Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад "Ужгородський
національний університет"

В. Ф. Баранник, Н. В. Юрченко

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТЬ З КУРСУ "ВИБРАНІ РОЗДІЛИ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ"

Ужгород 2009

УДК

Методичні вказівки до проведення занять з курсу "Вибрані розділи елементарної математики" / Баранник В. Ф., Юрченко Н. В. – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т., 2009. – ?? с.

Відповідальний за випуск:

Рецензент:

ЗМІСТ

Передмова

У навчальному посібнику викладено основні методи розв'язання задач курсу шкільної математики. Його мета допомогти студентам розвинути математичне мислення, набути практичних навичок. Матеріал навчального посібника не виходить за межі програми з математики для шкіл з поглибленим її вивченням.

Посібник складається з восьми параграфів. У більшості з них є короткі теоретичні відомості, а також приклади розв'язання типових задач.

До кожної теми додано вправи для закріплення і глибшого її засвоєння; до більшості прикладів наводяться відповіді.

§1. Означення й основні властивості подільності. Ділення із залишком. Найбільший спільний дільник двох чисел і алгоритм Евкліда

Теорема 1. Для кожних двох цілих чисел a і b, перше з яких відмінне від нуля, можна єдиним способом підібрати також цілі числа n і r, щоб виконувалися дві умови:

$$1)\ b = na + r;\ 2)\ 0 \le r \le |a| - 1.$$

Коротко кажуть ще так: кожне ціле число b можна поділити на кожне відмінне від нуля ціле число a із залишком. При цьому число n називають (неповною) часткою від такого ділення, а r – залишком.

Якщо остача від ділення b на a дорівнює нулю, то кажуть, що b ділиться на a. Число a називають у цьому випадку дільником числа b. Наприклад, числа 1, 2, 3, 6, а також протилежні їм $-1, -2, -3, -6$ є дільниками числа 6, оскільки $6 = 1 \cdot 6$, $6 = 2 \cdot 3$, $6 = (-1) \cdot (-6)$ і $6 = (-2) \cdot (-3)$. Запис a/b означає, що a – дільник b.

Теорема 2 (про властивості подільності).

1) Якщо a/b, то $a/(-b)$, $(-a)/b$, $(-a)/(-b)$.

2) Якщо a/b і a/c, то $a/(b+c)$.

3) Якщо a/b і $m \in \mathbb{Z}$, то $a/(bm)$.

4) Якщо a/b і b/c, то a/c.

5) Якщо a/b і b/a, то $|a| = |b|$.

Доведення. 1) Якщо $b = na$, то $-b = (-n)a$, $b = (-n)(-a)$.

2) Якщо $b = n_1 a$ і $c = n_2 a$, то $b + c = (n_1 + n_2)a$.

3) Якщо $b = na$, то $bm = (mn)a$.

4) Якщо $b = nu$ і $c = mb$, то $c = (mn)a$.

5) З рівності $b = na$ і $a = mb$ випливає, що $a = (mn)a$. Оскільки $a \neq 0$, то дістанемо $ma = 1$, а це можливо лише в двох випадках, а саме: $m = n = 1$ і $m = n = -1$. Отже, або $b = -a$, тобто $|b| = |a|$.

Будь-які два числа a і b мають спільні дільники, наприклад 1 і (-1). Нехай хоча б одне з чисел a і b відмінне від нуля. Виявляється, що в цьому випадку числа a і b мають такий додатній спільний дільник, який ділиться на будь-який спільний дільник цих чисел. Його називають найбільшим спільним дільником чисел a і b. Довести існування найбільшого спільного дільника можна таким чином. Розглянемо множину $M(a,b)$ усіх тих цілих чисел, які можна записати у вигляді $ax+by$ з цілими x і y. Цій множині належать, зокрема, всі числа ax (їх дістають при $y=0$) числа by, $a+b$, $2a-3b$ і т. д. У множині $M(a,b)$ обов'язково є певні додатні числа. Справді, якщо, наприклад, $a\neq 0$, то такими будуть усі додатні числа виду ax. Позначимо через d найменше серед додатних чисел, які містяться в $M(a,b)$. Тоді $d=aubv$, де u і v – деякі цілі числа. Як виявляється, множина $M(a,b)$ збігається просто з множиною чисел, кратних d. Справді, будь-яке число dn з цілими n має вигляд $dn=(au+bv)n=a(un)+b(vn)$, а тому міститься в $M(a,b)$ згідно з означенням цієї множини. Навпаки, нехай $c\in M(a,b)$. Тоді $c=ap+bq$, де p і q – цілі числа. Поділимо c на d із залишком: $c=md+r$, $0\leq r<d$. Маємо:

$$r=c-md=(ap+bq)-m(au+bv)=a(p-mu)+b(q-mv).$$

Числа $p-mu$ і $q-mv$ цілі, а тому $r\in M(a,b)$. Це означає, що $r=0$, оскільки в противному разі множина $M(a,b)$ містила б додатне число $r<d$, а це суперечило б початковому припущенню про число d. Але рівність $r=0$ означає, що d/c.

Доведемо, тепер, що саме число d є найбільшим спільним дільником чисел a і b.

1) d – спільний дільник чисел a і b, оскільки a і b містяться в $M(a,b)$, а кожне число цієї множини ділиться на d.

2) Якщо s – будь-який спільний дільник чисел a і b, тобто s/a і s/b, та s/d, оскільки $d=au+bv$ (див. 2), 3) з теореми 2).

3) Число d додатне за побудовою. Неважко зрозуміти, що числа a і b мають тільки один найбільший спільний дільник. Справді, припустимо, що d і d_1 – найбільший спільний дільник a і b. Тоді d/d_1 (бо d_1 – найбільший спільний дільник a і b, а d – спільний дільник цих чисел), а також d/d_1. Взявши до уваги, що d і d_1 додатні, можна зробити висновок, що $d=d_1$ (див. 5) з теореми 2).

Оскільки протилежні числа мають однакові дільники (див. теорему 2), то задачу на знаходження найбільшого спільного дільника достатньо вміти розв'язувати для додатних чисел. Ще давньогрецькі математики знали, що найбільший спільний дільник двох чисел можна знайти, виконавши кілька разів ділення із залишком. Пізніше цей метод знаходження найбільшого спільного дільника почали називати алгоритмом Евкліда. Він базується на двох лемах.

Лема 1. Якщо $a>0$, то найбільший спільний дільник чисел a і 0 дорівнює a.

Доведення. 1) a/a і a/a, оскільки $a=1\cdot a$ і $0=0\cdot a$.
2) Якщо s – спільний дільник a і 0, то s/a.
3) Число a додатне за умовою.

Лема 2. Якщо цілі числа a,b і c пов'язані рівністю $a=bk+c$, де k – також ціле число, то $d(a,b)=d(b,c)$. (Символом $d(x,y)$ для зручності позначимо найбільший спільний дільник чисел x і y).

Доведення. Нехай $d(a,b)=d_1$, $d(b,c)=d+2$. Оскільки d_1/b і d_1/b, а $c=a-bk$, то d_1/c. Взявши до уваги, що d_1/b і d_1/c, робимо висновок, що d_1/d_2. З другого боку, оскільки d_2/b, d_2/c і $a=bk+c$, робимо висновок, що d_2/a, звідки випливає, що d_2/d_1. Як ми вже знаємо, взаємна подільність додатних цілих чисел означає їхню рівність. Отже, $d_1=d_2$.

Нехай тепер задано натуральні числа a і b $(a\geq b)$ і треба знайти їхній найбільший дільник. Побудуємо ланцюг чисел за таким правилом:

перше число – a,
друге – b,
третє – остача від ділення a на b (позначимо її r_1),
четверте – остача від ділення b на r_1 (позначимо її r_2),
п'яте – остача від ділення r_1 на r_2, і т. д.

Поки залишки $r_1,r_2,\ldots$ будуть додатними, числа нашого ланцюга спадатимуть. Але спадний ланцюг натуральних чисел не може бути нескінченним, адже є лише $b-1$ натуральних чисел, менших від b. Отже, на деякому кроці в залишку дістанемо нуль. На цьому закінчимо побудову ланцюга, який, отже, матиме такий вигляд: $a,b,r_1,r_2,\ldots,r_n,0$.

Застосувавши до побудованого ланцюга чисел лему 2, дістанемо

$$d(a,b)=d(b,r_1)=d(r_1,r_2)=\ldots=d(r_{n-1},r_n)=d(r_n,0).$$

Але останнє число, згідно з лемою 1, дорівнює r_n. Тому $d(a,b)=r_n$.

П р и к л а д. Нехай треба знайти $d(4171,18527)$.

Будемо діяти згідно з алгоритмом Евкліда.

Перший крок. Ділимо 18527 на 4171 із залишком. В залишку дістанемо 1843.

Другий крок. Ділимо 4171 на 1843 із залишком. В залишку 485.

Третій крок. Ділимо із залишком 1843 на 485. В залишку 388.

Четвертий крок. Ділимо із залишком 485 на 388. В залишку 97.

П'ятий крок. Ділимо із залишком 388 на 97. В залишку 0. Це – сигнал до закінчення обчислень. Шуканий найбільший спільний дільник дорівнює 97 (те число, на яке ділили останній раз).

Якщо найбільший спільний дільник чисел a і b дорівнює 1, то їх називають взаємно простими.

Теорема 3 (критерій взаємної простоти двох цілих чисел). Числа a і b взаємно прості тоді і тільки тоді, коли існують такі цілі числа

u і v, що $au+bv=1$.

Доведення. Необхідність. Якщо $d(a,b)=1$, то потрібні числа u і v знайдуться. Це випливає з того, що $d(a,b)\in M(a,b)$ (див. вище).

Достатність. Якщо $au+bv=1$ для деяких цілих чисел u і v, то 1 належить множині $M(a,b)$, причому вона є тим найменшим додатнім числом, оскільки менших натуральних чисел взагалі немає. Згідно з попереднім це означає, що $1=d(a,b)$.

Теорема 4. Якщо кожне з чисел a і b взаємно просте з числом c, то добуток ab також взаємно простий з c.

Доведення. Якщо $d(a,c)=1$ і $d(b,c)=1$, то за попередньою теоремою $ax+cy=1$, $bu+cv=1$ при деяких цілих x,y,u,v. Перемноживши почленно ці дві рівності, дістанемо:

$$ab\cdot xu+c(axv+buy+yv)=1.$$

Згідно з цією ж теоремою 3 знайдена рівність свідчить, що числа ab і c взаємно прості.

Наслідок. Застосувавши кілька разів послідовно теорему 4, дістанемо таке узагальнення її: якщо кожне з чисел $a_1,a_2,\cdot,a_k$ взаємно просте з c, то їх добуток $a_1,a_2,\cdot,a_k$ також взаємно простий з c.

Теорема 5. Якщо добуток ab ділиться на c і при цьому a взаємно просте з c, то тоді на c обов'язково ділиться число b..

Доведення. Оскільки $d(a,c)=1$, то $ax+cy=1$, де x,y – деякі цілі числа. Помноживши останню рівність на b, дістанемо

$$b=(ab)x+c\cdot(by).$$

З цієї рівності випливає, що c/b, оскільки його права частина ділиться на c.

Розглянемо тільки натуральні числа $1,2,3,4,\ldots$ Натуральне число p називається простим, якщо воно має рівно два натуральних дільники. Якщо прості числа виписувати в ланцюг за зростанням, то його початок буде такий:

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,\ldots$$

Далі доведемо, що цей ланцюг ніколи не обривається, тобто що простих чисел безліч.

Лема 3. Якщо p і q – різні прості числа, то вони взаємно прості.

Доведення. Припустимо, що прості числа p і q не взаємно прості. Нехай $d>1$ – їх найбільший спільний дільник. Тоді d/p. Але не має ніяких натуральних дільників, крім 1 і p. Тому $d = p$. Так само впевнюємося в тому, що $d = q$. Отже, $p = q$.

Теорема 6 (основна теорема арифметики). Будь-яке натуральне число $a \neq 1$ можна розкласти на прості множники, тобто записати у вигляді: $a = p_1 p_2 \cdots p_n$, де кожне p_k – просте число. Якщо при цьому множники p_k в добутку $p_1 p_2 \cdots p_n$ розмістити в неспадному порядку ($p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n$), то такий розклад числа a однозначний.

Доведення. Розглянемо найрізноманітніші розклади даного числа $a \neq 1$ на множники (не обов'язково прості), серед яких немає одиниці. Прикладами таких розкладів для числа 360 є: $360 = 360$ (лише один співмножник), $360 = 180 \cdot 2$, $360 = 4 \cdot 10 \cdot 9$, $360 = 8 \cdot 45$, $360 = 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 5$ і т. д. Назвемо довжиною розкладу число співмножників у ньому. Різні розклади числа a не можуть містити яких завгодно довгих. Справді, виберемо таке велике число n, щоб виконувалася нерівність $a < 2^{n+1}$. Тоді жодний розклад числа не може мати довжини, яка перевищувала б n. Справді, нехай $a = R_1 R_2 \cdot R_3$. Оскільки кожний співмножник R_i більший або дорівнює двом, то $a = R_1 R_2 \cdot R_s \geq 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^s$. Тепер з нерівності $2^s < 2^{n+1}$ випливає, що $s \leq n$.

