УДК 517.9

М. В. Прохоренко (Національний ун-т "Львівська політехніка")
А. Я. Вус (Львівський національний ун-т імені Івана Франка)

ПРОЦЕС ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ СТЕРЖНЯ З ІМПУЛЬСНИМ ПІДПОМПОВУВАННЯМ У НЕФІКСОВАНІ МОМЕНТИ ЧАСУ

We study the process of heat conduction in a bar with the continuously distributed sources of heat and with impulsive pumping in moments, where the regulative functional amounts to critical level. The solutions, for which a pulse action takes place infinitely often are found. Conditions of existence of these solutions are established. The equation for finding the moment of pulse action is obtained.

У роботі розглянуто процес поширення тепла в стержні з неперервно розподіленими джерелами тепла та з імпульсним підпомповуванням у моменти, коли заданий регулюючий функціонал досягає критичного рівня. Встановлено умови існування розв'зків, для яких імпульсна дія відбувається нескінченну кількість разів, побудовано ці розв'язки, записано рівняння для відшукання моменту імпульсної дії.

Вступ. При побудові математичної моделі існуючих фізичних, технічних, біологічних та ін. процесів із швидкозмінними збуреннями виникає необхідність вивчення диференціальних рівняннь з імпульсною дією. Розглядають вплив імпульсної дії як на звичайні диференціальні рівняння [1, 2], так і на рівняння в частинних похідних [3–7]. У [3, 4] розглянуто поширення тепла в обмеженому стержні з неперервно розподіленими джерелами тепла, здатними у фіксовані моменти часу "миттєво"змінити температуру. Процес охолодження стержня з підвищенням температури в нефіксовані моменти часу, а саме в моменти коли заданий теплорегулюючий функціонал досягне критичного рівня, досліджено в [6, 7].

У цій роботі продовжено дослідження розпочаті в [7]. Розглянуто процес поширення тепла в стержні з неперервно розподіленими джерелами тепла, а імпульсна дія регулюється заданим функціоналом. Встановлено умови існування розв'зків, для яких імпульсна дія відбувається нескінченну кількість разів, побудовано ці розв'язки, записано рівняння для відшукання моменту імпульсної дії.

1.Формулювання задачі. Розглянемо задачу для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in (0,l) \times \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

з початковою і граничними умовами

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

де $u(x,t)$ - температура стержня в точці з абсцисою x в момент часу t; a, l - додатні сталі, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$; функція $u_0 \in C([0,l])$, має кусково-неперервну похідну для $x \in [0,l]$ та виконується умова узгодженості $u_0(0) = u_0(l) = 0$;

функція f неперервна в області $[0,l]\times\mathbb{R}_+$, має кусково-неперервні похідні по x для $x\in[0,l]$ та $f(0,t)=f(l,t)=0$.

За регулюючий функціонал візьмемо

$$I_u(t)=\int\limits_0^l \beta(x)\,u(x,t)\,dx, \tag{4}$$

де $\beta\in C[0,l]$, має кусково-неперервну похідну для $x\in[0,l]$. В моменти, коли $I_u(t)$ досягає заданого "критичного значення" $I_0>0$, в середовище миттєво надходить додаткова кількість тепла за законом

$$\left[u(x,t+0)-u(x,t-0)\right]\big|_{I_u(t-0)=I_0}=\alpha(x), \tag{5}$$

де $x\in[0,l]$, $\alpha\in C[0,l]$ та має кусково-неперервну похідну першого порядку для $x\in[0,l]$, крім того $\alpha(0)=\alpha(l)=0$.

Через $t_k, k\in\mathbb{N}$ позначимо моменти імпульсної дії, тобто моменти коли $I_u(t_k)=I_0$.

Під розв'язком задачі (1) – (2), (5) розуміємо функцію $u=u(x,t)$ двічі неперервно диференційовну за змінною x та неперервно диференційовну за змінною t в кожній області $D_k=\{(x,t)\,|x\in[0,l]\,,t\in(t_k,t_{k+1})\,,$
$I_u(t)\neq I_0, t_0=0\}, k=0,1,2,\ldots$, крім того функція u та її похідна u_t неперервні зліва в точках $t=t_k, k\in\mathbb{N}$.

