МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

Т.В. Боярищева, М.С. Герич, О.О. Погоріляк, О.О. Синявська, Г.І. Сливка-Тилищак, П.В. Слюсарчук, А.М. Тегза

ТЕОРІЯ МІРИ Й ІНТЕГРАЛУ ЛЕБЕГА. ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник для студентів математичних, фізичних та технічних спеціальностей

Ужгород – 2022

Т.В. Боярищева, М.С. Герич, О.О. Погоріляк, О.О. Синявська, Г.І. Сливка-Тилищак, П.В. Слюсарчук, А.М. Тегза. **ТЕОРІЯ МІРИ Й ІНТЕГРАЛУ ЛЕБЕГА. ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ.** Навчальний посібник для студентів математичних, фізичних та технічних спеціальностей. – Ужгород, 2022. – 182 с.

У навчальному посібнику проілюстровано розв'язання опорних задач курсу терії міри й інтегралу Лебега та функціонального аналізу за темами: «Елементи теорії множин», «Елементи теорії міри», «Вимірні функції», «Інтеграл Лебега», «Функції обмеженої зміни», «Інтеграл Стільт'єса», «Збіжність в метричних просторах», «Компактність множин», «Принцип стискаючих відображень», «Лінійні нормовані простори, збіжність в лінійних нормованих просторах», «Гільбертові простори», «Лінійні неперервні оператори і функціонали, простори операторів», «Спряжені і компактні оператори, власні значення, вектори, спектр та резольвента оператора», «Інтегральні рівняння Вольтерра і Фредгольма та методи їх розв'язування», «Узагальнені функції». До кожної вище згаданої теми додаються основні теоретичні відомості, приклади розв'язування типових задач, а також завдання для індивідуальної, самостійної та лабораторних робіт студентів.

Рекомендовано до друку засіданням методичної комісії ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 00 від 00 вересня 2022 року.

Рекомендовано до друку засіданням вченої ради ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 00 від 00 вересня 2022 року.

Рецензенти:
Кучанський О.Ю., доктор тех. наук, доцент, зав. кафедри інформаційних систем та технологій КНУ ім. Тараса Шевчека
Король І.В., доктор фіз.-мат. наук, доцент, проректор ДВНЗ «УжНУ»

Зміст

1 Елементи теорії множин

Перелік необхідних питань теорії

1. Поняття множини. Операції над множинами.
2. Монотонні класи множин. Принцип двоїстості.
3. Зліченні множини. Властивості зліченних множин. Незліченні множини.
4. Еквівалентні множини та їх властивості.
5. Потужність множини. Множини потужності континуум.
6. Системи множин. Півкільце, кільце, алгебра.
7. σ-кільця та σ-алгебри множин. Властивості.
8. Породжені класи множин. Борелівські множини.

Теоретичні відомості

Множина – одне із найважливіших понять математики. Поняття множини вводиться аксіоматично і не може визначатись через якісь елементарні поняття. Описове пояснення терміна множина – сукупність об'єктів (елементів) із певними загальними для них властивостями (ознаками). Множини позначають великими латинськими літерами $A, B, C, ...$, а їх елементи – маленькими $a, b, c, \dots$. Якщо кожен елемент із множини A належить множині B (випадок коли $A = B$ не виключається), то множину A називають *підмножиною* B. У теорії множин вводять поняття *порожньої* множини, тобто множини, що не містить жодного елемента та позначають її символом $\emptyset$.

Нехай A і B – довільні множини. Їх *об'єднанням* (чи *сумою*) $C = A \cup B$ називають множину, що складається з тих елементів, котрі належать хоча б одній із множин A і B. Аналогічно визначається *об'єднання* довільного (скінченного чи нескінченного) числа множин: якщо A_α – довільна кількість множини, то їх об'єднання $\cup_\alpha A_\alpha$ – це сукупність елементів, кожен із яких належить хоча б одній із множин A_α.

Перетином $C = A \cap B$ множин A і B називають множину, що містить ті елементи, котрі належать як множині A, так і множині B. *Перетином* довільного (скінченного чи нескінченного) числа множин A_α називається сукупність $\cap_\alpha A_\alpha$ елементів, що належать кожній із множин A_α.

Операції об'єднання і перетину множин є комутативними, асоціативними і взаємно дистрибутивними.

Різницею $C = A \backslash B$ множин A і B називають сукупність тих елементів із A, які не належать B.

Симетричною різницею $A \triangle B$ множин A і B називають об'єднання різниць $A \setminus B$ та $B \setminus A$. Отже, за визначенням

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Розглянемо послідовність $A_1, A_2, ..., A_n, ...$. Якщо для даної послідовності виконується співвідношення $A_1 \subset A_2 \subset \ldots A_n \subset \ldots$, то вона називається *зростаючою* або *монотонно зростаючою*. Позначається $(A_n) \uparrow$.

Якщо виконується співвідношення $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$, то ця послідовність називається *спадною* або *монотонно спадною*. Позначається $(A_n) \downarrow$. Зростаюча і спадна послідовності об'єднуються одним терміном – *монотонні* послідовності.

Часто в теорії множин доводиться розглядати множини А, котрі є підмножинами деякої множини S, яку назвемо основною. В цьому випадку різницю $S \setminus A$ називають *доповненням* A до множини S і позначають $\overline{A}$.

У теорії множин важливу роль відіграє так званий *принцип двоїстості*, який базується на наступних співвідношеннях:

доповнення об'єднання множин дорівнює перетину доповнень цих множин:

$$S \setminus \cup_\alpha A_\alpha = \cap_\alpha (S \setminus A_\alpha);$$

доповнення перетину множин дорівнює об'єднанню доповнень цих множин:

$$S \setminus \cap_\alpha A_\alpha = \cup_\alpha (S \setminus A_\alpha).$$

Принцип двоїстості полягає в тому, що із довільної рівності, що стосується об'єднання чи перетину системи підмножин фіксованої множини S, можна отримати іншу – двоїсту рівність шляхом заміни всіх множин їх доповненнями, об'єднання множин – їх перетинами, а перетинів множин – їх об'єднаннями.

Разом із множинами, що містять скінченну кількість елементів, існують множини, що містять нескінченну кількість елементів. Очевидно, нескінченною множиною є множина натуральних чисел $\mathbf{N}$.

Зліченною(зчисленною) множиною називають множину, елементи якої можна занумерувати, тобто записати у вигляді нескінченної послідовності a_1,a_2,..., $a_n, \ldots$. Іншими словми, означення зліченної множини можна сформулювати так. Множина A називається *зліченною(зчисленною)*, якщо між елементами множини A та множиною натуральних чисел $\mathbf{N}$ існує взаємнооднозначна відповідність. Прикладів зліченних множин можна навести безліч. Серед них, наприклад, множина всіх цілих чисел, множина всіх додатніх парних чисел, множина степенів числа 2, тощо.

Нескінчена множина, котра не є зліченною, називається *незліченною(незчисленною) множиною*. Поряд з термінами *незліченна(незчисленна)* використовуються також терміни *більш ніж злічення(більш ніж зчисленна)*.

Прикладами незліченних множин є множина дійсних чисел довільного відрізка, множина всіх точок на прямій, множина всіх точок площини, простору, поверхні сфери, множина всіх прямих на площині, множина всіх неперервних функцій однієї чи кількох змінних, тощо.

Дві множини M та N називаються *еквівалентними* (позначають $M \sim N$), якщо між елементами цих множин можна встановити взаємнооднозначну відповідність.

Якщо еквівалентними є дві скінченні множини, то вони містять однакову кількість елементів. Якщо ж еквівалентні між собою множини M і N є довільними, то кажуть, що вони мають однакову *потужність* (є *рівнопотужними*). Для скінченних множин поняття потужності співпадає з поняттям кількості елементів. Потужність множини натуральних чисел (а отже, і довільної зліченної множини) позначають символом $\aleph_0$ («алеф нуль»). Потужність множин еквівалентних множині всіх дійсних чисел відрізку $[0, 1]$ називають *потужністю континуума.*

Системою множин називається множина, елементи якої самі є множинами.

Непорожня система множин Φ називається *кільцем*, якщо із того, що $A \in \Phi$ і $B \in \Phi$ випливає, що $A \triangle B \in \Phi$ та $A \cap B \in \Phi$. Тобто кільце – це система множин, замкнена відносно операцій перетину і симетричної різниці.

Множина E називається *одиницею* системи множин Φ, якщо вона належить Φ і якщо для довільної $A \in \Phi$ справедлива рівність $A \cap E = A$.

Кільце множин із одиницею називається *алгеброю.*

Система множин Φ називається *півкільцем*, якщо вона:

1) містить порожню множину $\emptyset$;
2) замкнута відносно операції перетину;
3) якщо $A \in \Phi$ та $A_1 \subset A$, то A можна зобразити у вигляді $A = \cup_{k=1}^{n} A_k$, де A_k – попарно неперетинні множини із Φ, перша із яких є A_1.

У різних питаннях теорії міри доводиться мати справу із перетинами і об'єднаннями не лише скінченної, але і зліченної кількості множин. Тому доцільно ввести наступні поняття.

Кільце множин називається *σ-кільцем*, якщо разом із кожною послідовністю множин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ воно містить їх об'єднання $S = \cup_n A_n$.

σ-алгеброю називають σ-кільце з одиницею.

Найпростішим прикладом σ-алгебри є сукупність всіх підмножин деякої множини.

Якщо розглянемо деяку систему множин Φ, то завжди існує хоча б одна σ-алгебра, що містить цю систему. Такою σ-алгеброю є, наприклад, система всіх можливих підмножин Φ, включаючи й порожню множину. Якщо $M \in \Phi$, то, очевидно, існує σ-алгебра, що містить в собі дану множину M. Таких σ-алгебр є не одна. Перетин σ-алгебр є теж σ-алгеброю. Перетин σ-алгебр, що містять в собі дану множину M, називається σ-алгеброю, породженою даною множиною M. Вона є мінімальною σ-алгеброю, що містить M.

Важливу роль в аналізі відіграють борелівські множини. *Борелівські множини* – це множини на числовій прямій, що належать мінімальній σ-алгебрі, що породжена сукупністю всіх відрізків $[a, b]$(або інтервалів (a, b), або напівінтервалів $(a, b]$, $[a, b)$).

Приклади розв'язання типових задач

Завдання 1. *Довести такі твердження:*

1) $(A \setminus B) = A \cap \overline{B}$;

2) $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$;

3) $(A \cap B) \setminus (B \cap C) = (A \setminus C) \cap B$;

4) $S \setminus \cap_\alpha A_\alpha = \cup_\alpha (S \setminus A_\alpha)$;

5) $E \times (F \cup G) = (E \times F) \cup (E \times G)$;

6) $A \triangle B = (A \triangle C) \triangle (C \triangle B)$.

Розв'язання. Нагадаємо, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, то кажуть, що $A = B$. 1) Нехай

$x \in (A \setminus B) \Rightarrow (x \in A) \wedge (x \overline{\in} B) \Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in \overline{B}) \Rightarrow x \in (A \cap \overline{B})$.

Тобто, множина $(A \setminus B) \subset (A \cap \overline{B})$.

Включення $(A \cap \overline{B}) \subset (A \setminus B)$ одержується з попередніх міркувань, проведених в оберненому порядку.

2) Із означення симетричної різниці: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ і попереднього завдання одержимо:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}).$$

3) Нехай

$$x \in (A \cap B) \setminus (C \cap B) \Rightarrow (x \in (A \cap B)) \wedge (x \overline{\in} (C \cap B)) \Rightarrow (x \in (A \setminus C) \cap B),$$

тобто

$$(A \cap B) \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus C) \cap B.$$

Навпаки,

$$x \in (A \setminus C) \cap B \Rightarrow (x \in A) \wedge (x \overline{\in} C) \wedge (x \in B) \Rightarrow (x \in (A \cap B)) \wedge (x \overline{\in} (C \cap B))$$
$$\Rightarrow x \in (A \cap B) \setminus (C \cap B).$$

З цього випливає, що

$$(A \setminus C) \cap B \subset (A \cap B) \setminus (C \cap B).$$

Рівність доведена.

4) Нехай S-універсальна множина, така, що $\forall \alpha_0 \in \mathbb{R} : A_{\alpha_0} \subset S$. Тоді

$$x \in S \setminus \cap_\alpha A_\alpha \Rightarrow (x \in S) \wedge (x \overline{\in} \cap_\alpha A_\alpha) \Rightarrow (\exists \alpha_0 \in \mathbb{R}), (x \in S) \wedge (x \overline{\in} A_{\alpha_0})$$
$$\Rightarrow (x \in (S \setminus A_{\alpha_0})) \Rightarrow (x \in \cup_\alpha (S \setminus A_\alpha)).$$

З цього випливає, що

$$S \setminus \cap_\alpha A_\alpha \subset \cup_\alpha (S \setminus A_\alpha).$$

Навпаки:

$$x \in \cup_\alpha (S \setminus A_\alpha) \Rightarrow (\exists \alpha_0 \in \mathbb{R})(x \in S \setminus A_{\alpha_0}) \Rightarrow (x \in S) \wedge (x \overline{\in} A_{\alpha_0}) \Rightarrow$$
$$(x \in S) \wedge (x \overline{\in} \cap_\alpha A_\alpha) \Rightarrow (x \in (S \setminus \cap_\alpha A_\alpha)).$$

Тобто

$$\cup_\alpha (S \setminus A_\alpha) \subset S \setminus \cap_\alpha A_\alpha.$$

Рівність доведена.

5) Доведення випливає з таких міркувань:

$$(x; y) \in (E \times (F \cup G)) \Leftrightarrow (x \in E) \wedge (y \in (F \cup G)) \Leftrightarrow$$
$$(x \in E) \wedge ((y \in F) \vee (y \in G)) \Leftrightarrow ((x \in E) \wedge (y \in F)) \vee ((x \in E) \wedge (y \in G)) \Leftrightarrow$$
$$(x; y) \in (E \times F) \vee (x; y) \in (E \times G) \Leftrightarrow (x; y) \in (E \times F) \cup (E \times G).$$

6) Використаємо такі тотожності:

$$C \triangle C = (C \setminus C) \cup (C \setminus C) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset,$$
$$A \triangle \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = A,$$

$$A\triangle(B\triangle C) = (A\triangle B)\triangle C.$$

Одержимо:

$$A\triangle B = (A\triangle\emptyset)\triangle B = (A\triangle(C\triangle C))\triangle B = \\ = ((A\triangle C)\triangle C)\triangle B = (A\triangle C)\triangle(C\triangle B).$$

Завдання 2.
а) Встановити взаємно однозначну відповідність між множиною парних чисел і множиною натуральних чисел.
б) Встановити взаємно однозначну відповідність між множиною раціональних чисел відрізка $[0;1]$ *і множиною натуральних чисел.*
Розв'язання. а) Розмістимо всі парні числа в послідовність наступним чином:

$$0; 2; -2; 4; -4; \ldots; 2k; -2k; \ldots,$$

а потім кожному парному числу поставимо у відповідність той номер, який це число займає в заданій послідовності.
б) Взаємно однозначну відповідність між множиною $\mathbf{Q}_{[0,1]}$ всіх раціональних чисел відрізка $[0;1]$ і множиною $\mathbf{N}$ всіх натуральних чисел можна встановити так: запишемо кожне число $r \in \mathbf{Q}_{[0,1]}$ у вигляді нескоротного дробу, і назвемо висотою дробу r суму чисельника і знаменника. Очевидно, що на відрізку $[0;1]$ є лише скінченне число дробів однакової висоти. Розмістимо всі раціональні числа відрізка $[0;1]$ в послідовність в порядку зростання їх висоти. Якщо однакову висоту мають декілька різних дробів, то будемо записувати їх в порядку зростання. Таким чином всі елементи множини розмістяться у вигляді такої послідовності:

$$0; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{2}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{2}{5}; \frac{3}{4}; \frac{1}{7}; \frac{3}{5}; \frac{1}{8}; \ldots$$

Поставимо тепер кожному раціональному числу $r \in \mathbf{Q}_{[0,1]}$ такий номер n, який це число займає в нашій послідовності. Ця відповідність є взаємно однозначною відповідністю між множинами $\mathbf{Q}_{[0,1]}$ і $\mathbf{N}$.
Завдання 3.
а) Побудувати взаємно однозначне відображення сегмента $[0;1]$ *на інтервал* $(0;1)$.
б) Побудувати взаємно однозначну відповідність між множиною чисел відрізка $[0;1]$ *і множиною дійсних чисел* $\mathbf{R}$.
Розв'язання. а) Виберемо яку-небудь послідовність точок з інтервала $(0;1)$, наприклад:

$$x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{1}{3}; \ldots, x_n = \frac{1}{n+1}; \ldots$$

Встановимо відповідність: точці 0 з сегмента $[0;1]$ поставимо у відповідність точку x_1 з інтервала $(0;1)$, точці 1 з сегмента $[0;1]$ – точку x_2 з інтервала $(0;1)$; точці $x_1 = \frac{1}{2}$ з $[0;1]$ – точку x_3 з $(0;1)$; точці $x_2 = \frac{1}{3}$ з $[0;1]$ – точку x_4 з $(0;1)$;... Решті точкам $x \in [0;1]$ поставимо у відповідність точки з тими ж абсцисами з $(0;1)$. Одержана відповідність є взаємно однозначною.

б) Побудуємо взаємно однозначне відображення сегмента $[0;1]$ на інтервал $(0;1)$, методом описаним в задачі 1), а далі застосуємо функцію $y = \mathrm{tg}\left(\pi(x - \frac{1}{2})\right)$, що відображає $(0;1)$ в $\mathbf{R}$.

Завдання 4. *Дослідити, чи існує неперервна функція, яка взаємно однозначно відображає сегмент $[a;b]$ на інтервал (c;d)?*

Розв'язання. Ні. Якби існувала неперервна функція $x = \varphi(t)$, яка відображала б сегмент $[a;b]$ на інтервал $(c;d)$, то на сегменті $[a;b]$ за теоремою Вейєрштрасса ця неперервна функція досягала б свого найбільшого значення. Оскільки $\sup\{x : c < x < d\} = d\overline{\in}(c;d)$, то $\sup_{a\leq t\leq b}\varphi(t)\overline{\in}(c;d)$.

Завдання 5. *Довести, що якщо $A \setminus B \sim B \setminus A$, то $A \sim B$.*

Розв'язання. Дві множини називаються еквівалентними, якщо між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність. Множини A і B запишемо так:

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B); \quad B = (B \setminus A) \cup (A \cap B).$$

Множини $A \setminus B$, $B \setminus A$ і $A \cap B$ не мають спільних точок. За умовою $A \setminus B \sim B \setminus A$, тоді, оскільки $A \cap B \sim A \cap B$, отримаємо, що $A \sim B$.

Завдання 6. *Перевірити справедливість твердження: якщо $A \sim C$, $B \sim D$, $B \subset A$ і $D \subset C$, тоді $A \setminus B \sim C \setminus D$.*

Розв'язання. Твердження хибне. Наприклад: $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $B = \{2, 3, 4, \ldots\}$, $C = A$, $D = \{3, 4, 5, \ldots\}$. Маємо: $A \sim C$, $B \sim D$, $B \subset A$ і $D \subset C$, але множина $A \setminus B = \{1\}$ не еквівалентна множині $C \setminus D = \{1, 2\}$ (містять різну кількість елементів).

Завдання 7. *Визначити потужність множини всіх многочленів з раціональними коефіцієнтами.*

Розв'язання. Будь-який многочлен з раціональними коефіцієнтами можна записати у вигляді частки від ділення многочлена з цілими коефіцієнтами на натуральне число. Кожен коефіцієнт може приймати зліченну кількість значень, а кількість коефіцієнтів скінченна множина. Використаємо властивість зліченних множин: об'єднання скінченної або зліченної сукупності зліченних множин є множина зліченна. Отже, множина многочленів з раціональними коефіцієнтами є зліченною, а тому її потужність співпадає з потужністю множини натуральних чисел – алеф нуль.

Завдання 8. *Визначити потужність множини всіх сегментів на числовій прямій.*

Розв'язання. Потужність континуума. Кожному сегменту $[a; b]$ відповідає точка з координатами $(a; b)$ на півплощині $y > x$. Ця відповідність взаємно однозначна, а множина точок півплощини $y > x$ має потужність континуума.

Завдання 9. *Довести, що множина точок розриву монотонної функції, яка визначена на сегменті $[a; b]$, скінченна або зліченна.*

Розв'язання. Візьмемо зростаючу функцію на сегменті $[a; b]$. Кожна точка розриву зростаючої функції $f(x)$ є точкою розриву 1-го роду. Дійсно, оскільки функція $f(x)$ зростаюча і визначена на сегменті $[a; b]$, то вона є обмеженою на сегменті $[a; b]$ (в кожній точці $x_0 \in [a; b]$ існують скінченні границі: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a + 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to b - 0} f(x)$).

Стрибком функції в точці x_0 є різниця $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$, який у зростаючої функції додатний. Кількість точок розриву зростаючої функції в яких стрибок більший за c, де $c > 0$ -скінченне і не перевищує $\frac{1}{c}(f(b) - f(a))$. Позначимо через E_k множину точок розриву з стрибком більшим за $\frac{1}{k}$. Очевидно, що множина E всіх точок розриву дорівнює об'єднанню всіх E_k: $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k \cup \ldots$. Оскільки всі E_k – скінченні множини, то E-не більше ніж зліченна множина.