Нехай $a = p_1 p_2 \cdots p_m$ – найдовший розклад a (або один з таких розкладів, якщо їх кілька). Тоді всі співмножники p_k – прості числа. Справді, якби деяке p_r не було простим, то, розклавши його на співмножники, ми дістали б розклад a довжиною $m+1$, що неможливо. Отже, першу частину теореми доведено.

Припустимо тепер, що $a = p_1 p_2 \cdots p_m$ і $a = q_1 q_2 \cdots q_n$ – два розклади числа a на прості множники, причому в кожному з них співмножники розміщені в неспадному порядку. Вважатимемо, що $q_1 \leq p_1$. Рівність

$$p_1 p_2 \cdots p_m = q_1 (q_2 \cdots q_n) \tag{1}$$

свідчить про те, що ліва її частина ділиться на q_1. Отже, одне з чисел p_k збігається з q_1, бо в противному разі всі p_k, а отже, і їх добуток, були б взаємно простими з q_1 (лема 3 і теорема 4). Оскільки $q_1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_m$, то $p_1 = q_1$. Скориставшись рівністю (1) на q_1, повторюємо всі наші міркування до рівності $p_2 p_3 \cdots p_m = q_2 q_3 \cdots q_n$. Справа закінчиться тим, що в одній частині рівності вичерпаються всі прості множники, і на їхньому місці дістанемо одиницю. Але в цей момент у другій частині рівності неминуче також зникнуть усі прості множники, бо число 1 не ділиться на жодне просте число. Отже, $m = n$, $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$, $\ldots$, $p_m = q_n$ і основну теорему арифметики повністю доведено.

Теорема 7. Існує безліч простих чисел.

Цю теорема можна сформулювати ще так: серед простих чисел немає найбільшого.

Доведення. Припустимо, що p – найбільше просте число. Розглянемо число a, яке на 1 більше від добутку всіх простих чисел $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 1$. При діленні на кожне з простих чисел воно дає в залишку 1. Це означає, що жодне просте число не є його дільником. Проте це суперечить попередній теоремі. Суперечність спростовує вихідне припущення про скінченність множини простих чисел.

Доведена теорема – одна з найбільш відомих і цікавих в історії математики. Її вперше довели давньогрецькі математики понад два тисячоріччя тому. Наведене нами доведення за своїм змістом збігається з доведенням стародавніх учених. Найавторитетніші історики математики вважають, що доведення цієї теореми взагалі є першим застосуванням методу від супротивного, який багато в чому визначив пізніше розвиток всієї математики.

Розглянемо найменше спільне кратне. Нехай $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – повний набір простих дільників натурального числа a, впорядкованих за зростанням. З теореми 6 тоді випливає, що число a можна однозначно зобразити у вигляді $a = p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n}$, де кожне k_i – натуральне число. Це зображення називають канонічним розкладом числа a на прості множники. Маючи цей розклад, неважко описати всі натуральні дільники числа a і порахувати їх. Справді, нехай b/a. Це означає, що $a = b \cdot c$, причому c – натуральне число. Розклавши b і c на прості множники, дістанемо одночасно розклад на прості множники числа a. Звідси випливає, що $b = p_1^{t_1}, p_2^{t_2}, \ldots, p_n^{t_n}$, де $0 \leq t_1 \leq k_1$, $0 \leq t_2 \leq k_2, \ldots, 0 \leq t_n \leq k_n$. З другого боку, будь-яке число b такого виду буде дільником числа a, бо $c = p_1^{k_1 - t_1}, p_2^{k_2 - t_2}, \ldots, p_n^{k_n - t_n}$ – натуральне число, причому $a = bc$.

Оскільки показники t_i у виразі для дільника b можуть набувати своїх значень незалежно один від одного, то число $a = p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \ldots p_n^{k_n}$ має всіх $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_n + 1)$ натуральних дільників. Наприклад, число $12 - 2^2 \cdot 3$ має $(2+1) \cdot (1+1) = 6$ дільників, а саме:

$$2^0 \cdot 3^0 = 1,\ 2^1 \cdot 3^0 = 2,\ 2^2 \cdot 3^0 = 4,\ 2^0 \cdot 3^1 = 3,\ 2^1 \cdot 3^1 = 6,\ 2^2 \cdot 3^1 = 12.$$

Якщо $q_1, q_2, \ldots, q_s$ – усі прості множники в розкладах натуральних чисел a і b, то $a = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \ldots q_s^{m_s}$, $b = q_1^{l_1} q_2^{l_2} \ldots q_s^{l_s}$, причому деякі показники m_i і l_i можуть дорівнювати нулю, і обидва зображення однозначні. Найбільший спільний дільник чисел a і b, як це випливає з попереднього, можна записати в цьому разі формулою $d(a, b) = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_s^{\alpha_s}$, де $\alpha_i = \min\{m_i, l_i\}$; $i = 1, 2, \ldots, s$ ($\min\{x, y\}$ – менше з чисел x, y або будь-яке з них, якщо $x = y$).

Найменшим спільним кратним натуральних чисел a і b називають натуральне число m з такими властивостями:

а) $a/m, b/m$ (m – спільне кратне чисел a і b).

б) Якщо a/l і b/l, то m/l (m – дільник будь-якого спільного кратного чисел a і b).

Нехай, як і вище,

$$a = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \ldots q_s^{m_s} \text{ і } b = q_1^{l_1} q_2^{l_2} \ldots q_s^{l_s}.$$

Неважко впевнитися, що

$$m(a,b) = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots q_s^{\beta_s}, \text{ де } \beta_i = \max\{m_i, l_i\},\ i = 1, 2, \ldots, s$$

($\max\{x, y\}$ – більше з чисел x, y або будь-яке з них, якщо $x = y$).

Припустимо, наприклад, $a = 1400$, $b = 294$. Маємо $a = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^2 \cdot 7$, $b = 2 \cdot 3 \cdot 5^0 \cdot 7^2$. Тому

$$d(a,b) = 2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7 = 14;\ m(a,b) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 29400.$$

Оскільки $\min\{x, y\} + \max\{x, y\} = x + y$, то $d(a,b) \cdot m(a,b) = a \cdot b$, звідки $m(a,b) = \frac{ab}{d(a,b)}$. Ця формула дає можливість знайти найменше спільне кратне двох чисел без розкладу їх на прості множники: достатньо обчислити $d(a,b)$, скориставшись алгоритмом Евкліда.

Лема 4. Залишки від ділення чисел a і b збігаються тоді і тільки тоді, коли $n/(a-b)$.

Доведення. Нехай $a = nq_1 + r_1$, $b = nq_2 + r_2$, $0 \le r_1 < n$, $0 \le r_2 < n$. Якщо $r_1 = r_2$, то $a - b = n(q_1 - q_2)$, тобто $n/(a-b)$. Припустимо тепер, що $r_1 \ne r_2$. Для певності вважатимемо, що $r_1 > r_2$. У цьому випадку $a - b = n(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$, причому $0 < r_1 - r_2 < n$, тобто залишок від ділення $a - b$ на n дорівнює $r_1 - r_2 \ne 0$.

Зауваження. Якщо $r_1 < r_2$, то в другій частині доведення достатньо замість $a - b$ розглянути $b - a$, а потім врахувати, що числа $a - b$ і $b - a$ одночасно діляться або не діляться на n (див. теорему 2).

Якщо числа a і b при діленні на n дають однакові залишки, то назвемо їх порівнянними за модулем n і умовимося позначати це так: $a \overset{n}{\equiv} b$.

Теорема 8. Нехай $a = nq_1 + r_1$, $b = nq_2 + r_2$. Тоді

1) $a + b \overset{n}{\equiv} r_1 + r_2$;

2) $a - b \overset{n}{\equiv} r_1 - r_2$;

3) $ab \overset{n}{\equiv} r_1 r_2$.

Доведення грунтується на лемі 4:

1) число $(a+b)-(r_1+r_2)=n(q_1+q_2)$ ділиться на n, а це, згідно з лемою, означає шукане;

2) число $(a-b)-(r_1-r_2)=n(q_1-q_2)$ ділиться на n;

3) число $ab-r_1r_2=n(nq_1q_2+q_1r_2+r_1q_2)$ ділиться на n.

Наслідок 1. Якщо $a_1 \overset{n}{\equiv} a_2$ і $b_1 \overset{n}{\equiv} b_2$, то:

1) $a_1+b_1 \overset{n}{\equiv} a_1+b_2$;

2) $a_2-b_1 \overset{n}{\equiv} a_1-b_2$;

3) $a_1b_1 \overset{n}{\equiv} a_2b_2$.

Наслідок 2. Якщо треба знайти залишок від ділення деякого арифметичного виразу (який містить лише дії додавання, віднімання й множення) на число n, то в процесі обчислень будь-який проміжний результат можна замінювати його залишком від ділення на n (або будь-яким іншим числом, порівнюваним з ним за модулем n).

П р и к л а д. Нехай треба знайти залишок від ділення числа $a=9^{75}-95$ на 7.

Оскільки $9 \overset{7}{\equiv} 2$ і $95 \overset{7}{\equiv} 4$, то $a \overset{7}{\equiv} 2^{75}-4$. Далі маємо:

$$2^3=8 \overset{7}{\equiv} 1;\ 2^{75}=(2^3)^{25}\equiv 1;\ a \overset{7}{\equiv} 1-4=-3\equiv 4.$$

Отже, остача від ділення числа a на 7 дорівнює 4.

Відомі ознаки подільності чисел грунтуються на теоремі 8 і наслідках з неї.

<u>Ознаки подільності на 3 і 9.</u> Число $\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_2\alpha_1\alpha_0}$ (α_n, α_{n-1}, ..., α_2, α_1, α_0 – десяткові цифри числа) ділиться на 3 (на 9) тоді і тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 3 (на 9).

Справді, оскільки $10 \overset{3}{\equiv} 1$ ($10 \overset{9}{\equiv} 1$), а отже, $10^k \overset{3}{\equiv} 1$ ($10^k \overset{9}{\equiv} 1$) при будь-якому натуральному k, то

$$a=10^n\alpha_n+10^{n-1}\alpha_{n-1}+\cdots+10^2\alpha_2+10\alpha_1+\alpha_0 \overset{3}{\equiv}$$
$$\overset{3}{\equiv} \alpha_n+\alpha_{n-1}+\cdots+\alpha_2+\alpha_1+\alpha_0$$

(і аналогічно для модуля 9). Це означає, що числа a і $\alpha_n+\alpha_{n-1}+\cdots+\alpha_2+\alpha_1+\alpha_0$ дають однаковий залишок від ділення на 3 (на 9), зокрема, або одночасно діляться на 3 (на 9), або ні.

<u>Ознака подільності на 2 (а також на 5 і на 10).</u> Число ділиться на 2 (відповідно на 5 або 10) тоді і тільки тоді, коли остання цифра ділиться на 2 (5 або 10).

Це випливає з того, що $10 \overset{2}{\equiv} 0$ (і аналогічно для модулів 5 і 10).

Ознака подільності на 4. $10^k \equiv 0$, якщо $k > 1$, тому

$$\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_2\alpha_1\alpha_0} \overset{4}{\equiv} \overline{\alpha_1\alpha_0}.$$

Ознака подільності на 8. $10^k \overset{8}{\equiv} 0$, якщо $k > 2$, тому

$$\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0} \overset{8}{\equiv} \overline{\alpha_2\alpha_1\alpha_0}.$$

Ознака подільності на 11. Число $\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_2\alpha_1\alpha_0}$ ділиться на 11 тоді і тільки тоді, коли $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \dots + (-1)^n\alpha_n$ ділиться на 11.

Справді, $10 \overset{11}{\equiv} -1$, $10^2 \overset{11}{\equiv} 1$ і т. д., а тому

$$10^n\alpha_n + 10^{n-1}\alpha_{n-1} + \dots + 10^2\alpha_2 + 10\alpha_1 + \alpha_0 \overset{11}{\equiv}$$
$$\overset{11}{\equiv} \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \dots + (-1)^n\alpha_n.$$

Ознаки подільності на числа типу 6, 15, 12 дає така теорема:

Теорема 9. Якщо $d(n,m) = 1$ (тобто числа n і m взаємно прості), n/a і m/a, то nm/a.

Доведення. Якщо n/a, то $a = nq$. Оскільки $d(n,m) = 1$ і m/nq, то m/q (див. теорему 5), тобто $q = ms$. Остаточно маємо: $a = nq = nms$, тобто nm/a.

