун-т імені Тараса Шевченка)

АСИМПТОТИЧНА ВІДПОВІДНІСТЬ У СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ВИПАДКОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНИХ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

We obtained sufficient conditions of asymptotic matching of differential system with random perturbation in form $d(x - g(t, x)) = f(t, x)dt + d\xi(t)$ to ordinary differential system.

Для системи диференціальних рівнянь вигляду $d(x - g(t, x)) = f(t, x)dt + d\xi(t)$ наведено достатні умови асимптотичної відповідності розв'язків розв'язкам лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Вступ. Якісна теорія займає значне місце у загальних питаннях дослідження диференціальних рівнянь. Одним із найважливіших розділів цієї теорії є стійкість. Цій проблематиці присвячено безліч робіт, серед яких [1]. Робота присвячена дослідженню якісної поведінки диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної з випадковими збуреннями. Вона присвячена відшуканню системи звичайних диференціальних рівнянь, асимптотична поведінка розв'язків якої, подібна до поведінки розв'язків вихідної сингулярної системи. Це дозволяє перейти від асимптотичного дослідження вихідної системи до дослідження значно простішої системи. Згаданий підхід до дослідження асимптотичної поведінки вивчався багатьма авторами. Так, у [1] наведено теорему Левінсона, що встановлює достатні умови асимптотичної еквівалентності для систем звичайних диференціальних рівнянь. У роботах [2–4] це питання досліджено для стохастичних диференціальних систем, а у роботах [5, 6] для детермінованих диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної. У роботі отримано достатні умови асимптотичної відповідності в середньому квадратичному для вищезгаданого класу рівнянь до лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Постановка задачі та асимптотична відповідність. Розглядається система диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної

$$d(x - g(t, x)) = (Ax + f(t, x))dt + d\xi(t), \tag{1}$$

де $t \geq 0, x \in \mathbf{R^d}$, з початковою умовою

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

Тут A - стала матриця, f, g – неперервні за сукупністю змінних d-вимірні функції такі, що існують додатні сталі L_g, L_f, K, що для всіх $t \geq 0, x, y \in R^d$ виконуються нерівності

$$|g(t, x) - g(t, y)| \leq L_g|x - y|, \tag{3}$$

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L_f|x - y|, \tag{4}$$

$$|f(t, x)| + |g(t, x)| \leq K(1 + |x|), \tag{5}$$

причому $L_g^2 < 1/2$, $\xi(t)$ – деякий неперервний випадковий процес, визначений на імовірнісному просторі $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$, такий, що для всіх $t \geq 0$

$$E|\xi(t)|^2 < \infty.$$

Як відомо [7], за наведених вище умов розв'язок системи (1), що задовольняє початковій умові (2), існує і єдиний на додатній півосі.

Поруч із системою (1) розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$dy = Aydt, \tag{6}$$

де $t \geq 0, x \in \mathbf{R^d}$.

Нехай $X = X(t - \tau)$ матрицант системи (6), нормований в 0, тобто такий, що $X(0) = I$, де I – одинична матриця. Тоді розв'язок системи (1) можна представити в інтегральному вигляді, використовуючи матрицант системи (6).

Лема 1. *Розв'язок рівняння (1) з початковою умовою (2) задовольняє інтегральне рівняння*

$$\begin{gathered} x(t) = X(t)(x_0 - g(0, x_0)) + g(t, x(t)) + \\ + \int\limits_0^t X(t-s)Ag(s, x(s))ds + \int\limits_0^t X(t-s)f(s, x(s))ds + \int\limits_0^t X(t-s)d\xi(s). \end{gathered} \tag{7}$$

Доведення. Перепишемо рівність (7) у вигляді

$$\begin{gathered} x(t) - g(t, x(t)) = X(t)(x_0 - g(0, x_0)) + \\ + \int\limits_0^t X(t-s)Ag(s, x(s))ds + \int\limits_0^t X(t-s)f(s, x(s))ds + \int\limits_0^t X(t-s)d\xi(s) \end{gathered}$$

і обчислимо диференціал від обох частин останньої рівності.

