П. М. Гудивок, С. П. Кіндюх (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННИХ 2-ГРУП НАД ЛОКАЛЬНИМИ ОБЛАСТЯМИ ЦІЛІСНОСТІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НУЛЬ

It is making up clear, when the problem of the description of non-equivalent matrix representations of finite 2-groups over some local integral domains of characteristic zero is wild.

Виясняється, коли задача описання нееквівалентних матричних зображень скінченних 2-груп над деякими локальними областями цілісності характеристики нуль є дикою.

Скінченна група G називається дикою над комутативним кільцем R з одиницею, якщо описання нееквівалентних матричних R-зображень групи G включає задачу про класифікацію з точністю до подібності пар $n\times n$-матриць над деяким полем (n — довільне натуральне число). Задача про дикість скінченної p-групи G над локальною областю цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики p розв'язана в таких випадках:

1) R — кільце цілих p-адичних чисел [1–2];

2) R — повне дискретно нормоване кільце [1–5];

3) R — кільце формальних степеневих рядів від m змінних з коефіцієнтами з кільця цілих P-адичних чисел [6–7];

4) R — локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики p ($\varepsilon \in R$, $\varepsilon^p = 1$, $\varepsilon \neq 1$) і виконується одна із таких умов:

   а) $p > 3$;

   б) G — 3-група порядку $|G| > 3$;

   в) R — нетерове кільце і G — нециклічна 2-група або циклічна 2-група порядку $|G| > 4$ [8].

Лема 1. *Нехай $G = \langle a\rangle$ — циклічна 2-група порядку 4 і K — локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, V — максимальний ідеал кільця K, $t \notin V$ і $t^2 \notin 2K$. Тоді група G є дикою над кільцем K.*

Доведення. Нехай E — одинична матриця порядку n, A і B — довільні $n \times n$-матриці над кільцем K. Введемо такі позначення:

$$\tilde{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E\otimes\tilde{i} = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix},\ D_1 = \begin{pmatrix} t^2E \\ 0 \end{pmatrix},\ D_1' = \begin{pmatrix} tE \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D_2(A) = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix},\ D_3(B) = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix},\ D_4 = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо матричні K-зображення $\Gamma(A,B)$ групи $G = \langle a\rangle$ вигляду:

$$a \to \begin{pmatrix} E\otimes\tilde{i} & 0 & D_1 & 0 & D_2(A) & D_3(B) \\ 0 & E\otimes\tilde{i} & 0 & D_1' & D_4 & 0 \\ 0 & 0 & -E & 0 & tE & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E & 0 & t^2E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} = \Gamma_a(A,B). \qquad (1)$$

Нехай K-зображення $\Gamma(A,B)$ і $\Gamma(A',B')$ групи $G=\langle a\rangle$ K-еквівалентні, тобто існує така матриця $C\in GL(8n,K)$, що

$$\Gamma_a(A,B)C=C\Gamma_a(A',B'). \tag{2}$$

Очевидно $C=\|C_{ij}\|$, де C_{ij} — матриця порядку n над кільцем K $(1\leqslant i,j\leqslant 8)$. Із (1) і (2) випливає, що матриця C має вигляд:

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & C_{17} & C_{18}\\ -C_{12} & C_{11} & -C_{14} & C_{13} & C_{25} & C_{26} & C_{27} & C_{28}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} & C_{37} & C_{38}\\ -C_{32} & C_{31} & -C_{34} & C_{33} & C_{45} & C_{46} & C_{47} & C_{48}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} & C_{57} & C_{58}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{65} & C_{66} & C_{67} & C_{68}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{77} & C_{78}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{87} & C_{88} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Із (1)–(3) одержимо:

