УДК 512.544.6

П. М. Гудивок, А. О. Кирилюк, О. А. Кирилюк
(Ужгородський нац. ун-т)

НЕЗВІДНІ СКІНЧЕННІ НІЛЬПОТЕНТНІ ПІДГРУПИ ГРУПИ $GL(pq,\mathbb{Z})$

All irreducible finite nilpotent subgroups of the group $GL(pq,\mathbb{Z})$ are described up to conjugation ($\mathbb{Z}$ is the ring of rational integers, p, q are the prime, $p \neq q$).

Класифікуються з точністю до спряженості всі незвідні скінченні нільпотентні підгрупи групи $GL(pq,\mathbb{Z})$, де $\mathbb{Z}$ — кільце цілих раціональних чисел, p, q — різні прості числа.

Класифікація з точністю до спряженості скінченних підгруп групи $GL(n,\mathbb{Z})$ є актуальною задачею теорії цілочислових лінійних груп і пов'язана з n-вимірною кристалографією. Ще в кінці XIX століття Є. С. Федоров і Шьонфліс геометричними методами описали 3-вимірні кристалографічні групи, звідки випливав опис неспряжених скінченних підгруп групи $GL(3,\mathbb{Z})$. Всі неспряжені скінченні підгрупи групи $GL(4,\mathbb{Z})$ були описані лише в 1972 р. [1]. Класифікація всіх неспряжених скінченних підгруп групи $GL(n,\mathbb{Z})$ для довільного n є дикою задачею [2]. Тому Дейд [3] запропонував описувати спочатку максимальні скінченні підгрупи групи $GL(n,\mathbb{Z})$, а всі інші підгрупи отримувати як підгрупи максимальних. С. С. Ришков [4] класифікував всі неспряжені максимальні скінченні підгрупи групи $GL(5,\mathbb{Z})$. В серії робіт Плескен і Пост знайшли всі неспряжені максимальні абсолютно незвідні скінченні підгрупи групи $GL(n,\mathbb{Z})$ при $5 \leq n \leq 9$ (див. [5,6]). В [7,8] описані неспряжені скінченні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(p,\mathbb{Z})$ у випадках, коли 2 — первісний або напівпервісний корінь за модулем p (p — непарне просте число). В [9] розв'язується задача про спряженість силовських p-підгруп групи $GL(n,\mathbb{Z})$.

В даній роботі описуються неспряжені незвідні скінченні нільпотентні підгрупи групи $GL(pq,\mathbb{Z})$, де p, q — різні прості числа.

Розглянемо спочатку скінченні незвідні нільпотентні підгрупи групи $GL(pq,\mathbb{Q})$ ($\mathbb{Q}$ — поле раціональних чисел). Як випливає з [10], при непарному n в групі $GL(n,\mathbb{Q})$ немає скінченних незвідних нільпотентних підгруп. Тому надалі будемо вважати, що $p = 2$.

Лема 1. *В групі $GL(2q,\mathbb{Q})$ тоді і тільки тоді існують незвідні неабелеві p-підгрупи, коли $p = q = 3$.*

Доведення. Нехай спочатку $p = 2$. Тоді, згідно [11],

$$2q = a_0 + a_1 2 + \cdots + a_r 2^r \ (a_i = 0, 1; i = \overline{0, r})$$

і силовська 2-підгрупа $GL(2q,\mathbb{Q})$ спряжена в цій групі з групою $G = diag[G_{2^0}, \ldots, G_{2^r}]$, де G_{2^i} — незвідна силовська 2-підгрупа групи $GL(2^i,\mathbb{Q})$ $(i \geq 1)$, $G_{2^0} = \pm 1$ і $r > 1$. Очевидно, якщо G є незвідною, то цей випадок неможливий. Отже, $p \geq 3$.