Розглянемо позиційні системи запису чисел. Візьмемо будь-яке відмінне від одиниці натуральне число s. Будь-яке натуральне число a можна поділити на s із залишком:

$$a = q_0 s + r_0 \ (0 \le r_0 < s). \tag{2}$$

Зазначимо, що при цьому $q_0 < a$, оскільки $s \ge 2$ за умовою. Якщо $q_0 > 0$, то ділимо його із залишком на s

$$q_0 = q_1 s + r_1 \ (0 \le r_1 < s). \tag{3}$$

На цьому кроці додатково буде виконано умову: $q_1 < q_0$. Підставивши значення для q_0 з (3) в (2), дістанемо

$$a = q_1 s^2 + r_1 s + r_0. \tag{4}$$

Якщо $q_1 > 0$, то робимо ще один аналогічний крок – ділимо q_1 на s із залишком:

$$q_1 = q_2 s + r_2 \ (0 \le r_2 < s). \tag{5}$$

Підставивши вираз (5) для q_1 в (4), матимемо:

$$a = q_2s^3 + r_2s^2 + r_1s + r_0.$$

Оскільки $a > q_0 > q_1 > q_2 > \ldots$ і всі q_i натуральні, то через скінченну кількість кроків дістанемо рівність $q_n = q_{n-1}s + r_n$ $(0 < r_n < s)$, в якій $q_{n+1} = 0$. В підсумку матимемо таке зображення числа a:

$$a = r_ns^n + r_{n-1}s^{n-1} + \cdots + r_2s^2 + r_1s + r_0. \tag{6}$$

Його називають розкладом числа a за степенями числа s.

Усі коефіцієнти цього розкладу (числа r_k) не перевищують числа $s-1$, причому $r_n \neq 0$. Важливо зазначити, що розклад (6) визначається числом a однозначно. Це випливає з того, що при діленні із залишком неповна частка і залишок визначаються однозначно. Замість суми, що стоїть у правій частині формули (6), можна виписати тільки послідовність її коефіцієнтів:

$$a = \overline{r_nr_{n-1}\ldots r_2r_1r_0}. \tag{7}$$

Якщо число s заздалегідь зафіксоване, то за скороченим записом (7) легко відновити повний запис (6). Щоб записати число у формі (7), достатньо мати s знаків (цифр) для позначення чисел $1, 2, \ldots, s-1$, бо числа r_k іншими бути не можуть. Цей запис числа називають позиційним: роль кожної цифри r_k визначається не тільки тим, яке число вона позначає, а й місцем, яке вона займає в послідовності. Число s називають при цьому основою позиційного запису. Іноді, щоб уникнути непорозумінь, основу s називають додатковою. Наприклад, пишуть так: $a = r_nr_{n-1}\ldots r_2r_1r_{0_{(s)}}$.

Ми звикли до позиційного записування чисел з основою 10. Проте, як бачимо, основою позиційної системи може бути будь-яке натуральне число, відмінне від 1.

Приклади

1) Якщо n – непарне число, то n^2-1 ділиться на 8. Довести це.

Розв'язання. Розглянемо число $N = (n-1)(n+1)$. Оскільки n – непарне число, то $n-1$ і $n+1$ – парні числа. Серед трьох послідовних натуральних чисел хоча б одне ділиться на 3. Серед чисел $(n-1)$ і $(n+1)$ одне ділиться на 2, а інше – на 4. Тому добуток $(n-1)(n+1) = n^2-1$ ділиться на 8.

2) Якщо n не ділиться на 3, то n^2-1 ділиться на 3. Довести це.

Розв'язання. Якщо n не ділиться на 3, то n можна представити у вигляді $n = 3k \pm 1$. Тоді

$$n^2 - 1 = (3k \pm 1)^2 - 1 = 9k^2 \pm 6k + 1 - 1 = 9k^2 \pm 6k = 3(3k^2 \pm 2k).$$

Звідси випливає, що n^2-1 ділиться на 3.

3) Якщо p і q – прості числа, що перевищують 3, то p^2-q^2 ділиться на 24. Довести це.

Розв'язання. Очевидно $p^2-q^2=(p^2-1)-(q^2-1)$. З прикладу 2 випливає, що при $p>3$ p^2-1 ділиться на 3, при $q>3$ q^2-1 ділиться на 3. З прикладу 1 одержуємо, що при непарному p p^2-1 ділиться на 8, q^2-1 ділиться на 8 при непарному q. Отже, p^2-1 і q^2-1 діляться на $3\cdot 8=24$. Таким чином, при простих p і q, що перевищують 3, p^2-q^2 ділиться на 24.

4) Довести, що числа n і n^3 дають однаковий залишок при діленні на 6.

Розв'язання. Для того, щоб довести, що числа n і n^3 дають однаковий залишок при діленні на 6, досить довести, що різниця n^3-n ділиться на 6. $n^3-n=(n-1)n(n+1)$. Серед трьох послідовних цілих чисел хоча б одне ділиться на 3, хоча б одне ділиться на 2, тому добуток $(n-1)n(n+1)$ ділиться на 6.

Завдання для аудиторних занять та самостійної роботи

1. Застосувавши алгоритм Евкліда, обчислити найбільший спільний дільник d і найменше спільне кратне m таких пар чисел:
1) 2173 і 2747; 2) 6499 і 2077; 3) 12769 і 7571; 4) 3503 і 2231.

(Відповідь: 1) $d=41$, $m=145591$; 2) $d=67$, $m=201469$;
3) $d=113$, $m=855523$; 4) $d=1$, $m=4815193$.)

2. Знайти залишок від ділення на 7 таких чисел:
1) 2^{135}; 2) 1979^{1980}; 3) $143^{33}-16\cdot 24^{20}$; 4) $13^{14}-18^{13}$.

(Відповідь: 1) 1; 2) 1; 3) 2; 4) 4.)

3. Довести, що при будь-якому цілому m число m^3+3m^2+2m ділиться на 6.

4. Довести, що при будь-якому цілому n число n^5-5n^3+4n ділиться на 120.

5. Якщо n ціле, то число $\frac{n^3}{6}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$ також ціле. Довести це.

6. Якщо n – непарне число, то n^2-1 ділиться на 8. Довести це.

7. Якщо n не ділиться на 3, то n^2-1 ділиться на 3. Довести це.

8. Якщо p і q – прості числа, що перевищують 3, то p^2-q^2 ділиться на 24. Довести це.

9. Нехай p – просте число. Скільки може бути натуральних чисел, що не перевищують p^n і взаємно простих з ним (n – натуральне

число)?

(Відповідь: $p^n - p^{n-1}$.)

10. Якщо p – просте число, відмінне від 2 і 3, то принаймні одне з чисел $p+10$ або $p+14$ не є простим. Довести це.

Розв'язання. $p+10=(p+1)+9$, $p+14=(p-1)+15$. Далі використати задачу 7.

§2. Біноміальна формула Ньютона. Властивості біноміальних коефіцієнтів

Для узагальнення відомих формул

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2,$$

піднесення бінома (двочлена) $a+b$ до квадрата й куба та відповіді на запитання, чи існує просте загальне правило піднесення бінома $a+b$ до довільного натурального степеня n, слід користуватися такими загальновживаними означеннями: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$; $0! = 1$ (за означенням); $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ для кожного цілого невід'ємного n і цілого $k \in [0;n]$. Зокрема

$$C_0^0 = \frac{0!}{0!0!} = 1,\ C_n^0 = \frac{n!}{0!n!} = 1,\ C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n;$$

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}, \ldots, C_n^n = \frac{n!}{n!0!} = 1.$$

Числа C_n^k називають біноміальними коефіцієнтами. Вони відіграють дуже важливу роль у різних галузях математики, особливо в так званій комбінаторній математиці. Символ C_n^k читають так: "це з n по k" або "число сполучень з n по k".

Зупинимось на двох властивостях біноміальних коефіцієнтів:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$. Справді,

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

2. Якщо $n > 1$ і $0 < k < n$, то $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ (основна рекурентна формула для біноміальних коефіцієнтів).

Доведення. $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} =$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!(k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!(k-1)!} \cdot \frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Виявляється, що для кожного натурального числа n вірною буде формула

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n. \qquad (1)$$

Її називають біноміальною формулою Ньютона. Доведемо її, застосувавши метод математичної індукції.

Для малих значень n формула правильна. Наприклад,

$$(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b, \text{ оскільки } C_1^0 = C_1^1 = 1.$$

Так само

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2, \text{ оскільки } C_2^0 = 1, C_2^1 = 2, C_2^2 = 1.$$

Припустимо, що біноміальна формула правильна для показника $n-1$, тобто виконується рівність

$$(a+b)^{n-1} = C_{n-1}^0 a^{n-1} + C_{n-1}^1 a^{n-2} b + C_{n-1}^2 a^{n-3} b^2 + \cdots +$$
$$+ C_{n-1}^{k-1} a^{n-k} b^{k-1} + C_{n-1}^k a^{n-k-1} b^k + \cdots + C_{n-1}^{n-1} b^{n-1}.$$

Тоді для показника n матимемо:

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b) = (C_{n-1}^0 a^{n-1} + C_{n-1}^1 a^{n-2} b + C_{n-1}^2 a^{n-3} b^2 + \cdots +$$
$$+ C_{n-1}^{k-1} a^{n-k} b^{k-1} + C_{n-1}^k a^{n-k-1} b^k + \cdots + C_{n-1}^{n-1} b^{n-1})(a+b) =$$
$$= C_{n-1}^0 a^n + (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^0) a^{n-1} b + (C_{n-1}^2 + C_{n-1}^1 a^{n-2} b^2 + \cdots +$$
$$+ (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) a^{n-k} b^k + \cdots + (C_{n-1}^{n-1} + C_{n-1}^{n-2}) ab^{n-1} + C_{n-1}^{n-1} b^n.$$

Взявши до уваги, що

$$C_{n-1}^1 + C_{n-1}^0 = C_n^1,\ C_{n-1}^2 + C_{n-1}^1 = C_n^2, \ldots,$$
$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k, \ldots, C_{n-1}^{n-1} + C_{n-1}^{n-2} = C_n^{n-1}$$

і, крім того, $C_{n-1}^0 = C_n^0$, $C_{n-1}^{n-1} = C_n^n$ (оскільки всі ці чотири числа дорівнюють 1), дістанемо формулу (1).

Зокрема, підставивши замість b число $-b$, дістанемо формулу піднесення до степеня різниці

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots +$$
$$+ (-1)^{n-1} C_n^{n-1} ab^{n-1} + (-1)^n C_n^n b^n. \tag{2}$$

З формул (1) і (2) при $a = b = 1$ можна вивести такі цікаві й корисні співвідношення для біноміальних коефіцієнтів:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n, \tag{3}$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0. \tag{4}$$

Крім того, з формули (1) випливає, що всі біноміальні коефіцієнти – цілі числа, бо при множенні бінома $a+b$ на себе скільки завгодно разів не можуть з'явитися дробові коефіцієнти.

П р и к л а д и.

I. Чому дорівнює n, якщо $C_{n+1}^{n-1}=10$?

Розв'язання. За формулою $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ знаходимо:

$$C_{n+1}^{n-1}=\frac{(n+1)!}{(n-1)!\,((n+1)-(n-1))!}=\frac{(n+1)!}{(n-1)!2!}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Таким чином, $\frac{n(n+1)}{2}=10$ або $n^2+n-20=0$. Коренями одержаного рівняння будуть числа $n_1=-5$, $n_2=4$. Очевидно, $n_1=-5$ не задовольняє рівняння. Отже, $n=4$.

II. Розв'язати рівняння:

1) $C_{x+2}^4=x^2-1$; 2) $C_x^{x-3}+C_x^{x-2}=15(x-1)$;

3) $\frac{1}{C_4^x}-\frac{1}{C_5^x}=\frac{1}{C_6^x}$; 4) $C_{x+1}^{x-1}+C_x^{x-2}=9x+10$.

Розв'язання. 1) Очевидно,

$$C_{x+2}^4=\frac{(x+2)!}{4!(x+2-4)!}=\frac{(x+2)!}{4!(x-2)!}=$$

$$=\frac{(x-1)x(x+1)(x+2)}{24}=\frac{(x^2-1)x(x+2)}{24}.$$

Отже,

$$\frac{(x^2-1)x(x+2)}{24}=x^2-1 \text{ або } (x^2-1)\left(\frac{x(x+2)}{24}-1\right)=0.$$

Коренями одержаних рівнянь будуть відповідно $x_{1,2}=\pm1$ і $x_3=\pm4$, $x_4=-6$. Тільки $x=4$ є коренем рівняння 1).

2) Оскільки

$$C_x^{x-3}=\frac{x!}{(x-3)!(x-(x-3))!}=\frac{x!}{(x-3)!3!}=\frac{(x-2)(x-1)x}{6},$$

$$C_x^{x-2}=\frac{x!}{(x-2)!(x-(x-2))!}=\frac{x!}{(x-2)!3!}=\frac{(x-1)x}{2}, \text{ то}$$

$$\frac{(x-2)(x-1)x}{6}+\frac{(x-1)x}{2}=15(x-1).$$

$x-1$ не є коренем рівняння 2), тому після скорочення одержаного рівняння на $x-1$ одержуємо

$$\frac{(x-2)x}{6}+\frac{x}{2}=15 \text{ або } \frac{(x-2)x+3x}{6}=15.$$

З $x^2+x-90=0$ одержуємо $x_1=-10$, $x_2=9$.

Відповідь: $x=9$.

3) Відповідь: $x=3$.

4) Відповідь: $x=4$.

