6. *Абрамчук В. С.* Сопряженные задачи с задачей решения системы $Ax=f$ // Докл. АН Украины.— 1993.— № 1.— С. 5—8.
7. *Лучка А. Ю., Нощенко О. Э., Сергиенко И. В., Тукалевская Н. И.* Параллельная организация вычислений при решении линейных уравнений методами проекционно-итерационного типа // Кибернетика.— 1984.— № 3.— С. 38—47.
8. *Коваленко И. Л. Литвин А. И., Симонженков С. Д.* Неявный вариационно-градиентный способ и его применение.— Черкассы, 1993.— 9 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 1024. Ук.— 93.

Винницкий педагогический институт

Поступило 03.02.94

It has been proved that directed searching methods have the best prospects among iterative methods for solving $Ax=f$ systems.

УДК 512.544

П. М. ГУДИВОК, И. В. ШАПОЧКА

О РАСШИРЕНИЯХ АБЕЛЕВЫХ p-ГРУПП

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Летичевским)

Группы Черникова исследовались многими авторами (см. [1, 2]). Настоящая работа посвящена изучению с помощью теории целочисленных p-адических представлений конечных групп некоторых классов p-групп Черникова и являются продолжением работ [3, 4].

Пусть M — внешняя прямая сумма n экземпляров квазициклической p-группы T, т. е.

$$M = M_1 \dotplus \dots \dotplus M_n, \tag{1}$$

где $M_i = T$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Известно [1], что группа $\mathrm{Aut}\, M$ изоморфна полной линейной группе $GL(n, \mathbb{Z}_p)$, где $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел. Следовательно, всякое расширение G группы M с помощью конечной группы H определяется некоторым матричным $\mathbb{Z}_p$-представлением I степени n группы H и некоторой системой факторов $\{m_{a,b}\}$ $(a, b\ \ H,\ m_{a,b} \in M)$. Пусть $\{a_r\}$ — образующие элементы группы T $(r = 0, 1, 2, \dots)$, причем $pa_0\ \ 0$, $pa_t = a_{t-1}$ $(t = 1, 2, \dots)$. Если $C = \| a_{ij} \| \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$ $(a_{ij} \in \mathbb{Z}_p)$, $m = (m_1, \dots, m_n)$ $(m_i \in M_i;\ i = 1, \dots, n)$, $a_{ij} = b_{ij}^{(0)} + b_{ij}^{(1)} p + b_{ij}^{(2)} p^2 + \dots$ $\dots$, $m_j = c_0^{(j)} a_0 + c_1^{(j)} a_1 + \dots + c_{t_j}^{(j)} a_{t_j}$ $(0 \leqslant b_{ij}^{(r)}, c_k^{(s)} < p)$, то $C(m) = (m'_1, \dots, m'_n)$, где $m'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(m_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=0}^{t_j} \sum_{s=0}^{t_j} b_{ij}^{(r)} c_s^{(j)} p^r a_s$.

Пусть далее $H = \langle a \rangle$ — циклическая p-группа порядка p^h $(h \geqslant 1)$ и $\Gamma : a \to \Gamma_a$ — матричное $\mathbb{Z}_p$-представление степени n группы H. Из [5] вытекает, что всякое расширение группы M с помощью группы H задается таким матричным $\mathbb{Z}_p$-представлением Γ степени n группы H и таким элементом $m_0 \in M$, что $\Gamma_a(m_0) = m_0$. Обозначим это расширение $G(M, H, \Gamma, m_0)$ или кратко $G(\Gamma, m_0)$. Очевидно, M является H-модулем ($am = \Gamma_a(m)$, $m \in M$) и $g_a^{p^h} = m_0$, $g_a^{-1} m g_a = \Gamma_a(m)$ (g_a — представитель смежного класса группы $G(\Gamma, m_0)$ по подгруппе M, соответствующий элементу a). Если $\mathbb{Z}_p$-представления Γ и Δ группы H эквивалентны, т. е. $C^{-1}\Gamma_a C = \Delta_a$ $(C \in GL(n, \mathbb{Z}_p))$, то группы $G(\Gamma, m_0)$ и $G(\Delta, C(m_0))$ изоморфны.