Нехай ε — первісний корінь степеня p з одиниці і $m = (Q(\varepsilon) : \mathbb{Q})$. Очевидно, $m = p - 1$. Тоді число $2q$ можна представити у вигляді $2q = c + m \cdot n_0$ $(0 \leq c \leq p-1)$ і $n_0 = b_0 + b_1 p + \cdots + b_s p^s$ $(b_1 \neq 0, 0 \leq b_j \leq p-1;\ j = \overline{0, s})$.

Згідно [11], силовська p-підгрупа групи $GL(2q, \mathbb{Q})$ спряжена з групою

$$G = diag[1, \ldots, 1, G_{mp^0}, \ldots, G_{mp^r}, \ldots],$$

де 1 повторюється c разів, G_{mp^r} — незвідна силовська p-підгрупа групи $GL(mp^r, \mathbb{Q})$, яка повторюється b_r разів $(r = \overline{0, s})$. Якщо G є незвідною, то $c = 0$ і $2q = (p-1)n_0$, тобто $q = \frac{p-1}{2}$. Так як p і q — прості, то можливі випадки: а) $p = 3$, $q = n_0$; б) $n_0 = 1, p - 1 = 2q$.

Якщо $p = 3, q = n_0$, то розкладемо число n_0 за степенями числа 3:

$$q = n_0 = b_0 + b_1 3 + \cdots + b_k 3^k \ \ (0 \leq b_j \leq 2;\ b_k \neq 0,\ k > 1). \qquad (1)$$

В силу [11] і незвідності групи G в розкладі (1) може бути не більше одного доданка, тобто $q = b_i 3^i$, звідки $i = 1, b_1 = 1$. Якщо ж $p - 1 = 2q$ і $n_0 = 1$ в (1), то $n_0 = b_0 = 1$ і група G має вигляд $G = P'_p \wr N_p = P'_p \wr \langle E \rangle$ — незвідна підгрупа групи $GL(p-1, \mathbb{Q})$, що є сплетінням циклічної групи P'_p порядку p з одиничною групою і тому G — циклічна група порядку p. Таким чином, при $p - 1 = 2q$ в групі $GL(2q, \mathbb{Q})$ існують лише незвідні p-підгрупи порядку p. Лема доведена.

Наслідок 1. *Незвідні p-підгрупи групи $GL(6, \mathbb{Q})$ з точністю до ізоморфізму вичерпуються групами*

$$G_1 = \langle a_1, a_2, b, c \rangle \,|\, a_1^3 = a_2^3 = b^3 = c^3 = 1,\ a_1 a_2 = a_2 a_1,\ a_1 b = b a_1,\ a_1 c = c a_1,$$

$$b^{-1} a_2 b = a_1^2 a_2,\ a_2 c = c a_2,\ c^{-1} b c = a_1^2 a_2^2 b \rangle;$$

$$G_2 = \langle a_1, a_2, b \,|\, a_1^3 = a_2^3 = b^3 = 1, a_1 a_2 = a_2 a_1, b a_1 = a_1 b, b^{-1} a_2 b = a_1^2 a_2 \rangle,$$

$$G_3 = \langle a, b \,|\, a^9 = b^3 = 1,\ b^{-1} a b = a^4 \rangle,\ G_4 = \langle a \,|\, a^7 = 1 \rangle,\ G_5 = \langle a \,|\, a^9 = 1 \rangle.$$

Доведення. Як випливає з [11], група $G_1 \cong P_3 \wr N_3$, що є сплетінням циклічної групи P_3 порядку 3 і силовської 3-підгрупи N_3 симетричної групи S_3 і є єдиною з точністю до ізоморфізму силовською 3-підгрупою групи $GL(6, \mathbb{Q})$. Легко бачити, що група G_1 містить лише дві неабелеві підгрупи G_2 і G_3. Розглянемо групову алгебру $\mathbb{Q}G_i$ $(i = 2, 3)$. Можна показати, що кільце $[\mathbb{Q}(\varepsilon)]$ (ε — первісний корінь степеня 3 з 1) є мінімальним лівим ідеалом алгебри $\mathbb{Q}G_i$, звідки випливає, що групи G_i $(i = 2, 3)$ мають єдине з точністю до еквівалентності точне $\mathbb{Q}$-зображення степеня 6.