$$-C_{25}+t^2C_{55}=t^2C_{11}-C_{15},$$
$$-C_{26}+t^2C_{56}=tC_{13}-C_{16},$$
$$C_{15}=-t^2C_{12}-C_{25},\quad C_{16}=-tC_{14}-C_{26},$$
$$-C_{45}+tC_{65}=t^2C_{31}-C_{35},$$
$$-C_{46}+tC_{66}=tC_{33}-C_{36},$$
$$C_{35}=-t^2C_{32}-C_{45},\quad C_{36}=-tC_{34}-C_{46},$$
$$-C_{57}+tC_{77}=tC_{55}+C_{57},$$
$$-C_{58}+tC_{78}=t^2C_{56}+C_{58},$$
$$-C_{67}+t^2C_{87}=tC_{65}+C_{67},$$
$$-C_{68}+t^2C_{88}=t^2C_{66}+C_{68},$$
$$-C_{27}+t^2C_{57}+AC_{77}+BC_{87}=C_{11}A'+C_{13}+tC_{15}+C_{17},$$
$$-C_{28}+t^2C_{58}+AC_{78}+BC_{88}=C_{11}B'+t^2C_{16}+C_{18},$$
$$C_{17}=-C_{12}A'-C_{14}+tC_{25}+C_{27},\quad C_{18}=-C_{12}B'+t^2C_{26}+C_{28},$$
$$-C_{47}+tC_{67}+C_{77}=C_{31}A'+C_{33}+tC_{35}+C_{37},$$
$$-C_{48}+tC_{68}+C_{78}=C_{31}B'+t^2C_{36}+C_{38},$$
$$C_{37}=-C_{32}A'-C_{34}+tC_{45}+C_{47},$$
$$C_{38}=-C_{32}B'+t^2C_{46}+C_{48}.$$

Звідси дістаємо:

$$C_{15}\equiv C_{25}(\mathrm{mod}V),\quad C_{16}\equiv C_{26}(\mathrm{mod}V),$$

$$C_{55}\equiv(C_{11}+C_{12})\,(\mathrm{mod}V),$$
$$C_{13}\equiv C_{14}(\mathrm{mod}V),\quad C_{45}\equiv C_{35}(\mathrm{mod}V),\quad C_{36}\equiv C_{46}(\mathrm{mod}V),$$
$$C_{66}\equiv(C_{33}+C_{34})\,(\mathrm{mod}V),$$

$$C_{77} \equiv C_{55}(\mathrm{mod} V), \quad C_{88} \equiv C_{66}(\mathrm{mod} V),$$

$$C_{65} \equiv C_{78} \equiv 0(\mathrm{mod} V),$$

$$C_{77} \equiv C_{55} \equiv (C_{11} + C_{12})\,(\mathrm{mod} V),$$

$$C_{88} \equiv C_{66} \equiv (C_{33} + C_{34})\,(\mathrm{mod} V),$$

$$BC_{87} + AC_{77} \equiv (C_{11} + C_{12})\,A'(\mathrm{mod} V),$$

$$C_{77} \equiv C_{33} + C_{34} + (C_{31} + C_{32})\,A'(\mathrm{mod} V),$$

$$BC_{88} \equiv (C_{11} + C_{12})\,B'(\mathrm{mod} V),$$

$$(C_{31} + C_{32})\,B' \equiv 0(\mathrm{mod} V).$$

Нехай B' — довільна оборотна матриця над кільцем K. Тоді

$$C_{31} + C_{32} \equiv 0(\mathrm{mod} V),$$

$$C_{87} \equiv C_{31} + C_{32} \equiv 0(\mathrm{mod} V),$$

$$C_{77} \equiv C_{33} + C_{34}(\mathrm{mod} V).$$

Отже,

$$C_{88} \equiv C_{77} \equiv C_{66} \equiv C_{55}(\mathrm{mod} V),$$

$$AC_{77} \equiv C_{77}A'(\mathrm{mod} V), \tag{4}$$

$$BC_{77} \equiv C_{77}B'(\mathrm{mod} V). \tag{5}$$

Очевидно, матриця C_{77} — оборотна над кільцем K. Із (4) і (5) випливає доведення леми.