III. Розв'язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases} C_x^y=C_x^{y+2}, \\ C_x^2=153; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} C_{x-1}^y=10, \\ C_x^{y+1}=\frac{5}{2}x. \end{cases}$

Розв'язання. 1) Запишемо друге рівняння системи у вигляді

$$\frac{x!}{2!(x-2)!}=153 \text{ або } \frac{(x-1)x}{2}=153.$$

Отже, $x^2-x-306=0$. Тому $x_1=-17$, $x_2=18$. Таким чином,

$$C_{18}^y=C_{18}^{y+2} \text{ або } \frac{18!}{y!(18-y)!}=\frac{18!}{(y+2)!(18-y-2)!}.$$

Запишемо одержане рівняння у вигляді

$$\frac{18!}{y!(18-y)!}=\frac{18!}{y!(y+1)(y+2)(16-y)!},$$

яке після відповідних скорочень матиме вигляд

$$\frac{1}{(17-y)(18-y)}=\frac{1}{(y+1)(y+2)}.$$

Отже,

$$(y+1)(y+2)=(17-y)(18-y) \text{ або } y^2+3y+2=y^2-35y+306.$$

Таким чином, $y=8$.

Відповідь: $x=18$, $y=8$.

2) Очевидно,

$$C_{x-1}^y=\frac{(x-1)!}{y!(x-1-y)!},\ C_x^{y+1}=\frac{x!}{(y+1)!(x-y-1)!}.$$

Тому

$$\frac{(x-1)!}{y!(x-1-y)!}=10,\ \frac{x!}{(y+1)!(x-y-1)!}=\frac{5}{2}x.$$

Поділимо перше рівняння на друге: $\frac{(y+1)!}{y!}\cdot\frac{(x-1)!}{x!}=\frac{4}{x}$. Після відповідних скорочень одержимо рівняння $y+1=4$ або $y=3$. Підставимо одержане значення $y=3$ в перше рівняння системи: $C_{x-1}^{3}=10$. Тоді

$$\frac{(x-1)!}{3!(x-1-3)!}=10 \ \text{ або } \ \frac{(x-1)!}{6(x-4)!}=10.$$

Таким чином, $(x-3)(x-2)(x-1)=60$. Отже, $x^3-6x^2+11x-66=0$. Одержане рівняння можна записати у вигляді

$$(x^3+11x)-(6x^2+66)=0 \ \text{ або } \ (x^2+11)(x-6)=0.$$

Таким чином, $x=6$.

Відповідь: $x=6$, $y=3$.

IV. Знайти раціональні члени в розкладах біномів:

1) $(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})^5$; 2) $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2})^{24}$; 3) $(\sqrt[3]{2}-\sqrt[4]{8})^{15}$.

Розв'язання.

$$1)\,(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})^5=C_5^0(\sqrt[3]{3})^5+C_5^1(\sqrt[3]{3})^4(\sqrt{2})+C_5^2(\sqrt[3]{3})^3(\sqrt{2})^2+$$
$$+C_5^3(\sqrt[3]{3})^2(\sqrt{2})^3+C_5^4(\sqrt[3]{3})(\sqrt{2})^4+C_5^5(\sqrt{2})^5.$$

Очевидно, тільки $C_5^2(\sqrt[3]{3})^3(\sqrt{2})^2=60$ в правій частині буде раціональним числом.

$$2)\,(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2})^{24}=C_{24}^0(\sqrt[5]{3})^{24}+C_{24}^1(\sqrt[5]{3})^{23}(\sqrt[7]{2})+\cdots+C_{24}^k(\sqrt[5]{3})^{24-k}(\sqrt[7]{2})^k+$$
$$+\cdots+C_{24}^{23}(\sqrt[5]{3})(\sqrt[7]{2})^{23}+C_{24}^{24}(\sqrt[7]{2})^{23}+C_{24}^{24}(\sqrt[7]{2})^{24}.$$

Знайдемо значення k, при яких $(k+1)$-ий член розкладу

$$T_{k+1}=C_{24}^k(\sqrt[5]{3})^{24-k}(\sqrt[7]{2})^k$$

буде раціональним числом. Оскільки

$$T_{k+1}=C_{24}^k 3^{\frac{24-k}{5}}\cdot 2^{\frac{k}{7}},$$

то T_{k+1} буде раціональним якщо $k=14$. Знайдемо

$$T_{14+1}=T_{15}=C_{24}^{14}\cdot 3^2\cdot 2^2=C_{24}^{14}\cdot 36.$$

$$3)\,(\sqrt[3]{2}-\sqrt[4]{8})^{15}=C_{15}^{0}(\sqrt[3]{2})^{15}-C_{15}^{1}(\sqrt[3]{2})^{14}(\sqrt[4]{8})+\dots+$$

$$+(-1)^{k}C_{15}^{k}(\sqrt[3]{2})^{15-k}(\sqrt[4]{8})^{k}+\dots+C_{15}^{14}(\sqrt[3]{2})(\sqrt[4]{8})^{14}-C_{15}^{15}(\sqrt[4]{8})^{15}.$$

Розглянемо $(k+1)$-ий член розкладу

$$T_{k+1}=C_{15}^{k}(\sqrt[3]{2})^{15-k}(\sqrt[4]{8})^{k}.$$

Оскільки,

$$T_{k+1}=(-1)^{k}C_{15}^{k}2^{\frac{15-k}{3}}\cdot 8^{\frac{k}{4}},$$

то T_{k+1} буде раціональним числом, якщо $k=0$, $k=12$. При $k=0$ маємо $T_1=C_{15}^{0}\cdot 32\cdot 1=32$; при $k=12$

$$T_{13}=C_{15}^{12}2\cdot 8^{3}=C_{15}^{3}\cdot 2^{10}.$$

V. Обмежившись двома членами в біноміальному розкладі, наближено обчислити:

1) $(0,997)^8$; 2) $(2,003)^{10}$; 3) $(0,999)^8$.

Розв'язання.

$$1)\,(0,997)^{8}=(1-0,003)^{8}=C_{8}^{0}\cdot 1^{8}-C_{8}^{1}\cdot 1^{7}\cdot 0,003+\dots+$$

$$+(-1)^{k}C_{8}^{8-k}\cdot 1^{8-k}\cdot 0,003^{k}+\dots-C_{8}^{7}\cdot 1\cdot 0,003+C_{8}^{8}(0,003)^{8}\approx$$

$$\approx 1-8\cdot 0,003=0,976.$$

$$2)\,(2,003)^{10}=(2+0,003)^{10}\approx C_{10}^{0}\cdot 2^{10}+C_{10}^{1}\cdot 2^{9}\cdot(0,003)=$$

$$=2^{9}(2+0,003)=512\cdot 2<006=1039,36.$$

$$3)\,(0,999)^{8}=(1-0,001)^{8}\approx C_{8}^{0}\cdot 1^{8}-C_{8}^{1}\cdot 1^{7}\cdot(0,001)=$$

$$=1-0,008=0,992.$$

VI. У біноміальному розкладі $\left(a^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{a^4}\right)^n$ коефіцієнт третього члена на 44 більший від коефіцієнта другого члена. Знайти член розкладу, який не містить a.

Розв'язання. За умовою

$$C_n^2\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{a^4}\right)^2-C_n^1\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{a^4}\right)=44.$$

Отже,

$$\frac{n(n-1)}{2}-n=44 \quad \text{або} \quad n^2-3n-88=0.$$

Тому, $n_1 = -8$, $n_2 = 11$. Отже, $n = 11$. Запишемо $(k+1)$-ий член розкладу

$$T_{k+1} = C_{11}^k \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{11-k} \left(\frac{1}{a^4}\right)^k = C_{11}^k a^{\frac{3(11-k)}{2}} \cdot a^{-4k} =$$

$$= C_{11}^k a^{\frac{3(11-k)}{2} - 4k} = C_{11}^k a^{\frac{33-11k}{2}}.$$

T_{k+1} не буде містити a, якщо $\frac{33-11k}{2}$, тобто $k = 3$. Шуканий коефіцієнт $C_{11}^3 = 165$.

§3. Комбінаторика

Нехай n – фіксоване натуральне число. Якщо для вибору першого члена n-членної послідовності символів

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \tag{1}$$

є k_1 можливостей, для вибору її другого члена k_2 можливостей і т. д., нарешті, для вибору n-го члена k_n можливостей, причому число можливих варіантів для члена a_i $(i = 2, 3, \ldots, n)$ не залежить від конкретної реалізації можливостей для вибору членів $a_1, \ldots, a_{i-1}$, то загальне число послідовностей (1) дорівнює $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$.

Застосувавши комбінаторне правило множення, розв'яжемо кілька ключових комбінаторних задач.

Задача 1. Нехай M – множина, яка складається з n елементів: $M = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$. Скількома способами можна лінійно упорядкувати цю множину, тобто розмістити її елементи один за одним, утворити з них n-членну послідовність, в якій жодний елемент з M не повторюється?

Для вибору першого члена послідовності маємо n можливостей (будь-який елемент з M). Незалежно від того, який елемент з M взято як перший член послідовності, для вибору її другого члена в нашому розпорядженні буде $(n-1)$ можливостей (будь-який елемент з M, крім використаного на першому кроці). Взагалі, якщо перші s членів послідовності вже вибрано, то для вибору її $(s+1)$-го члена буде $n-s$ можливостей. Тому згідно з комбінаторним правилом множення з елементів множини M всього можна побудувати $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ різних n-членних послідовностей. Цей добуток коротко позначають через $n!$.

Лінійно упорядковані скінченні множини називають перестановками. Тому останній результат можна сформулювати так: з n елементів можна утворити $n!$ різних перестановок. Число всіх перестановок n елементів позначають символом P_n. Отже, $P_n = n!$.

Задача 2. Нехай $M = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$. Лінійно упорядковані k-елементні підмножини $(0 \le k \le n)$ множини M називають k-розміщеннями елементів цієї множини. Число всіх таких розміщень для фіксованого k позначають через A_n^k (читається: "число розміщень з n по k". Чому дорівнює це число?

Наприклад, $A_3^2 = 6$, оскільки $(1,2)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(3,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$ – повний список усіх 2-розміщень множини 1, 2, 3. Щоб вивести загальну формулу, міркуємо так. Будь-яке розміщення $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$

можна знайти за допомогою такої послідовності процедури: спочатку вибираємо з множини M перший елемент k-розміщення α_1 (це можна зробити n різними способами), потім вибираємо елемент α_2 ($n-1$ можливостей), потім – α_3 ($n-2$ можливостей), і, нарешті, елемент α_k ($n-(k-1)$ можливостей. Згідно з комбінаторним правилом множення в підсумку дістаємо:

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Щоб ця формула була вірною також для $k=n$, вважаємо, що $0! = 1$. Зазначимо, що при $k=n$ k-розміщення стають перестановками множини M. Зокрема, $A_n^n = P_n$.

Задача 3. Позначимо через C_n^k кількість (невпорядкованих) k-елементних підмножин n-елементної множини ($0 \le k \le n$). Символ C_n^k слід читати так: "число сполучень з n по k". Як обчислювати C_n^k?

Оскільки кожну k-елементну множину можна впорядкувати $k!$ способами (задача 1), то $A_n^k = C_n^k\cdot k!$, звідки

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Отже, C_n^k – це й є ті біноміальні коефіцієнти, про які йшлося в попередньому параграфі.

Задача 4. Грунтуючись лише на комбінаторному правилі множення, знайти кількість усіх підмножин n-елементної множини $M = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$.

Щоб виділити деяку підмножину A множиниM, треба про кожний елемент $C_i \in M$ сказати, належить він множині A чи ні. Оскільки для кожного елемента з M можливі при цьому два висновки, причому ці висновки для різних елементів ніяк між собою не зв'язані, то підмножину A можна побудувати 2^n способами. Отже, множина M має 2^n підмножин (включаючи саму множину M, а також порожню множину).

Результати задач 3 і 4 змістовно пояснюють рівність

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n,$$

тим самим доводячи її (обидві частини рівності означають число всіх підмножин n-елементної множини). У попередньому параграфі цю рівність було доведено формально-арифметично.

П р и к л а д и.

I. Скільки є трицифрових натуральних чисел, у десятковому запису яких немає парних цифр? Знайти суму всіх таких чисел.

Розв'язання. На кожній з трьох позицій може стояти одна з цифр 1, 3, 5, 7 або 9; інакше кажучи, для кожного з трьох місць є п'ять можливостей, причому реалізуються вони незалежно. Отже, всього чисел $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Якщо розглядати всі числа разом, то в кожному розряді кожна з п'яти цифр міститиметься однакове число раз, а саме: 25. Тому сума всіх чисел дорівнює

$$(1+3+5+7+9)\cdot 25+(1+3+5+7+9)\cdot 25\cdot 10+(1+3+5+7+9)\cdot 25\cdot 10^2 =$$

$$= 25^2 + 25^2 \cdot 10 + 25^2 \cdot 100 = 69375.$$

II. Скільки є трицифрових натуральних чисел, у десятковому запису яких немає непарних цифр? Знайти суму s усіх таких чисел.