Циклічні групи C_9 і C_7 теж мають єдине з точністю до еквівалентності точне $\mathbb{Q}$-зображення степеня 6, оскільки поліноми ділення круга $\Phi_9(x)$ і $\Phi_7(x)$ мають степінь 6 і є незвідними над полем $\mathbb{Q}$. Наслідок доведено.

Наслідок 2. *Незвідні p-підгрупи групи $GL(2q, \mathbb{Q})$ $(p \neq 3)$ існують тоді і тільки тоді, коли $p - 1 = 2q$ і є циклічними групами порядку p.*

Нехай тепер Γ — $\mathbb{Z}$-зображення групи G_i $(i = 1, 2, 3)$. Очевидно, Γ реалізується в кільці $\mathbb{Z}[\widetilde{\varepsilon}]$, де

$$\widetilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Побудуємо відображення $\varphi : \mathbb{Z}[\widetilde{\varepsilon}] \to \mathbb{Z}[\varepsilon]$ (ε — первісний корінь степеня 3 з 1), поклавши для елемента $x = \alpha_0 E + \alpha_1 \widetilde{\varepsilon} \in \mathbb{Z}[\widetilde{\varepsilon}]$ $\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon$ $(\alpha_i \in \mathbb{Z},\ i = 0, 1, 2)$.

Легко бачити, що φ — ізоморфізм кілець $\mathbb{Z}[\widetilde{\varepsilon}]$ та $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ і, значить, існує взаємнооднозначна відповідність між $\mathbb{Z}[\varepsilon]$-зображеннями степеня 3 групи G_i та її $\mathbb{Z}$-зображеннями степеня 6.

Відомо, що група G_2 має 4 точні нееквівалентні $\mathbb{Z}$-зображення степеня 3:

$$\Gamma_0 : a_1 \to \varepsilon E,\ a_2 \to \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \varepsilon & \\ 0 & & \varepsilon^2 \end{pmatrix} = A_0,\ b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B_0;$$

$$\Gamma_1 : a_1 \to \varepsilon E,\ a_2 \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & t \\ 0 & \varepsilon & -2\varepsilon t \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} = A_1,\ b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = B_1;$$

$$\Gamma_2 : a_1 \to \varepsilon E,\ a_2 \to \begin{pmatrix} 1 & -t & t \\ 0 & \varepsilon & -2\varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} = A_2,\ b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 t \\ 0 & t & -2 \end{pmatrix} = B_2;$$

$$\Gamma_3 : a_1 \to \varepsilon E,\ a_2 \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & -2\varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} = A_3,\ b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & \varepsilon^2 t \\ 0 & t & -2 \end{pmatrix} = B_3$$

($t = 1 - \varepsilon$ — простий елемент кільця $\mathbb{Z}[\varepsilon]$), причому зображення Γ_i ($i = 1,2,3$) $\mathbb{Q}(\varepsilon)$-еквівалентні зображенню Γ_0. Нехай $P = \langle t \rangle$ — простий ідеал кільця $\mathbb{Z}[\varepsilon]$, $\overline{\mathbb{Z}[\varepsilon]} = \mathbb{Z}[\varepsilon]/P$, $\overline{\alpha} = \alpha + P$ ($\alpha \in \mathbb{Z}[\varepsilon]$). Зводячи зображення Γ_i ($i = \overline{0,3}$) за модулем ідеала P, одержимо

$$\overline{\Gamma_0} : a_1 \to \overline{E},\ a_2 \to \overline{E},\ a_3 \to \overline{B_0};$$

$$\overline{\Gamma_1} : a_1 \to \overline{E},\ a_2 \to \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{-1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} = \overline{A_1},\ b \to \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix} = \overline{B_1};$$

$$\overline{\Gamma_2} : a_1 \to \overline{E},\ a_2 \to \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} = \overline{A_2},\ b \to \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} = \overline{B_2};$$

$$\overline{\Gamma_3} : a_1 \to \overline{E},\ a_2 \to \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{-1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} = \overline{A_3},\ b \to \overline{E}.$$