Завдання 10. *Довести, що система множин $pK = \{[a; b), -\infty < a < b < +\infty\} \cup \{\emptyset\}$ є півкільцем і не є кільцем.*

Чи буде система множин $\Psi = \{(a; b), -\infty < a < b < +\infty\} \cup \{\emptyset\}$ півкільцем? Чому?

Розв'язання. Доведемо, що множина pK є півкільцем. Нехай $A = [a; b)$ і $B = [c; d)$. Можливі три випадки:

1) $a < b < c < d$ тоді $A \setminus B = A$, $A \cap B = \emptyset$;

2) $a < c < b < d$, тоді $A \setminus B = [a; c)$, $A \cap B = [c; b)$;

3) $a < c < d < b$, тоді $A \setminus B = [a, c) \sqcup [d; b)$, $A \cap B = B$.

У всіх трьох випадках $A \cap B \in pK$, а $A \setminus B$ дорівнює одній множині, що належить pK або об'єднанню двох множин з pK, що не перетинаються.

Система множин pK не є кільцем. Наприклад, виберемо $A = [1; 2)$ і $B = [0; 4) \in pK$ і тоді $B \setminus A = [0, 1) \cup [2, 4) \overline{\in} pK$. Тобто, pK не є кільцем, бо $[a; b) \cup [c; d)$ не обов'язково є проміжком (коли $b < c$).

Система множин Ψ не є півкільцем. Наведемо контрприклад. Виберемо $A = (0; 7)$ і $B = (3; 7)$ з Ψ і знайдемо множину $A \setminus B$: $A \setminus B = (0; 3]$ не належить Ψ. Отже, система множин Ψ не є півкільцем, бо $(a; b) \setminus (c; d) = (a; c] \cup [d; b)$, якщо $a < c < d < b$, а проміжки $(a; c]$, $[d; b)$ не належать до Ψ.

Завдання 11. *Довести, що:*

1) кільце замкнене відносно операцій $\cap$, $\triangle$*;*

2) об'єднання і перетин скінченного числа елементів кільця належать кільцю;

3) нехай σA *-* σ*-алгебра підмножин* X, $B \subset X$*. Довести, що система*

$$(\sigma A) \cap B = \{A \cap B, A \in \sigma A\}$$

є σ*-кільцем;*

4) довести, що сукупність всіх обмежених множин числової прямої утворюють кільце, але вона не є ні σ*-кільцем, ні* σ*-алгеброю.*

Розв'язання. 1) Нехай Ψ-кільце і для $\forall A, B \in \Psi$, $A \cup B$ і $A \setminus B \in \Psi$. Потрібно довести, що $A \cap B$ і $A \triangle B \in \Psi$. Для доведення використаємо такі співвідношення:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A); \qquad A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \triangle B).$$

Множини $A \setminus B$, $B \setminus A$ і $A \cup B$ належать кільцю Ψ, а тому і множини $A \cap B$ та $A \triangle B$ теж належать кільцю Ψ.

2) Нехай $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \Psi$. Доведемо, що $\cup_{k=1}^{n} A_k \subset \Psi$. Використаємо метод математичної індукції.

1. Якщо $n = 2$, то $A_1 \cup A_2 \in \Psi$ за означенням кільця.

2. Припустимо, що твердження істинне при $n = k$, тобто, що множина $\cup_{n=1}^{k} A_n \in \Psi$ і доведемо, що при $n = k + 1$ множина $\cup_{n=1}^{k+1} A_n \in \Psi$.

Перепишемо вираз для $\cup_{n=1}^{k+1} A_n$: $\cup_{n=1}^{k+1} A_n = \cup_{n=1}^{k} A_n \cup A_{k+1}$. Оскільки $\cup_{n=1}^{k} A_n \in \Phi$, $A_{k+1} \in \Phi$, тобто кожна множина правої частини рівності належить Ψ, то і їх об'єднання (згідно означення кільця) належить Ψ.

Доведення того, що перетин скінченного числа елементів кільця належить кільцю, аналогічне доведенню попереднього твердження.

3) Якщо σA - σ-алгебра підмножин X, тоді для $\forall\{C, D\} \subset \sigma A$, $\{C \cup D, C \setminus D\} \subset \sigma A$ і $\forall\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\} \subset \sigma A$ випливає, що $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma A$. Доведемо, що виконуються умови означення σ-кільця.

1. Якщо $\{C, D\} \subset \sigma A$ і $B \in X$, то $(C \cap B) \cup (D \cap B) \in \sigma A \cap B$ і $(C \cap B) \setminus (D \cap B) \in \sigma A \cap B$. Запишемо тотожності:

$$(C \cap B) \cup (D \cap B) = (C \cup D) \cap B$$

$$(C \cap B) \setminus (D \cap B) = (C \setminus D) \cap B.$$

Тоді маємо, що $(C \cap B) \cup (D \cap B) \in \sigma A \cap B$ і $(C \cap B) \setminus (D \cap B)$, бо $\{C, D\} \subset \sigma A$ і $\{C \cup D, C \setminus D\} \subset \sigma A$.

2. $\forall\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\} \subset \sigma A$ множина $\cup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B) \in (\sigma A) \cap B$. Запишемо тотожність:

$$\cup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B) = (\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap B.$$

Оскільки, $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma A$, то $\cup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B) \in (\sigma A) \cap B$.

Отже, система множин $(\sigma A) \cap B$ є σ-кільцем.

4) Будь-яка обмежена множина прямої є інтервал, сегмент, півсегмент або об'єднання цих множин. Виходячи з цих міркувань, різниця і об'єднання будь-яких двох множин є також обмежена множина. Тобто, сукупність всіх обмежених множин числової прямої утворює кільце. Виберемо послідовність обмежених множин $A_n = (-n, n)$ числової прямої і знайдемо $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$: $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = (-\infty, +\infty)$. Числова пряма не є обмеженою множиною, через це сукупність обмежених множин прямої не є ні σ-кільцем, ні σ-алгеброю.

Завдання 12. *Нехай $X = \{1, 2, 3\}$.*

1) Знайти такі кільця підмножин множини X, об'єднання яких не є кільцем;

2) навести приклад півкільця множини X, яке не є кільцем.

Розв'язання. 1) Запишемо такі сукупності підмножин множини X: $X_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ і $X_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$. X_1 і X_2 є кільцями, бо об'єднання і різниця будь-яких двох підмножин з X_1 (відповідно X_2) належать X_1 (відповідно X_2).

Знайдемо $X_1 \cup X_2$:

$$X_1 \cup X_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}.$$

Множина $X_1 \cup X_2$ не є кільцем, оскільки вона не містить об'єднання множин $\{2\}$ і $\{3\}$: $\{2\} \cup \{3\} = \{2, 3\} \overline{\in} X_1 \cup X_2$.

2) Виберемо $pK = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$. Різниця і перетин будь-яких двох підмножин з pK належать pK, але об'єднання множин $\{2\}$ і $\{1\}$: $\{2\} \cup \{1\} = \{2, 1\} \overline{\in} pK$. Отже, pK не є кільцем.

Завдання 13. *Нехай $K = \{B \subset \mathbf{R} : B \cap \mathbf{Q}$ – скінченна$\}$. Довести, що K – кільце, але не σ-кільце і не σ-алгебра.*

Розв'язання. Якщо $A, B \in K$, то $A \cap \mathbf{Q}$ і $B \cap \mathbf{Q}$ є скінченними множинами, тому множини

$$(A \cup B) \cap \mathbf{Q} = (A \cap \mathbf{Q}) \cup (B \cap \mathbf{Q}),$$
$$(A \cap B) \cap \mathbf{Q} = (A \cap \mathbf{Q}) \cap (B \cap \mathbf{Q}),$$
$$(A \setminus B) \cap \mathbf{Q} = (A \cap \mathbf{Q}) \setminus (B \cap \mathbf{Q})$$

є скінченними також, тобто $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B \in K$. Якщо $A_n \in K$, $n \geq 1$, то $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ не обов'язково належить K (бо $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap \mathbf{Q} = \cup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap \mathbf{Q})$ може бути зліченною множиною), тобто K не є σ-кільцем. K не є алгеброю, бо одиницею є $\mathbf{R}$, яка не належить до K.

Завдання 14. *Нехай A фіксована підмножина множини X. Описати найменшу σ-алгебру Υ з одиницею X, що містить A.*

Розв'язання. Шукана σ-алгебра містить як свої елементи множини X і A, тому вона містить і їхню різницю $X \setminus A$. Крім того, $\emptyset$ теж є елементом шуканої σ-алгебри. Отже, Υ повинна містити $\emptyset$, A, $X \setminus A$, X. Зауважимо, що $\{\emptyset, A, X, X \setminus A\}$ є кільцем, а оскільки ця сукупність скінченна, то вона є і σ-кільцем. Одиниця X належить до цього кільця, тому $\Upsilon = \{\emptyset, A, X, X \setminus A\}$.

Зазначимо, що система множин $\{\emptyset, A\}$ теж є σ-алгеброю, яка містить A, але її одиницею буде A.

Завдання 15. *Нехай K-кільце множин, $\phi : K \to [0, +\infty)$ скінченно-адитивна функція така, що $\phi(\emptyset) = 0$. Довести, що для $A, B \in K$:*

$$1)\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B) - \phi(A \cap B); \quad 2)|\phi(A) - \phi(B)| \leq \phi(A \triangle B).$$

Розв'язання. 1) Подамо $A \cup B$ як диз'юнктне об'єднання множин: $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup B$. Тоді зі скінченної адитивності функції ϕ одержимо $\phi(A \cup B) = \phi(A \setminus B) + \phi(B)$. Але $A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$, тому $\phi(A) = \phi(A \setminus B) + \phi(A \cap B)$, звідки

$$\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B) - \phi(A \cap B).$$

2) Враховуючи монотонність скінченно-адитивної функції, з того, що $A \subset B \cup (A \triangle B)$, одержимо: $\phi(A) \leq \phi(B) + \phi(A \triangle B)$. Оскільки $B \subset A \cup (A \triangle B)$ і $\phi(B) \leq \phi(A) + \phi(A \triangle B)$, то з цих двох нерівностей одержуємо:

$$|\phi(A) - \phi(B)| \leq \phi(A \triangle B).$$

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *Довести такі співвідношення:*

1. $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
2. $A \triangle (B \triangle D) = (A \triangle B) \triangle D$;
3. $(A \cup B) \triangle F \subset (A \triangle F) \cup (B \triangle F)$;
4. $(\overline{X \setminus Y}) = \overline{X} \cup Y$;
5. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup B)$;
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
7. $\cup_k A_k \setminus \cup_k B_k \subset \cup_k (A_k \setminus B_k)$;
8. $B \setminus \cup_\alpha A_\alpha = \cap_\alpha (B \setminus A_\alpha)$;

9. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
10. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

Завдання 2.

1. *Встановити взаємно однозначну відповідність між множиною всіх додатних раціональних чисел і множиною натуральних чисел.*

2. *Знайти взаємно однозначне відображення числової прямої* $\mathbf{R}$ *на інтервал* (a, b).

3. *Встановити взаємно однозначну відповідність між відкритим одиничним кругом і множиною точок на площині, що є доповненням до замкненого одиничного круга.*

4. *Встановити взаємно однозначну відповідність між множиною всіх многочленів з раціональними коефіцієнтами і множиною всіх натуральних чисел.*

5. *Побудувати взаємно однозначне відображення променя* $[0, \infty)$ *на всю числову вісь* $(-\infty; \infty)$.

6. *Побудувати взаємно однозначне відображення сегмента* $[a; b]$ *на* $(0; \infty)$.

7. *Побудувати взаємно однозначну відповідність між відкритим та замкненим одиничними кругами.*

8. *Побудувати взаємно однозначне відображення додатної півосі* $(0; \infty)$ *на інтервал* $(a; b)$.

9. *Побудувати взаємнооднозначну відповідність кола одиничного радіуса на сегмент* $[0, 1]$.

10. *Встановити взаємно однозначну відповідність між множиною всіх послідовностей натуральних чисел і множиною всіх зростаючих послідовностей натуральних чисел.*

Завдання 3.

1. *Довести, що множина точок розриву монотонної функції, визначеної на всій числовій прямій, є скінченною або зліченною.*

2. *На прямій задана множина попарно неперетинних сегментів. Що можна сказати про потужність даної множини(якою вона є)?*

3. *На площині побудована множина попарно неперетинних кіл. Що можна сказати про потужність даної множини(якою вона є)?*

4. *Визначити потужність множини всіх трикутників на площині, вершини яких мають раціональні координати.*

5. *Визначити потужність множини всіх скінченних десяткових дробів.*

6. *Яка потужність множини всіх кругів на площині?*

7. *На площині побудована деяка множина кіл, що не перетинаються. Чи може ця множина бути незліченною?*

8. *Яка потужність множини всіх строго зростаючих неперервних функцій заданих на відрізку* $[a; b]$*?*

9. *Яка потужність множини всіх монотонних функцій на відрізку* $[a; b]$ *(не лише неперервних)?*

10. *Визначити потужність множини многочленів (з довільними дійсними коефіцієнтами).*

Завдання 4.

1. *Чи справедливе твердження: якщо* $A \subset B$ *і* $A \sim A \cup C$*, тоді* $B \sim B \cup C$*?*

2. *Чи справедливе твердження: якщо* $A \sim B$*,* $A \subset C$ *і* $B \subset C$ *тоді* $C \setminus A \sim C \setminus B$*?*

3. *Чи справедливе твердження: якщо* $A \sim B$*,* $C \subset A$ *і* $C \subset B$*, тоді* $A \setminus C \sim B \setminus C$*?*

4. *Чи буде система множин* $\{[a; b) \colon \{a, b\} \subset \mathbf{Q}, -\infty < a < b < \infty\} \bigcup \{\emptyset\}$ півкільцем, кільцем?

5. *Чи буде система множин* $\{(a; b] \colon \{a, b\} \subset \mathbf{Z}, -\infty < a < b < \infty\} \bigcup \{\emptyset\}$ півкільцем, кільцем?

6. *Чи буде система множин* $\{[a; b) \colon \{a, b\} \subset \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, -\infty < a < b < \infty\} \bigcup \{\emptyset\}$ півкільцем, кільцем?

7. *Чи буде система множин* $\{(a; b] \colon a \in \mathbf{Q}, b \in \mathbf{N}, -\infty < a < b < \infty\} \bigcup \{\emptyset\}$ півкільцем, кільцем?

8. *Чи буде система множин* $\{[a; b] \colon a \in \mathbf{Q}, b \in \mathbf{N}, -\infty < a < b < \infty\} \bigcup \{\emptyset\}$ півкільцем, кільцем?

9. *Нехай* $X = \mathbb{N}$, $E = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}, \ldots\}$. *Знайти кільце і* σ-*кільце, породжене множиною* E.

10. *Нехай* $X = \{1, 2, 3\}$. *Навести приклад кільця* $K(X)$, *яке не є алгеброю.*

2 Елементи теорії міри

Перелік необхідних питань теорії

1. Міра елементарних множин. Основні властивості.
2. Функції множин. Абстрактна міра. Властивості.
3. Продовження міри. Теорема Каратеодорі про продовження міри.
4. Продовження міри за Лебегом.
5. Вимірні за Лебегом множини. Властивості міри Лебега.
6. Міра Лебега на $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$.

Теоретичні відомості

Нехай Ω – довільна непорожня множина, елементами якої є об'єкти довільної природи. Розглянемо в Ω деякий клас множин K. Довільній множини $A \in K$ поставимо у відповідність певне значення $\omega = \omega(A)$, яке може дорівнювати скінченному числу або $+\infty$, $-\infty$ тобто $\omega : K \longrightarrow \mathbf{R} \cup +\infty \cup -\infty$. Пара $\{\omega, K\}$ задає *функцію множин*, визначену на класі множин K.

Функція множин $\mu(A)$ називається *мірою*, якщо:
1) область визначення функції $\mu(A)$ є півкільцем множин;
2) значення функції $\mu(A)$ дійсні і невід'ємні;
3)$\mu(A)$ σ-адитивна, тобто для довільного зліченного розбиття $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n, \ldots$ множини A на попарно неперетинні множини A_k, $k \geq 1$ виконується рівність (σ-адитивність міри)

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Проміжком A числової осі $\mathbf{R}$ називається відрізок $[a; b]$, або інтервал $(a; b)$, або один з напівінтервалів $[a; b)$, $(a; b]$.

Паралелепіпедом P простору $\mathbf{R}^m$ називається декартів добуток $P = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ проміжків $A_1, A_2, \ldots, A_m$ числової прямої $\mathbf{R}$. Кожен проміжок A_i співпадає або з відрізком $[a_i; b_i]$, або з інтервалом $(a_i; b_i)$, або з одним із напівінтервалів $[a_i; b_i)$, $(a_i; b_i]$. Тоді *мірою* (об'ємом) такого паралелепіпеда називається число

$$\mu_m(P) = \sqcap_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

Диз'юнктне об'єднання скінченної кількості прямокутників називатимемо *елементарною множиною.* Якщо $E = \sqcup_{k=1}^{n} P_k$, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ – паралелепіпеди, то число $\mu_m(E) = \sum_{k=1}^{n} \mu_m(P_k)$ називається мірою (елементарної) множини E.

Зовнішньою мірою обмеженої множини $A \subset \mathbf{R}^m$ називається невід'ємне число $\mu_m^*(A) = \inf\limits_{A \subset \cup_k P_k} \sum_k \mu_m(P_k)$, де точна нижня грань береться за всіма можливими покриттями множини A скінченними або зліченними системами паралелепіпедів $\{P_k\}$ простору $\mathbf{R}^m$.

Обмежена множина $A \subset \mathbf{R}^m$ називається *вимірною за Лебегом*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться така елементарна множина E, що $\mu_m^*(A \Delta E) < \varepsilon$. При цьому *мірою Лебега* обмеженої множини A називається число $\lambda_m(A) = \mu_m^*(A)$.

Розглянемо в $\mathbf{R}^m$ фіксовану неспадну послідовність паралелепіпедів $P_n^* = [-n; n] \times [-n; n] \times \ldots \times [-n; n]$, яка вичерпує весь простір $\mathbf{R}^m$: $\cup_{n=1}^{\infty} P_n^* = \mathbf{R}^m$. Нехай A –деяка множина з $\mathbf{R}^m$ не обов'язково обмежена. Побудуємо для цієї множини монотонну послідовність $A(n) = A \cap P_n^* (n \in \mathbf{N})$ і дамо означення вимірності множини A.

Множина $A \subset \mathbf{R}^m$ називається *вимірною за Лебегом*, якщо для кожного $n \in \mathbf{N}$ існують вимірні множини $A(n)$. *Мірою Лебега* такої множини A називається границя

$$\lambda_m(A) = \lim_{n \to \infty} \mu_m^*(A(n)).$$

Якщо множину $A \subset \mathbf{R}^m$ можна побудувати, виходячи з системи замкнених і відкритих множин, за допомогою застосування скінченної або зліченної кількості операцій об'єднання, перетину і різниці, то вона називається борелівською множиною простору $\mathbf{R}^m$. Клас борелівських множин простору $\mathbf{R}^m$ – це найменша σ-алгебра, яка містить усі відкриті (а отже, й замкнені) підмножини $\mathbf{R}^m$. Кожна борелівська множина простору $\mathbf{R}^m$ є вимірною.

Приклади розв'язання типових задач

Завдання 1. *Нехай K-кільце і μ-скінченно-адитивна функція множин. Довести, що наступні умови еквівалентні:*

1) μ-міра;

2) μ-напівадитивна функція множин;

3) μ-неперервна знизу функція множин.

Розв'язання. Доведемо, що з 1) випливає 2):

Якщо μ-міра на K, тоді μ – σ-адитивна (зліченно адитивна) функція множин, тобто

$$\mu\left(\sqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Доведемо, що

$$\forall A_i, i \in N : \quad \mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Розглянемо наступну послідовність множин, що не перетинаються:

$$A_1, A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots, A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}), \ldots$$

Тоді

$$\cup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \ldots \cup (A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})) \ldots$$

Використаємо σ-адитивність і монотонність міри множин:

$$\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \ldots + \mu(A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})) + \ldots \leq$$

$$\leq \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n) + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Властивість 2) доведено.

Навпаки. Доведемо, що з властивості 2) випливає 1). Дано, що μ– σ-напівадитивна функція множин. Доведемо, що μ-міра. Оскільки μ невід'ємна функція множин за умовою задачі, то потрібно довести, що μ σ-адитивна функція множин. Використаємо скінченну адитивність функції μ і монотонність міри μ:

$$\forall A_i, i \in N, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \quad \mu\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

В останній нерівності перейдемо до границі, коли $n \to \infty$, одержимо:

$$\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{2.1}$$

Навпаки:

$$\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \mu\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Перейшовши в цій нерівності до границі, коли $n \to \infty$, одержимо:

$$\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{2.2}$$

З (2.1) і (2.2) випливає σ-адитивність функції множин μ, тобто μ є мірою.

