УДК 519.49

М. В. Стойка (Ужгородський нац. ун-т)

ПРОЕКТИВНІ МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННИХ ГРУП НАД КІЛЬЦЕМ ЦІЛИХ P-АДИЧНИХ ЧИСЕЛ

The present paper deals with the task of the wildness of the problem of description of all non-equivalent matrix $\mathbb{Z}_p$-representation of the ring $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$, which is twisted group ring of a finite p-group G and the ring of p-adic integers $\mathbb{Z}_p$ with the factor system $\{\lambda_{a,b}\}$ $(\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_p^*,\ a, b \in G)$. There were obtained necessary and sufficient conditions of not wildness of the problem of description of projective $\mathbb{Z}_p$-representations of finite group G for some cases.

У даній роботі розглядається питання, коли задача описання всіх нееквівалентних матричних $\mathbb{Z}_p$-зображень кільця $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$, що є схрещеним груповим кільцем скінченної p-групи G і кільця цілих p-адичних чисел $\mathbb{Z}_p$ при системі факторів $\{\lambda_{a,b}\}$ $(\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_p^*,\ a, b \in G)$ є дикою. Отримано необхідну і достатню умови ручності задачі описання проективних $\mathbb{Z}_p$-зображень скінченної групи G при деяких умовах.

Нехай K — комутативне кільце з одиницею, K^* — мультиплікативна група кільця K, G — скінченна група і $GL(n, K)$ є групою всіх оборотних $n \times n$ матриць над кільцем K. Ми скажемо, що зображення $\Gamma : G \to GL(n, K)$ є проективним матричним зображенням степеня n групи G, якщо виконується рівність

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \mu_{a,b}\Gamma(a, b) \ (\mu_{a,b} \in K^*;\ a,\ b \in G). \tag{1}$$

З рівності (1) випливає наступна рівність

$$\mu_{a,bc} \cdot \mu_{b,c} = \mu_{ab,c} \cdot \mu_{a,b} \ \ (a, b, c \in G). \tag{2}$$

Система $\{\mu_{a,b}\}$ $|G|^2$ елементів із K^*, що задовольняють рівність (2), називається системою K-факторів групи G.

Проективне K-зображення Γ групи G, що задовольняє (1), називають ще проективним матричним зображенням з системою факторів $\{\mu_{a,b}\}$.

Два проективних зображення Γ_1 і Γ_2 групи G над кільцем K називаються еквівалентними, якщо існує така квадратна матриця C над K і елементи $\alpha_g \in K^*$, що задовольняють рівність

$$C^{-1}\Gamma_1(g)C = \alpha_g\Gamma_2(g) \quad (g \in G).$$

Схрещеним груповим кільцем $\Lambda = (G, K, \lambda)$ групи G ($|G| = d$) і кільця K, що відповідає системі факторів $\{\lambda_{a,b}\}$, називається алгебра рангу d над K, з системою базисних елементів u_a $(a \in G)$, котрі задовольняють умову $u_a, u_b = = \lambda_{a,b}u_{ab}$ $(a, b \in G)$.

Нехай G — скінченна p-група, $\mathbb{Z}_p$ — кільце цілих p-адичних чисел, $\mathbb{Z}_p^*$ — мультиплікативна група кільця $\mathbb{Z}_p$ і $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$ — схрещене групове кільце групи G і кільця $\mathbb{Z}_p$ з системою факторів $\{\lambda_{a,b}\}$ $(\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_p^*,\ a, b \in G)$. В даній роботі досліджується питання, коли задача описання нееквівалентних матричних $\mathbb{Z}_p$-зображень кільця $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$ є дикою.

Гудивок П. М. досліджував проблему, коли задача описання нееквівалентних матричних $\mathbb{Z}_p$-зображень скінченної групи і кільця цілих p-адичних чисел $\mathbb{Z}_p$ є дикою, тобто включає задачу про подібність пар $n \times n$-матриць при $p > 2$ [1, 2].

Результати отримані в [3, 4] та [5, 6] сформулюємо наступним чином.