Лема 2. *Нехай $G = \langle a \rangle$ — циклічна 2-група порядку 4 і K — локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2. Група G є дикою над кільцем K, якщо K не дискретно нормоване кільце.*

Доведення. Нехай K — не дискретно нормоване кільце і $2 = \theta t_1^{r_1} \ldots t_s^{r_s}$, де $\theta \in K^*$, $t_1, \ldots, t_s$ — різні прості елементи кільця K ($t_i \neq \theta_j t_j$, при $i \neq j$, $\theta_j \in K^*$, K^* — мультиплікативна група кільця K). Тоді з леми 1 випливає, що якщо $s > 1$ або $s = 1$ і $r_1 > 2$, то група $G = \langle a \rangle$ є дикою над кільцем K. Якщо $s = 1$ і $r_1 \leq 2$, то існує такий простий елемент t кільця K, що елементи t і t_1 будуть взаємно простими. Отже, $t^2 \notin 2K$. Звідси і з леми 1 одержуємо, що група $G = \langle a \rangle$ є дикою над кільцем K. Лема доведена.

Теорема 1. *Нехай G — скінченна 2-група порядку $|G| > 2$ і K — локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2. Група G є дикою над кільцем K, якщо K не є дискретно нормованим кільцем.*

Доведення теореми випливає із леми 2 і [8].

Лема 3. *Нехай $H = \langle a \rangle$ — циклічна група порядку 2, K — локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2 і $2 = \theta t_1^{r_1} \ldots t_s^{r_s}$, де $\theta \in K^*$, $t_1, \ldots, t_s$ — різні прості елементи кільця K, $r_i \geq 1$ $(i = 1, \ldots, s)$. Якщо $s \geq 2$ і $r_1 + \ldots + r_s > 2$, то група $H = \langle a \rangle$ є дикою над кільцем K.*

Доведення. Нехай $s > 2$. Розглянемо матричні K-зображення $\Gamma(A, B)$ групи $H = \langle a \rangle$ такого вигляду:

$$a \to \begin{pmatrix} -E & S(A,B) \\ 0 & E \end{pmatrix} = \Gamma_a(A, B), \tag{6}$$

де E — одинична матриця порядку n, $S(A, B) = t_1t_2E+t_1t_3A+t_2t_3B$, A і B — довільні $n \times n$-матриці над кільцем K, n — довільне натуральне число.

Нехай K-зображення $\Gamma(A, B)$ і $\Gamma(A', B')$ групи $H = \langle a \rangle$ еквівалентні над кільцем K, тобто

$$\Gamma_a(A, B)C = C\Gamma_a(A', B'), \tag{7}$$

де $C \in GL(2n, K)$. Із (6) і (7) випливає, що матриця C має вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & C_3 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

де C_i — $n \times n$-матриця над кільцем K $(i = 1, 2, 3)$.

Далі із (6)–(8) одержимо:

$$(t_1t_2E + t_1t_3A + t_2t_3B)\,C_3 = C_1\,(t_1t_2E + t_1t_3A' + t_2t_3B') + 2C_2.$$

Звідси дістаємо, що

$$t_1t_2(C_3 - C_1) + t_1t_3(AC_3 - C_1A') + t_2t_3(BC_3 - C_1B') = 2C_2. \tag{9}$$

Нехай V — максимальний ідеал кільця K. Тоді з (9) випливає, що

$$\begin{aligned} C_3 &\equiv C_1 (\mathrm{mod} V), \\ AC_3 &\equiv C_1A' (\mathrm{mod} V), \\ BC_3 &\equiv C_1B' (\mathrm{mod} V). \end{aligned} \tag{10}$$

Отже,

$$AC_1 \equiv C_1A' (\mathrm{mod} V), \quad BC_1 \equiv C_1B' (\mathrm{mod} V). \tag{11}$$

Значить, група $H = \langle a \rangle$ є дикою над кільцем K при $s > 2$.

Далі розглянемо випадок, коли $s = 2$, $r_1 > 1$ і $r_2 \geq 1$. Нехай у формулі (6) $S(A, B) = t_1^2E+t_1t_2A+t_2^2B$ і зображення $\Gamma(A, B)$ і $\Gamma(A', B')$ групи $H = \langle a \rangle$ еквівалентні над кільцем K, тобто має місце формула (7). Очевидно, матриця C має вигляд (8). Тоді із (6)–(8) дістаємо:

$$t_1^2(C_3 - C_1) + t_1t_2(AC_3 - C_1A') + t_2^2(BC_3 - C_1B') = 2C_2.$$

Отже, справедливі формули (10) і (11). Звідси випливає, що група $H = \langle a \rangle$ в розглядуваному випадку є дикою над кільцем K. Лема доведена.