Доведемо, що з 1) $\Rightarrow$ 3). За визначенням функція множин μ неперервна знизу, якщо

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \Rightarrow \mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Утворимо нову послідовність множин, що не перетинаються

$$A_1' = A_1, \quad \forall n \in N, n > 1 \quad A_{n+1}' = A_{n+1} \setminus A_n.$$

Очевидно,

$$\cup_n A_n' = \cup_n A_n = A.$$

σ-адитивність міри μ означає, що:

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n') = \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} (\mu(A_n) - \mu(A_{n-1}))$$

(тут враховано, що $A_{n-1} \subset A_n$, тому $\mu(A_n) = \mu(A_{n-1}) + \mu(A_n \setminus A_{n-1})$). Легко бачити, що частинна сума s_n ряду $\sum_{n=2}^{\infty}(\mu(A_n) - \mu(A_{n-1}))$ дорівнює $\mu(A_n)$. Тому

$$\mu(A) = \sum_{n=2}^{\infty} (\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})) + \mu(A_1) = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Доведемо тепер обернене твердження, тобто що з 3) $\Rightarrow$ 1). Нехай виконується

$$\forall (A_n)_{n\in N} \subset K \quad A_n \subset A_{n+1} \quad \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in K \quad \mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

і нехай (B_n) -послідовність множин з K, які попарно не перетинаються, і $B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n \in K$. Позначимо $A_n = \cup_{k=1}^{n} B_k$, тоді $A_n \subset A_{n+1}$ і $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$. Тому

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\cup_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k),$$

тобто μ є зліченно-адитивною.

Завдання 2. *Нехай X-зліченна множина і $\forall A \subset X$:*

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A - \textit{скінченна}; \\ \infty, & A - \textit{нескінченна}. \end{cases}$$

Чи буде μ мірою на σ-алгебрі 2^X?

Розв'язання. Ні. Доведемо, що функція множин μ не є σ-адитивною (зліченно адитивною). Виберемо послідовність одноелементних множин $A_n = \{x_n\} \in X$, що попарно не перетинаються. Через те, що $\mu(A_n) = 0$, то $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = 0$, але $\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \infty$, бо $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ – нескінченна множина.

Завдання 3. *Для множини $A \subset X$ покладемо:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \overline{\in} A. \end{cases}$$

Нехай $\{x_1, x_2\} \subset X$. *Чи буде* μ *мірою на* 2^X *якщо*
1)$\forall E \subset X, \mu(E) = \chi_E(x_1)+\chi_E(x_2)$;   2)$\forall E \subset X, \mu(E) = \chi_E(x_1)\chi_E(x_2)$?

Розв'язання. 1) $\mu(E) \geq 0$, бо $\chi_A(x) \geq 0$. Перевіримо σ-адитивність функції $\mu(E)$:

$$\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \begin{cases} 2, & x_1 \in A_n, x_2 \in A_k, k \neq n, k, n \in N; \\ 1, & x_1 \in A_n, x_2 \overline{\in} A_k, k \neq n, k, n \in N; \\ 0, & \{x_1, x_2\} \overline{\subset} A_i, \forall i \in N. \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \begin{cases} 2, & x_1 \in A_n, x_2 \in A_k, k \neq n, k, n \in N; \\ 1, & x_1 \in A_n, x_2 \overline{\in} A_k, k \neq n, k, n \in N; \\ 0, & \{x_1, x_2\} \overline{\subset} A_i, \forall i \in N. \end{cases}$$

Функція $\mu(E)$ σ-адитивна. Тобто μ-міра на 2^X.

2) Доведемо, що $\mu(E)$ не є мірою на 2^X бо $\mu(E)$ не є σ-адитивною функцією множин. Обчислимо $\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$ і $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ у випадку, коли $x_1 \in A_k$, $x_2 \in A_i$, $k \neq i$. Перший вираз $\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1$, а другий $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = 0$, оскільки $\mu(A_i) = 0$, $\forall i \in N$. Отже, $\mu(E)$ не є мірою.

Завдання 4. *Нехай* μ *– міра на* σ*-алгебрі* σA. $E = \{A \subset (\sigma A) : \mu(A) = 0\}$. *Довести, що* E *– кільце.*

Розв'язання. Нехай $A, B \in \sigma A$, $\mu(A) = 0$ і $\mu(B) = 0$. Треба довести, що $\mu(A \cup B) = 0$ і $\mu(A \setminus B) = 0$.

Враховуючи невід'ємність і монотонність міри запишемо нерівності:

$$0 \leq \mu(A \setminus B) \leq \mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A \setminus B) = 0.$$

Множину $A \cup B$ запишемо у вигляді об'єднання множин, які не перетинаються і використаємо σ-адитивність міри:

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B);$$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B).$$

Оскільки $\mu(A \setminus B) = 0$, $\mu(B \setminus A) = 0$ і $0 \leq \mu(A \cap B) \leq \mu(A) = 0$, то $\mu(A \cap B) = 0$. Тоді одержимо, що $\mu(A \cup B) = 0$. Отже, множина E – кільце.

Завдання 5. *Нехай* $H = \{(a, b] : 0 \leq a < b < +\infty\} \cup \emptyset$ *– півкільце і*

$$\mu((a, b]) = \begin{cases} 0, & a > 0; \\ 1, & a = 0. \end{cases}$$

Довести, що μ *є скінченно-адитивною, але не зліченно-адитивною функцією на* H.

Розв'язання. Нехай $(a,b]$ з H є диз'юнктним об'єднанням проміжків $(a_1,b_1]$ і $(a_2,b_2]$. Тоді $a_1=a$, $b_2=b$, $b_1=a_2$:

$$(a,b]=(a,b_1]\sqcup(b_1,b].$$

Якщо $a>0$, то $b_1>0$ і $\mu((a,b])=0$, $\mu((a,b_1])=0$, $\mu((b_1,b])=0$, тобто рівність $\mu((a,b])=\mu((a,b_1])+\mu((b_1,b])$ виконується. Якщо ж $a=0$, то $\mu((a,b])=\mu((a,b_1])=1$, а $\mu((b_1,b])=0$, бо $b_1>a$, і необхідна рівність знову справджується. Таким чином, μ скінченно-адитивна.

Припустимо протилежне, тобто що μ – σ-адитивна на H, тоді μ є неперервною знизу. Нехай $A_n=(1/n,1]$, тоді $A_n\subset A_{n+1}$ і $\cup_{n=1}^{\infty}A_n=(0,1]$, $\mu((0,1])=1$, але з іншого боку $\mu((0,1])=\lim\limits_{n\to\infty}\mu((1/n,1])=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$. Одержана суперечність доводить, що μ не є зліченно-адитивною.

Завдання 6. *Нехай μ–міра на σ-алгебрі σA,*

$$\{A_n,n\geq 1\}\subset\sigma A,\quad A_i\cap A_j=\emptyset, i\neq j, i,j=1,2,\ldots$$

Знайти $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)$, якщо:

$$1)\mu(A_n)=\frac{1}{2n(2n+2)};\quad 2)\mu(A_n)=\frac{1}{(2n)!};\quad 3)\mu(A_n)=e^{-n}.$$

Розв'язання. 1) В усіх завданнях треба використати σ-адитивність міри μ.

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+2)}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{1}{4}.$$

2) Відомо, що $chx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $ch1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$. Тому

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}=ch1-1.$$

3) Аналогічно,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}=\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}=\frac{1}{e-1}.$$

Завдання 7. *Знайти міру Лебега:*

1) скінченної множини $A\subset\mathbf{R}$;

2) зліченної множини $A\subset\mathbf{R}$;

3) канторової множини;

4) множини ірраціональних чисел сегмента $[0;1]$.

Розв'язання. 1) Розглянемо скінченну множину $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Виберемо покриття елементів a_i множини A інтервалами $P_k = \left(a_k - \frac{\varepsilon}{2n};\right.$ $\left.a_k + \frac{\varepsilon}{2n}\right)$ міра яких рівна $\frac{\varepsilon}{n}$, де ε – довільне додатне число. Оскільки одноточкова множина $\{a\}$ є борелівською як зліченний перетин відкритих множин $(a-1/n, a+1/n)$, одержимо: $\lambda_1(A) = \mu_1^*(A) = \inf\limits_{A \subset \cup_{k=1}^{n} P_k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \inf\limits_{\varepsilon} \varepsilon = 0$.

2) Візьмемо зліченну множину $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ Кожний елемент a_i множини A помістимо в інтервал P_i з довжиною $\frac{\varepsilon}{2^i}$. Знайдемо

$$\lambda_1(A) = \mu_1^*(A) = \inf_{\varepsilon} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \inf_{\varepsilon} \varepsilon \frac{1/2}{1-1/2} = \inf_{\varepsilon} \varepsilon = 0.$$

3) Розглянемо відрізок $[0; 1]$ числової прямої $\mathbf{R}$. Позначимо $F_0 = [0, 1]$. Викинемо з нього інтервал $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Те, що залишиться позначимо через F_1: $F_1 = [0; 1] \setminus \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. З F_1 викинемо інтервали $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ і $\left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right)$. Множина, що залишається складається з чотирьох інтервалів. Позначимо її через F_2. З кожного із цих чотирьох інтервалів викинемо середні інтервали довжиною $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ і т.д. Продовжуючи цей процес, одержимо спадну послідовність $F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$ замкнених множин. Нехай $F = \cap_{k=1}^{\infty} F_k$. Одержана множина F називається канторовою. Знайдемо міру цієї множини: $\lambda_1(F) = \lambda_1([0; 1]) - \lambda_1(G)$. Через G позначили множину, що утворена об'єднанням викинутих інтервалів. Тоді

$$\lambda_1(G) = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \ldots = \frac{1/3}{1-2/3} = 1.$$

Остаточно $\lambda_1(F) = \lambda_1([0; 1]) - \lambda_1(G) = 1 - 1 = 0$. Отже канторова множина є множиною міри нуль.

4) Множину ірраціональних чисел сегмента $[0; 1]$ позначимо через U, а множину раціональних чисел сегмента $[0; 1]$ через $\mathbf{Q}_{[0,1]}$. Тоді

$$\lambda_1(U) = \lambda_1([0; 1]) - \lambda_1(\mathbf{Q}_{[0,1]}) = 1 - 0 = 1,$$

оскільки множина $\mathbf{Q}_{[0,1]}$ є зліченною і $\lambda_1(\mathbf{Q}_{[0,1]}) = 0$.

Завдання 8. *Нехай λ_1-міра Лебега на прямій. Довести, що задані множини A борелівські та знайти $\lambda_1(A)$, якщо:*

1)$A = (\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}) \cap [0; 1]$ 2)$A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 \in \mathbf{Q}\}$,   3)$A = [a; \infty), B = (a; b]$.

Відповідь обгрунтувати.

Розв'язання. 1) Множину A запишемо так:

$$A = (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \cap [0; 1] = (\mathbf{R} \cap [0; 1]) \setminus (\mathbf{Q} \cap [0; 1]) = [0; 1] \setminus \mathbf{Q}_{[0,1]}.$$

Множина $\mathbf{Q}_{[0;1]}$ є зліченною, тобто $\mathbf{Q}_{[0;1]} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Сегменти $[0; 1]$ і одноточкова множина є замкненими множинами, через це борелівськими, а множина $\mathbf{Q}_{[0;1]}$ теж борелівська як об'єднання зліченної кількості замкнених множин. Множина A борелівська, бо є різницею борелівських множин. Знайдемо міру Лебега множини A:

$$\lambda_1(A) = \lambda_1([0;1]) - \lambda_1(\mathbf{Q}_{[0;1]}) = 1 - 0 = 1,$$

оскільки міра зліченної множини $\mathbf{Q}_{[0;1]}$ дорівнює нулю.

2) Множина A зліченна. Справді, для кожного $y \in \mathbf{Q}$ рівняння $x^2 = y$ має не більше двох розв'язків. Залишається врахувати, що множина раціональних чисел $\mathbf{Q}$ зліченна. Тому A –борелівська і $\lambda_1(A) = 0$ (аналогічно доведенню проведеному в попередній задачі).

3) Множини A і B борелівські, оскільки їх можна записати у вигляді зліченного об'єднання замкнених множин і зліченного перетину відкритих множин:

$$A = \cup_{n=1}^{\infty}[a;n] \quad i \quad B = \cap_{n=1}^{\infty}(a;b+1/n).$$

За означенням міри необмеженої множини $\lambda_1(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_1([a;n]) = \lim\limits_{n\to\infty}(n-a) = \infty$, а міра λ_1 напіввінтервала $B = (a;b]$ дорівнює $b - a$.

Завдання 9. *Нехай $A \subset [a;b], a < b, A$-замкнена множина в $\mathbf{R}$ і $\lambda_1(A) = b - a$. Довести, що $A = [a;b]$.*

Розв'язання. Припустимо протилежне. Нехай $A \neq [a;b]$, тоді $[a;b] \setminus A$ – відкрита множина і $\lambda_1([a;b] \setminus A) = 0$. Міра відкритої множини не може дорівнювати нулю, бо вона містить хоча б одну внутрішню точку разом з деяким околом. Отже, наше припущення, що $A \neq [a;b]$ є хибним, тому множина $A = [a;b]$.

Завдання 10. *Довести, що множина A є борелівська і знайти $\lambda_1(A)$, якщо:*

$$1) A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\ln n; \ln(n+1)) \setminus Z; \qquad 2) A = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(n - \frac{1}{e^n}; n + \frac{1}{2^n}\right).$$

Розв'язання. Множина A дорівнює різниці множин, перша з них борелівська, бо дорівнює зліченному об'єднанню відкритих множин, а друга зліченна, тому борелівська. Для обчислення міри $\lambda_1(A)$ відмітимо, що множини $A_n = (\ln n; \ln(n+1))$ попарно не перетинаються. Через це, згідно зліченної адитивності міри Лебега і з врахуванням того, що міра зліченної множини $\mathbf{Z}$ рівна нулю, маємо

$$\lambda_1(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1((\ln n; \ln(n+1))) = \sum_{n=1}^{\infty}(\ln(n+1) - \ln n) = \infty.$$

2) Доведення того, що множина A борелівська, аналогічно доведенню проведеному в попередній задачі. Множини $A_n = \left(n - \frac{1}{e^n}; n + \frac{1}{2^n}\right)$ попар-

но не перетинаються. Використавши зліченну адитивність міри, одержимо

$$\lambda_1(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1\left(\left(n - \frac{1}{e^n}; n + \frac{1}{2^n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{e^n}\right) =$$

$$= \frac{1/2}{1-1/2} - \frac{1/e}{1-1/e} = 1 - \frac{1}{e-1} = \frac{e-2}{e-1}.$$

Завдання 11. *Нехай λ_2 – міра Лебега в $\mathbf{R}^2$. Довести, що:*

1) одноточкова множина $\{a\}, a \in \mathbf{R}^2$ борелівська і $\lambda_2(\{a\}) = 0$;

2) довільна зліченна підмножина $A \subset \mathbf{R}^2$ борелівська і $\lambda_2(A) = 0$;

3) $\forall \{a, b, c\} \subset \mathbf{R}, a < b$ множина $A = \{c\} \times (a; b]$ – борелівська і $\lambda_2(A) = 0$;

4) $\forall c \in \mathbf{R}$ множина $A = \{c\} \times \mathbf{R}$ – борелівська і $\lambda_2(A) = 0$.

Розв'язання. 1) Одноточкову множину $\{a\}, a \in \mathbf{R}^2$ можна записати так:

$$\{a\} = \{(c; d) \in R^2\} = \{(x; y) \in \mathbf{R}^2 : x \in [c; c], y \in [d; d]\} = [c; c] \times [d; d],$$

де $c \in \mathbf{R}^1, d \in \mathbf{R}^1$. Сегменти є замкненими множинами, і тому множина $\{a\}, a \in \mathbf{R}^2$-борелівська.

$$\lambda_2(\{a\}) = (c - c)(d - d) = 0.$$

2) Довільну зліченну підмножину $A \subset \mathbf{R}^2$ можна записати у вигляді об'єднання зліченної кількості множин

$$A_n = \{(x; y) \in \mathbf{R}^2 : x = a_n, y = b_n\} = \{(x; y) \in \mathbf{R}^2 : x \in [a_n; a_n], y \in [b_n; b_n]\},$$

де $a_n \in \mathbf{R}^1$, $b_n \in \mathbf{R}^1$.

Множини A_n замкнені, а значить борелівські. Множина $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ також борелівська, бо є зліченним об'єднанням замкнених множин. Згідно зліченної адитивності міри, одержимо:

$$\lambda_2(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_2(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_n)(b_n - b_n) = 0.$$

3) Множину A запишемо так: $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$, де

$$A_n = \left\{(x; y) \in \mathbf{R}^2 : c - \frac{1}{n} < x < c + \frac{1}{n}, a < y < b + \frac{1}{n}\right\},$$

причому $A_1 \supset A_2 \supset \ldots, \supset A_n \supset \ldots$

Множина A_n - відкрита, а значить борелівська. Множина A є перетином зліченної кількості відкритих множин, а тому теж борелівська. Використаємо неперервність міри знизу і знайдемо міру множини A:

$$\lambda_2(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda_2\left(\left(c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}\right) \times \left(a, b + \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(b + \frac{1}{n} - a\right) = 0.$$

4) Множину A запишемо у вигляді об'єднання зліченної кількості замкнених множин:

$$A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n = \{(x; y) \in \mathbf{R}^2 : x \in [c; c], y \in [-n; n]\}.$$

Множини A_n замкнені і тому борелівські. Множина $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ також борелівська, оскільки є зліченним об'єднанням замкнених множин. За означенням міри необмеженої множини

$$\lambda_2(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda_2([c; c] \times [-n; n]) = \lim_{n\to\infty} (c - c)2n = 0.$$

Завдання 12. *Побудувати послідовність* $\{A_n, n \geq 1\}$ *борелівських множин на прямій (в прикладах 1,2) і на площині (в прикладі 3) таку, що:*

1)$\lambda_1(A_n) = \infty$, $A_n \supset A_{n+1}$, $n \geq 1$, $\lambda_1 \left(\cap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$;

2) $\lambda_1(A_n) = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = P$, P *– множина простих чисел;*

3) $\lambda_2(A_n) = 1$, $n \geq 1$, $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{R}^2$.

Розв'язання. 1) Виберемо $A_n = (n; \infty) \cup (0; 1)$, тоді $A_{n+1} = (n+1; \infty) \cup (0; 1)$ і $A_n \supset A_{n+1}$, $n \geq 1$, $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 1)$. Множини A_n борелівські, бо дорівнюють об'єднанню двох відкритих множин і міра Лебега $\lambda_1 \left(\cap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = (1 - 0) = 1$.

2) Нехай $A_n = \left(n; n + \frac{1}{n}\right) \cup P$, P-множина простих чисел. Множина простих чисел P еквівалентна множині натуральних чисел (множину простих чисел можна записати у вигляді послідовності і кожному елементу послідовності поставити у відповідність номер, який відповідає цьому елементу в даній послідовності). Отже, ця множина є зліченною і міра Лебега множини P дорівнює нулю. Множина A_n борелівська, як об'єднання двох борелівських множин. Оскільки $\lambda_1(P) = 0$, то міра Лебега множини A_n дорівнює:

$$\lambda_1(A_n) = \lambda_1\left(\left(n; n + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}.$$

3) Виберемо

$$A_1 = [-1/2; 1/2] \times [-1/2, 1/2], \quad \lambda_2(A_1) = 1,$$

$$A_2 = \left([-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2] \times [-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2]\right) \setminus A_1, \quad \lambda_2(A_2) = 1,$$

$$A_3 = \left([-\sqrt{3}/2; \sqrt{3}/2] \times [-\sqrt{3}/2; \sqrt{3}/2]\right) \setminus A_2, \quad \lambda_2(A_3) = 1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_n = \left([-\sqrt{n}/2; \sqrt{n}/2] \times [-\sqrt{n}/2; \sqrt{n}/2]\right) \setminus A_{n-1}, \quad \lambda_2(A_n) = 1.$$

Якщо взяти зліченне об'єднання множин A_n, то одержимо простір $\mathbf{R}^2$. Множини A_n борелівські, бо дорівнюють різниці борелівських множин.

Завдання 13. *Довести, що множина* $A \subset \mathbf{R}^2$ *вимірна і знайти* $\lambda_2(A)$, *якщо:*

$$1)A = (0;2]\times[1;2); \qquad 2)A = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-a;a], 0 \le y \le \frac{1}{a^2+x^2}\right\}.$$

Розв'язання. 1) Подамо A у вигляді $A = \cap_{n=1}^{\infty}(0;2+1/n)\times(1-1/n;2)$ і одержимо, що A-борелівська, і, отже, вимірна. Крім того, A-прямокутник, тому $\lambda_2(A) = 2$.

2) Множина A є вимірною за Жорданом, оскільки її межа складається з неперервних ліній. Тому A вимірна за Лебегом і $\lambda_2(A)$ дорівнює жордановій мірі множини A. Нагадаємо, що міра Жордана підграфіка функції обчислюється за допомогою інтеграла Рімана. Отож,

$$\lambda_2(A) = \int_{-a}^{a} \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}\bigg|_{-a}^{a} = \frac{\pi}{2a}.$$

Завдання 14. *Нехай* $H = \{(\alpha;\beta] : (\alpha;\beta] \subset (a_0;b_0]\} \cup \emptyset$ *і* $m : H \to [0;+\infty)$ *міра на* H *така, що* $m((\alpha;\beta]) = \beta - \alpha$ *і* $m(\emptyset) = 0$. *Позначимо через* m^* *зовнішню міру, породжену мірою* m. *Знайти:*

$$1)m^*(\{a\}); \quad 2)m^*(A), \quad \text{де} \quad A = \{a_1, a_2, \ldots\} \quad (a, a_1, a_2, \ldots \in (a_0;b_0]).$$

Розв'язання. 1) За означенням зовнішньої міри m^* маємо:

$$m^*(\{a\}) = \inf\left\{\sum_k m((\alpha_k;\beta_k]) : \cup_k(\alpha_k;\beta_k] \supset \{a\}\right\}.$$

Оскільки одноточкову множину можна покрити проміжком $(\alpha;\beta]$ як завгодно малої довжини, то $m^*(\{a\}) = 0$.