Теорема 1. ([3, 4]). *Нехай G — скінченна p-група і $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$ — схрещене групове кільце групи G і кільця цілих p-адичних чисел $\mathbb{Z}_p$ з системою факторів із $\mathbb{Z}_p^*$. $\tilde{\Lambda} = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$, $T_2 = \mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$, $\tilde{\Lambda}' = T_2 \otimes_{\mathbb{Q}_p} \tilde{\Lambda}$ і d є числом нееквівалентних матричних $\mathbb{Q}_p$-зображень алгебри $\tilde{\Lambda}$. $n(\Lambda)$ — число нееквівалентних нерозкладних матричних $\mathbb{Z}_p$-зображень кільця Λ) є скінченним тоді і тільки тоді коли виконується одна з наступних умов:*

1) G — *циклічна група порядку* p^r $(r \leq 2)$;
2) G — *циклічна p-група* $(p > 2)$ *і* $d < 3$;
3) G — *циклічна 2-група і* $d = 1$;
4) G — *абелева група типу* $(3, 3)$ *і* $d = 2$;
5) G — *абелева група типу* $(2^m, 2)$ $(m \geq 1)$ *і кільце* $\Lambda' = R_2 \otimes_{\mathbb{Z}_2} \Lambda$ (R_2 – *кільце цілих величин поля* T_2) *задається співвідношеннями:*
$$u^{2^m} = -5^r,\ v^2 = 1,\ uv = vu\ (0 \leq r < 2^m);$$
6) G — *абелева група типу* $(2^m, 2)$ $(m \geq 1)$ *і* $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$ *не комутативне кільце і* $\tilde{\Lambda}' = T_2 \otimes_{\mathbb{Q}_2} \tilde{\Lambda}$ *є простою алгеброю;*
7) G — *група діедра і* $\tilde{\Lambda}' = T_2 \otimes_{\mathbb{Q}_2} \tilde{\Lambda}$ *є простою алгеброю.*

Теорема 2. ([5, 6]). *Нехай G — скінченна p-група порядку $|G| > 1$, F_p — скінченне розширення поля $\mathbb{Q}_p$, K_p — кільце цілих величин поля F_p, T_p — поле інерції поля F_p. Група G є ручною над кільцем K_p тоді і тільки тоді коли виконується одна з умов:*

1) G — *абелева група типу* $(2, 2)$ *і* $F_2 = T_2$;
2) G — *циклічна p-група порядку* p $(p > 2)$ *і* $F_p = T_p$;
3) G — *циклічна 2-група порядку 8 і* $F_2 = T_2$;
4) G — *група порядку* p $(p > 3)$ *і* $(F_p : T_p) \leq 2$;
5) G — *циклічна група порядку 4 і* $(F_2 : T_2) \leq 2$;
6) G — *група порядку 3 і* $(F_3, T_3) \leq 4$;
7) G — *група порядку 2.*

Лема 1. *Нехай H — підгрупа скінченої групи G. $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$ — є схрещеним груповим кільцем групи G і кільця цілих p-адичних чисел $\mathbb{Z}_p$ з системою факторів із $\mathbb{Z}_p^*$, $\Lambda_H = (H,\ \mathbb{Z}_p,\ \lambda) \subset \Lambda$. Якщо Λ_H є диким кільцем над $\mathbb{Z}_p$, тоді і Λ є диким кільцем над $\mathbb{Z}_p$.*

Доведення. Нехай M—Λ_H-модуль з скінченним $\mathbb{Z}_p$-базисом і $M^\Lambda = \Lambda \otimes_{\Lambda_H} M$, де
$$u(v \otimes m) = uv \otimes m\ (u, v \in \Lambda,\ m \in M).$$

Нехай $\{u_g |\, g \in G\}$ є природнім $\mathbb{Z}_p$-базисом кільця Λ [7]. Тоді можемо записати:
$$M^\Lambda = u_{g_1} \otimes M \oplus \ldots \oplus u_{g_s} \otimes M, \tag{3}$$