Лема 4. *Нехай $H = \langle a \rangle$ — циклічна група порядку 2, K — локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2 і $2 = \theta t_1^e$ $(\theta \in K^*,\ e > 1)$, де t_1 — простий елемент кільця K. Якщо K не є дискретно нормованим кільцем, то група $H = \langle a \rangle$ є дикою над кільцем K.*

Доведення. Нехай K — не дискретно нормоване кільце і V — максимальний ідеал кільця K. Тоді існує такий простий елемент u кільця K, що елементи u і t_1 будуть взаємно прості.

Розглянемо матричні K-зображення $\Gamma(A,B)$ групи $H = \langle a \rangle$ такого вигляду:

$$a \to \begin{pmatrix} -E & D(A,B) \\ 0 & E \end{pmatrix} = \Gamma_a(A,B), \tag{12}$$

де

$$D(A,B) = \begin{pmatrix} u^2E & t_1^rE & 0 & 0 \\ 0 & u^2E & t_1^rE & 0 \\ 0 & t_1^ruA & u^2E & t_1^ruE \\ t_1^ruB & 0 & 0 & u^2E \end{pmatrix},$$

$r = e-1$. Нехай зображення $\Gamma(A,B)$ і $\Gamma(A',B')$ групи $H = \langle a \rangle$ K-еквівалентні, тобто

$$\Gamma_a(A,B)C = C\Gamma_a(A',B'), \tag{13}$$

де, очевидно,

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$C_1,\ C_4$ — оборотні $n \times n$-матриці над кільцем K. Тоді із (12)–(14) випливає, що

$$D(A,B)C_4 = C_1D(A',B') + 2C_2. \tag{15}$$

Введемо такі позначення:

$$C_1 = \|C_{ij}\|,\ C_4 = \|S_{ij}\|,\ C_2 = \|T_{ij}\|,$$

де $C_{ij},\ S_{ij},\ T_{ij}$ — $n \times n$-матриці над кільцем K.

Далі із (15) одержимо:

$$u^2C_{11} + t_1^ruC_{14}B' = u^2S_{11} + t_1^rS_{21} + 2T_{11},$$

$$\begin{gathered} u^2C_{21} + t_1^ruC_{24}B' = u^2S_{21} + t_1^rS_{31} + 2T_{21}, \\ u^2C_{31} + t_1^ruC_{34}B' = t_1^ruAS_{21} + u^2S_{31} + t_1^ruS_{41} + 2T_{31}, \\ u^2C_{41} + t_1^ruC_{44}B' = t_1^ruBS_{11} + u^2S_{41} + 2T_{41}, \\ t_1^rC_{11} + u^2C_{12} + t_1^ruC_{13}A' = u^2S_{12} + t_1^rS_{22} + 2T_{12}, \\ t_1^rC_{21} + u^2C_{22} + t_1^ruC_{23}A' = u^2S_{22} + t_1^rS_{32} + 2T_{22}, \\ t_1^rC_{31} + u^2C_{32} + t_1^ruC_{33}A' = t_1^ruAS_{22} + u^2S_{32} + t_1^ruS_{42} + 2T_{32}, \\ t_1^rC_{41} + u^2C_{42} + t_1^ruC_{43}A' = t_1^ruBS_{12} + u^2S_{42} + 2T_{42}, \\ t_1^rC_{12} + u^2C_{13} = u^2S_{13} + t_1^rS_{23} + 2T_{13}, \\ t_1^rC_{22} + u^2C_{23} = u^2S_{23} + t_1^rS_{33} + 2T_{23}, \\ t_1^rC_{32} + u^2C_{33} = t_1^ruAS_{23} + u^2S_{33} + t_1^ruS_{43} + 2T_{33}, \\ t_1^rC_{42} + u^2C_{43} = t_1^ruBS_{13} + u^2S_{43} + 2T_{43}, \\ t_1^ruC_{43} + u^2C_{44} = t_1^ruBS_{14} + u^2S_{44} + 2T_{44}, \\ t_1^ruC_{33} + u^2C_{34} = t_1^ruAS_{24} + u^2S_{34} + t_1^ruS_{44} + 2T_{34}, \end{gathered}$$

$$t_1^r u C_{23} + u^2 C_{24} = u^2 S_{24} + t_1^r S_{34} + 2T_{24},$$
$$t_1^r u C_{13} + u^2 C_{14} = u^2 S_{14} + t_1^r S_{24} + 2T_{14}.$$