2) Множина A є зліченним об'єднанням одноточкових множин: $A = \cup_n\{a_n\}$. Із зліченної напівадитивності зовнішньої міри m^* одержимо:

$$m^*(A) \le \sum_n m^*(\{a_n\}) = 0.$$

Але m^* приймає лише невід'ємні значення, тому $m^*(A) = 0$.

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *Для множини* $A \subset X$ *покладемо:* $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x \in A; \\ 0, & \text{якщо} \quad x \overline{\in} A. \end{cases}$

Нехай $\{x_1, x_2\} \in X$. *Чи буде* μ *мірою на* 2^X *якщо* $\forall E \subset X$:

1. $\mu(E) = |\chi_E(x_1) - \chi_E(x_2)|$;
2. $\mu(E) = (\chi_E(x_1) + \chi_E(x_2))^2$;

3. $\mu(E) = 2 - \chi_E(x_1) - \chi_E(x_2)$; $E \neq \emptyset$, $\mu(\emptyset) = 0$;
4. $\mu(E) = 2\chi_E(x_1) + 3\chi_E(x_2)$;
5. $\mu(E) = 1 - \chi_E(x_1)$, $E \neq \emptyset$, $\mu(\emptyset) = 0$.

   Нехай μ - міра на σ-алгебрі σA,

   $$\{A_n, n \geq 1\} \subset \sigma A, A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

   Знайти $\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$, якщо:

6. $\mu(A_n) = \frac{1}{n(n+1)}$;
7. $\mu(A_n) = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;
8. $\mu(A_n) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$;
9. $\mu(A_n) = \frac{1}{(2n-1)!}$;
10. $\mu(A_n) = \frac{2^n}{n!}$.

Завдання 2. *Нехай λ_1 – міра Лебега на прямій. Довести, що множина A – борелівська і знайти $\lambda_1(A)$, якщо:*

1. $A = \cup_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2^n}; n + \frac{1}{2^n}\right)$;
2. $A = \cup_{n=1}^{\infty} [n^2 - \frac{\pi}{3^{n+5}}; n^2 + \frac{\pi}{3^{n+5}}]$;
3. $A = \cup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2}; \frac{1}{n^2}\right)$;
4. $A = \cup_{n=1}^{\infty} \left(n^n; n^n + \frac{1}{\ln(n+1)}\right) \cap \mathbf{Q}$;
5. $A = \cup_{n=1}^{\infty} \left[3^n; 3^n + \frac{1}{3^n}\right] \setminus \mathbf{Q}$;
6. $A = \cup_{n=1}^{\infty} (-10; \operatorname{arctg} n) \setminus \mathbf{Q}$;
7. $A = \cup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+2)}; \frac{1}{\ln(n+1)}\right)$;
8. $A = \cup_{n=1}^{\infty} \left[n^3 - \frac{1}{5^n}; n^3 + \frac{1}{5^n}\right] \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$;
9. $A = \cup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+3}; \frac{1}{n+4}\right) \setminus \mathbf{Z}$;
10. $A = \cup_{n=1}^{\infty} \left(n!; n! + \frac{1}{n^2}\right) \cap \mathbf{Q}$.

Завдання 3. *Нехай $A \subset \mathbf{R}^2$. Довести, що A – борелівська множина і знайти $\lambda_2(A)$, якщо:*

1. $A = (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \times (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$;

2. $A = \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$;

3. $A = \{x : \sin x \in \mathbf{Q}\} \times \mathbf{R}$;

4. $A = \{x : e^x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\} \times [0;1]$;

5. $A = (0;3] \times [1;2) \setminus (\mathbf{Q} \times \mathbf{Q})$;

6. $A = (a;b] \times (c;\infty), a < b$;

7. $A = ((0;3] \times [1;2]) \setminus (\mathbf{Q} \times \mathbf{Q})$;

8. $A = \{x : \cos x \in \mathbf{Q}\} \times \mathbf{R}$;

9. $A = \{x : e^x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\} \times [0;1]$;

10. $A = \{x : \operatorname{ctg} x \in \mathbf{Q}\} \times (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$.

Завдання 4. *Побудувати послідовність* $\{A_n, n \geq 1\}$ *борелівських множин на прямій (в прикладах 1,2,3,4,5) і на площині (в прикладах 6,7,8,9,10) таку, що*

1. $\lambda_1(A_n) = 1, \quad n \geq 1, \quad \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{R}$;

2. $\lambda_1(A_n) = +\infty, \quad A_n \supset A_{n+1}, \quad n \geq 1, \quad \lambda_1\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$;

3. $\lambda_1(A_n) = +\infty, \quad n \geq 1, \quad \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{N}$;

4. $\lambda_1(A_n) = +\infty, \quad A_n \supset A_{n+1}, \quad n \geq 1, \quad \lambda_1\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 3$;

5. $\lambda_1(A_n) = 2, \quad n \geq 1, \quad \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{R}$;

6. $\lambda_2(A_n) = \pi, \quad n \geq 1, \quad \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{R}^2$;

7. $\lambda_2(A_n) = \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1, \quad \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{Q} \times \mathbf{Z}$;

8. $\lambda_2(A_n) = \infty, \quad A_n \supset A_{n+1}, \quad n \geq 1, \quad \lambda_2(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$;

9. $\lambda_2(A_n) = \frac{1}{2^n}, \quad n \geq 1, \quad \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{R} \times \{0\}$;

10. $\lambda_2(A_n) = \frac{1}{2^n}, \quad n \geq 1, \quad \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Завдання 5.

1. *Довести, що будь-яка вимірна множина* $E \in \mathbf{R}$, *яка має додатну лінійну міру* p, *містить вимірну підмножину міри* q, *де* q *– довільне задане додатне число:* $0 < q < p$.

2. *Довести, що будь-яка вимірна множина E на прямій (не обов'язково обмежена), така, що $\mu(E) = p > 0$, містить вимірну підмножину міри q, де q – довільне задане додатне число: $0 < q < p$.*

3. *Нехай $A \subset \mathbf{R}$ – вимірна за Лебегом множина, A містить хоча б одну внутрішню точку. Довести, що $\lambda_1(A) > 0$.*

4. *Чи можна побудувати на $[a;b]$ замкнену множину лінійної міри $b-a$, відмінну від відрізка $[a;b]$?*

5. *Чи може перетин вимірних множин $\cap_{n=1}^{\infty} E_n$, де $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$ і $\mu(E_n) = +\infty$, $n \geq 1$, мати нескінченну міру? Чи може цей перетин мати скінченну міру або міру нуль?*

6. *Чи може сума $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$, де $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$ мати скінченну міру або нескінченну міру, якщо міра кожної E_n скінченна?*

7. *Чи може вимірна необмежена множина на прямій мати скінченну додатну міру?*

8. *Довести, що якщо E – вимірна множина на прямій додатної міри, то в ній знайдуться точки, віддаль між якими ірраціональна.*

9. *Нехай $X = \mathbf{N}$ – множина натуральних чисел, а $\mathcal{P}$ – сукупність всіх скінченних підмножин (включаючи й порожню множину $\emptyset$) множини X. Для кожної множини $A \in \mathcal{P}$ визначимо число $\mu_0(A)$, що дорівнює кількості елементів множини A. Побудувати лебегове продовження міри μ_0.*

10. *Нехай на відрізку $X = [0;1]$ задана невід'ємна функція $f(x)$. Для кожної скінченної множини $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ точок відрізка $[0;1]$ покладемо $\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$. Довести, що функція множин μ є зліченно-адитивною, але не є σ-скінченною мірою.*

3 Вимірні функції

Перелік необхідних питань теорії

1. Вимірні функції та їх властивості.

2. Еквівалентні функції.

3. Послідовності вимірних функцій.

4. Різні види збіжності послідовності вимірних функцій та зв'язок між ними.

5. Теорема Єгорова.

Теоретичні відомості

Нехай X і Y – дві довільні множини і нехай на них виділені дві системи підмножин Φ_X та Φ_Y відповідно. Абстрактна функція $y = f(x)$ з областю визначення X та множиною значень Y називається (Φ_X, Φ_Y)-вимірною, якщо із того, що $A \subset \Phi_Y$ слідує, що $f^{-1}(A) \in \Phi_X$. Якщо за Φ_X та Φ_Y вибрати систему всіх борелівських множин, то отримаємо так звані *вимірні за Борелем* функції.

Розглянемо поняття вимірності для числових функцій, визначених на деякій множині X.

Нехай X – множина на якій задана σ-адитивна міра μ, визначена на σ-алгебрі Φ_μ. Дійсна функція $f(x)$ на X називається *μ-вимірною*, якщо для довільної борелівської множини A числової прямої

$$f^{-1}(A) \in \Phi_\mu.$$

Часто замість μ-вимірності використовують термін *вимірна.*

Числова функція $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ задана на прямій називається *борелівською*, якщо прообраз $f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in A\}$ кожної борелівської множини A є борелівською множиною.

Теорема (*необхідна і достатня умова вимірності*). Для того, щоб дійсна функція $f(x)$ була вимірною, необхідно і досить, щоб для довільного дійсного c множина $\{x : f(x) < c\}$ була вимірною.

Останню теорему часто приймають за визначення вимірності.

Властивості вимірних функцій.

1. Сума, різниця і добуток двох вимірних функцій є функціями вимірними.

2. Частка двох вимірних функцій (за умови, що знаменник не перетворюється в нуль) є функція вимірна.

3. Суперпозиція двох вимірних функцій є функція вимірна.

4. Границя збіжної при кожному $x \in X$ послідовності вимірних фукнцій – вимірна функція.

   Дві функції f та g, визначені на одній і тій же вимірній множині E називаються *еквівалентними* (позначення $f \sim g$), якщо
$$\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

5. Функція $f(x)$, визначена на деякій вимірній множині E і еквівалентна на ній деякій вимірній функції $g(x)$, також вимірна.

Кажуть, що деяка властивість виконується *майже скрізь* на E, якщо вона виконується на E скрізь, крім, можливо, точок, що утворюють множину міри нуль.

Послідовність функцій $\{f_n(x)\}$, визначених на деякому просторі X з заданою на ньому мірою називається *збіжною майже скрізь* до функції $f(x)$, якщо
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \tag{3.1}$$
для майже всіх $x \in X$(тобто множина тих точок x, в яких умова (3.1) не виконується має міру нуль).

Кажуть, що послідовність вимірних функцій $f_n(x)$ *збігаєтьсся за мірою* до функції $f(x)$, якщо для довільного $\sigma > 0$
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\} = 0.$$

Теорема Єгорова. Нехай E – множина скінченої міри і послідовність вимірних функцій $f_n(x)$ збігається на E майже скрізь до $f(x)$. Тоді для довільного $\delta > 0$ існує така вимірна множина $E_\delta \subset E$, що

1) $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$;

2)на множині E_δ послідовність $f_n(x)$ збігається до $f(x)$ рівномірно.

Приклади розв'язання типових задач

Завдання 1. *Довести еквівалентність таких тверджень:*

1. f *– вимірна функція;*

2. *для будь-якої відкритої множини* $G \subset \mathbf{R}$ *множина* $f^{-1}(G)$ *є вимірною;*

3. $(\forall c \in \mathbf{R})$ $f^{-1}((-\infty; c))$ *– вимірна множина;*

4. $(\forall c \in \mathbf{R})$ $f^{-1}((-\infty; c])$ *– вимірна множина;*

5. $(\forall c \in \mathbf{R})$ $f^{-1}((c;+\infty))$ – *вимірна множина;*

6. $(\forall c \in \mathbf{R})$ $f^{-1}([c;+\infty))$ – *вимірна множина.*

Розв'язання. Доведемо, що з 1 випливає 2. Відкрита множина $G \subset \mathbf{R}$ є борелівською, а оскільки функція f – вимірна, то множина $f^{-1}(G)$ за означенням вимірної функції є вимірною.

З твердження 2 випливають твердження 3 і 5. За відкриту множину $G \subset \mathbf{R}$ візьмемо інтервал $(-\infty; c)$ у твердженні 3 і інтервал $(c;+\infty)$ в твердженні 5 і одержимо, що множини $f^{-1}((-\infty;c))$ і $f^{-1}((c;+\infty))$ вимірні.

З твердження 3 випливають твердження 4 і 6. Множини $f^{-1}((-\infty;c])$ і $f^{-1}([c;+\infty))$ вимірні, це випливає з таких співвідношень:

$$f^{-1}((-\infty;c]) = f^{-1}(\mathbf{R}) - f^{-1}((c;+\infty)),$$
$$f^{-1}([c;+\infty)) = f^{-1}(\mathbf{R}) - f^{-1}((-\infty;c)).$$

Навпаки. Розглянемо один випадок. Доведемо, що з вимірності множини $f^{-1}((-\infty;c))$ $\forall c \in \mathbf{R}$ випливає вимірність функції f. За означенням $f^{-1}((-\infty;c)) = \{x \in X : -\infty < f(x) < c\}$. Якщо ця множина вимірна, тоді за теоремою про необхідну й достатню умову вимірності функція f вимірна.

Аналогічно розглядаються інші випадки.

Завдання 2. *Нехай X – деякий вимірний простір. $A \subset X$. Довести, що характеристична функція(індикатор) множини A* $\chi_A(x) = \begin{cases} 0, x \notin A; \\ 1, x \in A, \end{cases}$ *вимірна тоді і тільки тоді, коли множина A вимірна.*

Розв'язання. Використаємо теорему про необхідну і достатню умову вимірності функції і розглянемо множину $\{x \in X : \chi_A(x) < c\}$, де

$$\{x \in X : \chi_A(x) < c\} = \begin{cases} \emptyset, & c \le 0; \\ X \setminus A, & 0 < c \le 1; \\ X, & c > 1. \end{cases}$$

За умовою множини X і $\emptyset$ вимірні, тоді індикатор множини A буде вимірною функцією, якщо вимірною множиною буде $X \setminus A$. Очевидно, $X \setminus A$ буде вимірною тоді, коли вимірною є множина A. Навпаки, якщо множина A вимірна, то індикатор множини A також вимірна функція, бо множина $\{x \in X : \chi_A(x) < c\}$ може співпадати з однією із трьох вимірних множин X, $X \setminus A$ і $\emptyset$.

Завдання 3. *Довести, що вимірними є такі функції:*

$$1) f(x) \in C_{[0;1]}; \qquad 2) f(x) \in C(\mathbf{R}).$$

Розв'язання. 1) Для доведення вимірності функції f на $X = [0; 1]$ розглянемо множину $B = \{x \in X : f(x) \le c\}$, де $c \in \mathbf{R}$. Доведемо, що вона замкнена в $\mathbf{R}$. Нехай точка x_0 є граничною для множини B, тобто $x_0 \in B'$. Тоді існує послідовність $\{x_n, n \in \mathbf{N}\}$ точок множини B, яка збігається при $n \to \infty$ до x_0. Через це $x_n \in [0; 1]$ і $f(x_n) \le c$. Множина X замкнена, а функція f неперервна на X, тоді одержимо, що $x_0 \in X$ і $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \le c$, тобто $x_0 \in B$. Отже, множина B замкнена і через це вимірна, бо є борелівською. Маємо, що неперервна функція, яка визначена на замкненій множині $[0; 1]$, є вимірна за Лебегом.

2) Нехай $X = \mathbf{R}$. Множину $\mathbf{R}$ зобразимо у вигляді зліченного об'єднання замкнених множин: $\mathbf{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n; n]$. Неперервна функція f вимірна на замкнених множинах $[-n; n]$ (доведення аналогічне попередньому пункту). Для доведення вимірності функції на $\mathbf{R}$ розглянемо таку рівність:

$$\{x \in \mathbf{R} : f(x) \le c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in [-n; n] : f(x) \le c\}.$$

Оскільки всі множини $\{x \in [-n; n] : f(x) \le c\}$ вимірні, то такою є і множина $\{x \in \mathbf{R} : f(x) \le c\}$.

Завдання 4. *Застосовуючи теорему про вимірність суперпозиції вимірних функцій, довести, що такі функції є вимірними:*

$$1) sin[x], x \in \mathbf{R}; \qquad 2) sign \cos x^2, x \in \mathbf{R}.$$

Розв'язання. 1)Функція $f : x \to \sin[x]$ приймає зліченну кількість значень $\sin k$, $k \in \mathbf{Z}$. Тобто, $f(x) = \sin k$, якщо x належить проміжку $A_k = [k; k + 1)$ і $\bigcup_{k\in Z} [k; k + 1) = \mathbf{R}$. Оскільки проміжки A_k є μ_1-вимірними ($\mu_1(A_k) = 1$), то функція f також μ_1-вимірна на $\mathbf{R}$. Задачу можна розвязати, користуючись властивостями вимірних функцій: $\sin x$, $x \in \mathbf{R}$ – неперервна, а функція $[x]$, $x \in \mathbf{R}$ – проста, а тому вони вимірні. Функція $\sin[x]$, $x \in \mathbf{R}$ – вимірна, бо є суперпозицією вимірних функцій.

2) Задана функція $sign \cos x^2$ приймає лише три значення 1, -1 і 0, бо такі значення приймає функція $signx$ (тобто функція $sign \cos x^2$ є простою). Знайдемо значення функції:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 2\pi k - \pi/2 < x^2 < \pi/2 + 2\pi k, k \in Z; \\ -1, & \pi/2 + 2\pi k < x^2 < 3\pi/2 + 2\pi k, k \in Z; \\ 0, & x^2 = \pi(2k + 1)/2, k \in Z. \end{cases}$$

Отже, функція f є вимірна.

(Або: $signx$-проста, $\cos x^2$-неперервна $\Rightarrow$ вимірні. Отже, $f(x) = sign \cos x^2$

вимірна як суперпозиція вимірних функцій.)

Завдання 5. *Нехай* X *– вимірний простір,* $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$, $g : X \longrightarrow \mathbf{R}$ *і функції* f *і* g *вимірні. Довести, що множини*

$$\{x \in X : f(x) \le g(x)\}, \quad \{x \in X : f(x) > g(x)\}, \quad \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

вимірні.

Розв'язання. Задані множини запишемо у вигляді об'єднання, перетину і різниці вимірних множин:

$$\{x \in X : f(x) > g(x)\} = \cup_{k=1}^{\infty} \left(\{x : f(x) > r_k\} \cap \{x : g(x) < r_k\}\right),$$

де сума береться по всім раціональним числам, які перенумеровані в довільному порядку.

$$\{x \in X : f(x) \le g(x)\} = X \setminus \{x \in X : f(x) > g(x)\},$$

$$\{x \in X : f(x) = g(x)\} = \{x \in X : f(x) \le g(x)\} \setminus \{x \in X : f(x) < g(x)\}.$$

Отже, множини $\{x \in X : f(x) \le g(x)\}$, $\{x \in X : f(x) > g(x)\}$ і $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ вимірні.

Завдання 6. *Нехай* $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *і* $\forall x \in \mathbf{R}\ \exists f'(x)$. *Довести, що функція* f' *– вимірна.*

Розв'язання. За означенням похідної: $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n(f(x+1/n) - f(x))$ для кожної точки $x \in \mathbf{R}$. Послідовність $n(f(x+1/n) - f(x))$ є вимірною, бо дорівнює різниці і добутку вимірних функцій. За властивістю 4 вимірних функцій, границя послідовності вимірних функцій – вимірна. Отже, f' – вимірна.

Завдання 7. *Довести, що функція* $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ *вимірна, якщо*

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\ln(1 + [x^2 + y^2]).$$

Розв'язання. Функція $\ln(1 + u)$ неперервна для всякого $u \in [0, \infty)$, а $[u]$ є простою функцією, яка приймає цілі невідємні значення $k \in \mathbf{Z}$ на μ_2-вимірних множинах:

$$\left\{(x, y) : n - 1 \le x^2 + y^2 < n, n \in \mathbf{N}\right\}.$$

Тому функція $\ln(1 + u)$ є вимірною. Отже функція $f(x, y)$ вимірна, бо є суперпозицією вимірних функцій.

Завдання 8. *Нехай* X *– вимірний простір,* $f_i : X \longrightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$ *– вимірні функції. Довести вимірність таких функцій:*

$$1) f_1(\ln(2 + |f_2|)); \qquad 2) \frac{(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)}{10 + arctg|f_1|}.$$

Розв'язання. 1) Доведемо твердження: якщо функція f вимірна, то функція $|f|$ також вимірна. Для цього розглянемо множину $\{x \in X : |f| < c\}$ і зобразимо її у вигляді різниці вимірних множин:

$$\{x \in X : |f| < c\} = \{x \in X : f < c\} \setminus \{x \in X : f \leq -c\} = A \setminus B.$$

Оскільки функція f вимірна, то множини A і B вимірні. Тобто функція $|f|$ вимірна.

Маємо такі функції: $f_1(u)$, $u = \ln(2+t)$, $t = |f_2|$. Кожна з цих функцій вимірна, бо такими є f_1 і f_2, а $\ln(2+t)$ є неперервна, отже і вимірна.

2) В чисельнику сума вимірних функцій, в знаменнику сума сталої функції, яка є вимірною, і суперпозиції неперервної функції $arctgx$ і вимірної функції $|f_1|$ (див. задачу 1)). Отже, функція

$$\frac{(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)}{10 + arctg|f_1|}$$

вимірна.