Як відомо (див. [12]), якщо групи $I_m\Gamma_i$ та $I_m\Gamma_j$ спряжені в групі $GL(3,\mathbb{Z}[\varepsilon])$, $I_m\Gamma_i = \Gamma_i(G_2)$, то групи $I_m\overline{\Gamma_i}$ та $I_m\overline{\Gamma_j}$ спряжені в групі $GL(3,\overline{\mathbb{Z}[\varepsilon]})$. Оскільки $I_m\overline{\Gamma_0}$ та $I_m\overline{\Gamma_3}$ — циклічні групи порядку 3, а $I_m\overline{\Gamma_1}$ та $I_m\overline{\Gamma_2}$ — прямий добуток двох циклічних груп порядку 3, то спряженими можуть бути лише групи $I_m\overline{\Gamma_0}$ та $I_m\overline{\Gamma_3}$ та $I_m\overline{\Gamma_1}$ та $I_m\overline{\Gamma_2}$.

Неважко перевірити, що $I_m\overline{\Gamma_1}$ і $I_m\overline{\Gamma_2}$ не спряжені в групі $GL(3,\overline{\mathbb{Z}[\varepsilon]})$, звідки випливає, що $I_m\Gamma_1$ та $I_m\Gamma_2$ не спряжені в групі $GL(3,\mathbb{Z}[\varepsilon])$. Якщо покласти

$$C = \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -t & -\varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix},$$

то одержимо, що $C^1B_3C = \varepsilon^2 A_0$, $C^1A_3C = B_0^2$, звідки випливає спряженість груп $I_m\Gamma_0$ та $I_m\Gamma_3$ в групі $GL(3,\mathbb{Z}[\varepsilon])$. Таким чином, має місце наступне твердження.

Твердження 1. *Група $GL(3,\mathbb{Z}[\varepsilon])$ містить з точністю до спряженості три підгрупи $V_i = I_m\Gamma_i$ $(i = 0,1,2)$, ізоморфні групі G_2.*

Так як група G_1 є розширенням групи G_2, то для опису з точністю до спряженості підгруп групи $GL(3,\mathbb{Z}[\varepsilon])$, ізоморфних G_1, достатньо розглянути точні $\mathbb{Z}[\varepsilon]$-зображення Δ_i групи G_1, такі що обмеження $\Delta_i|G_2 = \Gamma_i$ $(i = 0,1,2)$.

1. Нехай $\Delta_i|G_2 = \Gamma_0$. Тоді Δ_0 має вигляд:

$$\Delta_0 : a_1 \to \varepsilon E,\ a_2 = A_0,\ b \to B_0,\ c \to C\ (C \in GL(3,\mathbb{Z}[\varepsilon]).$$

З визначаючих відношень групи G_1 неважко одержати, що C має вигляд $C_i = \varepsilon^i \cdot diag[\varepsilon,1,1]$ $(i = 0,1,2)$. Таким чином, зображення Γ_0 має три продовження до точного $\mathbb{Z}[\varepsilon]$-зображення групи G_1. Розглянемо підгрупи $U_i = \langle I_m\Gamma_0, C_i\rangle$ $(i = 0,1,2)$ групи $GL(3,\mathbb{Z}[\varepsilon])$. Оскільки $\varepsilon E \in I_m\Gamma_0$, то $C_i = (\varepsilon E)^i diag[\varepsilon,1,1]$, звідки $U_0 = U_1 = U_2$, тобто $U_0 = \langle I_m\Gamma_0, C_0\rangle$ — єдина з точністю до спряженості підгрупа групи $GL(3,\mathbb{Z}[\varepsilon])$, що ізоморфна групі G_1 в цьому випадку.