Розв'язок задачі (1) – (2), (5) існує, єдиний та визначений в області $D=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} D_k$ як розв'язок задачі (1), (3) для рівняння теплопровідності в кожній області $D_k=\{(x,t)\,|x\in[0,l]\,,\ t\in(t_k,t_{k+1})\,,I_u(t)\neq I_0,t_0=0\}, k=0,1,2,\ldots$ з початковою умовою:
– (2), якщо $k=0$ і $I_u(0)\neq I_0$;
– $\tilde u_0(x)=u_0(x)+\alpha(x)\,,\ x\in[0,l]$, якщо $k=0$ і $I_u(0)=I_0$;
– $u_k(x)=u(x,t_k-0)+\alpha(x)\,,\ x\in[0,l]$, якщо $k=1,2,\ldots$ і $I_u(t_k-0)=I_0$.

2. Асимптотична поведінка моментів імпульсної дії.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:* $I_u(0)\geqslant I_0$, $\int\limits_0^l\alpha(x)\,\beta(x)\,dx>0$ *та існує стала* $M_0>0$, *що функція* f *задовольняє співвідношення*

$$|f(x,t)|\leqslant M_0e^{-t}.$$

Тоді $t_k\to+\infty$ *при* $k\to+\infty$.

Доведення. Розв'язок задачі (1) – (2) шукаємо у вигляді:

$$u(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}T_j(t)\sin\frac{j\pi}{l}x. \tag{6}$$

Функції $T_j(t)$ для кожного $j=1,2,\ldots$ визначаються як розв'язки диференціального рівняння

$$T_j'(t)+\left(\frac{a\pi j}{l}\right)^2T_j(t)=f_j(t)\,,$$

з початковою умовою

$$T_j(0) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l u_0(x)\sin\frac{j\pi}{l}x\,dx = u_j$$

та мають вигляд

$$T_j(t) = u_j e^{-bj^2t} + \int\limits_0^t f_j(\tau)\,e^{-bj^2(t-\tau)}d\tau, \tag{7}$$

$$f_j(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x,t)\sin\frac{j\pi}{l}xdx,\, b = \left(\frac{a\pi}{l}\right)^2.$$

Підставивши (7) у (6), знаходимо розв'язок задачі (1) – (2) для $(x,t)\in[0,l]\times\mathbb{R}_+$, а саме

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty}\left\{u_j e^{-bj^2t} + \int\limits_0^t f_j(\tau)\,e^{-bj^2(t-\tau)}d\tau\right\}\sin\frac{j\pi}{l}x. \tag{8}$$

При підстановці (8) в (4) одержуємо вигляд регулюючого функціоналу

$$I_u(t) = \frac{l}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{u_j e^{-bj^2t} + \int\limits_0^t f_j(\tau)\,e^{-bj^2(t-\tau)}d\tau\right\}\beta_j, \tag{9}$$

де $\beta_j = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l \beta(x)\sin\dfrac{j\pi}{l}x\,dx.$

Оскільки $|f(x,t)|\leqslant M_0e^{-t}$, то вірною є оцінка

$$\left|\int\limits_0^t f_j(\tau)\,e^{-bj^2(t-\tau)}d\tau\right| \leqslant \frac{M_0e^{-t}}{bj^2}\left(1-e^{-bj^2t}\right) \leqslant \frac{M_0e^{-t}}{bj^2}.$$

Таким чином, справджується $\lim\limits_{t\to+\infty} I_u(t) = 0$. Отже, при заданому I_0 можливі наступні випадки:

а) $I_0 > I_u(0)$, тоді імпульси відсутні і $I_u(t)\to 0$ при $t\to+\infty$;

б) $I_0 \leqslant I_u(0)$, тоді існує момент часу $t = t_1 \geqslant 0$, коли здійснюється перший імпульс. Момент t_1 шукаємо з рівняння

$$\frac{l}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{u_j e^{-bj^2t} + \int\limits_0^t f_j(\tau)\,e^{-bj^2(t-\tau)}d\tau\right\}\beta_j = I_0.$$

Крім того

$$I_u(t_1+0) = \int\limits_0^l \left(u(x,t_1-0)+\alpha(x)\right)\beta(x)\,dx = I_0 + \int\limits_0^l \alpha(x)\beta(x)\,dx > I_0. \tag{10}$$