Розв'язання. Всього таких чисел $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$. Як і в попередній задачі сума всіх вказаних чисел дорівнює

$$s = (2+4+6+8)\cdot 20 + (2+4+6+8)\cdot 20\cdot 10 + (2+4+6+8)\cdot 25\cdot 100 =$$

$$= 20^2 + 20^2 \cdot 10 + 20 \cdot 25 \cdot 100 = 54500.$$

III. Скільки є п'ятицифрових натуральних чисел, десятковий запис яких містить цифру?

Розв'язання. Нехай $\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5}$ – довільне п'ятицифрове число. На місці цифри α_1 може стояти одна з цифр $1, 2, 3, \ldots, 9$. На місці цифр α_i $(i = 2, 3, 4, 5)$ може стояти одна з цифр $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$. Згідно з комбінаторним правилом множення одержуємо, що число всіх п'ятизначних чисел дорівнює $9 \cdot 10^4$. Число всіх п'ятизначних чисел, які не містять цифрру 0 дорівнює 9^5 (для кожної цифри α_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ є 9 можливостей). Отже, число всіх п'ятизначних чисел з вказаною властивістю дорівнює $9 \cdot 10^4 - 9^5 = 30951$.

IV. Скільки є п'ятицифрових натуральних чисел, у десятковому запису яких немає двох або більше однакових цифр, які стоять поряд?

Розв'язання. На першому місці (в найвищому розряді може стояти будь-яка цифра, відмінна від нуля; на кожному наступному місці – будь-яка з десяти цифр, крім тієї, яка стоїть на попередньому місці. У підсумку для кожної позиції маємо дев'ять можливостей. Тому чисел, які задовольнять умові задачі, є $9^5 = 59049$.

§4. Тотожні перетворення виразів

Тотожні перетворення досить часто доводиться виконувати під час дослідження функції, розв'язання рівнянь і нерівностей та в інших випадках. Розв'язуючи майже кожну математичну задачу, ми завжди прагнемо знайти не тільки правильну відповідь, а й надати їй по можливості привабливої, простої форми. Так, якщо у відповіді ми дістанемо деякий математичний вираз, то, зробивши певні тотожні перетворення його, знайдемо найбільш прийнятний варіант відповіді. Звичайно, в межах однієї задачі важко сформулювати критерій найкращої форми відповіді. Багато чого залежить від використання результату в майбутньому, а також від досвіду й смаку автора розв'язання.

Тотожні перетворення математичного виразу – це послідовний запис окремих його частин тотожно рівними їм виразам. Тому мистецтво тотожних перетворень починається з поняття тотожності або тотожної рівності.

Означення. Нехай P – підмножина множини дійсних чисел R. Рівність $f(x)=g(x)$, яка містить букву (змінну) x, називають тотожною на множині P, якщо для всіх значень x з цієї множини вона перетворюється в правильну числову рівність.

Наприклад, рівності

$\sin^2 x+\cos^2 x=1, \quad \sqrt{x^2}=|x|,$

$\sin^2 x=2\sin x\cos x, \quad 1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$

тотожні на R (а отже, і на кожній підмножині R), тоді як рівність $\lg x^2=2\lg x$ тотожна лише на множині додатних дійсних чисел, а рівність

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

– на множині всіх дійсних чисел без точки $\pi+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Якщо вирази $f(x)$ і $g(x)$ мають однакову область означення D і збігаються для всіх значень x з цієї області, то йде мова про тотожність $f(x)=g(x)$, не визначаючи області D. Називатимемо такі тотожності безумовними. Тотожність $f(x)=g(x)$ у цьому разі означає, просто кажучи, що формули $f(x)$ і $g(x)$ задають ту саму числову функцію. Саме такий зміст мають, наприклад, тотожності $\lg x^2=2\lg|x|$, $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, $\lg 10^x=x$, $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$, але не $10^{\lg x}=x$, $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x=1$ або $\sin x\cdot\operatorname{ctg}x=\cos x$. Останні три рівності не можна назвати тотожностями, не визначивши відповідної множини P. Ігнорування цієї обставини – джерело помилок під час розв'язання задач, які потребують тотожних перетворень. За будь-яких обставин, в умовах будь-якої задачі можна, наприклад, вираз $\sin(\arccos x)$ замінити на $\sqrt{1-x^2}$ і навпаки, проте функцію $\cos x$ можна замінити функцією

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

без неприємних наслідків лише тоді, коли з контексту задачі випливає, що x не може набувати жодного із значень $(2k+1)\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

П р и к л а д и.

I. Для кожної з поданих нижче рівностей назвати максимальну множину P, на якій рівність тотожна. З'ясувати, які рівності є безумовними тотожностями.

1) $1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$;
2) $\lg(x^2-2x)=\lg x+\lg(x-2)$;
3) $10^{\lg x}=x$;
4) $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x=1$;
5) $\sin x\cdot\operatorname{ctg} x=\cos x$;
6) $\frac{|x|}{x}=-1$;
7) $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$;
8) $\log_x y\cdot\log_y x=1$;
9) $(\sqrt{x})^2=x$;
10) $\sqrt{x^2}=-x$;
11) $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$;
12) $\sin x=\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2 x}}$;
13) $\sin(\arcsin x)=x$;
14) $\arcsin(\sin x)=x$;
15) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x$;
16) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x$;
17) $\cos(\arccos x)=x$;
18) $\arccos x(\cos x)=x$.

Відповідь: 1) R без точок $\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$; безумовна тотожність;
2) $(2;+\infty)$; 3) $(0;+\infty)$; 4) R без точок $\frac{k\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$;
5) R без точок $k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$; 6) $(-\infty;0)$;
7) R; безумовна тотожність;
8) множина всіх пар чисел $(x;y)$ з додатними координатами, відмінними від 1; 9) $[0;+\infty)$; 10) $(-\infty;0]$;
11) об'єднання відрізків $\left[-\frac{\pi}{2}+3k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ по всіх цілих R;
12) об'єднання проміжків $(2k\pi;\pi+2k\pi)$ по всіх цілих R;
13) $[-1;1]$; 14) $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; 15) R; безумовна тотожність
16) $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; 17) $[-1;1]$; 18) $[0;\pi]$.

II. Довести, що сума дробів

$$\frac{a-b}{1+ab},\ \frac{b-c}{1+bc},\ \frac{c-a}{1+ca}$$

дорівнює їх добутку.

Розв'язання.

$$\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ca}=$$

$$=\frac{(a-b)(1+bc)(1+ca)+(b-c)(1+ab)(1+ca)+(c-a)(1+ab)(1+bc)}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}=$$

$$=\frac{(1+ca)(a+\cancel{a}\cancel{b}\cancel{c}-\cancel{b}-b^2c+\cancel{b}+ab^2-c-\cancel{a}\cancel{b}\cancel{c})(1+ab)(1+bc)}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}=$$

$$=\frac{(1+ca)\left((a-c)+b^2(a-c)\right)-(a-c)(1+bc+ab+ab^2c)}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}=$$

$$=\frac{(a-c)(\cancel{1}+b^2+ca+\cancel{a}\cancel{b^2}\cancel{c}-\cancel{1}-bc-ab-\cancel{a}\cancel{b^2}\cancel{c})}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}=$$

$$=\frac{(a-c)\left((b^2-bc)+(ca-ab)\right)}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}=\frac{(a-c)(b-c)(b-a)}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}=$$

$$=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}.$$

Дана рівність є тотожністю на множині всіх тих трійок $(a;b;c)$, в яких $ab\neq-1$, $bc\neq-1$, $ca\neq-1$.

III. Розкласти на множники:

1) x^3-3x^2+3x-2; 2) $(x^2-x-1)^2-6(x^2-x)+11$; 5) $(x-y)($
3) x^4+x^2+1; 4) $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$; 6) x^2-y^2

Розв'язання.

1) $x^3-3x^2+3x-2=(x^3-8)-(3x^2-3x-6)=$
$=(x-2)(x^2+2x+4)-3(x+1)(x-2)=(x-2)(x^2-x+1)$;

2) $(x^2-x-1)^2-6(x^2-x)+11=$
$=(x^2-x-1)^2-6(x^2-x-1)+5=(x^2-x-2)(x^2-x-6)$, оскільки 1 і 5 – корені тричлена $z^2-6z+5=0$. Остаточно дістанемо розклад $(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$;

3) $x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=$
$=(x^2+1)^2-x^2=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$;

4) Якщо $x=y$, то вираз

$$N = (x-y)(x+y)^2 + (y-z)(y+z)^2 + (z-x)(z+x)^2 = 0,$$

тому N ділиться на $(x-y)$. Аналогічно при $x = z$ $N = 0$, тому N ділиться на $x-z$. При $y = z$ теж одержуємо $N = 0$. Це означає, що N ділиться на $y-z$. Отже, $N = a(x-y)(x-z)(y-z)$. Підставивши в одержану рівність $x = 3$, $y = 2$, $z = 6$, одержимо $2 = 2a$. Отже, $a = 1$. Таким чином,

$$(x-y)(x+y)^2 + (y-z)(y+z)^2 + (z-x)(z+x)^2 = (x-y)(x-z)(y-z).$$

5) $(x-y)(x+y)^2 + (y-z)(y+z)^2 + (z-x)(z+x)^2 =$
$= (x-y)(x-z)(y-z)$;

6) $x^2 - y^2 + 4x - 6y - 5 = (x+2)^2 - (y+3)^2 =$
$= (x+2-y-3)(x+2+y+3) = (x-y-1)(x+y+5)$.

IV. Довести тотожності:

1) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2$;
2) $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$;

3) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, $n \in N$;

4) $a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + \cdots +$

$+a^2b^{2k-2} - ab^{2k-1} + b^{2k})$, $k \in N$.

Розв'язання.

1) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 =$
$= (a^2x^2 + 2axby + b^2y^2) + (a^2y^2 - 2aybx + b^2x^2) =$
$= (ax+by)^2 + (ay-bx)^2$.

2) При $a = b$ $N = (ab)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$ дорівнює нулю. Аналогічно, при $a = c$ $N = 0$ і при $b = c$ $N = 0$. Тому

$$N = k(a-b)(a-c)(b-c).$$

При $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$ одержуємо рівність $1 + 1 + (-2)^3 = k \cdot 2 \cdot 1$. Отже, $k = -3$. Тому

$$N = -3(a-b)(a-c)(b-c) = 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

3) Доведемо тотожність методом математичної індукції. При $n = 2$ маємо $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, тобто рівність вірна. Припустимо, що рівність вірна при $n - k$ $(k \leq 2)$ і доведемо, що вона вірна при $n = k+1$. Маємо

$$a^{k+1} - b^{k-1} = a \cdot a^k - b \cdot b^k = a \cdot a^k - a \cdot b^k + a \cdot b^k - b \cdot b^k = a(a^k - b^k) + b^k(a-b) =$$

$$= a(a-b)(a^{k-1}+a^{k-2}b+\cdots+ab^{k-2}+b^{k-1})+b^k(a-b)=$$
$$= (a-b)(a^k+a^{k-1}b+\cdots+a^2b^{k-2}+ab^{k-1}+b^k).$$

4) Доводимо методом математичної індукції. При $n=1$ маємо
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$
Припустимо, що рівність вірна при деякому $n=k$ $(k\le 1)$ і доведемо, що вона виконується при $n=k+1$. Маємо
$$a^{2k+3}+b^{2k+3}=a^2\cdot a^{2k+1}+b^2b^{2k+1}=a^2\cdot a^{2k+1}+a^2b^{2k+1}+b^{2k+3}-a^2b^{2k+1}=$$
$$=a^2(a+b)(a^{2k}-a^{2k-1}b+\cdots+a^2b^{2k-2}-ab^{2k-1}+b^{2k})+b^{2k+1}(b-a)(b+a)=$$
$$=(a+b)(a^{2k+2}-a^{2k-1}b+\cdots+a^4b^{2k-2}-a^3b^{2k-1}+a^2b^{2k}-ab^{2k+1}+b^{2k+2}),$$
тобто рівність виконується при $n=k+1$. Це означає, що вона виконується при довільному $k\in N$.

V. Гіперболічним синусом (позначається $\operatorname{sh}x$) називають фун-кцію $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, а гіперболічним косинусом ($\operatorname{ch}x$) – функцію $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Упевнитись, що для всіх дійсних x і y виконуються рівності:

1) $\operatorname{ch}(x+y)-\operatorname{ch}(x-y)=2\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}y$;
2) $\operatorname{ch}(x+y)+\operatorname{ch}(x-y)=2\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}y$;
3) $\operatorname{sh}(x+y)-\operatorname{sh}(x-y)=2\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{sh}y$;
4) $\operatorname{sh}(x+y)+\operatorname{sh}(x-y)=2\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}y$;
5) $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$;
6) $\operatorname{ch}^2x=1+2\operatorname{sh}^2x$;
7) $\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x$.

Доведення.