2. Нехай $\Delta_1|G_2 = \Gamma_1$. Тоді Δ_1 матиме вигляд:

$$\Delta_1 : a_1 \to \varepsilon E,\ a_2 = A_1,\ b \to B_1,\ c \to C\ (C \in GL(3,\mathbb{Z}[\varepsilon]).$$

З визначаючих співвідношень G_1 $B_1C = \varepsilon^2 CA_1$, $CA_1 = A_1C$ випливає, що матриця C має вигляд

$$C = \alpha \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha C_1,$$

а з співвідношення $C^3 = E$ випливає, що $\alpha = \varepsilon^i$ $(i = 0,1,2)$. Аналогічно п. 1 доводиться, що досить покласти $\alpha = 1$.

3. $\Delta_2|G_2 = \Gamma_2$. Тоді Δ_2 має вигляд:

$$\Delta_2 : a_1 \to \varepsilon E,\ a_2 = A_2,\ b \to B_1,\ c \to C\ (C \in GL(3,\mathbb{Z}[\varepsilon]).$$

Із співвідношення $CA_2 = A_2C$ і $B_2C = \varepsilon^2 CA_2^2B_2$ одержимо, що

$$C = \alpha \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon & t & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha C_2.$$

Умова $C^3 = E$ дає $\alpha^3 = 1$ і, аналогічно попередньому, можна вважати, що $\alpha = 1$. Тим самим доведено наступне твердження.

Твердження 2. *Група $GL(3,\mathbb{Z}[\varepsilon])$ містить з точністю до спряженості* 3 *силовські* 3*-підгрупи, що ізоморфні G_1:*

$$U_0 = \langle I_m\Gamma_0, diag[\varepsilon,1,1]\rangle\,,$$

$$U_1 = \left\langle I_m\Gamma_1, \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle,\ U_3 = \left\langle I_m\Gamma_2, \begin{pmatrix} \varepsilon & t & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Розглянемо далі групу $G_3 = \langle a,b|a^9=b^3=1, b^-1ab=a^4\rangle$. Так як поліном ділення круга $\Phi_9(x)$ має степінь 6 і є незвідним над кільцем $\mathbb{Z}$, то група $C_9=\langle a\rangle$ має єдине з точністю до $\mathbb{Z}$-еквівалентності точне $\mathbb{Z}$-зображення степеня 6, або, що теж саме, єдине з точністю до $\mathbb{Z}[\varepsilon]$-еквівалентності $\mathbb{Z}[\varepsilon]$-зображення степеня 3. Тому можна вважати, що

$$a \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = C_0B_0 = A,\ b \to B.$$

Із співвідношення $AB=BA^4$ одержимо, що B має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \varepsilon x_3 & \varepsilon^2 x_1 & \varepsilon^2 x_2 \\ x_2 & x_3 & \varepsilon x_1 \end{pmatrix}\ (x_i \in \mathbb{Z}[\varepsilon],\ i=1,2,3),$$

а з співвідношення $B^3=E$ випливає, що B співпадає з однією з матриць $\varepsilon^i A_0^2$ $(i=0,1,2)$. Нехай $V_0^{(i)} = \langle \varepsilon^i A_0^2, C_0B_0\rangle$. Групи $V_0^{(i)}$ є попарно спряженими, оскільки $(C_0B_0)^{-1}V_0^{(0)}C_0B_0 = V_0^{(1)}$ і $(C_0B_0)^{-1}V_0^{(0)}C_0B_0 = V_0^{(2)}$. Таким чином, група U_0 містить єдину з точністю до спряженості підгрупу $W_0 = \langle C_0B_0, A_0^2\rangle$, що ізоморфна групі G_3. Оскільки групи U_i $(i=0,1,2)$ спряжені над полем $\mathbb{Q}(\varepsilon)$, то U_i містить єдину з точністю до спряженості підгрупу W_i, що ізоморфна групі G_3 $(i=1,2)$. Міркуючи аналогічно попередньому, неважко показати, що