Для $t > t_1$ розв'язуємо задачу (1), (3), а замість (2), з урахуванням (5), маємо умову

$$u(x, t_1) = u_1(x) + \alpha(x),$$

де $u_1(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \left\{ u_j e^{-bj^2 t_1} + \int\limits_0^{t_1} f_j(\tau) e^{-bj^2(t_1 - \tau)} d\tau \right\} \sin \frac{j\pi}{l} x.$

Розв'язок задачі (1) – (2), (5) для $(x,t) \in [0,l] \times [t_1, t_2)$ набуде вигляду

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ u_j e^{-bj^2 t} + \int\limits_0^t f_j(\tau) e^{-bj^2(t-\tau)} d\tau + \right.$$

$$\left. + \alpha_j e^{-bj^2(t-t_1)} \right\} \sin \frac{j\pi}{l} x, \ \alpha_j = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \alpha(x) \sin \frac{j\pi}{l} x \, dx.$$

Для регулюючого функціоналу

$$I_u(t) = \frac{l}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ u_j e^{-bj^2 t} + \int\limits_0^t f_j(\tau) e^{-bj^2(t-\tau)} d\tau + + \alpha_j e^{-bj^2(t-t_1)} \right\} \beta_j \qquad (11)$$

справджується $\lim\limits_{t \to +\infty} I_u(t) = 0$. Тому, з урахуванням (10), існує наступний момент часу $t_2 \, (t_2 > t_1)$, коли $I_u(t_2) = I_0$. Крім того

$$I_u(t_2 + 0) = \int\limits_0^l (u(x, t_2 - 0) + \alpha(x)) \beta(x) \, dx = I_0 + \int\limits_0^l \alpha(x) \beta(x) \, dx > I_0.$$

Таким чином, виконання умов $\int\limits_0^l \alpha(x) \beta(x) \, dx > 0$ та $f(x,t) = O(e^{-t})$ при $t \to +\infty$ забезпечують для заданих функцій $\alpha(x), \beta(x), f(x,t)$ існування нескінченної послідовності імпульсів задачі (1) – (2), (5), моменти виникнення яких позначаємо $(0 \leqslant) \, t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$.

Продовжуючи аналогічно міркування, одержимо розв'язок задачі (1) – (2), (5) для $(x,t) \in [0,l] \times [t_k, t_{k+1}), (k = 0, 1, \ldots; \ t_0 = 0)$, а саме

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ u_j e^{-bj^2 t} + \int\limits_0^t f_j(\tau) e^{-bj^2(t-\tau)} d\tau + \alpha_j \sum_{i=1}^{k} e^{-bj^2(t-t_i)} \right\} \sin \frac{j\pi}{l} x. \qquad (12)$$

Регулюючий функціонал при $t_k \leqslant t < t_{k+1}$ має вигляд

$$I_u(t) = \frac{l}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ u_j e^{-bj^2 t} + \int\limits_0^t f_j(\tau) e^{-bj^2(t-\tau)} d\tau + \alpha_j \sum_{i=1}^{k} e^{-bj^2(t-t_i)} \right\} \beta_j \qquad (13)$$

і $\lim\limits_{t \to +\infty} I_u(t) = 0$. Цим і доводиться твердження теореми.

Теорема 2. *Нехай існує стала* $M_1 > 0$ *така, що функція* f *задовольняє співвідношення* $|f(x,t)| \leqslant M_1$, *виконуються умови* $\int\limits_0^l \alpha(x)\beta(x)\,dx > 0$ *та* $I_u(0) \geqslant I_0 \geqslant \dfrac{2M_1 l^2}{a^2\pi^2}$. *Тоді* $t_k \to +\infty$ *при* $k \to +\infty$.

Доведення. Проводимо його аналогічно до доведення теореми 1, здійснивши заміну сталої M_0 на M_1. Тоді у співвідношеннях (9), (11) та (13) справджується нерівність $\lim\limits_{t\to+\infty} I_u(t) \leqslant 2M_1/b$, оскільки

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_0^t f_j(\tau)\,e^{-bj^2(t-\tau)}d\tau\right| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\frac{M_1}{bj^2}\left(1-e^{-bj^2t}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\frac{M_1}{bj^2} \leqslant \frac{2M_1}{b}, \qquad b=\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2.$$

Цим і доводимо твердження теореми.