1) $$\operatorname{ch}(x+y)-\operatorname{ch}(x-y)=\frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2}-\frac{e^{x-y}+e^{-(x-y)}}{2}=$$
$$=2\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}=2\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}y;$$

2) $$\operatorname{ch}(x+y)+\operatorname{ch}(x-y)=\frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2}+\frac{e^{x-y}+e^{-(x-y)}}{2}=$$
$$=2\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}=2\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}y;$$

3) $$\operatorname{sh}(x+y)-\operatorname{sh}(x-y)=\frac{e^{x+y}-e^{-(x-y)}}{2}-\frac{e^{x-y}+e^{-(x-y)}}{2}=$$

$$= 2 \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} = 2\,\mathrm{ch}\,x \cdot \mathrm{sh}\,y;$$

$$4)\ \mathrm{sh}(x+y) + \mathrm{sh}(x-y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} + \frac{e^{x-y} + e^{-(x-y)}}{2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} = 2\,\mathrm{sh}\,x \cdot \mathrm{ch}\,y;$$

$$5)\ \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-xy}}{4} = \frac{4}{4} = 1;$$

$$6)\ \mathrm{ch}\,2x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = 1 + 2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1 + 2\,\mathrm{sh}^2 x;$$

$$7)\ \mathrm{sh}\,2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2\frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2\,\mathrm{sh}\,x \cdot \mathrm{ch}\,x.$$

VI. Обчислити:

1) $\log_{\frac{b}{a}} a$, якщо $\log_b a = -2$;

2) $\log_a b + \log_{a^2} b + \log_{a^3} b$, якщо $\log_b a = 6$;

3) $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} a$, якщо $\log_a b = 3$.

Розв'язання.

$$1)\ \log_{\frac{b}{a}} a = \frac{\log_b a}{\log_b b - \log_b a} = \frac{-2}{1+2} = \frac{-2}{3};$$

$$2)\ \log_a b + \log_{a^2} b + \log_{a^3} b = \frac{1}{\log_b a} + \frac{1}{2\log_b a} + \frac{1}{3\log_b a} =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{11}{36};$$

$$3)\ \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} a = \frac{\log_a a}{\log_a \sqrt{b} - \log_a a} = \frac{1}{\frac{1}{2}\log_a b - 1} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 3 - 1} = \frac{2}{\pm 1} = 2.$$

§5. Функції та їх графіки

Означення функції. Нехай D – деяка множина дійсних чисел, тобто $D \subset R$, а f – певне правило, згідно з яким кожному числу $x \in D$ ставиться у відповідність якесь дійсне число y. Правило відповідності f називають дійсною функцією, а множину D – її областю визначення. Замість D часто пишуть D_f, підкреслюючи тим самим, що йдеться про область визначення саме функції f. Функцію можна уявляти як деякий перетворювач дійсних чисел із заданої множини D_f, що кожне число цієї множини перетворює в нове число (при цьому не виключається можливість, що деякі числа з D_f перетворюються самі в себе).

Для кожного числа $x \in D_f$ через $f(x)$ позначають перетворене число згідно з правилом f. Його називають значенням функції f в точці x. Якщо обчислити значення функції f в усіх точках множини D_f, то дістанемо деяку множину чисел E_f, яку називають областю значень функції f. Зрозуміло, що множина E_f однозначно визначається множиною D_f і законом відповідності (функцією) f.

П р и к л а д и.

1. $D_f = R$; закон відповідності f такий: кожному числу x ставиться у відповідність саме це число. Цю функцію називають тотожною. Зрозуміло, що $E_f = R$.

2. $D_f = R$; кожному числу x ставиться у відповідність те саме число c. Таких функцій є безліч (для кожного $c \in R$ своя функція). Усіх їх називають сталими функціями. У кожної з них область значень складається з єдиного числа c.

3. $D_f = R$; кожному дійсному числу x ставиться у відповідність його ціла частина, яку позначають $[x]$ (цілою частиною $[x]$ називають найбільше ціле число, яке не перевищує $[x]$). Наприклад:

$$[0,7] = 0, \ \left[\frac{35}{4}\right] = 8, \ [-0,7] = -1, \ [-3] = -3.$$

Для цієї функції $E_f = \mathbb{Z}$.

4. $D_f = R$; правило обчислення значень функції таке:
якщо число раціональне, то $f(x) = 1$;
якщо число x ірраціональне, то $f(x) = 0$.

Наприклад,

$$f(5) = 1, \ f(\sqrt{2}) = 0, \ f\left(-\frac{7}{13}\right) = 1, \ f(\pi) = 0, \ f(3,14) = 1.$$

Цілком очевидно, що для цієї функції E_f складається з двох чисел: 0 і 1.

5. $D_f = (0;1)$; кожному числу $x = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\ldots$ (записаному у вигляді нескінченного десяткового дробу) ставиться у відповідність число $f(x) = 0,\alpha_2\alpha_1\alpha_4\alpha_3\alpha_6\alpha_5\ldots$ (кожні дві сусідні цифри після коми α_{2k-1} і α_{2k} міняється місцями). Область значень E_f цієї функції збігається з її областю визначення.

У принципі не можна класифікувати всі засоби, за допомогою яких можна задавати числові функції. Якщо область визначення D_f функції f скінченна, то функцію f можна задати таблицею вигляду

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_n \end{pmatrix}.$$

Тут у першому рядку виписано всі числа множини D_f, а другий рядок утворено за правилом: $b_k = f(a_k)$.

Першочергове значення має так званий аналітичний спосіб задання функції.

Нехай $f(x)$ – формула, яка містить букву x, дійсні числа і символи (знаки) математичних операцій, які виконуються однозначно (наприклад, арифметичних дій, добування кореня, обчислення логарифма за даною основою тощо). Припустимо, що для кожного числа x з деякої множини дійсних чисел D вираз $f(x)$ можна обчислити. Тоді $f(x)$ можна позначити як перетворювач множини D, тобто як функцію, визначену на цій множині.

Приклад. Нехай $f(x) = \frac{x^2-\sqrt{x}}{x^2+x}$, а $D = [1,4]$.

Вираз $\frac{x^2-\sqrt{x}}{x^2+x}$ можна однозначно обчислити для кожної точки відрізка $[1,4]$, а тому може бути правилом, за яким кожній точці $x \in [1,4]$ ставиться у відповідність число $\frac{x^2-\sqrt{x}}{x^2+x}$. Інакше кажучи, формула $f(x) = \frac{x^2-\sqrt{x}}{x^2+x}$ задає на $D = [1,4]$ цілком певну дійсну функцію. Її значення в кількох точках дорівнюють:

$$f(1) = 0,\ f(2) = \frac{4-\sqrt{2}}{6},\ f(\sqrt{2}) = \frac{2-\sqrt[4]{2}}{2+\sqrt{2}},\ f(4) = \frac{7}{10}.$$

П р и к л а д и.

I. Побудувати графік функції $y = \left|x^2 - 4|x| + 3\right| - 1$.

Розв'язання. Найпростіше графік можна побудувати за допомогою елементарних перетворень графіка квадратної функції (параболи) $y = x^2 - 4x + 3$. Послідовність перетворень (вона однозначно не визначена) може бути такою:

$y = x^2 - 4x + 3$ (вихідний графік)

$$\xrightarrow{7} y = x^2 - 4|x| + 3 \xrightarrow{8} y = \left|x^2 - 4|x| + 3\right| \xrightarrow{1} y = \left|x^2 - 4|x| + 3\right| - 1$$

(шуканий графік).

II. Провести повне дослідження й побудувати графік функції $y = \frac{x^3}{x^2-1}$.

Розв'язання. 1. Область визначення $x \in R \ -1; 1$.

2. Функція непарна й неперіодична. Крива проходить через початок координат.

$$3.\ y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2}{(x^2-1)^2}.$$

Точки $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$ – стаціонарні.

$$4.\ y'' = \frac{4x^3(x^2-1)^2 - x^4\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} - \frac{3\cdot 2x(x^2-1)^2 - 2(x^2-1)\cdot 2x\cdot 3x^2}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2-1)^2(4x^2-6x) - (x^2-1)(4x^5-12x^3)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2-1)(2x^2-3)2x - 4x^3(x^2-3)}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{2x\left((x^2-1)(2x^2-3) - 2x^2(x^2-3)\right)}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{2x(2x^4-3x^2-2x^2+3-2x^4+6x^2)}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

$y'' = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

5. $x = 1$ і $x = -1$ – вертикальні асимптоти;
   $y = ax + b$ – похила асимптота;
   $a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x^2-1)} = 1;$
   $b = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0;$
   $y = x$ – похила асмптота.
6. Отримані числові дані заносимо до таблиці.

x	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; -1)$	-1	$(-1; 0)$
y'	$+$	0	$-$	т. р.	$-$
y''	$-$	$-$	$-$	т. р.	$+$
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	т. р.	$\searrow$

x	0	$(0; 1)$	1	$(1; \sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; +\infty)$
y'	0	$-$	т. р.	$-$	0	$+$
y''	0	$-$	т. р.	$+$	$+$	$+$
y	т. р.	$\searrow$	т. р.	$\searrow$	min	$\nearrow$

При побудові графіка:
а) обирається раціональним способом масштаб;
б) проводять асимптоти;
в) обчислюються значення функції у стаціонарних точках;
г) обчислюються значення функції у проміжних точках;
д) плавно з'єднуються ділянки кривої.

Завдання для аудиторних занять та самостійної роботи.

I. Побудувати графіки функцій:

1) а) $y = |3-2x|$; б) $y = 3-2|x|$; в) $y = |3-2|x||$;

2) а) $y = x^2-5x+4$; б) $y = x^2-5|x|+4$; в) $y = \left|x^2-5|x|+4\right|$;

3) а) $y = \frac{x}{2-x}$; б) $y = \frac{|x|}{2-|x|}$; в) $y = \sqrt{|2-x|}$;

4) а) $y = \sqrt{9-x}$; б) $y = \sqrt{9-|x|}$; в) $y = \sqrt{|9-x|}$;

5) а) $y = \log_2(2-x)$; б) $y = \log_2(2-|x|)$; в) $y = \log_2|2-x|$;

6) а) $y = 2\sin|x|$; б) $y = |\sin 2x|$; в) $y = \sin\frac{|x|}{2}$;

7) а) $y = \arcsin(\sin x)$; б) $y = \arccos(\cos x)$;
в) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$; г) $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$;

8) а) $y = \sin(\arcsin x)$; б) $y = \cos(\arccos x)$;
в) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$; г) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$.

§6. Ірраціональні рівняння. Рівняння з модулями

Рівняння, у яких невідоме міститься під знаком кореня, називають ірраціональними.

Розв'язуючи ірраціональні рівняння, намагаються привести їх до вигляду:

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x), \quad \text{або} \quad \sqrt[n]{A(x)} = \sqrt[n]{B(x)},$$

а потім піднести обидві частини рівняння до n-го степеня. Але якщо піднести обидві частини рівняння до парного степеня, можуть з'явитися сторонні корені. Наприклад:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x} = x - 2, \quad \text{ОДЗ: } x \geq 0;\\
&x = x^2 - 4x + 4,\\
&x^2 - 5x + 4 = 0,\\
&x_1 = 4 - 2, \quad 2 = 2 \text{ -- вірно.}
\end{aligned}$$

Але якщо $x = 1$, маємо $\sqrt{1} = 1 - 2$, $1 \neq -1$, тобто $x = 1$ – сторонній корінь.

Доцільно розв'язувати ірраціональні рівняння одним із двох наведених нижче способів.

I спосіб

Виконувати перетворення, не зважаючи на їх рівносильність. Усі одержані корені перевірити. Зверніть увагу: для перевірки корінь треба підставляти тільки в умову, коли рівняння ще не зазнало ніяких перетворень.

При цьому способі розв'язання доцільно записати, при яких значеннях невідомого обидві частини рівняння мають зміст. Іноді в процесі розв'язування отримують сторонні корені, які не задовольняють ОДЗ. Але перевірки коренів за умовами ОДЗ не є достатньою. У наведеному вище прикладі сторонній корінь 1 задовольняє ОДЗ ($1 \geq 0$).

II спосіб

Можна розв'язувати ірраціональні рівняння, використовуючи тільки рівносильні переходи. Зручно користуватися такими твердженнями:

1) $$\sqrt[2k]{A(x)} = B(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} A(x) = B^{2k}(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$

2) $$\sqrt[2k]{A(x)} = \sqrt[2k]{B(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} A(x) = B(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$

П р и к л а д и.

1) $\sqrt{x^2+2x+10}=2x-1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+10=4x^2-4x+1, \\ 2x-1\geq 0; \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x^2-6x-9=0, \\ x\geq \frac{1}{2}; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3=0, \\ x\geq \frac{1}{2}; \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-1, \end{array} \right. \\ x\geq \frac{1}{2}; \end{array} \right. \Longleftrightarrow x=3.$

2) $\sqrt{-9x^2+3x-6}=\sqrt{-6x-24} \Longleftrightarrow \begin{cases} -9x^2+3x-6=-6x-24, \\ -6x-24\geq 0; \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0, \\ x\leq -4; \end{cases} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-1, \end{array} \right. \\ x\leq -4 \end{array} \right. \Longleftrightarrow x\in\varnothing.$

Розглянемо ще декілька прикладів розв'язання ірраціональних рівнянь.

1. Відокремлення кореня.