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & -1 \\ t & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 t \\ 0 & \varepsilon^2 & 2\varepsilon t \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 t \\ 0 & t & -2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & t\varepsilon^2 & \varepsilon^2 t \\ 0 & \varepsilon^2 & 2\varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Зводячи групи W_i $(i=0,1,2)$ за модулем ідеала $P=\langle t\rangle$, одержимо групи

$$\overline{W_0} = \left\langle \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix} \right\rangle,\ \overline{W_1} = \left\langle \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{-1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\overline{W_2} = \left\langle \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{-1} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Так як $\overline{W_0}$ — циклічна група, $\overline{W_1}$ — абелева, а $\overline{W_2}$ — неабелева групи, то групи $\overline{W_i}$ $(i=0,1,2)$ є попарно не спряженими над $\overline{Z[\varepsilon]}$ і, відповідно, групи W_i $(i=0,1,2)$ теж попарно не спряжені над кільцем $\mathbb{Z}[\varepsilon]$.

Таким чином, має місце наступне твердження.

Твердження 3. *Група $GL(3,\mathbb{Z}[\varepsilon])$ містить з точністю до спряженості 3 підгрупи W_i $(i=0,1,2)$, ізоморфні групі G_3.*

Теорема 1. *Незвідні p-підгрупи групи $GL(2q,\mathbb{Z})$, які існують тоді і тільки тоді, коли $p=3,7$ при $q=3$ і $p=2q+1$ при $q>3$, з точністю до спряженості вичерпуються групами*:

I. *При* $q=3$: 1) $\langle A_1\rangle \cong C_7$; 2) $\langle A_2\rangle \cong C_9$, *де*

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&-1\\1&0&0&0&0&-1\\0&1&0&0&0&-1\\0&0&1&0&0&-1\\0&0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&1&-1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&-1\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&-1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix};$$

$$3)\, U_0=\left\langle \begin{pmatrix}\widetilde{\varepsilon}&&0\\&\widetilde{\varepsilon}&\\0&&\widetilde{\varepsilon}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}E&&0\\&\widetilde{\varepsilon}&\\0&&\widetilde{\varepsilon}^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&E\\E&0&0\\0&E&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\widetilde{\varepsilon}&&0\\&E&\\0&&E\end{pmatrix}\right\rangle;$$

$$4)\, U_1=\left\langle \begin{pmatrix}\widetilde{\varepsilon}&&0\\&\widetilde{\varepsilon}&\\0&&\widetilde{\varepsilon}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}E&-E&\widetilde{t}\\0&\widetilde{\varepsilon}&-2\widetilde{\varepsilon}\widetilde{t}\\0&0&\widetilde{\varepsilon}^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}E&0&0\\\widetilde{t}&E&-3E\\0&E&-2E\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\widetilde{\varepsilon}&E&-E\\0&E&0\\0&0&E\end{pmatrix}\right\rangle;$$

$$5)\, U_2=\left\langle \begin{pmatrix}\widetilde{\varepsilon}&&0\\&\widetilde{\varepsilon}&\\0&&\widetilde{\varepsilon}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}E&-\widetilde{t}&\widetilde{t}\\0&\widetilde{\varepsilon}&-2\widetilde{\varepsilon}\\0&0&\widetilde{\varepsilon}^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}E&0&0\\E&E&\widetilde{\varepsilon}^2\widetilde{t}\\0&\widetilde{t}&-2\widetilde{\varepsilon}^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\widetilde{\varepsilon}&-\widetilde{t}&-E\\0&E&0\\0&0&E\end{pmatrix}\right\rangle$$