Завдання 9. *Довести вимірність функції $f : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}$, якщо*

$$1) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[x]^4}{n\sqrt{n}}, m = 1; \quad 2) f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} arctg(n([x]+y)), m = 2.$$

Розв'язання. 1) Розглянемо послідовність вимірних функцій $S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{\sin[x]^4}{n\sqrt{n}}$. Їх вимірність випливає з вимірності простої функції $[x]^4$ неперервної функції $\sin u$ і сталої $1/n\sqrt{n}$. Якщо існує границя $S_k(x)$ при $k \to \infty$, то $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} S_k(x)$ і за властивістю 4 вимірних функцій $f(x)$ – вимірна. Оцінка $\frac{|\sin[x]^4|}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$ забезпечує рівномірну збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[x]^4}{n\sqrt{n}}$ до $f(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ (випливає з ознаки Вейєрштрасса та збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$). Отже, функція $f(x)$ вимірна.

2) Проведемо аналогічні випадку 1) міркування. Якщо доведемо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} arctg(n([x]+y))$ членами якого є вимірні функції ($[x]$-проста, $arctgx$ - неперервна) збіжний, тоді сума такого ряду є вимірна функція. Це випливатиме з оцінки

$$e^{-n}|arctg(n([x]+y))| \leq \frac{\pi}{2} e^{-n}$$

та із того, що мажорантний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} e^{-n}$ є сумою нескінченно спадної геометричної прогресії і має суму, що дорівнює $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} e^{-n} = \frac{\pi}{2(e-1)}$.

Завдання 10. *Нехай A – невимірна (за Лебегом) підмножина відрізка $[0;1] \subset \mathbf{R}$ і на $\mathbf{R}$ визначена функція*

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in A; \\ -x, & x \overline{\in} A. \end{cases}$$

Довести, що: 1) $f(x)$ невимірна; 2) $\{x \in \mathbf{R} : f(x) = c\}$ є μ-вимірною *множиною для будь-якого* $c \in \mathbf{R}$.

Розв'язання. 1) Розглянемо лебегову множину $E = \{x \in \mathbf{R} : f(x) < 0\}$. Якщо $x < 0$, то $x\overline{\in}A$ ($A \subset [0;1]$) і $f(x) = -x > 0$, тобто $(-\infty; 0)$ не є підмножиною множини E. Якщо $x > 0$ і $x\overline{\in}A$ то $f(x) = -x < 0$, тобто такі x входять в E. Якщо $x > 0$ і $x \in A$, то $f(x) = x > 0$, тобто ці x до E не належать. Отже,

$$E = \{x \in \mathbf{R} : f(x) < 0\} = ((0;1] \setminus A) \cup (1; +\infty).$$

Оскільки A – невимірна множина, то і $(0;1] \setminus A$ теж невимірна (в протилежному випадку A, як різниця $(0;1] \setminus ((0;1] \setminus A)$ двох вимірних множин, теж була б вимірною), тому й об'єднання $((0;1] \setminus A) \cup (1; +\infty)$ теж невимірна множина. Оскільки лебегова множина $\{x \in \mathbf{R} : f(x) < 0\}$ невимірна, то і $f(x)$ невимірна на $\mathbf{R}$.

2) Для даної функції $f(x)$ множина $E_c = \{x \in \mathbf{R} : f(x) = c\}$ є або порожньою, або одноточковою, або двоточковою. Тому ця множина є вимірною ($\mu(E_c) = 0$) для будь-якого $c \in \mathbf{R}$.

Цей приклад свідчить про те, що вимога $\forall c \in \mathbf{R}$ $\{x \in \mathbf{R} : f(x) = c\}$ – вимірна за Лебегом не є достатньою для вимірності функції.

Завдання 11. *Для функції* $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$, *побудувати послідовність простих вимірних функцій, яка рівномірно збігається до* f.

Розв'язання. Нехай $f_n(x) = \frac{k}{n}$, якщо $x \in A_k$, де

$$A_k = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{k}{n} \le x^3 < \frac{k+1}{n}\right\}, n \in \mathbf{N},\ |k| \le n.$$

Отже, $f_n(x)$ є простою.

Оскільки $f(x) = x^3$ вимірна, то всі A_k є μ-вимірними множинами, а тому $f_n(x)$ є вимірною функцією. Крім того $\forall x \in \mathbf{R}$ $|f(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{n}$, звідки й випливає рівномірна збіжність послідовності $f_n(x)$ до $f(x)$ на $\mathbf{R}$.

Завдання 12. *Довести, що* $f(x) = max\{f_1(x), f_2(x)\}$ *є вимірною на* $\mathbf{R}$, *якщо* f_1, f_2*-вимірні на* $\mathbf{R}$.

Розв'язання. Нехай $c \in \mathbf{R}$. Розглянемо лебегову множину $E = \{x \in \mathbf{R} : f(x) < c\} = \{x \in \mathbf{R} : f_1(x) < c\} \cap \{x \in \mathbf{R} : f_2(x) < c\}$. З вимірності функцій f_1, f_2 випливає, що множини $\{x \in \mathbf{R} : f_1(x) < c\}$ і $\{x \in \mathbf{R} : f_2(x) < c\}$ є μ-вимірними, тому і їхній перетин теж є μ-вимірним. Отже, множина E є μ-вимірною для всіх $c \in \mathbf{R}$ що й означає вимірність функції f.

Завдання 13. *Визначити таку неперервну на* $\mathbf{R}$ *функцію* g*, щоб* $g(x) = f(x)$ *майже скрізь відносно міри Лебега* μ_1*, якщо:*

$$1) f(x) = \begin{cases} arcsin 2^{-|x|}, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}; \\ 2^{|x|}, & x \in \mathbf{N}; \end{cases} \qquad 2) f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbf{Q}; \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Розв'язання.

1) Оскільки міра множини натуральних чисел дорівнює нулю, то $f(x) = g(x) = arcsin 2^{-|x|}$ майже скрізь відносно міри Лебега μ_1, бо

$$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = \mu(\mathbb{N}) = 0.$$

2) Аналогічно, $f(x) = g(x) = 0$, майже скрізь відносно міри Лебега μ_1, через те, що $\mu_1(\mathbf{Q}) = 0$.

Завдання 14. *Нехай* $f_n(x)$ *– послідовність функцій, які задані на* $\mathbf{R}$*. Визначити таку неперервну на* $\mathbf{R}$ *функцію* g*, щоб* $f_n(x) \to g(x)$*,* $n \to \infty$ *майже скрізь відносно міри Лебега* μ_1 *на* $\mathbf{R}$*, якщо:*

$$1) f_n(x) = \frac{n^2 \sin^2 x}{1 + n^2 \sin^2 x}, x \in \mathbf{R}, \qquad 2) f_n(x) = e^{-n|x^2-1|}, x \in \mathbf{R}.$$

Розв'язання. 1) Знайдемо границю послідовності:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \sin^2 x \neq 0; \\ 0, & \sin^2 x = 0; \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \neq \pi n; \\ 0, & x = \pi n. \end{cases}$$

Оскільки множина $\{\pi n, n \in \mathbf{N}\}$ є зліченною, міра її рівна нулю, тому

$$\mu(\{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\}) = 0.$$

Отже, $f_n \to 1$ м.с. при $n \to \infty$, тобто $g(x) = 1$.

2) Границя послідовності $f_n(x)$ приймає два значення в залежності від того дорівнює чи не дорівнює нулю показник степеня, тобто:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x^2 - 1 \neq 0; \\ 1, & x^2 - 1 = 0; \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \neq \pm 1; \\ 1, & x = \pm 1. \end{cases}$$

Міра скінченної множини $\{\pm 1\}$ дорівнює нулю, тому $f_n \to 0$ м.с. при $n \to \infty$, тобто $g(x) = 0$.

Завдання 15. *Дослідити на збіжність відносно міри Лебега* λ_1 *до функції* f *на вимірній множині* A *такі послідовності функцій:*

$$1) f_n(x) = x^n, n \in \mathbf{N}, A = [0; 1]; \qquad 2) f_n(x) = \cos^n x, n \in \mathbf{N}, A = \mathbf{R}.$$

Розв'язання. 1) Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1); \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

то $f_n \to 0$ м.с. при $n \to \infty$. Оскільки множина A, на якій визначена послідовність $f_n(x)$ має міру, рівну одиниці, то за теоремою Лебега, із збіжності майже скрізь випливає збіжність за мірою λ_1.

2) Розглянемо для довільного додатного $\sigma \geq 1$ λ_1-вимірну множину
$$\{x \in \mathbf{R} : |\cos x|^n \geq \sigma\} = \cup_{k=-\infty}^{+\infty}[-arccos\sqrt[n]{\sigma} + \pi k; arccos\sqrt[n]{\sigma} + \pi k].$$
Оскільки при $x \neq k\pi$ $|\cos x| < 1$, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} |\cos x|^n = 0$ для $x \neq k\pi$.

Отже, для цього σ і довільного натурального n
$$\lambda_1\{x \in R : |\cos x|^n \geq \sigma\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2arccos\sqrt[n]{\sigma} = +\infty.$$
Через це $\forall\sigma > 0$ співвідношення $\lambda_1\{x \in \mathbf{R} : |\cos x|^n \geq \sigma\} = 0$ не виконується. Тобто, задана послідовність не збігається за мірою λ_1 до функції $f(x) = 0$ на множині $\mathbf{R}$.

Завдання 16. *Довести, що при* $n \to \infty$ $f_n(x) = \sin^n(x) \to 0$ *майже скрізь стосовно міри Лебега* λ_1 *на* $\mathbf{R}$.

Розв'язання. Зауважимо, що в тих точках $x \in \mathbf{R}$, в яких $|\sin x| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^n x = 0$. Якщо ж $x \in \mathbf{R}$ таке, що $|\sin x| = 1$ то границя послідовності функцій $\sin^n x$ або дорівнює 1, або не існує. Розглянемо множину $A = \{x \in \mathbf{R} : |\sin x| = 1\} = \{\pi/2 + \pi n, n \in \mathbf{Z}\}$. Вона зліченна і тому $\lambda_1(A) = 0$. Отже, послідовність $\sin^n x$ збігається до 0 майже скрізь на $\mathbf{R}$.

Завдання 17. *Для послідовності* $f_n(x) = x^n$, $x \in [0; 1] = D$ *проілюструвати теорему Єгорова.*

Розв'язання. Для $x \in [0; 1)$ $\lim x^n = 0$, а для $x = 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 1$. Оскільки $\mu(\{1\}) = 0$, то $f_n(x) = x^n \to 0$ майже скрізь на $[0; 1]$.

Задамо довільне число $\delta > 0$. Якщо $\delta \geq 1$, тоді за D_δ візьмемо, наприклад, $[0, 1/2]$. Тоді $\mu([0, 1/2]) = 1/2 > \mu(D) - \delta = 1 - \delta$ і $\lim\sup\{|x^n| : 0 \leq x \leq 1/2\} = \lim(1/2)^n = 0$, тобто послідовність x^n збігається до 0 рівномірно на $[0, 1/2]$. Нехай тепер $\delta < 1$. Приймемо $D_\delta = [0; 1 - \delta/2]$. Тоді $\mu([0, 1 - \delta/2]) = 1 - \delta/2 > \mu(D) - \delta = 1 - \delta$ і
$$\lim_{n\to\infty} \sup\left\{|x^n| : 0 \leq x \leq 1 - \frac{\delta}{2}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^n = 0,$$
тобто послідовність x^n рівномірно на D_δ збігається до 0.

Завдання 18. *Дослідити збіжність за мірою Лебега до функції* f *на вимірній множині* A *послідовності функцій:* $f_n(x) = \chi_{(\sqrt{n};\sqrt{n+1})}(x)$, $A = \mathbf{R}$, $f(x) = 0$.

Розв'язання. Нехай $\sigma > 0$. Розглянемо вимірну множину $A_\sigma = \{x : \chi_{(\sqrt{n};\sqrt{n+1})}(x) \geq \sigma\}$. Якщо $\sigma > 1$, то $A_\sigma = \emptyset$. Для $\sigma \leq 1$ знайдемо міру Лебега множини A_σ:
$$\lambda_1(A_\sigma) = \mu([\sqrt{n}; \sqrt{n+1})) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Тоді

$$\lim \lambda_1\{x : \chi_{(\sqrt{n};\sqrt{n+1})}(x) \geq \sigma\} = \lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0,$$

тобто послідовність $\chi_{(\sqrt{n};\sqrt{n+1})}(x)$ збігається до 0 за мірою Лебега на $\mathbf{R}$.

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *Довести вимірність наступних функцій* $\big((x;y) \in \mathbf{R}^2\big)$:

1. $f(x,y) = (|x| + |y|)\, e^{[y]}$;
2. $f(x,y) = [x]^3 + [y]^2$;
3. $f(x,y) = \operatorname{arctg}([x] + [y])$;
4. $f(x) = \operatorname{ch}[x^2 + y^2]$;
5. $f(x,y) = sign \sin \pi(x^2 + y^2)$;
6. $f(x,y) = sign \cos \pi(x^2 + y^2)$;
7. $f(x,y) = (x^2 + y^2)[x]$;
8. $f(x,y) = arctg \sin[x^2 + y^2]$;
9. $f(x,y) = arctg \cos[x^2 + y^2]$;
10. $f(x,y) = \exp[x^2 + y^2]$.

Завдання 2. *Нехай* X *вимірний простір,* $f_i : X \longrightarrow \mathbf{R}$, $i = \overline{1,n}$, f_i – *вимірні функції. Довести вимірність наступних функцій*:

1. $\max(f_1, f_2, \ldots, f_n)$;
2. $\min(f_1, f_2, \ldots, f_n)$;
3. $\sin(|f_1| + |f_2| + \ldots + |f_n|)$;
4. $(1 + |f_1|)^{f_2}$.

   Довести вимірність функції f, *якщо*:

5. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x|+n}, x \in \mathbf{R}$;
6. $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x^2}, x \in \mathbf{R}$;
7. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} arctg \frac{2x}{x^2+n^4}, x \in \mathbf{R}$;

8. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[5]{n^6+[x^5]}}, \quad x\in\mathbf{R};$

9. $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n[x]}{1+n^5[x]^2}, x\in\mathbf{R};$

10. $f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x^2+y^2)}{\sqrt{n^4+[x^2+y^2]}}, (x;y)\in\mathbf{R}^2.$

Завдання 3. *Визначити таку неперервну на* $\mathbf{R}$ *або* $\mathbf{R}^2$ *функцію* g, *щоб* $g(x)=f(x)$ *майже скрізь відносно міри Лебега (відповідно* λ_1 *або* λ_2*), якщо*:

1. $f(x)=\begin{cases}\arctan x, & x\in\mathbf{Z};\\ \pi, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z};\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}\ln(1+|x|), & e^x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q};\\ \sin x^2, & e^x\in\mathbf{Q};\end{cases}$

3. $f(x,y)=\begin{cases}x+y, & (x;y)\in\mathbf{Q}^2;\\ x^2, & (x;y)\overline{\in}\mathbf{Q}^2;\end{cases}$

4. $f(x,y)=\begin{cases}\sin x+\sin y, & (x;y)\in\mathbf{Q}\times\mathbf{R};\\ \cos x, & (x;y)\overline{\in}\mathbf{Q}\times\mathbf{R}.\end{cases}$

   Нехай $f_n(x)$ *– послідовність функцій, заданих на* $\mathbf{R}$. *Визначити таку неперервну на* $\mathbf{R}$ *фунцію* g, *щоб* $f_n(x)\to g(x)$ *при* $n\to\infty$ *майже скрізь відносно міри Лебега* λ_1 *на* $\mathbf{R}$, *якщо*:

5. $f_n(x)=\frac{\sin^n x}{2+\sin^n x}$, $x\in\mathbf{R}$;

6. $f_n(x)=\cos^n x$, $x\in\mathbf{R}$;

7. $f_n(x)=\cos^n x+\sin^n x$, $x\in\mathbf{R}$;

8. $f_n(x)=x^2\sin^n x^2$, $x\in\mathbf{R}$;

9. $f_n(x)=\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right)^n+\sin^n 2x$, $x\in\mathbf{R}$;

10. $f_n(x)=\sin^n\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, $f_n(0)=0$, $x\in\mathbf{R}$.

4 Інтеграл Лебега

Перелік необхідних питань теорії

1. Поняття інтеграла Лебега від простих функцій.
2. Інтегрування за Лебегом простих функцій. Властивості інтеграла Лебега для простих функцій.
3. Загальне означення інтеграла Лебега на множині скінченної міри.
4. σ-адитивність інтеграла Лебега.
5. Нерівність Чебишева.
6. Абсолютна неперервність інтеграла Лебега.
7. Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.
8. Інтеграл Лебега по множині нескінченної міри.
9. Порівняння інтеграла Лебега з інтегралом Рімана.
10. Добуток мір. Теорема Фубіні.

Теоретичні відомості

Нехай X – множина із заданою на ній мірою Лебега λ. Всі множини $A \subset X$ вважатимемо вимірними, а функції $f(x)$ визначеними на X μ-вимірнми.

Визначимо спочатку інтеграл Лебега для простих функцій.

Структура простих функцій визначається наступною теоремою.

Теорема. Функція $f(x)$, що приймає не більше ніж зліченну кількість різних значень $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ вимірна в тому й лише тому випадку, якщо всі множини $A_n = \{x : f(x) = y_n\}$ вимірні.

Нехай f – деяка проста функція, що набуває значень $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, $y_i \neq y_j, i \neq j$ і нехай A деяка вимірна множина ($A \subset X$). Визначимо інтеграл від простої функції f на множині A рівністю

$$\int_A f(x)d\lambda = \sum_n y_n \lambda(A_n),$$

де $A_n = \{x : x \in A, f(x) = y_n\}$.

Проста функція f називається *інтегровною* (за мірою Лебега) на множині A, якщо ряд $\sum_n y_n \lambda(A_n)$ абсолютно збіжний. Якщо f – інтегровна, то сума ряду називається *інтегралом Лебега* від f по множині A.

Дамо далі загальне визначення інтеграла Лебега на множині скінченної міри.

Використання простих функцій в побудові інтеграла Лебега базується на наступній теоремі.

Теорема. Для вимірності функції $f(x)$ необхідно і досить, щоб її можна було зобразити у вигляді границі рівномірно збіжної послідовності простих вимірних функцій.

Функція f називається *інтегровною* на множині A, якщо існує послідовність простих інтегровних на A функцій f_n, що рівномірно збігаються до f. Границю $I = \lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\lambda$ позначають $\int_A f(x)d\lambda$ і називають *інтегралом* від функції f по множині A.

σ-адитивність інтеграла Лебега. Якщо $A = \cup_n A_n$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$ то

$$\int_A f(x)d\lambda = \sum_n \int_{A_n} f(x)d\lambda,$$

причому із існування інтеграла в лівій частині випливає існування інтеграла і абсолютна збіжність ряду в правій частині.

Розглянемо означення інтеграла Лебега на множині нескінченної міри. Нехай множину X можна зобразити у вигляді зліченного об'єднання множин скінченної міри $X = \cup_n X_n$, $\lambda(X_n) < \infty$.

Вимірна функція f визначена на множині X з σ-скінченною мірою λ називається *інтегровною* на X, якщо вона інтегровна на кожній вимірній підмножині $A \subset X$ скінченної міри і якщо для довільної монотонно зростаючої послідовності вимірних підмножин $\{X_n\}$ таких, що $X = \cup_n X_n$, $\lambda(X_n) < \infty$, границя $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{X_n} f(x)d\lambda$ існує і не залежить від вибору цієї послідовності. Ця границя називається *інтегралом* від f по множині A і позначається символом $\int_X f(x)d\lambda$.

Теорема (*про зв'язок інтеграла Рімана і інтеграла Лебега*). Якщо існує інтеграл Рімана $I = \int_a^b f(x)dx$, то f інтегровна на $[a,b]$ за Лебегом і $\int_{[a,b]} f(x)d\lambda = I$.

Відмітимо, що всі попередні викладки мають місце якщо в якості міри λ розглянути довільну міру μ.

Нерівність Чебишева. Нехай μ – довільна скінченна міра на X, A– довільна вимірна множина. Якщо $\varphi(x) \geq 0$ на A і $c > 0$, то

$$\mu\{x : x \in A, \varphi(x) \geq c\} \leq \frac{1}{c} \int_A \varphi(x)d\mu.$$

Приклади розв'язання типових задач

Завдання 1. *Нехай* λ_1*-міра Лебега на* $\mathbf{R}$.
Обчислити $\int_A f(x)d\lambda_1(x)$, $\int_A |f(x)|d\lambda_1(x)$, *якщо:*

а) $f(x) = (-1)^{[x]}[x], \quad A = [0;4)$;

б) $f(x) = [arctgx], \quad A = [-3;3]$.