$\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7 \Longleftrightarrow \begin{cases} x\geq -3, \\ x\geq \frac{2}{3}, \\ \sqrt{3x-2}=7-\sqrt{x+3}; \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x\geq \frac{2}{3}, \\ \sqrt{x+3}\leq 7, \\ 3x-2=49-14\sqrt{x+3}+x+3; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\geq \frac{2}{3}, \\ x\leq 46, \\ 14\sqrt{x+3}=54-2x; \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\leq x\leq 46, \\ 7\sqrt{x+3}=27-x; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\leq x\leq 46, \\ 49(x+3)=x^2-54x+729; \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\leq x\leq 46, \\ x^2-103x+582=0; \end{cases} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x\geq \frac{2}{3}\leq x\leq 46, \\ \left[\begin{array}{l} x=97, \\ x=6; \end{array} \right. \end{array} \right. \Longleftrightarrow x=6.$

2. Ірраціональні рівняння, що зводяться до квадратних. Якщо рівняння містить вирази $\sqrt[2k]{A(x)}$ і $\sqrt[k]{A(x)}$, то можна використати, що $(\sqrt[2k]{A(x)})^2=\sqrt[k]{A(x)}$ для тих значень x, при яких $A(x)\geq 0$.

Отже, введемо нову змінну $\sqrt[2k]{A(x)}=y$, $y\geq 0$. Дістанемо $\sqrt[k]{A(x)}=y^2$.

Приклад. $\sqrt{x+3}-3\sqrt[4]{x+3}-4=0$, ОДЗ: $x\geq -3$.

Нехай $\sqrt[4]{x+3}=y$, $y\geq 0$.

$y^2-3y-4=0$,

$y_1=4$, $y_2=-1$ не задовольняє умову $y\geq 0$.

$\sqrt[4]{x+3}=4$, $x+3=256$; $x=253$.

Відповідь: 253.

3. Заміна змінної.

Приклад. $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$, ОДЗ: $x^2+5x+1\geq 0$.

Нехай $\sqrt{x^2+5x+1}=y$, $y\geq 0$. Тоді $3x^2+15x=3y^2-3$. Отже,

$3y^2-3+2y=2$,

$3y^2+2y-5=0$,

$y_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{6}$, $\quad y_1=1$, $\quad y_2\leq 0$ не задовольняє умову $y\geq 0$.

$$\sqrt{x^2+5x+1}=1,\ x^2+5x+1=1,\ x^2+5x=0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-5. \end{array}\right.$$

Відповідь: $0;-5$.

4. Рівняння виду $\sqrt[3]{A(x)}\pm\sqrt[3]{B(x)}=0$.

Скористаємось тотожністю $(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b)$.

Приклад. $\sqrt[3]{45+x}-\sqrt[3]{x-16}=1$.

Піднесемо обидві частини рівняння до третього степеня:

$$45+x-(x-16)-3\sqrt[3]{(45+x)(x-16)}\left(\sqrt[3]{45+x}-\sqrt[3]{x-16}\right)=1.$$

Треба знайти такі значення x, для яких $\sqrt[3]{45+x}-\sqrt[3]{x-16}=1$.

Отже, маємо:

$61-3\sqrt[3]{(45+x)(x-16)}=1$,

$\sqrt[3]{(45+x)(x-16)}=20$,

$(45+x)(x-16)=8000$,

$x^2+29x-720-8000=0$,

$x^2+29x-8720=0$,

$$\left[\begin{array}{l} x=80, \\ x=-109. \end{array}\right.$$

Цей спосіб розв'язання потребує перевірки.

Перевірка.

$x=80$

$$\sqrt[3]{45+80}-\sqrt[3]{80-16}=1,\ 5-4=1- \text{ вірно };$$

$x = -109$

$$\sqrt[3]{45-109} - \sqrt[3]{-109-16} = 1,\ \ -4+5 = 1 - \text{ вірно }.$$

<u>Відповідь</u>: $80; -109$.

5. <u>Ірраціональні нерівності</u>.

$$\sqrt[2k]{A(x)} < B(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0, \\ B(x) > 0, \\ A(x) < B^{2k}(x). \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{A(x)} > B(x) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B(x) \geq 0, \\ A(x) > B^{2k}(x); \end{cases} \\ \begin{cases} A(x) \geq 0, \\ B(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

П р и к л а д и.

1) $\sqrt{5-2x} < 6x-1 \Longleftrightarrow \begin{cases} 5-2x \geq 0, \\ 6x-1 > 0, \\ 5-2x < (6x-1)^2; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6} < x \leq 2\frac{1}{2}, \\ 36x^2 - 10x - 4 > 0; \end{cases} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6} < x \leq 2\frac{1}{2}, \\ 18x^2 - 5x - 2 > 0; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6} < x \leq 2\frac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x > \frac{1}{2}, \\ x < -\frac{2}{9}. \end{array} \right. \end{cases}$$

<u>Відповідь</u>: $\left(\frac{1}{2}; 2\frac{1}{2}\right]$.

2) $\sqrt{x^2+4x-5} > x-3 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 3, \\ x^2+4x-5 > x^2-6x+9; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+4x-5 \geq 0, \\ x < 3; \end{cases} \end{array} \right. \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 3, \\ 10x > 14; \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq -5, \\ x \geq 1; \end{array}\right. \\ x < 3; \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3, \\ x \leq -5, \\ 1 \leq x < 3. \end{array}\right.$$

Відповідь: $(-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$.

Завдання для аудиторних занять та самостійної роботи.

I. Розв'язати рівняння:

1) $|\sin 2x| = \sin x$; 2) $|x-3| = x^2 - 6x + 7$;
3) $|\sin x| = \cos^2 x$; 4) $|\sin x| = \cos x$;
5) $2|\operatorname{tg} x| = 1 - \operatorname{tg} x$; 6) $|\operatorname{ctg} x| = 4 + \operatorname{ctg} x$;
7) $|\lg x - 1| = 1 - \lg x$; 8) $|x^2 - 4x| = 4x - x^2$.

Відповіді: 1) $x = \pi n,\ x = \frac{\pi}{3} + 3\pi n,\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
2) $x = 1,\ x = 5$.
3) $x = \pm \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
4) $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
5) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n;\ x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
6) $x = \operatorname{arcctg}(-2) + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
7) $x \in (0; 10]$. 8) $x \in [0; 4]$.

II. Розв'язати рівняння:

1) $x^2 + 4x + |x+2| - 16 = 0$; 2) $x^2 - 3x - 5|x+1| - 5|x-4| + 25 = 0$;
3) $x^2 - 4x + |x^2 - 5| - 1 = 0$; 4) $|1-x| - |x+2| = x+3$;
5) $a^2 x + 1 = |x| + a$; 6) $|x-1| + |x - a^2 + a - 1| = 0$;
7) $|x^2 - 4| + |x^2 - 5| = 1$; 8) $|x^2 - 2| - |x^2 - 9| = 7$;
9) $|x^2 - 3x| + x - 2 = 0$; 10) $x|x| + |2x-3| = 4$.

Відповіді: 1) $x = -6,\ x = 2$. 2) $-5; -2; 0; 3; 5; 8$. 3) $1; 3$. 4) $-\frac{4}{3}; -6$.
5) Якщо $a \leq -1$, то рівняння має єдиний розв'язок $x =$

$\frac{a-1}{a^2+1}$; якщо $-1 < a < 1$, рівняння має два розв'язки: $x = \frac{a-1}{a^2+1}$ і $x = \frac{1}{a+1}$; якщо $a = 1$, то рівняння задовольняють усі невід'ємні числа; нарешті, якщо $a > 1$, то рівняння має розв'язок $x = \frac{1}{a+1}$.

6) Якщо $a = 0$ або $a = 1$, то рівняння має єдиний розв'язок $x = 1$. При інших значеннях параметра рівняння розв'язків не має.

7) $x \in [-\sqrt{5}; -2] \cup [2; \sqrt{5}]$. 8) $x \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

9) $1-\sqrt{3}; 2-\sqrt{2}$. 10) $-1; \sqrt{8}-1$.

III. Розв'язати рівняння: $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2+8x+16} = 7$.

Відповідь: $x \in [-4; 3]$.

§7. Показникові та логарифмічні рівняння

Показниковими рівняннями називають такі рівняння, у яких невідоме входить лише до показників степенів при сталих основах.

Розв'язання показникових рівнянь.

1. Розв'язання зведенням до спільної основи.

$\left(2^{x-3}\right)^{x+4} = 0,5^x \cdot 4^{x-4}$,

$2^{x^2+x-12} = 2^{-x} \cdot 2^{2x-8}$,

$2^{x^2+x-12} = 2^{x-8}$,

$x^2+x-12 = x-8, \;\; x^2 = 4, \;\; x = \pm 2.$

Відповідь: $x_1 = 2; \;\; x_2 = -2.$

2. Показникові рівняння, що мають показники з однаковою буквенною частиною.

Очевидно, що $a^{f(x)+C} = a^C \cdot a^{f(x)}$, де C – const, $a > 0$.

1) $2 \cdot 7^{x+1} - 6 \cdot 7^{x-1} - 7^x = 85.$

Винесемо за дужки спільний множник лівої частини 7^{x-1}:

$7^{x-1}(2 \cdot 7^2 - 6 - 7) = 85$,

$7^{x-1} = 1, \;\; x-1 = 0, \;\; x = 1.$

Відповідь: 1.

2) $2 \cdot 16^x - 3 \cdot 2^{4x-1} + 7 \cdot 4^{2x-2} = 120.$

Зведемо всі степені до спільної основи 2.

$2 \cdot 2^{4x} - 3 \cdot 2^{4x-1} + 7 \cdot 2^{4x-4} = 120$,

$2^{4x-4}(2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 7) = 120$,

$2^{4x-4} \cdot 150 = 120$,

$2^{4x-4} = 8, \;\; 4x-4 = 3, \;\; 4x = 7, \;\; x = 1,75.$

Відповідь: $1,75$.

3. Показникові рівняння, що зводяться до квадратних.

$3 \cdot 81^x - 10 \cdot 9^x + 3 = 0, \;\; 3 \cdot 9^{2x} - 10 \cdot 9^x + 3 = 0.$

Нехай $9^x = y$, $y > 0$. Тоді:

$3y^2 - 10y + 3 = 0, \;\; y_1 = 3, \;\; y_2 = \frac{1}{3}$;

$9^x = 3, \;\; x = \frac{1}{2}, \;\; 9^x = \frac{1}{3}, \;\; x = -\frac{1}{2}.$

Відповідь: $\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$.

4. Однорідні показникові рівняння.

$6\cdot 25^x - 5\cdot 10^x - 4^x = 0,\;\; 6\cdot 5^{2x} - 5\cdot 2^x\cdot 5^x - 2^{2x} = 0.$

Поділимо обидві частини рівняння на $2^{2x} \neq 0$:

$6\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 5\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^x - 1 = 0.$

Нехай $\left(\frac{5}{2}\right)^x = y$, $y > 0$. Тоді

$6y^2 - 5y - 1 = 0,\;\; y_1 = 1,\;\; y_2 = -\frac{1}{6}$ – не задовольняє умову $y > 0$.

Отже, $\left(\frac{5}{2}\right)^x = 1$, $x = 0$.

Відповідь: 0.

5. Рівняння, які одночасно містять a^x і a^{-x}.

$2^x + 2^{2-x} = 5.$

Помножимо обидві частини рівняння на $2^x \neq 0$: $2^{2x} + 2^2 = 5\cdot 2^x$. Нехай $2^x = y$, $y > 0$. Тоді:

$y^2 - 5y + 4 = 0,\;\; y_1 = 4,\;\; y_2 = 1;$

$2^x = 4,\;\; x = 2;\;\; 2^x = 1,\;\; x = 0.$

Відповідь: $2; 0$.

6. Показникові рівняння, які містять обернені вирази.

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10.$$

Нехай $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = y$, $y > 0$. Тоді:

$y + \frac{1}{y} = 10,\;\; y^2 - 10y + 1 = 0,$

$y_{1,22} = 5 + \sqrt{24},\;\; y_1 = 5 + 2\sqrt{6},\;\; y_1 = 5 - 2\sqrt{6}.$

1) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = 5 + 2\sqrt{6},\;\; x = 2.$

2) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = 5 - 2\sqrt{6},\;\; \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^{-1},\;\; x = -2.$

Відповідь: $2; -2$.

7. Для розв'язання деяких рівнянь зручно використовувати монотонність показникової функції.

1) $2^x = 3 - x.$

Очевидно, що $x = 1$ є коренем рівняння. Функція $y = 2^x$ є зростаючою, а функція $y = 3 - x$ – спадна. Отже, рівняння не може мати більше ніж один корінь.

Відповідь: 1.

2) $3^x + 4^x = 5^x$, $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$.

Функція $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$ є сумою двох спадних функцій, тобто є спадною на R. Права частина рівняння 1 – стала величина. Отже, рівняння не може мати більше ніж один корінь. $x = 2$ є коренем рівняння.

Відповідь: 2.

Розв'язання показниково-степеневих рівнянь.

Показниково-степенева функція має вигляд $y = u(x)^{v(x)}$.
Її область визначення знаходимо, розглядаючи три випадки:

1) $u(x) > 0$; $v(x)$ – будь-яке число;

2) $u(x) < 0$; $v(x)$ – ціле число;

3) $u(x) = 0$; $v(x)$ – ціле додатне число;

Приклад. Розв'язати рівняння:

а) $(x+5)^{x^2-x-1} = x+5$.