$(U_i \cong G_1;\ i=0,1,2)$;

$$6)\, V_0=\left\langle \begin{pmatrix}\widetilde{\varepsilon}&&0\\&\widetilde{\varepsilon}&\\0&&\widetilde{\varepsilon}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}E&&0\\&\widetilde{\varepsilon}&\\0&&\widetilde{\varepsilon}^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&E\\E&0&0\\0&E&0\end{pmatrix}\right\rangle;$$

$$7)\, V_1=\left\langle \begin{pmatrix}\widetilde{\varepsilon}&&0\\&\widetilde{\varepsilon}&\\0&&\widetilde{\varepsilon}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}E&-E&\widetilde{t}\\0&\widetilde{\varepsilon}&-2\widetilde{\varepsilon}\widetilde{t}\\0&0&\widetilde{\varepsilon}^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}E&0&0\\\widetilde{t}&E&\widetilde{\varepsilon}^2\widetilde{t}\\0&\widetilde{t}&-2E\end{pmatrix}\right\rangle;$$

$$8)\, V_2=\left\langle \begin{pmatrix}\widetilde{\varepsilon}&&0\\&\widetilde{\varepsilon}&\\0&&\widetilde{\varepsilon}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}E&-E&E\\0&\widetilde{\varepsilon}&-2\widetilde{\varepsilon}\\0&0&\widetilde{\varepsilon}^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}E&0&0\\\widetilde{t}&E&\widetilde{\varepsilon}^2\widetilde{t}\\0&\widetilde{t}&-2E\end{pmatrix}\right\rangle$$

$(V_i \cong G_2;\ i=0,1,2)$;

$$9)\, W_0=\left\langle \begin{pmatrix}E&&0\\&\widetilde{\varepsilon}^2&\\0&&\widetilde{\varepsilon}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&\widetilde{\varepsilon}\\E&0&0\\0&E&0\end{pmatrix}\right\rangle;$$

$$10)\, W_1=\left\langle \begin{pmatrix}\widetilde{\varepsilon}&0&-E\\\widetilde{t}&E&-3E\\0&E&-2E\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}E&\widetilde{\varepsilon}^2&\widetilde{\varepsilon}^2\widetilde{t}\\0&\widetilde{\varepsilon}^2&2\widetilde{\varepsilon}\widetilde{t}\\0&0&\widetilde{\varepsilon}\end{pmatrix}\right\rangle;$$

$$11)\, W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} E & 0 & -E \\ E & E & \widetilde{\varepsilon}^2\widetilde{t} \\ 0 & \widetilde{t} & -2E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & \widetilde{\varepsilon}^2\widetilde{t} & \widetilde{\varepsilon}\widetilde{t} \\ 0 & \widetilde{\varepsilon}^2 & 2\widetilde{\varepsilon} \\ 0 & 0 & \widetilde{\varepsilon} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$(W_i \cong G_3;\ i = 0, 1, 2)$, *де* $\widetilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{t} = E - \widetilde{\varepsilon}$.

II. *При* $q > 3$, $p = 2q + 1 : T_i = \langle B_i \rangle \cong C_p$ $(i = \overline{1, s})$, *де*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

s — число класів ідеалів поля $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ $(\varepsilon^p = 1, \varepsilon \neq 1)$, B_i — матриця оператора множення на ε в $\mathbb{Z}$-базисі ідеала I_i поля $\mathbb{Q}(\varepsilon)$, причому при $i \neq j$ I_i та I_j належать різним класам ідеалів поля $\mathbb{Q}(\varepsilon)$.

Доведення. Так як поліном ділення круга $\Phi_p(x)$ є незвідним над $\mathbb{Z}$ поліномом степеня $p - 1$, то, як відомо [13], циклічна група C_p має з точністю до $\mathbb{Z}$-еквівалентності s точних незвідних $\mathbb{Z}$-зображень Γ_i степеня $p - 1$, де s — число ідеалів поля $\mathbb{Q}(\varepsilon)$, причому $\Gamma_i : a \to B_i$ $(i = \overline{1, s})$. Так як $B_i \in GL(2q, \mathbb{Z})$ $(i = \overline{i, s})$, то $2q = p - 1$ при $q > 3$, а при $q = 3$ $p = 7$. Звідси і з [9] випливає доведення II і 1) з I.