де $g_1, g_2, \ldots, g_s$ є представниками системи лівих суміжних класів групи G за підгрупою H $(g_1 = e)$. Очевидно, що u_e – одиничний елемент кільця Λ і $u_e \otimes M \cong$ $\cong M$ як Λ_H модуль. Тоді з легко бачити, що:

$$W = u_{g_2} \otimes M \oplus ... \oplus u_{g_s} \otimes M$$

є Λ_H-модуль з скінченним $\mathbb{Z}_p$-базисом. Тоді з (3) випливає, що:

$$(M^\Lambda)_{\Lambda_H} \cong M \oplus W. \tag{4}$$

Звідси, якщо M_1 — Λ_H-модуль з скінченним $\mathbb{Z}_p$-базисом, тоді:

$$(M_1^\Lambda) \cong M_1 \oplus W_1. \tag{5}$$

Як відомо, для Λ-модулів справедлива теорема Крулля-Шмідта, тоді з (4) і (5) отримаємо, що задача ізоморфізму Λ-модулів M^Λ і M_1^Λ включає задачу ізоморфізму Λ_H-модулів M та M_1. Таким чином, якщо Λ_H є диким над $\mathbb{Z}_p$, тоді Λ також дике над $\mathbb{Z}_p$.

Останнє доводить лему.

Лема 2. *Нехай F_p — скінченне розширення поля $\mathbb{Q}_p$, T_p — скінченне нерозгалужене розширення поля F_p, $R_p(L_p)$ — кільце цілих величин поля $F_p(T_p)$ і Λ є скінченновимірним R_p-порядком в сепарабельній F_p-алгебрі і $\Lambda' = L_p \otimes_{R_p} T_p$. Λ-порядок є диким над R_p тоді і тільки тоді якщо Λ' порядок є диким над L_p.*

Доведення леми можна отримати із (5) замінюючи F_p на $\mathbb{Q}_p$.

Лема 3. *Нехай G — циклічна 2-група порядку $|G| = 2^m$ $(m \geq 1)$, $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_2, \lambda)$ — схрещене групове кільце групи G і кільця цілих 2-адичних чисел $\mathbb{Z}_2$ з системою факторів $\{\lambda_{a,b}\}$ $(\lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_2^*)$. Схрещене групове кільце Λ є ручним над $\mathbb{Z}_2$ тоді і тільки тоді коли виконується одна з наступних умов:*

1) $|G| \leq 8$;

2) $|G| = 2^m$ $(m > 3)$ *і* $\tilde{\Lambda} = \mathbb{Q}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_2} \Lambda$ *є полем.*

Доведення. Очевидно, що якщо G є циклічною групою порядку 2^m $(m \geq 1)$, тоді кільце $\Lambda = (G, \mathbb{Z}_2, \lambda)$ може бути задане наступними співвідношеннями:

$$u^{2^m} = \pm 5^r \ (0 \leq r \leq 2^m).$$

Розглянемо наступні можливі випадки.

1) Нехай $u^{2^m} = -5^r$ $(0 \leq r \leq 2^m)$. Тоді $\Lambda \cong Z_2[\theta]$, де θ – корінь незвідного многочлена: $x^{2^m} + 5^r$ над полем $\mathbb{Q}_2$. В цьому випадку $n(\Lambda) < \infty$ ($n(\Lambda)$ – число нееквівалентних нерозкладних матричних $\mathbb{Z}_2$ – зображень кільця Λ).

2) Нехай $u^{2^m} = 5^r$ $(0 \leq r < 2^m)$. Випадок $r = 0$ є очевидним (теорема 1 ([3, 4])). Нехай далі $r \neq 0$. Тоді $r = 2^S$ $(0 \leq S \leq m)$. В цьому випадку ми теж отримаємо декілька випадків.