Пусть $G = G(\Gamma, m_0)$ и

$$A(\Gamma) = \{ m \in M \mid \Gamma_a(m) = m \},$$
$$B(\Gamma) = \{ (E + \Gamma_a + \dots + \Gamma_a^{p^h - 1})(m_1) \mid m_1 \in M \}, \tag{2}$$

где E — единичная матрица порядка n. Очевидно, $B(\Gamma)$ — подгруппа группы $A(\Gamma)$. Группа $B(\Gamma)$ является нулевой тогда и только тогда, когда среди неприводимых компонент представления Γ нет единичного представления. Расширение $G(\Gamma, m_0)$ расщепляемо тогда и только тогда, когда $A(\Gamma) = B(\Gamma)$. Из теории расширений абелевых групп [6] следует, что если Z_p-представление Γ группы H разложимо, т. е. $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ (Γ_1 и Γ_2 — некоторые $\mathbb{Z}_p$-представления группы H), то $A(\Gamma)/B(\Gamma) \cong A(\Gamma_1)/B(\Gamma_1) \dotplus A(\Gamma_2)/B(\Gamma_2)$. Отсюда и из справедливости теоремы Крулля — Шмидта для $\mathbb{Z}_p$-представлений конечной группы [7] получаем, что описание группы $A(\Gamma)/B(\Gamma)$ сводится к случаю, когда Γ — неразложимое $\mathbb{Z}_p$-представление группы H.

Теорема 1. Пусть M — полная абелева p-группа с условием минимальности вида (1), $H = \langle a \rangle$ — циклическая p-группа порядка p^h $(h > 2)$ и $\mathbb{W}_k$ — множество всех расширений $G(\Gamma, m_0)$ группы M с помощью группы H, где Γ пробегает все неэквивалентные матричные $\mathbb{Z}_p$-представления степени n группы H, содержащие k неэквивалентных неприводимых компонент $\Delta_1, \dots$ $\dots, \Delta_k$. Задача описания с точностью до изоморфизма всех групп из множества $\mathbb{W}_k$ является дикой, т. е. включает задачу классификации с точностью до подобия пар квадратных матриц над некоторым полем, если выполняется одно из следующих условий: 1) $h > 3$, $k > 4$; 2) $h > 2$, $k > 3$, $p \neq 2$; 3) $h > 2$, $k = 3$, $p > 3$ и степень представления Δ_i больше 1 $(i = 1, 2, 3)$.

Следствие 1. Задача описания всех неизоморфных расширений произвольной полной абелевой p-группы с условием минимальности с помощью циклической p-группы H порядка p^h $(h > 2,\ p \neq 2)$ является дикой.

Доказательство теоремы 1 опирается на результаты работ [4, 8, 9]. Отметим, что в [4] следствие 1 доказано при $h>3$.

Опишем далее с точностью до изоморфизма все расширения вида $G(\Gamma, m_0)$, где $\mathbb{Z}_p$-представление Γ группы H содержит k неэквивалентных неприводимых компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ $(k\leqslant 3)$, причем если $k=3$, то Γ_1 — единичное представление группы H.

Обозначим через $V=\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_r\}$ множество всех неэквивалентных неразложимых $\mathbb{Z}_p$-представлений группы $H=\langle a\rangle$ с неприводимыми компонентами из множества $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$ (Γ_1 — единичное представление). В [8] описаны все представления из множества V. Их конечное число. Пусть V_n — множество всех неэквивалентных матричных $\mathbb{Z}_p$-представлений степени n группы H вида $d_1\Gamma_1+\dots+d_r\Gamma_r$ $(d_i\in\mathbb{N}\cup\{0\};\ i=1, 2, \dots, r)$. Хорошо известно [7], что каждое $\mathbb{Z}_p$ представление группы H однозначно с точностью до эквивалентности разлагается в сумму неразложимых $\mathbb{Z}_p$-представлений группы H. Обозначим через W множество всех неизоморфных нерасщепляемых расширений вида $G(\Gamma, m)$ $(m\in M, \Gamma\in V)$. В [4] дано их явное описание.

Пусть Γ' — произвольное матричное $\mathbb{Z}_p$-представление степени n группы $H=\langle a\rangle$ и $\Gamma'=\Gamma_1'+\Gamma_2'$, где Γ_i' — некоторое $\mathbb{Z}_p$-представление группы H $(i=1, 2)$. Тогда в расширении $G(\Gamma', m)$ $(m\in M)$ H-модуль M имеет вид: $M=T_1\dot{+}T_2$, где T_i — H-модуль, соответствующий представлению Γ_i' $(ax_i=\Gamma_i'(a)(x_i),\ x_i\in T_i;\ i=1, 2)$. Поэтому можно считать, что $G(\Gamma, m)$ имеет вид $G((\Gamma_1'+\Gamma_2'), (v_1, v_2))$, где $v_i\in A(\Gamma_i')\subset T_i$ $(i=1, 2$; см. обозначения (2)).