Поліном $\Phi_9(x)$ має степінь 6 і є $\mathbb{Z}$-незвідним. Звідси група C_9 має єдине з точністю до еквівалентності точне незвідне $\mathbb{Z}$-зображення степеня 6, що доводить 2) з I.

Враховуючи зв'язок між незвідними $\mathbb{Z}$-зображеннями степеня 6 групи G_i $(i = 1, 2, 3)$ і незвідними $\mathbb{Z}[\varepsilon]$-зображеннями степеня 3 цих груп, з тверджень 1–3 випливає заключна частина доведення теореми.

Теорема 2. *Незвідні скінченні нільпотентні підгрупи групи $GL(2q, \mathbb{Z})$ з точністю до спряженості вичерпуються групами P і $P \times \langle -E \rangle$, де P пробігає групи $1) - 11)$ при $q = 3$ та групами T_i, $T_i \times \langle -E \rangle$ при $q > 3$, $p = 2q + 1$ $(i = \overline{1, s})$.*

Доведення теореми випливає з теореми 1 та леми 1.5 роботи [14].

1. *Braun N., Neubüser I., Zassenhaus H.* On integral groups I. The reducible case // Numer. Math. – 1972. – **19**. – P. 386–399.
2. *Гудивок П. М., Шапочка І. В.* О дикости задачи описания некоторых классов групп // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1998. – Вип 3. – С. 69–77.
3. *Dade E.* The finite groups of 4×4-integral matrices // Illinois I. of Math. – 1965. – **9**. – P. 99–122.
4. *Рышков С. С.* О максимальных конечных подгруппах $(n \times n)$-матриц Докл. АН СССР. – 1972. – **204**, № 3. – С. 561–564.
5. *Plesken W., Pohst M.* On maximal finite irreducible subgroups of $GL(n, \mathbb{Z})$. I. The five and seven dimensional case. II. The six dimension case // Bull A. M. S. – 1976. – **82**. – P. 757–758.
6. *Plesken W., Pohst M.* On maximal finite irreducible subgroup of $GL(n, \mathbb{Z})$ // Math. Comput. – 1977. – № 31. – P. 536–573; 1980. – № 34. – P. 245–301.
7. *Кирилюк А. А., Рудько В. П.* О конечных неприводимых разрешимых подгруппах группы $GL(p, \mathbb{Z})$ // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 8. – С. 17–20.
8. *Гудивок П. М., Кирилюк А. А., Рудько В. П., Циткин А. И.* О конечных подгруппах группы $GL(n, \mathbb{Z})$ // Кибернетика. – 1982. – № 6. – С. 71–82.

9. *Гудивок П. М.* О силовских подгруппах полной линейной группы над кольцом целых чисел // Алгебра и анализ. – 1990. – **2**. – Вып. 6. – С. 125–131.
10. *Супруненко Д. А.* О конечных неприводимых разрешимых линейных группах // Изв. АН БССР. – 1971. – № 3. – С. 5–16.
11. *Вольвачев Р. Т.* p-подгруппы Силова полной линейной группы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1963. – **27**, № 5. – С. 1031–1054.
12. *Гудивок П. М., Кирилюк А. А.* Силовские p-подгруппы полной линейной группы над дискретно нормированными кольцами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1979.– № 5. – С. 326–329.
13. *Diederichsen F. E.* Über die Ausreduction ganzzahliger Gruppendarstellungen bei arithmetischer Aquivalenz // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg – 1940. – **14**. – P. 357–412.
14. *Гудивок П. М., Рудько В. П., Юрченко Н. В.* Про мінімальні незвідні підгрупи повної лінійної групи над полем // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2003. – Вип 8. – С. 28–42.

Одержано 18.09.2007