а) Нехай $S = 4$ і $m = 5$, тобто $u^{2^5} = 5^{2^4}$. Поставимо $u_1 = \frac{u^2}{5}$. Тоді отримаємо: $u_1^{2^4} = \frac{u^{2^5}}{5^{2^4}} = 1$. Звідси кільце Λ містить $\mathbb{Z}_2 H$ (H – циклічна група 16-го порядку). Тоді на основі теореми 2 ([5, 6]) ми отримаємо, що Λ є диким кільцем над кільцем $\mathbb{Z}_2$.

b) $S=0$. Тоді $n(\Lambda)<\infty$.

c) $S=3$, $m=4$, тобто $u^{16}=5^8$. Тоді матимемо:

$$x^{16}-5^8=(x^8+5^4)(x^4+5^2)(x^2+5)(x^2-5).$$

Нехай $T=\mathbb{Q}_5$ і R є кільцем цілих величин поля T. Тоді отримаємо, що алгебра $T\otimes_{\mathbb{Q}_2}\Lambda$ матиме 5 незвідних T-зображень, бо $x^2-5=(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$. Таким чином беручи до уваги лему 2 отримаємо, що Λ є диким порядком над $\mathbb{Z}_2$.

d) $S=2$, $m=3$ i.e. $u^8=5^4$.

Перейдемо до розгляду поля $T=\mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$. Нехай R — кільце цілих величин поля T. Тоді отримаємо: $u_1^8=1$, де $u_1=\frac{u}{\sqrt{5}}$. Звідси та з [1, 2] одержимо, що Λ не є диким кільцем.

e) Нехай $S=2$, $m=4$, тобто $u^{16}=5^4$. Тоді одержимо:

$$x^{16}-5^4=(x^8-5^2)(x^8+5^2)=(x^8+5^2)(x^4+5)(x^4-5).$$

Нехай θ_3 — корінь многочлена x^8+5^2, θ_2 — многочлена x^4+5, θ_1 — многочлена x^4-5, $t_3=\theta_3-1$, $t_2=\theta_2-1$, $\tilde{\theta}_i$ — матриця, що відповідає оператору множення на θ_i в $\mathbb{Z}_2$-базисі: $1,\theta_3,\ldots,\theta_3^{m_i}$ кільця $Z_2[\theta_i]$; $\tilde{\theta}_i^{(n)}=\tilde{\theta}_i\otimes E\,(i=1,2,3;\ E$ — одинична $n\times n$ матриця, $A\otimes B$ — кронекерівський добуток матриць A і B) і $\langle\delta_{rj}\rangle$ — $m_r\times m_j$-матриця, у якої всі стовпці, крім останнього, нульові, а останній містить координати елемента $\delta_{rj}\in\mathbb{Z}_2[\theta_r]$ в $\mathbb{Z}_2$-базисі $1,\theta_3,\ldots,\theta_3^{m_r}$ кільця $\mathbb{Z}_2[\theta_i]$ $(r=$ $=2,3;\ 1\le j<r)$. Розглянемо наступне $\mathbb{Z}_2$-зображення $\Gamma(A,B)$ кільця Λ:

$$\Gamma_u(A,B)=\begin{pmatrix}\tilde{\theta}_3^{(n)} & 0 & \langle t_3^2\rangle\otimes E & 0 & \langle 1\rangle\otimes A & \langle 1\rangle\otimes B\\ 0 & \tilde{\theta}_3^{(n)} & 0 & \langle t_3\rangle\otimes E & \langle 1\rangle\otimes E & 0\\ 0 & 0 & \tilde{\theta}_2^{(n)} & 0 & \langle t_2\rangle\otimes E & 0\\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_2^{(n)} & 0 & \langle t_2^2\rangle\otimes E\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_1^{(n)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_1^{(n)}\end{pmatrix},$$

де A і B — довільні $n\times n$ матриці над кільцем $\mathbb{Z}_2$ і n — довільне натуральне число.

В цьому зображенні ми маємо пару нееквівалентних нерозкладних зображень:

$$u\to\begin{pmatrix}\tilde{\theta}_3 & \langle t_3^j\rangle\otimes E\\ 0 & \tilde{\theta}_2\end{pmatrix},\ u\to\begin{pmatrix}\tilde{\theta}_2 & \langle t_2^j\rangle\otimes E\\ 0 & \tilde{\theta}_1\end{pmatrix},\ (j=0,1,2,3).$$

Звідси та з леми 2 одержимо, що Λ є диким кільцем над $\mathbb{Z}_2$.