$$\begin{gathered} d[x(t) + g(t, x(t))] = dX(t)(x_0 - g(0, x_0)) + \\ -d\left\{\int\limits_0^t X(t-s)Ag(s, x(s))ds\right\} + d\left\{\int\limits_0^t X(t-s)f(s, x(s))ds\right\} + \\ +d\left\{\int\limits_0^t X(t-s)d\xi(s)\right\} =: \sum_{i=1}^4 D_i. \end{gathered}$$

$$D_1 = dX(t)(x_0 + g(0, x_0)) = AX(t)(x_0 + g(0, x_0))dt.$$

$$D_2 = d\left\{X(t)\int\limits_0^t X(-s)Ag(s, x(s))ds\right\} =$$

$$= A\left\{\int\limits_0^t X(t-s)Ag(s, x(s))ds\right\}dt + Ag(t, x(t))dt.$$

Аналогічно до попереднього, обчислимо

$$D_3 = A\left\{\int_0^t X(t,s)f(s,x(s))ds\right\}dt + f(t,x(t))dt.$$

$$D_4 = A\left\{\int_0^t X(t-s)d\xi(s)\right\}dt + d\xi(t).$$

Таким чином,

$$d[x(t)+g(t,x(t))] =$$

$$= A\left\{X(t)(x_0+g(0,x_0)) + g(t,x(t)) - \int_0^t X(t-s)Ag(s,x(s))ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^t X(t-s)f(s,x(s))ds + \int_0^t X(t-s)d\xi(s)\right\}dt + f(t,x(t))dt + \xi(t).$$

Вираз у фігурних дужках – це $x(t)$. Лему доведено.

Означення 1. *Якщо кожному розв'язку $x(t)$ системи (1) відповідає розв'язок $x(t)$ системи (6), такий, що*

$$\lim_{t\to\infty} E|x(t)-y(t)|^2 = 0,$$

то система (1) називається асимптотично відповідною системі (6) у середньому квадратичному.

При доведенні результатів роботи неодноразово буде використовуватися оцінка, котру сформулюємо у вигляді леми.

Лема 2. *Нехай $f(t)$ – невід'ємна, неперервна на $[t_0,\infty)$ функція. Припустимо, що існує додатна стала K_f така, що*

$$\int_{t_0}^{\infty} f(\tau)d\tau \le K_f < \infty.$$

Тоді для довільного $\alpha > 0$

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau)d\tau \le e^{-\frac{\alpha t}{2}} K_f + \int_{t/2}^{\infty} f(\tau)d\tau.$$

Доведення.

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t/2} e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau)d\tau + \int_{t/2}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau)d\tau \le$$

$$\leq e^{-\frac{\alpha t}{2}} \int\limits_{t_0}^{t/2} f(\tau)d\tau + \int\limits_{t/2}^{t} f(\tau)d\tau \leq e^{-\frac{\alpha t}{2}} K_f + \int\limits_{t/2}^{\infty} f(\tau)d\tau.$$

Лему 2 доведено.

Теорема, наведена нижче, є узагальненням відомої теореми Левінсона у випадку диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної, що збурені випадковим процесом.

Теорема 1. *Нехай розв'язки системи (6) обмежені на* $[0, \infty)$. *Нехай функції* $g(t,y)$, $f(t,y)$ *задовольняють умови*

$$|g(t,y)| \leq q(t)(1+|y|), |f(t,y)| \leq h(t)(1+|y|),$$

де $q(t), h(t)$ *– деякі невід'ємні функції, визначені на додатній півосі, і нехай для них виконуються співвідношення*

$$\int\limits_0^{\infty} q(t)dt = M_q < \infty, \int\limits_0^{\infty} h(t)dt = M_h < \infty, \tag{8}$$

причому $q(t) \to 0, t \to \infty$.

Нехай процес $\xi(t)$ *неперервно диференційований для всіх* $t \in [0, \infty)$, *причому*

$$\int\limits_0^{\infty} E|\dot{\xi}(t)|^2 dt = M_\xi < \infty, E\left(\int\limits_t^{\infty} |\dot{\xi}(\tau)|d\tau\right)^2 \to 0, t \to \infty.$$

Тоді система (1) асимптотично відповідна системі (6) у середньому квадратичному.