Розглянемо випадки:

1) $x+5 = 1$, $x_1 = -4$.

2) $x+5 = -1$, $x_2 = 6$.

3) $x+5 = 0$, $x_3 = -5$.

4) $x^2 - x - 1 = 1$, $x_4 = 2$, $x_5 = -1$.

Перевіркою впевнюємося, що всі знайдені корені задовольняють рівняння.

Відповідь: $-4; -6; -5; 2; -1$.

б) $(x+8)^{x^2+9x+8} = 1$.

1) $x+8 = 1$, $x_1 = -7$.

2) $x+8 = -1$, $x_2 = -9$.

3) $x^2 + 9x + 8 = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = -8$.

Перевірка.

1) $x = -7$, $1^{-6} = 1$.

2) $x = -9$, $1^8 = 1$.

3) $x = -1$, $x^0 = 1$.

4) $x = -8$, 0^0 не має змісту.

Відповідь: $-7; -9; -1$.

Розв'язання логарифмічних рівнянь.

Логарифмічними рівняннями називають такі рівняння, які містять змінну під знаком логарифма.

Найпростішим логарифмічним рівнянням є $\log_a x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$. Корінь цього рівняння дорівнює a^b.

Рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, де $a > 0$, $a \neq 1$, рівносильне системі:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Зверніть увагу: у цій системі можна відкинути одну з нерівностей. Із цього випливає, що для розв'язання рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, де $a > 0$, $a \neq 1$, треба:

розв'язати рівняння $f(x) = g(x)$;

зі знайдених коренів відібрати ті, які задовольняють нерівність $f(x) > 0$ або $g(x) > 0$ (зазвичай обирають простішу з нерівностей).

П р и к л а д и.

1) $\log_3(3x-1) + \log_3(x+1) = 1 + \log_3(x+3)$.

ОДЗ: $\begin{cases} 3x - 1 > 0, \\ x + 1 > 0, \\ \text{x + 3 > 0;} \end{cases} \quad x > \frac{1}{3}.$

$\log_3(3x-1)(x+1) = \log_3 3(x+3)$,

$(3x-1)(x+1) = 3(x+3)$, $3x^2 - x - 10 = 0$,

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{6}$, $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{5}{3}$ не задовольняє ОДЗ.

Відповідь: 2.

2) $\log_5^2 x + 3\log_5 x - 4 = 0$; ОДЗ: $x > 0$.

$\log_5 x = y$, $y^2 + 3y - 4 = 0$, $y_1 = -4$, $y_2 = 1$;

$\log_5 x = -4$, $x_1 = \frac{1}{605}$; $\log_5 x = 1$, $x_2 = 5$.

Відповідь: 5; $\frac{1}{625}$.

3) $x^{1+\lg x} = 100$; ОДЗ: $x > 0$.

$\lg\left(x^{1+\lg x}\right) = \lg 100$, $(1 + \lg x)\lg x = 2$, $\lg^2 x + \lg x - 2 = 0$;

$\lg x = y$, $y^2 + y - 2 = 0$; $y_1 = -2$, $y_2 = 1$;

$\lg x = -2$, $x_1 = 0{,}01$, $\lg x = 1$, $x_2 = 10$.

Відповідь: $0{,}01; 10$.

4) $\frac{\log_4(x^2+x-2)-1}{\log_4(x-1)}=0.$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2+x-2>0, \\ x-1>0, \\ x-1\neq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x>1, \\ x\neq 2; \end{cases}$

$\log_4(x^2+x-2)=1,\ x^2+x-2=4,\ x^2+x-6=0,$

$x_1=-3$ – не задовольняє ОДЗ;
$x_2=2$ – не задовольняє ОДЗ.

Відповідь: коренів немає.

§8. Тригонометричні рівняння та нерівності

1. Рівняння, що зводяться до квадратних.

Розв'яжемо, наприклад, рівняння:

$$6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0.$$

Використовуючи основну тригонометричну тотожність, можна легко виразити $\cos^2 x$ через $\sin^2 x$:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1;\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

Отже,

$6(1-\sin^2 x) + 5\sin x - 7 = 0;$

$6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0.$

Нехай $\sin x = y$, $|y| \le 1$. Тоді $6y^2 - 5y + 1 = 0$; $y_1 = \frac{1}{2}$; $y_2 = \frac{1}{3}$.

а) $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) $\sin x = \frac{1}{3}$; $x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$; $(-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k$; $k \in \mathbb{Z}$.

2. Спосіб розкладання на множники.

Розв'язати рівняння: $1 - \cos 8x = \sin 4x$.

$2\sin^2 4x = \sin^4 x$; $\sin 4x(2\sin 4x - 1) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\sin 4x = 0;\\ \sin 4x = \frac{1}{2};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}4x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z};\\ 4x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z};\\ 4x = (-1)^k \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z};\end{array}\right.$$

Відповідь: $x = \frac{\pi n}{4}$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}$; $k \in \mathbb{Z}$.

3. Однорідні рівняння.

У загальному випадку однорідне тригонометричне рівняння має вигляд:

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-2} x \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cos^2 x + \ldots + a_n \cos^4 x = 0,$$

де $a_0 \ne 0$.

Значення x, при яких $\cos x = 0$, не є розв'язком рівняння.

Дійсно, якщо $\cos x = 0$, рівняння набуде вигляду $a_0 \sin^n x = 0$, звідки $\sin x = 0$. Але $\sin x$ і $\cos x$ не можуть перетворитися на 0 одночасно. Із цього випливає, що при діленні обох частин рівняння на $\cos^n n$ не може відбутися втрата коренів. Отримуємо:

$$a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + \ldots + a_n = 0.$$

Введемо нову змінну $\operatorname{tg} x = y$ і дістанемо алгебраїчне рівняння:

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Зверніть увагу: якщо $\cos^k x$ у лівій частині рівняння можна винести за дужки, то ділення на $\cos^k x$ веде до втрати коренів.

П р и к л а д и.

1) $5\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 3.$
$5\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x - 3(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0;$
$2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos^2 x;\quad 2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x + 1 = 0.$

Нехай $\operatorname{tg} x = y$. Тоді $2y^2 + 3y + 1 = 0$; $y_1 = -1$; $y_2 = -\frac{1}{2}$.

а) $\operatorname{tg} x = -1;\quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$

б) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2};\quad x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Відповідь: $-\frac{\pi}{4} + \pi n;\quad -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n;\quad n \in \mathbb{Z}.$

2) $\sin^2 x - \sin 2x = 0.$
$\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 0;\quad \sin x(\sin x - 2\cos x) = 0.$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0;\\ \sin x - 2\cos x = 0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z};\\ \operatorname{tg} x = 2;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = \pi n, n \in \mathbb{Z};\\ 4x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $x = \pi n;\quad x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n;\quad n \in \mathbb{Z}.$

4. Спосіб введення допоміжного аргументу.

Цей спосіб застосовується для розв'язання рівнянь виду

$$a\sin x + b\cos x = c.$$

Розділимо обидві частини рівняння на $\sqrt{a^2+b^2}$. Дістанемо:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Очевидно:

$$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1,\ \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1,\ \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1.$$

Із цього випливає, що можна ввести до розгляду кут $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. Тоді

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi;\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$$

і рівняння набуде вигляду:

$$\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

або

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Можна прийняти:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi.$$

Тоді дістанемо $\cos(x-\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Рівняння виду $a\sin x+b\cos x=c$ можна розв'язувати і в інший спосіб:

$$2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+b\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)=c.$$

Використавши тотожність $\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=1$, дістанемо однорідне рівняння.

5. Рівняння, що містять тригонометричні функції у знаменнику. Відбір коренів.

Ці рівняння зводять до вигляду $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$, а потім розв'язують систему $\begin{cases} f(x)=0, \\ \varphi(x)\neq 0. \end{cases}$

П р и к л а д.

$$\frac{1+\cos 2x}{1+\sin x}=0 \Longleftrightarrow \quad \begin{cases}\cos 2x=-1; \\ \sin x\neq -1.\end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}; \\ x\neq -\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відбір коренів зручно виконувати, скориставшись тригонометричним колом. Позначимо на колі точки, що відповідають кутам виду $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Потім відкинемо ті з них, які мають вигляд $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ (див рисунок нижче).

Відповідь: $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

6. Випадок, коли треба знайти тільки певні розв'язки.

П р и к л а д. Скільки розв'язків рівняння

$$\sin^2 3x + \sin^2 5x = 1$$

належать проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

$\sin^2 3x + \sin^2 5x = 1;\quad \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 10x}{2} = 1;$

$1 - \cos 6x + 1 - \cos 10x = 2;\quad \cos 6x + \cos 10x = 0;$

$2\cos 8x \cos 2x = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 8x = 0; \\ \cos 2x = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 8x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k;\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}, n \in \mathbb{Z}; \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Треба відповісти на запитання, скільки розв'язків належить проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

I спосіб. Розглянемо нерівності:

1) $0 \le \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8} \le \frac{\pi}{2};$	2) $0 \le \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \le \frac{\pi}{2};$
$0 \le 1 + 2n \le 8;$	$0 \le 1 + 2n \le 2;$
$-0,5 \le n \le 3,5;$	$-0,5 \le n \le 0,5;$
$n = 0; 1; 2; 3,$	$n = 0,$
оскільки $n \in \mathbb{Z}$.	оскільки $n \in \mathbb{Z}$.

Таким чином, проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ належать п'ять розв'язків рівнянь.

II спосіб. Можна скористатися тригонометричним колом, якщо позначити на ньому відповідні розв'язкам рівняння точки й відібрати ті, що містяться в першій чверті.

Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей

Найзручнішим є спосіб розв'язування тригонометричних нерівностей за допомогою тригонометричного кола.

П р и к л а д и.

1) $\cos x \ge \frac{1}{2}$.

Побудуємо одиничне коло (див. рисунок нижче). Проведемо пряму $x = \frac{1}{2}$. Вона перетинає коло у двох точках. Однак з них відповідає куту $\arccos\frac{1}{2}$ або $\frac{\pi}{3}$, друга – куту $\arccos\frac{1}{2}$ або $-\frac{\pi}{3}$. Ці дві точки розбивають коло на дві дуги. Точки однієї дуги мають абсцису, більшу за $\frac{1}{2}$, другої дуги – меншу.

Щоб описати всі точки потрібної дуги, "пройдемо" по ній у додатному напрямку, тобто проти годинникової стрілки. Враховуючи періодичність функції $y = \cos x$, дістанемо відповідь:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}.$$

2) $\sin x < \frac{1}{2}$.

Діючи аналогічно, отримаємо рисунок, на якому зображена пряма $y = \frac{1}{2}$: Умову задачі задовольняють точки, що розташовані на колі

нижче прямої $y = \frac{1}{2}$. Але щоб записати проміжок, треба точку $\frac{\pi}{6}$ записати в другому вигляді. Для цього додамо 2π до $\frac{\pi}{6}$: $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$. Враховуючи період, дістанемо відповідь:

$$\sin x < \frac{1}{2} \text{ при } x \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{13\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$

3) $\operatorname{tg} x \geq 2$.

Враховуючи, що функція $y = \operatorname{tg} x$ є зростаючою на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, отримуємо:

$$\operatorname{arctg} 2 + \pi n \leq \pi n < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x < \frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Завдання для аудиторних занять та самостійної роботи.

Розв'язати рівняння:

1) $\sin x - \cos 2x = 0$;
2) $\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$;
3) $(1 + \operatorname{tg} x)\cos x = 0$;
4) $2\lg x + 3\operatorname{ctg} x = 5$;
5) $\sin x \cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0$;
6) $4\sin^3 x - 8\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$;
7) $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 1$;
8) $2\sin^5 x = 3\sin^3 x - \sin x$;
9) $\sin 2x + \sqrt{3} - 2\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$;
10) $\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 7\cos^2 x = 0$.

Відповіді: 1) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi,\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

2) $k\pi,\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

3) $-\frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$;

4) $\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

5) $\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

6) $\pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; 7) $\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

8) $k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$;

9) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

10) $\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \operatorname{arctg} 7 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Література

1. Вишенський В. А., Перестюк М. О., Самойленко А. М. Збірник задач з математики. – К.: Либідь, 1990.
2. Тайштут О. Г., Литвиненко Т. М. Розв'язування алгебраїчних задач. – К.: Рад. школа, 1991.
3. Бевз Г. П. Методика викладання математики. – К.: Вища школа, 1989.
4. Забєлишинська М. Я. Зовнішнє оцінювання (підготовка). Математика (довідник). – Х.: Вид-во "Ранок", 2007.

БАРАННИК Валерій Феодосійович
ЮРЧЕНКО Наталія Василівна

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТЬ З КУРСУ
"ВИБРАНІ РОЗДІЛИ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ"

Підписано до друку ??,??,???? Формат 60 $\times$ 84/16. Офсетний друк.
Умов. друк. арк. Облік.-вип. арк. Замовлення №
Тираж екз.

Видавництво Ужгородського національного університету
м. Ужгород, вул. Капітульна, 18