1) Нехай $S=1$, $m=4$, тобто $u^{16}=5^2$.

В цьому випадку отримаємо:

$$x^{16}-5^2=(x^8+5)(x^8-5)=(x^8+5)(x^4+\sqrt{5})(x^4-\sqrt{5}).$$

Нехай θ_1 — корінь многочлена x^8+5, θ_2 — многочлена $x^4+\sqrt{5}$, θ_3 — многочлена $x^4-\sqrt{5}$, $t_i=\theta_i-1\,(i=1,2,3)$. Розглянемо наступне R-зображення

$\Gamma(A,B)$ кільця Λ:

$$\Gamma_u(A,B)=\begin{pmatrix} \tilde{\theta}_1^{(n)} & 0 & \langle t_1^2\rangle\otimes E & 0 & \langle 1\rangle\otimes A & \langle 1\rangle\otimes B \\ 0 & \tilde{\theta}_1^{(n)} & 0 & \langle t_1\rangle\otimes E & \langle 1\rangle\otimes E & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\theta}_2^{(n)} & 0 & \langle t_2\rangle\otimes E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_2^{(n)} & 0 & \langle t_2^2\rangle\otimes E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_3^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\theta}_3^{(n)} \end{pmatrix}.$$

де A і B є довільними $n\times n$ матрицями над кільцем $\mathbb{Z}_2$ і n — довільне натуральне число.

Знову, в цьому зображенні ми маємо пару нееквівалентних нерозкладних зображень:

$$u\to\begin{pmatrix} \tilde{\theta}_1 & \langle t_1^j\rangle\otimes E \\ 0 & \tilde{\theta}_2 \end{pmatrix},\ u\to\begin{pmatrix} \tilde{\theta}_2 & \langle t_2^j\rangle\otimes E \\ 0 & \tilde{\theta}_3 \end{pmatrix},\ (j=0,1,2,3).$$

Звідси та з леми 2 одержимо, що Λ є диким кільцем над $\mathbb{Z}_2$.

g) Нехай $S=1$, $m=3$, тобто $u^8=5^2$. Тоді матимемо:

$$x^8-5^2=(x^4+5)(x^4-5)=(x^4+5)(x^2-\sqrt{5})(x^2+\sqrt{5}).$$

Нехай θ_3 — корінь многочлена x^4+5, θ_2 — многочлена $x^2+\sqrt{5}$, θ_1 — многочлена $x^2-\sqrt{5}$. Позначимо через $F_i=T(\theta_i)$ повне розгалужене розширення поля T $(i=1,2,3)$, $R[\theta_i]$ — кільце цілих величин F_i $(i=1,2,3)$. Знову побудуємо зображення:

$$u\to\begin{pmatrix} \tilde{\theta}_3 & \langle t_3^i\rangle\otimes E \\ 0 & \tilde{\theta}_2 \end{pmatrix}(i=0,1), u\to\begin{pmatrix} \tilde{\theta}_3 & \langle t_3^j\rangle\otimes E \\ 0 & \tilde{\theta}_1 \end{pmatrix}(j=0,1),$$

$$u\to\begin{pmatrix} \tilde{\theta}_2 & \langle t_2^j\rangle\otimes E \\ 0 & \tilde{\theta}_1 \end{pmatrix}(j=0,1),$$

котрі також є нееквівалентні і нерозкладні. Ми отримали задачу аналогічну матричній задачі у випадку, коли $a^3=1$, $F=\mathbb{Q}_3(\sqrt{-3})$ чи $a^4=1$, $F=\mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$. В першому випадку: $a^3=1$, $F=\mathbb{Q}_3(\sqrt{-3})$ бо $K=\mathbb{Z}_3[t]$ $(t^4=-3)$.