Доведення. Оскільки розв'язки системи (6) обмежені, то матрицант $X(t-\tau)$ можна представити у вигляді прямої суми

$$X(t-\tau) = X_1(t-\tau) + X_2(t-\tau), \tag{9}$$

причому

$$\|X_1(t)\| \leq e^{-\alpha t}, \|X_2(t)\| \leq b, t \geq 0, \tag{10}$$

де b, α – деякі додатні сталі.

Перепишемо систему (1), що задовольняє початкову умову (2) за допомогою матрицанта $X(t-\tau)$ у вигляді (7). Оцінивши математичне сповідання від квадрата лівої і правої частини цієї рівності, проводячи викладки, подібні до викладок роботи [2], та скориставшись лемою Гронуолла-Беллмана, можемо показати обмеженість на додатній півосі в середньому квадратичному всіх розв'язків системи (1):

$$E|x(t)|^2 \leq K(x_0).$$

Враховуючи (9), перепишемо рівність (7) у такому вигляді

$$\begin{gathered} x(t) = X(t)(x_0 - g(0,x_0)) + g(t,x(t)) + \\ + \int_0^t X_1(t-\tau)Ag(\tau,x(\tau))d\tau + \int_0^t X_2(t-\tau)Ag(\tau,x(\tau))d\tau + \\ + \int_0^t X_1(t-\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau + \int_0^t X_2(t-\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau \\ + \int_0^t X_1(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau + \int_0^t X_2(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau. \end{gathered} \tag{11}$$

Використаємо еволюційну властивість матриціанта $X(t-\tau) = X(t-s)X(s-\tau)$ і перепишемо останню рівність у вигляді

$$\begin{gathered} x(t) = X(t)\left\{ x_0 - g(0,x_0) + \int_0^\infty X_2(-\tau)Ag(\tau,x(\tau))d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^\infty X_2(-\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau + \int_0^\infty X_2(-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau \right\} + \\ + g(t,x(t)) + \int_0^t X_1(t-\tau)Ag(\tau,x(\tau))d\tau + \\ + \int_0^t X_1(t-\tau)f(\tau,x(\tau))d\tau + \int_0^t X_1(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau - \\ - \int_t^\infty X_2(t-\tau)Ag(\tau,x(\tau))d\tau - \\ - \int_t^\infty X_2(t-\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau - \int_t^\infty X_2(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau. \end{gathered} \tag{12}$$

Кожному розв'язку $x(t)$ системи (1) з початковою умовою $x(0) = x_0$ поставимо у відповідність розв'язок $y(t)$ системи (6) з початковою умовою

$$\begin{gathered} y_0 = x_0 - g(0,x_0) + \int_0^\infty X_2(-\tau)Ag(\tau,x(\tau))d\tau + \\ + \int_0^\infty X_2(-\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau + \int_0^\infty X_2(-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau. \end{gathered} \tag{13}$$

Зауважимо, що всі невласні інтеграли в рівності (13) збігаються в середньому квадратичному. Це випливає з обмеженості в середньому квадратичному розв'язків $x(t)$ системи (1).

Для відповідних розв'язків $x(t)$ та $y(t)$ оцінимо математичне сподівання норми різниці. Очевидно, що

$$x(t) = X(t)x_0,$$

де $x(t_0)$ визначається формулою (13). Тоді з формули (12) маємо

$$E|x(t)-y(t)|^2 = E\left|g(t,x(t)) + \int_0^t X_1(t-\tau)Ag(\tau,x(\tau))d\tau + \right.$$

$$+\int_0^t X_1(t-\tau)f(\tau,x(\tau))d\tau + \int_0^t X_1(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau - \int_t^\infty X_2(t-\tau)Ag(\tau,x(\tau))d\tau -$$

$$\left. -\int_t^\infty X_2(t-\tau)f(\tau,x(\tau))d\tau - \int_t^\infty X_2(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau\right|^2 \le$$