Розв'язання. а) функція $f(x) = (-1)^{[x]}[x]$ приймає такі значення:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;1); \\ -1, & x \in [1;2); \\ 2, & x \in [2;3); \\ -3, & x \in [3;4). \end{cases}$$

Задана функція є простою, визначеною на вимірних множинах

$$\{x : k \le x < k+1, k = 0,1,2,3\},$$

кожна з яких має міру рівну одиниці. Отримаємо:

$$\int_A f(x)d\lambda_1(x) = (0 - 1 + 2 - 3) \cdot 1 = -2$$

$$\int_A |f(x)|d\lambda_1(x) = (0 + 1 + 2 + 3) \cdot 1 = 6.$$

б) Аналогічно попередній задачі, множина значень функції f є скінченною, оскільки на всій числовій осі $(-\infty;+\infty)$ функція $\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Згідно визначення цілої частини,

$$f(x) = [arctgx] = \begin{cases} -2, & x \in (-\infty; -tg1); \\ -1, & x \in [-tg1; 0); \\ 0, & x \in [0; tg1); \\ 1, & x \in [tg1; +\infty). \end{cases}$$

тобто вона співпадає з множиною $\{-2,-1,0,1\}$. Ці значення функція приймає на вимірних множинах $[-3;-tg1)$, $[-tg1;0)$, $[0;tg1)$, $[tg1;3)$. Отримаємо:

$$\int_{[-3;3]} f(x)d\lambda_1(x) = 0 \cdot tg1 + 1(3 - tg1) + (-1)(0 + tg1) + (-2)(-tg1 + 3) = -3.$$

$$\int_{[-3;3]} |f(x)|d\lambda_1(x) = 0 \cdot tg1 + (3 - tg1) + tg1 + 2(-tg1 + 3) = 9 - 2tg1.$$

Завдання 2. *Нехай* λ_1*-міра Лебега на* $\mathbf{R}$*,* λ_2*-міра Лебега на* $\mathbf{R}^2$*. Обчислити:*

а) $\displaystyle\int_{[0;20]} \chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)d\lambda_1(x)$; б) $\displaystyle\int_{[0;100]} \frac{d\lambda_1(x)}{[x+1][x+2]}$; в) $\displaystyle\int_{[-3;3]} sign \cos \pi x d\lambda_1$;

г) $\displaystyle\int_A (-1)^{[x^2+y^2]} d\lambda_2(x,y), \quad A = \{(x;y) : x^2+y^2 \le 5\}.$

Розв'язання. а) Функція $\chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}$ на множині $[0;20]$ еквівалентна функції $f = 1$, бо міра Лебега множини раціональних чисел дорівнює нулю. Інтеграли Лебега від еквівалентних функцій рівні:

$$\int_{[0;20]} \chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x) d\lambda_1(x) = \int_{[0;20]} d\lambda_1(x) = 20.$$

б) Використаємо скінченну адитивність інтеграла Лебега:

$$\int_{[0;100]} \frac{d\lambda_1(x)}{[x+1][x+2]} = \sum_{n=0}^{99} \int_n^{n+1} \frac{d\lambda_1(x)}{[x+1][x+2]} =$$

$$= \sum_{n=0}^{99} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \int_n^{n+1} d\lambda_1(x) = \sum_{n=0}^{99} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{100}{101}.$$

в) Функція $f(x) = sgn \cos \pi x$ є простою: вона приймає значення $-1, 0, 1$. А саме,
$f(x) = 1$ на λ_1-вимірній множині $A_1 = (-0.5, 0.5) \cup (1.5; 2.5) \cup (-2.5; -1.5)$;
$f(x) = -1$ на λ_1-вимірній множині $A_{-1} = (-3; -2.5) \cup (-1.5; -0.5) \cup$
$\cup (0.5; 1.5) \cup (2.5; 3)$;
$f(x = 0$ на λ_1-вимірній множині $A_0 = \{-2.5, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5\}$.

Тому $f(x)$ вимірна. Згідно з означенням інтеграла Лебега від простої вимірної функції маємо:

$$\int_{[-3,3]} sgn \cos \pi x d\lambda_1 = 1\lambda_1(A_1) + (-1)\lambda_1(A_{-1}) + 0\lambda_1(A_0) = 3 - 3 = 0.$$

г) Функція $(-1)^{[x^2+y^2]}$ приймає два значення 1 або -1 на вимірних множинах $\{(x,y) : k \le x^2+y^2 < k+1, k = 0, \ldots, 4\}$ з міра кожної з яких $\lambda_2 = \pi(k+1) - \pi k = \pi$.
Остаточно одержимо:

$$\int_A (-1)^{[x^2+y^2]} d\lambda_2(x,y) = (1 - 1 + 1 - 1 + 1)\pi = \pi.$$

Завдання 3. *Довести, що* $f \in (L_{[0;1]}, \lambda_1)$ *і обчислити* $\int_{[0;1]} f d\lambda_1$, *якщо* $f(x) = x\chi_A(x)$, *A-множина ірраціональних чисел з проміжку* $[0;1]$.

Розв'язання. Функція f обмежена та вимірна на $[0;1]$, тому вона інтегровна за Лебегом. Крім того $f(x) = x$, майже скрізь на $[0;1]$ відносно міри Лебега ($\lambda_1(\mathbf{Q}) = 0$). Згідно з відповідною властивістю інтеграла Лебега, маємо

$$\int_{[0;1]} x\chi_A(x) d\lambda_1 = \int_{[0;1]} x d\lambda_1.$$

Але $g(x) = x$ неперервна на $[0;1]$, тому вона інтегрується за Ріманом на $[0,1]$, і її інтеграл Лебега дорівнює інтегралу Рімана:

$$\int_{[0;1]} x\chi_A(x)d\lambda_1 = \int_{[0;1]} xd\lambda_1 = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}.$$

Зауваження. Функція $f(x) = x\chi_A(x)$ є розривною в кожній точці проміжку $[0;1]$, лебегова міра якого дорівнює 1, тому вона неінтегровна за Ріманом на $[0;1]$. Це можна довести також за означенням: розглядати інтегральні суми за довільним розбиттям відрізка $[0;1]$, вибираючи як відмічені спочатку раціональні точки, а потім ірраціональні.

Завдання 4. *Нехай A, B – вимірні множини, що належать вимірному простору X. $\mu(A \cup B) < \infty$ і відомі міри множин $A, B, A \cap B$. Обчислити $\int_X |\chi_A(x) - 5\chi_B(x)|d\mu(x)$.*

Розв'язання. Розглянемо три випадки (інші випливають з них).

1) $A \cap B = \emptyset$; $\int_X |\chi_A(x) - 5\chi_B(x)|d\mu(x) = \int_A d\mu + 5\int_B d\mu = \mu(A) + 5\mu(B)$.

2) $A \cap B = C$; $\int_X |\chi_A(x) - 5\chi_B(x)|d\mu(x) = \int_{A\setminus B} d\mu + 5\int_{B\setminus A} d\mu + 4\int_{A\cap B} d\mu = \mu(A \setminus B) + 5\mu(B \setminus A) + 4\mu(A \cap B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) + 5\left(\mu(B) - \mu(A \cap B)\right) + 4\mu(A \cap B) = \mu(A) + 5\mu(B) - 2\mu(A \cap B)$.

3) $A \subset B$; $\int_X |\chi_A(x) - 5\chi_B(x)|d\mu(x) = 4\int_A d\mu + 5\int_{B\setminus A} d\mu = 4\mu(A) + 5\mu(B \setminus A) = 5\mu(B) - \mu(A)$.

Завдання 5. *Нехай $f(x) = \sin x \cdot \chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Обчислити $\int_{[0;\pi]} f(x)\, d\lambda_1(x)$, де λ_1-міра Лебега на $\mathbf{R}$. Чи буде функція f інтегровною за Ріманом на відрізку $[0;\pi]$?*

Розв'язання. Задана функція $f(x) = \sin x \cdot \chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)$ еквівалентна неперервній функції $g(x) = \sin x$. За властивістю інтеграла Лебега від неперервної функції, він рівний інтералу Рімана, тобто:

$$\int_{[0;\pi]} f(x)d\lambda_1(x) = \int_{[0;\pi]} \sin xd\lambda_1(x) = \int_0^\pi \sin xdx = 2.$$

Функція $f(x) = \sin x \cdot \chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)$ не є інтегровною за Ріманом. Якщо в інтегральній сумі Рімана за довільну точку ξ_i виберемо раціональну точку, то отримаємо $f(\xi_i) = 0$. Тоді $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = 0$. Якщо ж ξ_i є ірраціональною, тоді маємо інтегральну суму $\sum_{i=1}^n \sin(\xi_i)\Delta x_i$, границя якої при прямуванні максимального діаметра розбиття сегмента $[0;\pi]$ до нуля дорівнює інтегралу $\int_0^\pi \sin xdx = 2$. З цих міркувань випливає, що не існує границі інтегральної суми, яка б не залежала від вибору точок ξ_i. Отже, функція не є інтегровною за Ріманом.

Завдання 6. *Нехай $A = \bigcup_{n\in N}(n; n+1/n^\alpha)$. Для яких дійсних α характеристична функція $\chi_A(x)$ множини A є інтегровною на $\mathbf{R}$ стосовно міри Лебега μ_1 на $\mathbf{R}$?*
Розвязання. Функція

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \overline{\in} A. \end{cases}$$

є простою. Оскільки множина A вимірна за Лебегом ($\mu_1(A) = \sum_n \mu_1((n; n+1/n^\alpha)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty$ для $\alpha > 1$), то

$$\int_{\mathbf{R}} \chi_A(x) d\mu_1 = \int_A 1 d\mu_1 = \mu_1(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Інтеграл є скінченним для $\alpha > 1$.
Завдання 7. *Обчислити*

$$\int_{\mathbf{R}} \sin \chi_A(x) d\mu_1,$$

де $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}[n; n + 3^{-n})$.
Розв'язання. Оскільки

$$\sin \chi_A(x) = \begin{cases} \sin 1, & x \in A; \\ 0, & x \overline{\in} A. \end{cases}$$

то

$$\int_{\mathbf{R}} \sin \chi_A(x) d\mu_1 = \int_A \sin 1 d\mu_1 = \sin 1 \mu_1(A) =$$

$$= \sin 1 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1([n; n + 3^{-n})) = \sin 1 \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} = \frac{1}{2} \sin 1.$$

Завдання 8. *Довести нерівність:*

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_{[-1;1]} e^{x^2+x} \chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x) d\lambda_1(x) \leq 2e^2.$$

Розв'язання. Якщо $f, g \in L(A)$, тобто інтегровні за Лебегом на множині A і для майже всіх $x \in A$ виконується нерівність $f(x) \leq g(x)$, тоді $\int_A f(x) d\mu \leq \int_A g(x) d\mu$. Задана функція $f(x) = e^{x^2+x}\chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)$ еквівалентна неперервній функції e^{x^2+x}, яка задовольняє нерівність $\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \leq f(x) \leq e^2$ на сегменті $[-1; 1]$. Для інтеграла Лебега одержимо таку оцінку:

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_{[-1;1]} e^{x^2+x} \chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x) d\lambda_1(x) \leq 2e^2,$$

що й треба було довести.

Завдання 9. *Обчислити,* $\int_{\mathbf{R}} f(x)d\lambda_1(x)$, *якщо* $f(x) = ln(1+\chi_A(x))$, *де* $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} [6n; 6n + \frac{e}{n!}]$.

Розв'язання. Оскільки множини $A_n = [6n; 6n + \frac{e}{n!}]$ не перетинаються, тоді використавши зліченну адитивність міри Лебега, матимемо

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)d\lambda_1(x) = \int_A \ln 2 d\lambda_1(x) = \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1\left(\left[6n; 6n + \frac{e}{n!}\right]\right) =$$

$$= \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{n!} = (e^2 - e)\ln 2.$$

Завдання 10. *Нехай* $\{f, g\} \subset (L_2[0;1], \lambda_1)$. *Довести, що* $f \cdot g \in (L_1[0;1], \lambda_1)$. *Чи завжди* $f \cdot g \in (L_2[0;1], \lambda_1)$? *Навести приклад.*

Розв'язання. Функція $f \in (L_2[0;1], \lambda_1)$, якщо $\int_{[0;1]} f^2(x)d\lambda_1(x) < \infty$ і $f \in (L_1[0;1], \lambda_1)$ якщо $\int_{[0;1]} |f(x)|d\lambda_1(x) < \infty$.

Справедлива нерівність Коші-Буняковського для функцій $|f|$ і $|g|$,

$$\left(\int_{[0,1]} |f(x)g(x)|d\lambda_1(x)\right)^2 \leq \int_{[0;1]} f^2(x)d\lambda_1(x) \int_{[0,1]} g^2(x)d\lambda_1(x) < \infty,$$

оскыльки $\{f, g\} \subset (L_2[0;1], \lambda_1)$.

Отримаємо: $\left(\int_{[0;1]} |f(x)g(x)|d\lambda_1(x)\right)^2 < \infty$, тобто $f \cdot g \in (L_1[0;1], \lambda_1)$.

Якщо $\{f, g\} \subset (L_2[0;1], \lambda_1)$, то не завжди $f \cdot g \in (L_1[0;1], \lambda_1)$. Наведемо приклад.

Виберемо $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$. $\{f, g\} \subset (L_2[0;1], \lambda_1)$, оскільки $\int_{[0;1]} \frac{1}{\sqrt{x}} d\lambda_1(x) = 2 < \infty$.

Функція $f \cdot g = \frac{1}{\sqrt{x}} \in (L_1[0;1], \lambda_1)$, але функція $f \cdot g = \frac{1}{\sqrt{x}} \overline{\in} (L_2[0;1], \lambda_1)$, бо інтеграл $\int_{[0;1]} \frac{1}{x} d\lambda_1(x) = \infty$.

Завдання 11. *Нехай* $p \geq 1$. *Для яких* $\alpha \in \mathbf{R}$ *функція* $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$, $t > 0$ *належить* $(L_p[0;1], \lambda_1)$? $(L_p[1;\infty], \lambda_1)$?

Розв'язання. Функція $f \in (L_p[0;1], \lambda_1)$, якщо $\int_{[0;1]} |f(x)|^p d\lambda_1(x) < \infty$. Тоді функція $f(t) = \frac{1}{t^\alpha} \in (L_p[0;1], \lambda_1)$, якщо збігається інтеграл $\int\limits_{[0;1]} \frac{1}{t^{\alpha p}}$

$d\lambda_1(x)$. Він збіжний при $\alpha p < 1$, тобто при $\alpha < \frac{1}{p}$.

Аналогічно, $f \in (L_p[1;\infty], \lambda_1)$ якщо збігається інтеграл $\int_{[1;\infty]} \frac{1}{t^{\alpha p}} d\lambda_1(x)$. Цей інтеграл буде збіжним, коли $\alpha p > 1$, тобто при $\alpha > \frac{1}{p}$.

Завдання 12. *Для яких дійсних α збігається невласний інтеграл $\int_1^\infty \frac{cosx}{x^\alpha}dx$? Для яких дійсних α функція $\frac{cosx}{x^\alpha}$ інтегровна за Лебегом на $[1;+\infty)$?*

Розв'язання. З нерівності $\frac{|cosx|}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$ випливає, що для $\alpha > 1$ інтеграл $\int_1^\infty \frac{cosx}{x^\alpha}dx$ збігається абсолютно. Якщо $0 < \alpha \leq 1$, розглянутий інтеграл збігається умовно (за ознакою Діріхле). Для таких α абсолютної збіжності немає, оскільки

$$\frac{|cosx|}{x^\alpha} \geq \frac{cos^2x}{x^\alpha} = \frac{1+cos2x}{2x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} + \frac{cos2x}{2x^\alpha},$$

а інтеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ розбігається, якщо $\alpha \leq 1$.

Нагадаємо, що функція інтегрується за Лебегом одночасно зі своїм модулем. Тому функція $\frac{cosx}{x^\alpha}$ інтегрується за Лебегом на проміжку $[1;+\infty)$ лише для $\alpha > 1$.

Завдання 13. *Нехай $f_n(t) = \sqrt{n}\chi_{[0;\frac{1}{n})}(t)$, $t \in \mathbf{R}$, $f(t) = 0$, $t \in \mathbf{R}$. Довести, що $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ при $n \longrightarrow \infty$ в $(L_1(\mathbf{R}), \lambda_1)$, але ця послідовність не збігається в $(L_2(\mathbf{R}), \lambda_1)$.*

Розв'язання. Послідовність $f_n(t)$ збігається в $(L_p(\mathbf{R}), \lambda_1)$ до $f(t)$ при $n \longrightarrow \infty$ для $p \geq 1$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)|^p d\lambda_1(x) = 0$.

Знайдемо границю:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} |f_n(t) - f(t)| d\lambda_1(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{[0;\frac{1}{n})} \sqrt{n} d\lambda_1(t) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{[0;\frac{1}{n})} d\lambda_1(t) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n} = 0.$$

Ми довели, що послідовність збігається в $(L_1(\mathbf{R}), \lambda_1)$. Дослідимо на збіжність цю ж послідовність в просторі $(L_2(\mathbf{R}), \lambda_1)$. Обчислимо границю:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)|^2 d\lambda_1(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{[0;\frac{1}{n})} n d\lambda_1(t) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \int_{[0;\frac{1}{n})} d\lambda_1(t) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{n} = 1 \neq 0.$$

Отже, послідовність є розбіжною в просторі $(L_2(\mathbf{R}), \lambda_1)$.

Завдання 14. *Дослідити послідовності функцій $\{f_n : n \geq 1\}$ на збіжність в $(L_p(\mathbf{R}), \lambda_1)$, якщо $p = 1, 2$ у завданні 1) і для довільного $p \in \mathbf{N}$ у завданні 2):*

$$1) f_n(t) = \begin{cases} t^n - t^{2n}, & t \in [0;1]; \\ 0, & t \overline{\in} [0;1]. \end{cases} \qquad 2) f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, & t \in [0;1/n]; \\ 0, & t \overline{\in} [0;1/n]. \end{cases}$$

Розв'язання. 1) Для $t \in [0,1]$ послідовність $f_n(x) \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$. Візьмемо $p = 1$ і знайдемо таку границю:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{[0;1]} |f_n(t) - 0| d\lambda_1(t) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{[0;1]} (t^n - t^{2n}) d\lambda_1(t) =$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} \right) = 0.$$

Якщо $p = 2$, то

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{[0;1]} |f_n(t) - 0|^2 d\lambda_1(t) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{[0;1]} (t^n - t^{2n})^2 d\lambda_1(t) =$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - 2\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{4n+1} \right) = 0.$$

Отже, послідовність збіжна в $(L_p(\mathbf{R}), \lambda_1)$ для $p = 1, 2$.

2) Знайдемо границю послідовності: $lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0; \\ 1, & t = 0. \end{cases}$

Послідовність f_n майже скрізь на $\mathbf{R}$ збігається до нуля. Знайдемо границю:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(t) - 0|^p d\lambda_1(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{[0;\frac{1}{n}]} (1 - nt)^p d\lambda_1(t) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nt)^p dt = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{(p+1)n} = 0.$$

Отже, послідовність збіжна до нуля в просторі $(L_p(\mathbf{R}), \lambda_1)$ для будь-якого $p \in \mathbf{N}$.

Завдання 15. *Знайти границі*:

$$1) \lim_{n\to\infty} \int_{[0;100]} \frac{x^{40}}{1 + x^{40}} (\sin x)^n d\mu, \quad 2) \lim_{n\to\infty} \int_{[0;\infty)} e^{-nx} arctgx d\mu.$$

Розв'язання. 1) Нехай $f_n(x) = \frac{x^{40}}{1+x^{40}} (\sin x)^n$, $x \in [0; 100]$. Функції f_n інтегруються за Ріманом на $[0, 100]$, тому вони інтегруються і за Лебегом на $[0; 100]$. Крім того, $f_n(x) \to 0$ майже скрізь на $[0; 100]$ і $|f_n(x)| \leq \frac{x^{40}}{1+x^{40}}$, $n \in \mathbf{N}$. Мажоранта $\frac{x^{40}}{1+x^{40}}$ є неперервною, тому інтегровною за Лебегом на $[0; 100]$. Всі умови теореми Лебега про мажоровану збіжність виконуються, тому можна переходити до границі під знаком інтеграла:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0;100]} \frac{x^{40}}{1 + x^{40}} (\sin x)^n d\mu = \int_{[0;100]} \lim_{n\to\infty} \frac{x^{40}}{1 + x^{40}} (\sin x)^n d\mu = 0.$$

2) Розглянемо послідовність $f_n(x) = e^{-nx} arctgx$, $x \in [0; \infty)$. Функції f_n інтегровні за Лебегом на $[0; \infty)$ (вони інтегруються і за Ріманом на $[0; \infty)$), крім того, $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \ldots$ і $0 \leq \int_{[0;100]} f_n(x) d\mu \leq \pi/2$. Тому за

теоремою Б.Леві про монотонну збіжність можна переходити до границі під знаком інтеграла:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0;\infty)} e^{-nx} arctgx d\mu = \int_{[0;\infty)} \lim_{n\to\infty} e^{-nx} arctgx d\mu = 0$$

Зауваження. В цьому прикладі можна використати також і теорему Лебега про мажоровану збіжність.

Завдання 16. *Чи можна перейти до границі під знаком інтеграла в інтегралі* $\int_{\mathbf{R}} n^2\chi_{[0;1/n]}(x)d\mu$?

Розв'язання. Очевидно, послідовність $f_n(x) = n^2\chi_{[0;1/n]}(x)$ збігається до 0 майже скрізь на $\mathbf{R}$. Обчислимо $\int_{\mathbf{R}} f_n(x)d\mu$:

$$\int_{\mathbf{R}} f_n(x)d\mu = \int_{[0;1/n)} n^2 d\mu = n.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} f_n(x)d\mu = \infty,$$

а

$$\int_{\mathbf{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)d\mu = 0,$$

тобто перейти до границі під знаком інтеграла не можна.

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *Нехай* λ_1*-міра Лебега на числовій прямій* $\mathbf{R}$*, а* λ_2*-міра Лебега на площині* $\mathbf{R}^2$*. Обчислити інтеграли* $\int_A f(x)d\lambda_1(x)$, $\int_A |f(x)|d\lambda_1(x)$, $\int_B f(x,y)d\lambda_2(x,y)$, $\int_B |f(x,y)|d\lambda_2(x,y)$ *якщо*:

1. $f(x) = (-1)^{[x]}[x-2], \quad A = [-3;5]$;
2. $f(x) = (-1)^{[x]}\left|[x]\right|, \quad A = [-4;4)$;
3. $f(x) = (-1)^{[x^2]}, \quad A = \left[0;2\sqrt{2}\right]$;
4. $f(x) = sign\cos\pi x, \quad A = [-3;3]$;
5. $f(x) = sign\sin\frac{\pi}{x}, \quad A = (0;1]$;
6. $f(x) = [x]sign\cos\pi x, \quad A = [0;6]$;
7. $f(x) = [x][2\sin x], \quad A = [0;\pi]$;
8. $f(x,y) = [x+y], \quad B = [0;2]\times[0;2]$;
9. $f(x,y) = \sqrt{[x-y^2]}, \quad B = [0;2]\times[x^2;4]$;

10. $f(x,y) = \sqrt{[x-y^2]}, \quad B = [y^2; 4] \times [0; 2]$.