Теорема 2. Пусть M — полная абелева p-группа с условием минимальности вида (1), $H=\langle a\rangle$ — циклическая группа порядка p^h $(h>1)$ и $W_n'=\{G(\Gamma_1', u_1), \dots, G(\Gamma_s', u_s)\}$ — множество всех таких неизоморфных нерасщепляемых расширений $G(\Gamma_i, v_i)$ из W, что степень n_i представления Γ_i не превышает n. Все неизоморфные расширения группы M с помощью группы H вида $G(\Gamma, m)\times$ $\times(\Gamma\in V_n, m\in M)$ исчерпываются группами $G(\Gamma, 0)$ $(\Gamma\in V_n)$, $G(\Gamma_i'+\Gamma_i'', (u_i, 0))$ $(\Gamma_i'=\Gamma_{t_i},\ n_{t_i}\leqslant n,\ \Gamma_i''\in V_{n-n_{t_i}};\ i=1, \dots, s)$ и группой $G(\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma', (v_2, v_3, 0))$, если $n_2+n_3\leqslant n$ $(\Gamma'\in V_{n-n_2-n_3},\ V_0=\varnothing,\ G(\Gamma_j, v_j)\in W;\ j=2, 3)$.

При доказательстве теоремы 2 существенно используются работы [4] и [8].

З а м е ч а н и е 1. Из теоремы 2 вытекает описание всех неизоморфных расширений группы M с помощью циклической p-группы H порядка p^h $(h\leqslant 2)$. Отметим, что в [4] рассмотрен случай $h=1$.

Теорема 3. Пусть L_n — прямая сумма n экземпляров циклической p-группы B порядка p^s $(s\geqslant 2$, n — произвольное натуральное число) и H — циклическая p-группа порядка p^h $(h\geqslant 2)$. Задача описания всех неизоморфных расширений группы L_n с помощью группы H является дикой.

При $h=2$ доказательство теоремы 3 вытекает из [10, 11].

З а м е ч а н и е 2. В случаях, когда в теореме 3 $s=1$ либо $h=1$, в [12, 13] даны описания всех неизоморфных расширений группы L_n с помощью группы H. В [14, 15] классифицированы с точностью до изоморфизма все расширения конечной абелевой p-группы с помощью группы порядка p.

1. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
2. *Hartley B.* A dual approach to Chernikov modules // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.—1977.—**82**.— P. 215—239.
3. *Гудивок П. М., Дроботенко В. С.* Про циклічні розширення повних абелевих груп // Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1966.— № 10.— С. 1239—1242.
4. *Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С.* Черниковские p-группы и целочисленные p-адические представления конечных групп // Укр. мат. журн.— 1992.— **44**, № 6.— С. 742—753.
5. *Холл М.* Теория групп.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 468 с.
6. *Маклейн С.* Гомология.— М. : Мир, 1966.— 543 с.
7. *Боревич З. И., Фаддеев Д. К.* Теория гомологий в группах. II // Вест. Ленинград. ун-та.— 1959.— № 7.— С. 72—87.
8. *Берман С. Д., Гудивок П. М.* Неразложимые представления конечных групп над кольцом целых p-адических чисел // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1964.— **28**, № 4.— С. 875—910.
9. *Гудивок П. М.* О представлениях конечных групп над полным дискретно нормированным кольцом // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1978.— **148**.— С. 96—105.
10. *Бондаренко В. М.* О подобии матриц над кольцами классов вычетов : Мат. сб.— Киев, Наук. думка, 1976.— 277 с.
11. *Сергейчук В. В.* О классификации метабелевых p-групп // Матричные задачи.— Киев : Ин-т мат. АН УССР, 1977.— С. 150—161.
12. *Дроботенко В. С.* Розширення абелевої групи типу $(p^s, \dots, p^s)$ за допомогою циклічної групи порядку p // Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1966.— № 4.— С. 430—433.
13. *Сергейчук В. В.* Конечные p-группы, являющиеся расширением абелевой группы при помощи циклической.— Киев, 1974.— С. 1—44.— (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; № 74.5).
14. *Szekeres G.* Determination of a cerlain family of finite metabelian groups // Trans. Amer. Math. Soc.— 1949.— **66**.— P. 11—43.
15. *Назарова Л. А., Ройтер А. В., Сергейчук В. В., Бондаренко В. М.* Применение модулей над диадой для классификации конечных p-групп, облаающих абелевой подгруппой индекса p, и пар взаимно аннулирующих операторов // Записки науч. семинаров. Ленинград. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1972.— **28**.— С. 69—92.

Ужгородский университет

Поступило 04.02.94

The extensions of the Abelian p-group M by a cyclic p-group are studied in the case when M is a finite Abelian group of the type $(p^s, \dots, p^s)$ or a divisible Abelian p-group with the minimality condition. It has been revealed when the problem of description of all such non-isomorphic extensions is wild. Some Chernikov's p-group have been classified up to isomorphism.