Якщо $\varepsilon^3=1$, $\varepsilon=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}$ тоді $\mathbb{Q}_3(\varepsilon)\subset F$. Тоді матимемо зображення:

$$a\to\begin{pmatrix} \varepsilon^2 & t^i \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}(i=0,1); a\to\begin{pmatrix} \varepsilon^2 & t^j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(j=0,1); a\to\begin{pmatrix} \varepsilon & t^j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(j=0,1).$$

Якщо розглянемо другий випадок: $a^4=1$, $K=\mathbb{Z}_2[\sqrt{2}]$ то $F=\mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$ є полем відношень кільця K. $F(i)=\mathbb{Q}_2(\xi)$ $(\xi^8=1)$. $R[i]=\mathbb{Z}_2[\xi]$, $t_1=\xi-1$, $t=\sqrt{2}$.

Тоді матимемо зображення:

$$a\to\begin{pmatrix} \tilde{i} & \langle t_1^j\rangle\otimes E \\ 0 & -1 \end{pmatrix}(j=0,1);\ \ a\to\begin{pmatrix} -1 & \langle t^j\rangle\otimes E \\ 0 & \tilde{i} \end{pmatrix}(j=0,1);$$

$$a \to \begin{pmatrix} 1 & \langle t^j \rangle \otimes E \\ 0 & \tilde{i} \end{pmatrix} (j = 0, 1); \;\; a \to \begin{pmatrix} 1 & \langle t^j \rangle \otimes E \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (j = 0, 1).$$

Звідси та з леми 2 отримаємо, що Λ не є диким над $\mathbb{Z}_2$.

Останнє завершує доведення леми.

Сформулюємо результати із [7] наступним чином.

Лема 4. [7] *Нехай G — скінченна група, H — силовська підгрупа групи G, F_p — скінченне розширення поля $\mathbb{Q}_p$, T_p — поле інерції поля F_p і R_p є кільцем цілих величин поля F_p. Число нееквівалентних і нерозкладних проективних матричних R_p-зображень групи G скінченне тоді і тільки тоді коли виконується одна з наступних умов:*

1) *H — циклічна група порядку p^2 і $F_p = T_p$;*
2) *H — циклічна група порядку $p > 3$ і $(F_p : T_p) \leq 2$;*
3) *H — циклічна група порядку 3 і $(F_3 : T_3) \leq 3$;*
4) *H — група порядку 2.*

Теорема 3. *Нехай G — скінченна група з силовською p-підгрупою H. Задача описання всіх нееквівалентних проективних $\mathbb{Z}_p$-зображень групи G є ручною тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

1) *H — циклічна група порядку p^r $(r \leq 2)$;*
2) *H — циклічна група порядку 8;*
3) *H — абелева група типу $(2, 2)$.*

Доведення теореми випливає з теорем 1 і 2 та лем 3 та 4.

Автор щиро вдячний своєму науковому керівнику покійному професору Гудивку П. М. за участь у дискусії та обговоренні результатів даної статті

1. *Гудивок П. М.* О представлениях скрещенных групповых колец конечных групп и колец целых p-адических чисел // Доп. НАН України. – 1998.– № 7. – P. 19–23.
2. *Баранник Л. Ф., Гудивок П. М.* Скрещенные групповые кольца конечных групп и колец целых P-адических чисел с конечным числом неразложимых целочисленных представлений // Матем. сб. – 1979. – Т. 108, № 2. – С. 187–211.
3. *Дрозд Ю. А.* Адели и целочисленные представления // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1969. – Т. 33, № 5. – С. 1080–1088.
4. *Бондаренко В. М., Гудивок П. М.* О представлениях конечных p-групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми p-адическими коэффициентами // Сб. "Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры". – Киев: Институт матем. НАН Украины, 1993. – С. 5–14.
5. *Charles W. Curtis, Irving Reiner.* Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras // AMS CHELSEA PUBLISHING. – 2006. – P. 677.
6. *Dieterich E.* Group rings of wild representation type // Math. Ann. – 1983. – Vol. 266. – P. 1–22.
7. *Баранник Л. Ф., Гудивок П. М.* Проективные представления конечных групп над числовыми кольцами // Матем. сб. – 1970. – Т. 82, № 3. – С. 423–443.

Одержано 16.10.2012