Завдання 2. *Обчислити* $\int_{\mathbf{R}} f(x) d\lambda_1(x)$, *якщо*:

1. $A = \cup_{n=-\infty}^{\infty}[n; n+3^{-n})$, $f(x) = \sin[2\chi_A(x)]$, $x \in \mathbf{R}$;
2. $A = \cup_{n\in\mathbf{N}}(n^2; n^2 + \frac{1}{n(n+1)})$, $f(x) = -\chi_A(x)$, $x \in \mathbf{R}$;
3. $A = \cup_{n\in\mathbf{N}}(n+3^{-n}; n+2^{-n})$, $f(x) = \sinh \chi_A(x) + \chi_A(x)$, $x \in \mathbf{R}$;
4. $A = \cup_{n\in\mathbf{N}}(n!; n! + \frac{1}{n!})$, $f(x) = \arctan \chi_A(x)$, $x \in \mathbf{R}$;
5. $A = \cup_{n\in\mathbf{N}}[\frac{5}{n} - \frac{1}{n(n+1)}; \frac{5}{n})$, $f(x) = 10\chi_A(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

   Обчислити $\int_{[0;1]} f(x) d\lambda_1(x)$, *якщо*:

6. $f(x) = \begin{cases} x^{10}, & x \in \mathbf{Q}; \\ (1+x^2)^{-1}, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}; \end{cases}$
7. $f(x) = \begin{cases} x, & \cos x \in \mathbf{Q}; \\ \tan x, & \cos x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}; \end{cases}$
8. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \sin x \in \mathbf{Q}; \\ \sin^2 x, & \sin x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}; \end{cases}$
9. $f(x) = \begin{cases} \cosh x, & x \in \mathbf{Q}; \\ (1+x^2)^{-1}, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}; \end{cases}$
10. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbf{Q}; \\ x^4, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$

Завдання 3. *Визначити, для яких* $p \geq 1$ *функція* $f \in (L_p[0,1], \lambda_1)$, *якщо*:

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0;1) \setminus \mathbf{Q}; \\ \sin x, & x \in (0;1) \cap \mathbf{Q}; \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} (1-x)^{-1}, & x \in (0;1) \setminus \mathbf{Q}; \\ \cos x, & x \in (0;1) \cap \mathbf{Q}; \end{cases}$
3. $f(x) = (1-x)^{-2}, \quad x \in (0;1)$;
4. $f(x) = \frac{e^x}{x^2(1-x)^4}, \quad x \in (0;1)$.

   Визначити, для яких α, β *функція* $f \in (L_p(\mathbf{R}), \lambda_1)$, $p \geq 1$ *при* $x \in \mathbf{R}$:

5. $f(x) = \frac{|arctgx|^\alpha}{(1+x^2)^\beta}$;

6. $f(x) = \frac{|1-x|^\beta}{(1+x^4)|x|^\alpha}$.

Визначити при яких $p \geq 1$ *послідовність* $\{f_n : n \geq 1\} \subset (L_p(\mathbf{R}), \lambda_1)$ *збігаєтьcя в* $(L_p(\mathbf{R}), \lambda_1)$ *якщо* $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$:

7. $f_n(x) = n^2 e^{-nx^2}$;
8. $f_n(x) = \sqrt{n}\chi_{[0;1/n)}(x)$;
9. $f_n(x) = \sqrt{n}\chi_{[0;1/n^2)}(x)$;
10. $f_n(x) = n^{-2} e^{\frac{-x}{n}} \chi_{[0;\infty)}(x)$.

5 Функції обмеженої зміни. Інтеграл Стільт'єса

Перелік необхідних питань теорії

1. Функції обмеженої варіації. Основні властивості.
2. Міра Лебега-Стільт'єса.
3. Інтеграл Лебега-Стільт'єса. Основні властивості.
4. Абсолютно неперервні функції. Абсолютна неперервність і сингулярність мір.
5. Теорема Радона-Никодима.

Теоретичні відомості

Функція f задана на відрізку $[a, b]$ називається *функцією обмеженої зміни*, якщо існує така стала c, що для довільного розбиття відрізку $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq c.$$

Довільна монотонна функція має обмежену зміну, оскільки для неї визначена сума не залежить від вибору розбиття і завжди дорівнює $|f(b) - f(a)|$.

Нехай f – функція обмеженої зміни. Точна верхня грань сум $\sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ відносно можливих скінченних розбиттів відрізка $[a, b]$ називається *повною зміною* чи *повною варіацією* функції f на відрізку $[a, b]$ і позначається $V_a^b[f]$. Таким чином,

$$V_a^b[f] = \sup \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Основні властивості.

1. Якщо α-стала, то
$$V_a^b[\alpha f] = |\alpha| V_a^b[f].$$

2. Якщо f і g функції обмеженої зміни, то $f + g$ також є функцією обмеженої зміни, причому
$$V_a^b[f + g] \leq V_a^b[f] + V_a^b[g].$$

3. Якщо $a < b < c$, то
$$V_a^b[f] + V_b^c[f] = V_a^c[f].$$
4. Функція $v(x) = V_a^x[f]$ монотонно неспадна.

Для визначення інтеграла Лебега-Стільт'єса визначимо міру Лебега-Стільт'єса.

Нехай на деякому відрізку $[a; b]$ визначена неспадна функція F, яка є неперервною зліва. Визначимо міри всіх відрізків, інтервалів і напівінтервалів, що належать основному відрізку $[a; b]$, рівностями:
$$\mu_F((\alpha;\beta)) = F(\beta) - F(\alpha + 0), \quad \mu_F([\alpha;\beta]) = F(\beta + 0) - F(\alpha),$$
$$\mu_F((\alpha;\beta]) = F(\beta + 0) - F(\alpha + 0), \quad \mu_F([\alpha;\beta)) = F(\beta) - F(\alpha).$$
Ми можемо продовжити цю міру на деяку σ-алгебру α_F, яка містить всі відкриті і всі замкнені (тобто і всі борелівські) підмножини відрізка $[a; b]$. Міру μ_F одержану за допомогою такої побудови називають мірою Лебега-Стільт'єса, що відповідає функції F, саму функцію F називають породжуючою функцією цієї міри.

Нехай μ_F-міра на відрізку $[a; b]$, яка породжена монотонною, неперервною зліва функцією F, а на $[a, b]$ визначена обмежена функція $f(x)$. Для цієї міри звичайним чином визначається клас інтегровних (сумовних) функцій і вводиться інтеграл Лебега $\int_a^b f(x)d\mu_F$. Такий інтеграл, який береться за мірою μ_F, що відповідає функції F, називається інтегралом Лебега-Стільт'єса і позначається символом $\int_a^b f(x)dF(x)$.

Запишемо формули для обчислення інтеграла Лебега-Стільт'єса.

1. Якщо F-функція стрибків, тоді
$$\int_a^b f(x)dF(x) = \sum_i f(x_i)h_i, \tag{5.1}$$
де x_i-точки розриву функції F, а h_i - величина стрибка F в точці x_i.

2. Нехай функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, а функція F має на $[a; b]$ скрізь за винятком скінченного числа точок $c_1, c_2, \ldots, c_n$, інтегровну за Ріманом похідну. Тоді
$$\int_a^b f(x)dF(x) = \int_a^b f(x)F'(x)dx + f(a)(F(a+0) - F(a))+$$
$$+ f(b)(F(b) - F(b-0)) + \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(F(c_k + 0) - F(c_k - 0)). \tag{5.2}$$

Приклади розв'язання типових задач

Завдання 1. *Визначити, які з наступних функцій мають обмежену зміну і знайти повну варіацію цих функцій:*

$$\text{а)} f(x)=\begin{cases} 0, & x=0; \\ 1-x, & x\in(0;1); \\ 5, & x=1; \end{cases} \qquad \text{б)} f(x)=\begin{cases} sin\frac{\pi}{x}, & x\in(0;1]; \\ 0, & x=0; \end{cases}$$

$$\text{в)} f(x)=\begin{cases} 1, & x\in \mathbf{Q}_{[0;1]}; \\ 0, & x\overline{\in}\mathbf{Q}_{[0;1]}; \end{cases} \qquad \text{г)} f(x)=sin2x, x\in[0;2\pi].$$

Розв'язання. а) Спочатку проведемо довільне розбиття інтервалу $[0;1]$ точками $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1$ на n частин і знайдемо таку суму:

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|=(1-x_1-0)+(1-x_1-1+x_2)+(1-x_2-1+$$

$$+x_3)+\ldots+(5-1+x_{n-1})=5-2x_1+2x_{n-1}.$$

Ми врахували, що функція $f(x)=1-x$ на $(0,1)$ спадна і тому $|f(x_k)-f(x_{k-1})|=f(x_{k-1})-f(x_k)=(1-x_{k-1})-(1-x_k)=x_k-x_{k-1}$ при $k=2,3,\ldots,n-1$. За означенням $V(f(x),[a;b])=\sup\limits_{\tau}\sigma=\sup\limits_{\tau}\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|$, де τ – розбиття інтервалу $[0;1]$. Маємо: $\sup\limits_{n}(5-2x_1+2x_{n-1})=7$, тобто $V(f(x),[0;1])=7$.

б) Побудуємо розбиття сегменту $[0;1]$ точками $x_k=\frac{2}{2k+1}$, $k=1,2,\ldots,n$, на $n+1$ частин і обчислимо значення функції в них:

$$x_0=0<\frac{2}{2n+1}<\frac{2}{2n-1}<\ldots<\frac{2}{3}<1=x_n;$$

$$\sin\frac{\pi}{x_0}=0; \quad \sin\frac{\pi}{x_{k+1}}=(-1)^{k+1}; \quad \sin\frac{\pi}{x_k}=(-1)^k; \quad \sin\frac{\pi}{x_n}=0.$$

Тоді $\sigma=\sum_{k=0}^{n}|f(x_{k+1})-f(x_k)|=2n$, а $\sup\limits_{n}2n=\infty$. Отже, функція $f(x)$ не має обмеженої зміни і $V(f(x),[0;1])=\infty$.

в) Покажемо, що задана функція є функцією необмеженої зміни. Для цього побудуємо розбиття інтервалу $[0;1]$ на $2n$ частин таким чином: за точки з парними індексами виберемо раціональні числа, а з непарними – ірраціональні. Отримаємо

$$x_{2k}=\frac{m}{n}, \quad m,n\in N; \quad x_{2k-1}\overline{\in}Q_{[0;1]}; \quad f(x_{2k})=1, f(x_{2k-1})=0.$$

Отже,

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|=n, \quad \sup_{n} n=\infty.$$

г) Використаємо те, що функція $f(x)=\sin 2x$ періодична з періодом, що дорівнює π і за властивістю варіації:

$$V(\sin 2x, [0; 2\pi]) = 2V(\sin 2x, [0; \pi]).$$

Варіація монотонної функції на сегменті $[a; b]$ знаходиться за формулою: $V(f(x), [a; b]) = |f(b) - f(a)|$. Функція $f(x) = \sin 2x$ зростає на інтервалах $[0; \frac{\pi}{4}]$, $[\frac{3\pi}{4}; \pi]$ і спадає на інтервалі $[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$. Одержимо:

$$V(\sin 2x, [0; 2\pi]) = 2V(\sin 2x, [0; \pi]) = 2\Big[V(\sin 2x, [0; \frac{\pi}{4}]) +$$

$$+ V(\sin 2x, [\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]) + V(\sin 2x, [\frac{3\pi}{4}; \pi])\Big] = 8.$$

Завдання 2. *Нехай $f(x) = \int_a^x \varphi(u)du$, $x \in [a; b]$, де φ - інтегровна за Ріманом функція на $[a; b]$. Довести, що $V(f, [a; b]) < \infty$ і знайти $V(f, [a; b])$.*

Розв'язання. Обчислимо таку суму:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_a^{x_{k+1}} \varphi(u)du - \int_a^{x_k} \varphi(u)du \right| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(u)du \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\varphi(u)|\, du = \int_a^b |\varphi(u)|\, du,$$

де $x_0, x_1, \ldots, x_n$ -довільне розбиття інтервалу $[a; b]$. Оскільки функція $\varphi(u)$ інтегровна за Ріманом на $[a; b]$, то, як відомо з курсу математичного аналізу, інтегровною також буде й $|\varphi(u)|$, тобто $\int_a^b |\varphi(u)|du = const$. Таким чином, $V(f, [a; b]) \leq \int_a^b |\varphi(u)|du = cosnt$.

Завдання 3. *Нехай $V(f, [-1; 1]) < \infty$. Знайти функцію $F(x) = V\,(f, [-1; x])$, якщо $f(x) = |x|$.*

Розв'язання. Функція $f(x) = |x|$ спадає на сегменті $[-1; 0]$ і зростає на сегменті $[0; 1]$. Через це

$$V(|x|, [-1; x], -1 \leq x \leq 0) = 1 - |x| = 1 + x;$$

$$V(|x|, [-1; x], 0 < x \leq 1) = 1 + V(|x|, [0; x]) = 1 + x.$$

Остаточно отримаємо: $V(|x|, [-1; x]) = 1 + x$.

Завдання 4. *Записати у вигляді різниці двох зростаючих функцій таку функцію: $f(x) = \sin x$, $x \in [0; 2\pi]$.*

Розв'язання. Будь-яку функцію $f(x)$ з обмеженою варіацією можна записати у вигляді різниці двох зростаючих функцій: $f(x) = \varphi(x) - \phi(x)$, де

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(V(f(x), [0; x]) + f(x) - f(0)),$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(V(f(x), [0; x]) - f(x) + f(0)).$$
Отже, $V(\sin x, [0; x], x \leq \frac{\pi}{2}) = \sin x$, бо функція $\sin x$ зростаюча на $[0; \frac{\pi}{2}]$;
$$V(\sin x, [0; x], x \leq \frac{3\pi}{2}) = V(\sin x), [0; \frac{\pi}{2}]) + V(\sin x, [\frac{\pi}{2}; x]) =$$
$$= 1 + |1 - \sin x| = 2 - \sin x;$$
$$V(\sin x, [0; x], \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi) = V(\sin x, [0; \frac{3\pi}{2}]) + V(\sin x, [\frac{3\pi}{2}; x]) =$$
$$= 3 + |1 + \sin x| = 4 + \sin x.$$
Одержимо:
$$\varphi(x) = \begin{cases} sinx, & x \in [0; \pi/2]; \\ 1, & x \in (\pi/2; 3\pi/2]; \\ 2 + sinx, & x \in (3\pi/2; 2\pi]; \end{cases}$$
$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; \pi/2]; \\ 1 - sinx, & x \in (\pi/2; 3\pi/2]; \\ 2, & x \in (3\pi/2; 2\pi]. \end{cases}$$

Завдання 5. *Нехай A – довільна множина з $\mathbf{R}$. Знайти $\mu_F(A)$, якщо*
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0]; \\ -[-x], & x \in (0; 2]; \\ 5, & x \in (2; +\infty). \end{cases}$$

Розвязання. Функція F – неперервна зліва і має розриви першого роду в точках 0,1,2. Якщо множина A не містить точок розриву, то $\mu_F(A) = 0$. Якщо $0 \in A$, а точки $x = 1$ і $x = 2$ їй не належать, то $\mu_F(A) = 1$. Наприклад,
$$\mu_F\left(\left[0; \frac{1}{2}\right)\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = 1 - 0 = 1,$$
$$\mu_F((-1; 0]) = F(+0) - F(-1 + 0) = 1 - 0 = 1.$$
Аналогічно розглядаються інші випадки.

Якщо точки $0, 1, 2$ належать множині A, тоді $\mu_F(A) = 5$. Для прикладу знайдемо
$$\mu_F([0; 3)) = F(3 + 0) - F(0) = 5 - 0 = 5,$$
$$\mu_F((-1; 2]) = F(2 + 0) - F(-1 + 0) = 5 - 0 = 5.$$
Завдання 6. *Нехай $\theta = \{[a; b) : -\infty < a < b < +\infty\} \bigcup \emptyset$ а F – неспадна неперервна зліва на R функція. Визначимо на θ міру Лебега-Стільт'еса μ_F так: $\mu_F[a; b) = F(b) - F(a)$, $\mu(\emptyset) = 0$. Довести, що клас Θ_F всіх μ_F-вимірних множин, які отримуються за допомогою лебего-*

вого продовження міри μ_F, збігається з $2^{\mathbf{R}}$ сукупністю всіх підмножин множини $\mathbf{R}$. Знайти $\mu_F(A)$ для кожного $A \subset \mathbf{R}$, якщо

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \le 0; \\ 1, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

Розв'язання. З означення міри μ_F на півкільці θ випливає, що

$$\mu_F[a;b) = \begin{cases} 0, & 0\overline{\in}[a;b); \\ 1, & 0 \in [a;b). \end{cases}$$

Легко бачити, що μ_F адитивна на Θ_F.

Продовжимо μ_F на породжене кільце $k(\theta)$. Якщо $A \in k(\theta)$, то $A = \bigcup_{k=1}^{n}[a_k;b_k)$, причому півінтервали $[a_k,b_k)$ попарно не перетинаються. Якщо $0\overline{\in}A$, то $0\overline{\in}[a_k;b_k)$, $k = 1,\dots,n$ і $\mu_F(A) = \sum_{k=1}^{n}\mu_F[a_k;b_k) = 0$. Якщо $0 \in A$, то існує лише один півінтервал $[a_k;b_k)$, який містить 0, а тоді $\mu_F(A) = 1$. Отже,

$$\mu_F(A) = \begin{cases} 0, & 0\overline{\in}A; \\ 1, & 0 \in A. \end{cases}$$

Аналогічно перевіряється, що μ_F є зліченно-адитивною на $k(\theta)$, тому можна будувати лебегове продовження міри μ_F.

Знайдемо спочатку зовнішню міру $\mu_F^*(A)$, де $A \subset \mathbf{R}$. Якщо $A = (0,+\infty)$, розглянемо покриття $\bigcup_{k=1}^{\infty}[1/k;k)$ цієї множини. Тоді $\mu_F^*(A) \le \sum_{k=1}^{\infty}\mu_F[1/k;k) = 0$. Таким чином, $\mu_F^*(0;+\infty) = 0$. Аналогічно $\mu_F^*(-\infty;0) = 0$. Нехай тепер $A = 0$. Кожне покриття $\bigcup_k A_k$ множини A містить хоча б одну таку множину A_k, яка містить 0. Тому $\sum_k \mu_F(A_k) \ge 1$ і $\mu_F^*(A) \ge 1$. Але $A = 0 \subset [-1;1)$, тоді $\mu_F^*(A) \le 1$. Отже, $\mu_F^*(0) = 1$.

Нехай тепер A – довільна множина з $2^{\mathbf{R}}$. Якщо $A \subset (-\infty,0)$ або $A \subset (0,+\infty)$, то з монотонності зовнішньої міри одержимо, що $\mu_F^*(A) = 0$. Якщо ж $0 \subset A$ то $\mu_F^*(A) \ge 1$. Але для такої множини A можна взяти покриття $\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}[k;k+1)$ і одержати $\mu_F^*(A) \le 1$. Тобто, якщо $0 \in A$, то $\mu_F^*(A) = 1$.

Доведемо, що кожна множина $A \in 2^{\mathbf{R}}$ є μ_F-вимірною. Справді, якщо $A \subset (0;+\infty)$ або $A \subset (-\infty;0)$, то $\mu_F^*(A) = 0$, тому A-вимірна і $\mu_F(A) = 0$. Якщо ж $0 \in A$, то

$$\forall \varepsilon < 0 \quad \mu_F^*(A\Delta[-1;1)) = 0 < \varepsilon,$$

тобто A є μ_F-вимірною множиною і $\mu_F(A) = \mu_F^*(A) = 1$.

Зауваження. Цей приклад свідчить, що міра Лебега-Стільт'єса μ_F суттєво відрізняється від міри Лебега μ_1 на $\mathbf{R}$. Справді, не всі підмножини $\mathbf{R}$ є μ_1-вимірними. Крім того $\mu_1(0) = 0$, а в нашому прикладі $\mu_F(0) = 1$.