Звідси дістаємо:

$$C_{11} \equiv S_{11}(\mathrm{mod} V), \quad C_{21} \equiv S_{21} \equiv 0(\mathrm{mod} V),$$

$$C_{31} \equiv S_{31} \equiv 0(\mathrm{mod} V), \quad C_{41} \equiv S_{41} \equiv 0(\mathrm{mod} V),$$
$$C_{22} \equiv S_{22}(\mathrm{mod} V), \quad C_{22} \equiv C_{33} \equiv S_{33}(\mathrm{mod} V),$$
$$C_{44} \equiv S_{44}(\mathrm{mod} V), \quad C_{11} \equiv S_{22}(\mathrm{mod} V), \quad C_{33} \equiv S_{44}(\mathrm{mod} V),$$
$$C_{33}A' \equiv AS_{22}(\mathrm{mod} V), \quad C_{44}B' \equiv BS_{11}(\mathrm{mod} V).$$

Отже,

$$C_{ii} \equiv S_{jj}(\mathrm{mod} V)\ (i, j = 1, 2, 3, 4),$$
$$AC_{11} \equiv C_{11}A'(\mathrm{mod} V), \tag{16}$$
$$BC_{11} \equiv C_{11}B'(\mathrm{mod} V). \tag{17}$$

Очевидно, матриця C_{11} оборотна над кільцем K. Із (16) і (17) випливає доведення леми.

Теорема 2. *Нехай G — скінченна 2-група порядку $|G| > 1$, K — локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2. Якщо K не дискретно нормоване кільце і $2 = \theta t_1^e$ $(\theta \in K^*,\ e > 1)$ або $2 = \theta t_1^{r_1} \dots t_s^{r_s}$, де $t_1, \dots, t_s$ — різні прості елементи кільця K, $s \geq 2$ і $r_1 + ... r_s > 2$, то група G є дикою над кільцем K.*

Доведення теореми випливає із лем 3 і 4.

1. *Гудивок П. М.* О модулярных и целочисленных представлениях конечных групп // ДАН СССР. – 1974. – **214**, №5. – С. 993–996.
2. *Гудивок П. М.* О представлениях конечных групп над полным дискретно нормированным кольцом // Труды Матем. ин-та АН СССР. – 1978. – **148**. – С. 96–105.
3. *Гудивок П. М.* О представлениях прямого произведения групп над полными дискретно нормированными кольцами // ДАН СССР. – 1977. – **237**, №1. – С. 25–27.
4. *Гудивок П. М.* Целочисленные представления конечных групп и задача о паре матриц // Сб. "Материалы XXIX науч. конф. проф.-препод. состава УЖГУ". Секция мат. наук. – Ужгород: Ужгород. ун-т, 1975. – С. 231–240. – Деп. в ВИНИТИ, №705-76.
5. *Dieterich E.* Group rings of wild representation type // Math. Ann. – 1983. – **266**, №1. – P. 1–22.
6. *Гудивок П. М., Орос В. М., Ройтер А. В.* О представлениях конечных p-групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми p-адическими коэффициентами // Укр. мат. ж. – 1992. – **44**, №6. – С. 753–765.
7. *Бондаренко В. М., Гудивок П. М.* О представлениях конечных p-групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми P-адическими коэффициентами // Сб. "Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры". – К.: Ин-т матем. НАН Украины, 1993. – С. 5–14.
8. *Гудивок П. М., Кіндюх С. П.* Про матричні зображення скінченних p-груп над областями цілісності характеристики нуль // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2005. – Вип 10–11. – С. 49–56.

Одержано 01.09.2006