Оскільки функції u_0 та α неперервні, мають кусково-неперервну похідну та перетворюються в нуль на кінцях відрізка $[0,l]$, то ряди

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^l u_0(x)\sin\frac{j\pi}{l}x\,dx\right)\sin\frac{j\pi}{l}x, \quad \sum_{j=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^l \alpha(x)\sin\frac{j\pi}{l}x\,dx\right)\sin\frac{j\pi}{l}x$$

збігаються для $x \in [0,l]$ абсолютно і рівномірно [8, c.201].

Оскільки для $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 1,2,\ldots$, маємо $t - t_i \geqslant 0$. Звідси, справедливі нерівності $0 < e^{-bj^2(t-t_i)} \leqslant 1$ та, відповідно, тригонометричні ряди

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^l u(x)\sin\frac{j\pi}{l}x\,dx\right)e^{-bj^2t}\sin\frac{j\pi}{l}x,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^l \alpha(x)\sin\frac{j\pi}{l}x\,dx\right)e^{-bj^2(t-t_i)}\sin\frac{j\pi}{l}x$$

також збігаються в області $\Omega = \left\{(x,t) : x\in[0,l], t \in \bigcup\limits_{i=0}^{\infty}(t_i,t_{i+1})\right\}$ абсолютно і рівномірно для кожного $i = 1,2,\ldots$ [3].

З умов, накладених на функцію $f(x,t)$, випливає оцінка

$$\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^l f(x,\tau)\sin\frac{j\pi}{l}xe^{-bj^2(t-\tau)}dxd\tau\right| \leqslant \frac{M}{j^2}.$$

Тоді ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^t\int\limits_0^l f(x,\tau)\sin\frac{j\pi}{l}xe^{-bj^2(t-\tau)}dxd\tau\right)\sin\frac{j\pi}{l}x \tag{14}$$

мажорується збіжним рядом $M\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2}$. Ряд (14) збігається абсолютно і рівномірно для $(x,t) \in [0,l] \times \mathbb{R}_+$.

Таким чином, функція u, визначена формулою (12), неперервна в області Ω, має розриви першого роду при $t = t_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, задовольняє початкову і граничні умови (3) – (2) та умову імпульсної дії (5). Крім того, функція u задовольняє рівняння (1) в області $(0,l) \times [0,+\infty)$, оскільки ряди, одержані із (12) почленним диференціюванням за x два рази та за t один раз, збігаються абсолютно і рівномірно в області $(0,l) \times [0,+\infty)$. Цей факт випливає з того, що для довільного $t \in (t_i, t_{i+1})$, $(i = 1, 2, \ldots)$, і досить великого натурального j справедливі нерівності

$$0 < j^2 e^{-bj^2 t} < 1,\ 0 < j^2 e^{-bj^2 (t-t_i)} < 1,\ i = 1, 2, \ldots.$$

Відповідно, формула (12) описує процес розповсюдження тепла в обмеженому стержні, що знаходиться під дією джерел тепла, на кінцях стержня підтримується нульова температура і, коли температура стержня знижується до рівня I_0, відбувається миттєве збільшення температури стержня в точці з абсцисою x на величину $\alpha(x)$.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием – К. : Вища шк. – 1987. – 287 с.
2. *Laksmikantam V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Scientific. – 1989. – 273 p.
3. *Елгондиев К. К., Пильтяй М. М., Хомченко Л. В.* Распространение тепла в однородном стержне с импульсным воздействием // Крайовізадачі для диф. р-нь : зб.наук.пр. – Чернівці: Прут. – 2002. – Вип. 10. – С. 59 - 65.
4. *Елгондыев К. К., Самойленко В. Г.* Периодические колебания струны с импульсным воздействием // Крайові задачі для диф. р-нь : зб. наук. пр. – Чернівці: Прут. – 2006. – Вип. 14. – С. 53 - 61.
5. *Кирилич В. М., Мышкис А. Д., Прохоренко М. В.* Колебания мембраны под воздействием импульсных сил / // Укр. матем. журн. – 2009. – Т. 61, № 8. – С. 1148 - 1153.
6. *Мышкис А. Д.* Процес теплопроводности с авторегулируемой импульсной поддержкой // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 2. – С. 35–43.
7. *Мороз М. В.* Одна задача для рівняння теплопровідності з імпульсною дією // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : зб.наук.пр. – К. : Ін-т математики НАН України. – 1998. – Вип. 1(17). – С. 170 - 177.
8. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики – М. : Наука, 1966.– 724 с.

Одержано 02.10.2012