$$\le 7E|g(t,x(t))|^2 + 7E\left|\int_0^t X_1(t-\tau)Ag(\tau,x(\tau))d\tau\right|^2 + \tag{14}$$

$$+7E\left|\int_0^t X_1(t-\tau)f(\tau,x(\tau))d\tau\right|^2 + 7E\left|\int_0^t X_1(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau\right|^2 +$$

$$+E\left|\int_t^\infty X_2(t-\tau)Ag(\tau,x(\tau))d\tau\right|^2 +$$

$$\le 7E\left|\int_t^\infty X_2(t-\tau)f(\tau,x(\tau))d\tau\right|^2 + 7E\left|\int_t^\infty X_2(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau\right|^2.$$

Покажемо прямування до нуля кожного з доданків правої частини нерівності (14). Для третього і шостого доданків це показано у роботах [2, 3]. Прямування до нуля другого і п'ятого доданків можна показати аналогічно, використавши умови, що накладено на функцію $g(t,x)$. Прямування до нуля першого доданку є очевидним фактом з урахуванням умов на функцію $g(t,x)$. Покажемо прямування до нуля четвертого і сьомого доданків. Використовуючи нерівність Коші-Буняковського, отримаємо

$$E\left|\int_0^t X_1(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau\right|^2 \le E\left(\int_0^t \|X_1(t-\tau)\||\dot{\xi}(\tau)|d\tau\right)^2 \le$$

$$\le \int_0^t \|X_1(t-\tau)\|d\tau \int_0^t \|X_1(t-\tau)\|E|\dot{\xi}(\tau)|^2 d\tau \le$$

$$\le \int_0^\infty \|X_1(t-\tau)\|d\tau \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)}E|\dot{\xi}(\tau)|^2 d\tau$$

Використовуючи лему 2, отримуємо, що права частина останньої нерівності прямує до нуля. Нарешті

$$E\left|\int_t^\infty X_2(t-\tau)\dot{\xi}(\tau)d\tau\right|^2 \le E\left(\int_t^\infty \|X_2(t-\tau)\||\dot{\xi}(\tau)|d\tau\right)^2 \le b^2 E\left(\int_t^\infty |\dot{\xi}(\tau)|d\tau\right)^2.$$

Таким чином,

$$\lim_{t\to\infty} E|x(t) - y(t)|^2 = 0.$$

Висновки. У роботі розглянуто систему диференціальних рівнянь збурених випадковим процесом, не розв'язаних відносно похідної. Наведено достатні умови асимптотичної відповідності розв'язків такої системи розв'язкам лінійної диференціальної системи зі сталими коефіцієнтами. Ці результати стануть у нагоді при дослідженні якісної поведінки розв'язків вищезгаданих рівнянь, при дослідженні стійкості чи асимптотичної поведінки, а також можуть практично застосовуватися для конкретних задач, що виникають при моделюванні різних фізичних, біологічних чи економічних процесів.

1. Демидович Б.П.Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука. 1967. — 472 с.
2. Креневич А.П. Асимптотична еквівалентність розв'язків лінійних стохастичних систем Іто // Укр.мат.журн.—2006.—58, №10.—С.1368—1384.
3. Креневич А.П. Асимптотична еквівалентність розв'язків квазілінійних стохастичних систем Іто // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. —2006.- №1.—С.69-76.
4. Krenevych Andriy. Asymptotic Equivalence of the solutions of The Linear Stochastic Ito Equations in the Hilbert space // Theory of Stochastic Processes.—2007.—13(29), №1-2.—P.103—109.
5. Креневич А.П., Богоніс А.Р. Дослідження асимптотичної еквівалентності сингулярних диференціальних рівнянь // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки — 2009. — №1. — С. 55–59.
6. Креневич А.П., Могильова В.В. Асимптотичне дослідження сингулярних диференціальних рівнянь у гільбертовому просторі // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наукових праць. Вип. 454. Математика. — Чернівці: Рута, 2009. — С. 59 - 63.
7. Креневич А.П. Про розв'язання диференціального рівняння з випадковим збуренням не розв'язаного відносно похідної// Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки —2012.- №3.—С.81-84.

Одержано 17.10.2012