Завдання 7. *Обчислити наступні інтеграли Стільт'єса:*

$$1. \int_0^1 x^2 dF(x), F(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 2, & x \in (0;1); \\ 3, & x = 1; \end{cases}$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} 2^x dF(x), F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty;0); \\ [x], & x \in [0;100); \\ 100, & x \geq 100; \end{cases}$$

$$3. \int_0^3 f(x) dF(x), f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;1]; \\ 1, & x \in (1;2); \\ 2, & x \in [2;3]; \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;1]; \\ x, & x \in (1;2]; \\ 2, & x \in (2;3]. \end{cases}$$

Розвязання. 1. При обчисленні інтеграла Стільт'єса цього завдання будемо користуватись формулою (5.1): Функція $F(x)$ є сталою з стрибками в точках 0,1. Оскільки $F'(x) = 0$, то

$$\int_0^1 x^2 dF(x) = 0 \cdot (2-1) + 1 \cdot (3-2) = 1.$$

2. Задана функція приймає сталі значення і має розриви першого роду в точках $x = 1, 2, 3, \ldots, 100$ зі стрибками рівними одиниці і $F'(x) = 0$, тоді одержимо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2^x dF(x) = \sum_{k=1}^{100} 2^k = \frac{2(1-2^{100})}{1-2} = 2(2^{100}-1).$$

3. Функція $f(x)$ приймає три значення і має розрив першого роду в точці $x = 2$. Враховуючи це, запишемо інтеграл у вигляді трьох інтегралів Стільт'єса:

$$\int_0^3 f(x) dF(x) = \int_0^1 x dF(x) + \int_1^2 dF(x) + \int_2^3 2 dF(x).$$

Обчислимо кожен інтеграл окремо за формулою (5.2). Оскільки функція $F(x)$ не має точок розриву, то не буде доданків в яких треба враховувати стрибки функції $F(x)$, тобто:

$$\int_0^1 x dF(x) = \int_0^1 0 \cdot dx = 0, \quad \int_1^2 dF(x) = \int_1^2 1 \cdot 1 \cdot dx + 2 \cdot 0 = 1,$$

$$\int_2^3 2 dF(x) = 2 \int_2^3 0 \cdot dx = 0.$$

Отримаємо:

$$\int_0^3 f(x) dF(x) = 1.$$

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *Визначити, які з функцій f мають обмежену варіацію та знайти їх повну варіацію:*

1. $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{при} \quad 0 \geq x < 1; \\ 10, & \text{при} \quad x = 1; \\ x^2, & \text{при} \quad 1 < x \leq 2; \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} |x|^{-1}, & \text{при} \quad 0 < |x| \leq 1; \\ 0, & \text{при} \quad x = 0; \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & \text{при} \quad x \in (0,1]; \\ 0, & \text{при} \quad x = 0; \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x}, & \text{при} \quad x \in (0,1]; \\ 0, & \text{при} \quad x = 0; \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{при} \quad x \in (0,1]; \\ 0, & \text{при} \quad x = 0; \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{при} \quad x \in [0,1); \\ 0, & \text{при} \quad x = 1; \\ 1, & \text{при} \quad x \in (1,2]; \end{cases}$

7. $f(x) = e^{-|x|}, \quad x \in [-2;2];$

8. $f(x) = e^{|x|}, \quad x \in [-3;3];$

9. $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{при} \quad x \in [0,1); \\ 5, & \text{при} \quad x = 1; \\ x+3, & \text{при} \quad x \in (1,2]; \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{при} \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}]; \\ 0, & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$

Завдання 2. *Знайти $F(x) = V(f, [a,x])$, $x \in [a,b]$, якщо:*

1. $f(x) = \max(x, 2-x^2), \quad 0 \leq x \leq 2;$

2. $f(x) = |\sin x|, \quad 0 \leq x \leq 2\pi;$

3. $f(x) = |\sin 2x|, \quad 0 \leq x \leq \pi;$

4. $f(x) = |\cos 2x|, \quad 0 \leq x \leq \pi;$

5. $f(x) = \max(0, 1 - |x|), \quad 0 \le x \le 2;$

6. $f(x) = \max\left(\frac{5}{2}x, 9 - x^2\right), \quad 0 \le x \le 3.$

   Нехай A- довільна множина з $\mathbf{R}$. *Знайти* $\mu_F(A)$, *якщо*:

7. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 1/2]; \\ -[-2x], & x \in (1/2; 3/2]; \\ 4, & x \in (3/2; \infty); \end{cases}$

8. $F(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty; 0]; \\ -[-e^x], & x \in (0; 1]; \\ 5, & x \in (1; \infty); \end{cases}$

9. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 1]; \\ 2, & x \in (1; 3]; \\ 5, & x \in (3; \infty); \end{cases}$

10. $F(x) = \begin{cases} -2, & -\infty \le x \le e; \\ 3, & e < x < \infty. \end{cases}$

Завдання 3. *Обчислити інтеграл* $\int_{\mathbf{R}} f(x)dF(x)$, *якщо*:

1. $f(x) = \sin x, \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0); \\ [x], & x \in [0; 100); \\ 100, & x \in [100; +\infty); \end{cases}$

2. $f(x) = F^2(x), \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0); \\ [x], & x \in [0; 100); \\ 100, & x \ge 100; \end{cases}$

3. $f(x) = x^2, \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0); \\ \left[x^2\right], & x \in [0; 100); \\ 10^4, & x \ge 100; \end{cases}$

4. $f(x) = x^4, \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0); \\ \left[x^2\right], & x \in [0; 100); \\ 10^4, & x \ge 100; \end{cases}$

5. $f(x) = F(x), \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0); \\ [2x], & x \in [0; 10); \\ 20, & x \ge 10; \end{cases}$

6. $f(x) = \sin 2x, \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \frac{1}{2}(1+x), & x \in (0;\pi); \\ \frac{x^2}{2}, & x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right); \\ 20, & x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]. \end{cases}$

7. $f(x) = F(x), F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \in (-\infty; 0); \\ \lfloor 2x \rfloor, & \text{якщо} \quad x \in [0; 10); \\ 20, & \text{якщо} \quad x \in [10; +\infty]; \end{cases}$

8. $f(x) = x^4, F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \in (-\infty; 0); \\ \lfloor x^2 \rfloor, & \text{якщо} \quad x \in [0; 100); \\ 10^4, & \text{якщо} \quad x \in [100; +\infty). \end{cases}$

Обчислити інтеграли :

9. $\int_{-1}^{1} (x^2+1) dF(x), F(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x \le 0; \\ \arctan \frac{1}{x}, & 0 < x \le 1. \end{cases}$

10. $\int_0^a x^2 d\ln(1+x), \quad a > 0.$

Завдання 4. *Обчислити інтеграл* $\int_{[a;b]} f(x) dF(x)$, *якщо*:

1. $f(x) = x, \quad F(x) = \cos x, \quad [a,b] = \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$

2. $f(x) = \sin x, \quad F(x) = |x|, \quad [a,b] = [-1; 1];$

3. $f(x) = x^3 + 1, \quad F(x) = \begin{cases} x+2, & \text{якщо} \quad x \in [-2; -1]; \\ 2, & \text{якщо} \quad x \in (-1; 0); \\ x^2 + 3, & \text{якщо} \quad x \in [0; 2]; \end{cases} \qquad [a,b] = [-2, 2];$

4. $f(x) = 2^x, \quad F(x) = sign \cos x, \quad [a,b] = [0; 2\pi];$

5. $f(x) = x^2 + 1, \quad F(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x \in [-1; 0]; \\ arctg \frac{1}{x}, & \text{якщо} \quad x \in (0; 1]; \end{cases} \qquad [a,b] = [-1, 1];$

6. $f(x) = \frac{1}{[x]!}, \quad F(x) = x, \quad [a,b) = [1, \infty);$

7. $f(x) = x^2, \ F(x) = \begin{cases} -1, & \text{якщо} \quad x < -\frac{\pi}{2}; \\ \sin x, & \text{якщо} \quad -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2}; \\ 1, & \text{якщо} \quad x \ge \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad (a,b) = (-\infty, +\infty).$

Зобразити функцію обмеженої варіації $f(x)$ *на відрізку* $[a,b]$ *у вигляді різниці двох зростаючих функцій*:

8. $f(x) = \cos x, \quad a = 2\pi, \quad b = 4\pi;$

9. $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{при} \quad x \in [0;1); \\ 0, & \text{при} \quad x = 1; \\ 1, & \text{при} \quad x \in (1;2], \end{cases} \qquad a = 0, \quad b = 2.$

10. *Довести, якщо* $V(f,[a;b]) < \infty$*, то* $V(|f|,[a;b]) < \infty$*. Чи має місце обернене твердження? Навести приклад.*

6 Метричні простори

Перелік необхідних питань теорії

1. Нерівності Коші-Буняковського, Коші-Гельдера, Мінковського.
2. Означення метрики, метричного простору.
3. Приклади метричних просторів.
4. Збіжність і фундаментальність у метричних просторах. Повнота метричного простору.
5. Топологія в метричному просторі(внутрішні, межові, граничні, ізольовані та точки дотику). Замикання множини. Відкриті і замкнені множини у метричних просторах.
6. Компактність у метричних просторах. Критерії компактності.
7. Цілком обмежені множини в метричних просторах. Критерій компактності Хаусдорфа.
8. Компактність у просторі $C_{[a,b]}$. Теорема Арцела.
9. Оператор стиску, його властивості.
10. Нерухома точка стискаючого відображення(оператора стиску). Теорема Банаха.
11. Застосування методу послідовних наближень до розв'язування алгебраїчних, диференціальних, інтегральних рівнянь.
12. Зв'язок між точністю наближення до розв'язку рівняння та кількістю ітерацій.

Теоретичні відомості

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n,\ b_1, b_2, \ldots, b_n$ – довільні комплексні числа, тоді для будь-яких $p, q \in \mathbf{R}$ таких, що $p > 1$, $q > 1$ та $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ має місце нерівність *Коші-Гельдера*:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k \cdot b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Для дійснозначних функцій $f(x)$ та $g(x)$, визначених на $[a,b]$ нерівність *Коші-Гельдера* має вигляд:

$$\int\limits_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Як частковий випадок, коли $p = q = 2$ нерівність Коші-Гельдера носить назву *Коші-Буняковського.*

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ – довільні комплексні числа такі, що $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k + b_k| > 0$, тоді для довільного $p \in \mathbf{R}$ такого, що $p > 1$ має місце нерівність *Мінковського*:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Для дійснозначних функцій $f(x)$ та $g(x)$, визначених на $[a,b]$ нерівність *Мінковського* має вигляд:

$$\left(\int\limits_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Метричним простором (X, ρ) називається множина елементів довільної природи, на якій введена метрика ρ – функція двох змінних, визначена на множині $X \times X$, що задовольняє таким умовам(аксіомам метрики):

1. $(\forall x, y \in X)\ \ \rho\,(x,y) \ge 0$, причому $\rho\,(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $(\forall x, y \in X)\ \ \rho\,(x,y) = \rho\,(y,x)$(умова симетричності);
3. $(\forall x, y, z \in X)\ \ \rho\,(x,y) \le \rho\,(x,z) + \rho\,(z,y)$ (нерівність трикутника).

Найпростішими прикладами метричних просторів є:

1. Множина дійсних чисел R з метрикою $\rho\,(x,y) = |x - y|\,;\ x, y \in \mathbf{R}$.
2. Простір n-вимірних векторів $\mathbf{R}^n$ з метрикою $\rho\,(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$, $x_k, y_k \in \mathbf{R}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

$2'$. Аналогічний метричний простір із n-вимірних векторів визначається метрикою $\rho_1\,(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|\,.$ Позначається цей простір $(\mathbf{R}_1^n, \rho_1)\,.$

$2''$. Якщо у просторі $\mathbf{R}^n$ ввести метрику $\rho_0(x,y) = \max\limits_{1\le k\le n} |y_k - x_k|$, тоді отримаємо метричний простір $(\mathbf{R}_0^n, \rho_0)$.

$2'''$. Якщо у просторі $\mathbf{R}^n$ ввести метрику $\rho_p(x,y) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, де $p \ge 1$ – будь-яке фіксоване число, тоді маємо метричний простір $\left(\mathbf{R}_p^n, \rho_p\right)$.

3. Множина послідовностей $l_p = \{x = (x_1, x_2, ...), x_k \in \mathbf{R}, k = 1, 2, \ldots\}$, для яких виконується умова $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ з метрикою $\rho(x,y) = \sqrt[p]{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p}$, де $p \ge 1$ – будь-яке фіксоване число.

4. Множина функцій $L_p[a,b]$, для яких виконується умова $\int_a^b |x(t)|^p\, dt < \infty$ з метрикою $\rho(x,y) = \sqrt[p]{\int_a^b |x(t) - y(t)|^p\, dt}$;

5. Множина функцій $C_{[a,b]}$,неперервних на сегменті $[a,b]$, з метрикою $\rho(x,y) = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$.

Зауважимо, що на кожній із цих множин метрику можна ввести не єдиним способом. Та якщо конкретний вигляд метрики не вказано, вважається, що метрика задана стандартно – як наведено вище.

6.1 Збіжність у метричних просторах. Відкриті і замкнені множини у метричних просторах. Компактність множини

Теоретичні відомості

Послідовність $\{x_n\} \subset X$ називається *збіжною* до елемента $a \in X$, якщо виконується умова $(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists n_\varepsilon \in N)\,(\forall n > n_\varepsilon) : \rho(x_n, a) < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$. Таку збіжність будемо називати *збіжністю за метрикою* $\rho = \rho(x,y)$.

Послідовність $\{x_n\} \subset X$ називається *фундаментальною*, якщо

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists n_\varepsilon \in N)\,(\forall n, m > n_\varepsilon) : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Іноді умову фундаментальності формулюють дещо інакше:

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists n_\varepsilon \in N)\,(\forall n > n_\varepsilon)\,(\forall p \in N) : \rho(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon.$$

Зауважимо, що зі збіжності послідовності випливає її фундаментальність, але зворотне твердження, взагалі кажучи, несправедливе.

Якщо у метричному просторі будь-яка фундаментальна послідовність є збіжною, тоді кажуть, що цей метричний простір є *повним*.

Відкритим ε-околом точки x_0 (позначається $U_\varepsilon(x_0)$) називається така множина елементів x із метричного простору (X, ρ), для яких виконується умова $\rho(x, x_0) < \varepsilon$.

Аналогічно *замкненим* ε-околом точки x_0 (позначається $U_\varepsilon[x_0]$) називається така множина елементів x із метричного простору, для яких виконується умова $\rho(x, x_0) \leq \varepsilon$.

Відкритим проколотим ε-околом точки x_0 називається така множина $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)$ елементів x із метричного простору, для яких виконується умова $0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon$, тобто де $x \neq x_0$.

Точка x_0 з метричного простору X називається *внутрішньою точкою множини* $M \subset X$, якщо існує такий відкритий ε-окіл точки x_0 $U_\varepsilon(x_0)$, що належить даній множині M. При цьому множина M метричного простору називається *відкритою*, якщо всі її точки є внутрішніми.

Точка x_0 з метричного простору X називається *точкою дотику* множини $M \subset X$, якщо будь-який відкритий ε-окіл точки x_0 має з даною множиною непорожній перетин: $U_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \varnothing$. При цьому *замиканням* множини M називається об'єднання всіх її точок дотику; а сама множина називається *замкненою*, якщо вона співпадає зі своїм замиканням. Замикання множини M позначається $[M]$.

Точка x_0 з метричного простору X називається *граничною* точкою множини M, якщо будь-який відкритий проколотий ε-окіл точки x_0 має з даною множиною непорожній перетин: $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \varnothing$.

Відмітимо, що останнє означення може бути сформульоване й іншим чином: точка x_0 називається *граничною* точкою множини M, якщо у даній множині існує нестаціонарна послідовність, збіжна до елемента x_0.

Точка x_0 називається *ізольованою* точкою множини M, $M \subset X$, якщо існує такий відкритий ε-окіл точки x_0, який у перетині з даною множиною дає єдину точку x_0, тобто $U_\varepsilon(x_0) \cap M = \{x_0\}$.

Точка x_0 з метричного простору X називається *межовою* точкою множини M, $M \subset X$, якщо будь-який відкритий ε-окіл точки x_0 містить як точки, що належать даній множині, так і точки, що їй не належать.

Множина M із метричного простору X називається *передкомпактною* (*відносно компактною*), якщо із будь-якої обмеженої її підмножини можна виділити фундаментальну послідовність.

Множина M із метричного простору X називається *компактною*, якщо із будь-якої обмеженої її підмножини можна виділити збіжну послідовність.

Для того, щоб сформулювати критерій компактності Хаусдорфа, необхідне наступне означення: множина B називається ε-сіткою для множини M, якщо $(\forall x \in M)\,(\exists y \in B) : \rho\,(x, y) < \varepsilon$.

Критерій компактності Хаусдорфа. Для того, щоб множина M була компактною, необхідно і досить, щоб для неї існувала скінченна ε-сітка, $\forall \varepsilon > 0$.

Теорема. У скінченновимірному метричному просторі замкнена обмежена множина є компактною.

Для перевірки компактності у просторі $C_{[a,b]}$ зручною є наступна теорема.

Теорема Арцела. Для того, щоб множина функцій K із простору $C_{[a,b]}$ була компактною, необхідно і досить, щоб вона була рівномірно обмеженою та одностайно(рівностепенево) неперервною.

Іншими словами,

1. $(\exists C \in R)\ (\forall x\,(t) \in K) : |x\,(t)| \leq C$;
2. $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta_\varepsilon > 0)\ (\forall t_1, t_2 \in [a, b])\ (|t_1 - t_2| < \delta)\ (\forall x\,(t) \in K) :$
$$|x\,(t_1) - x\,(t_2)| < \varepsilon.$$

Розв'язання типових задач

Завдання 1. *Чи задає метрику на просторі X функція $\rho\,(x, y)$, якщо:*

а) $X = \mathbf{R}, \quad \rho\,(x, y) = (x - y)^2$;

б) $X = \mathbf{R}^n, \quad \rho\,(x, y) = \min\left\{1,\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}\right\}$;

в) $X = C_{[a,b]}, \quad \rho\,(x, y) = \max\limits_{t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]} |x\,(t) - y\,(t)|$;

г) $X = l_p\,, \quad \rho\,(x, y) = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} |x_i - y_i|$.

Розв'язання. а) Функція $\rho(x, y)$ визначена для всіх значень $(x, y) \in \mathbb{R}$, причому $\rho(x, y) = (x - y)^2 \geqslant 0, \quad$ і $(x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$. Разом із цим $\rho(x, y) = (x - y)^2 = (y - x)^2 = \rho(y, x)$. Перевіримо виконання аксіоми трикутника:

$$\rho(x, y) = (x - y)^2 = (x - z + z - y)^2 = (x - z)^2 + (z - y)^2 + 2(x - z)(z - y).$$

Але отримана сума належним вибором x, y, z може бути зроблена більшою від $(x-z)^2+(z-y)^2$. А це означає, що умова $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z)+\rho(z, y)$

не виконується.

б) Оскільки $\rho(x,y)$ є мінімальним числом серед невід'ємних, то $\rho(x,y) \geq$ ≥ 0 для будь-яких $x,\ y \in R^n$, тобто $\rho(x,y)$ є визначеною коректно.

1) Нехай $x,\ y \in R^n$ та $x = y$. Це означає, що для $x = (x_1,\ x_2,\ \dots\ x_n)$ та $y = (y_1,\ y_2,\ \dots\ y_n)$ справедливі рівності $x_k = y_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тоді $\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2 = 0$ й, відповідно, $\rho(x,y) = \min\{1,\ 0\} = 0$. Навпаки, якщо

$$\rho(x,y) = \min\left\{1,\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}\right\} = 0,$$

то $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2} = 0$. Скінченна сума невід'ємних чисел може дорівнювати нулю тільки тоді, коли вони всі одночасно є нулями, тобто $x_k = y_k$ $\forall\, k = 1, 2, \dots, n$, а це означає, що $x = y$.

2) Виконання другої аксіоми метрики очевидне:

$$\rho(x,y) = \min\left\{1, \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}\right\} = \min\left\{1, \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2}\right\} = \rho(y,x).$$

3) Виберемо довільні $x,\ y,\ z \in R^n$ та розглянемо суму

$$\rho(x,z) + \rho(z,y) = \min\left\{1, \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2}\right\} + \min\left\{1, \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k - y_k)^2}\right\} =$$

$$= \min\left\{2,\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k - y_k)^2}\right\} \geq$$

$$\geq \min\left\{1,\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}\right\} = \rho(x,y).$$

В наведеному ланцюгу нерівностей використаний той факт, що має місце рівність $\min\{a+b\} = \min\{a\} + \min\{b\}$ та те, що $\rho_1(x,\ y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}$ є метрикою.

Отже, $\rho(x,y) = \min\left\{1,\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}\right\}$ є метрикою.

в) Найбільше значення множини абсолютних величин чисел є величина невід'ємна. Але якщо

$$\rho(x,y) = 0, \qquad \text{то} \qquad \max_{t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]} |x(t) - y(t)| = 0.$$

Це означає, що

$$x(t) - y(t) = 0 \qquad \forall t \in \left[\tfrac{a+b}{2}, b\right],$$

оскільки в протилежному випадку порушувалась би умова $\rho(x,y) = 0$. На іншій половині проміжка $[a,b]$, а саме для $t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ може виконуватись інша умова:

$$x(t) \neq y(t).$$

Тому умова $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ не виконується, отже $\rho\,(x,y)$ не є метрикою.

г) Оскільки $x, y \in l_p$, то із визначення l_p випливає, що виконуються умови $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ і $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |y_i|^p < \infty$, тобто послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, $n \in \mathbf{N}$ є обмеженими. Тому обмеженою буде й числова множина $\{x_n + y_n\}, n \in \mathbf{N}$. Таким чином для неї існує точна верхня грань. Отже, $\forall x, y \in l_p$ функція $\sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i - y_i|$ існує і набуває невід'ємних значень. Очевидно, що при $x = y$ (тобто коли $\forall i \in \mathbf{N}\ x_i = y_i$) $\sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i - y_i| = 0$. Разом із цим, якщо $\rho(x,y) = 0$,

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i - y_i| = 0 \Rightarrow \forall i \in \mathbf{N}\ \ |x_i - y_i| = 0 \Rightarrow \forall i \in \mathbf{N}\ x_i = y_i \Rightarrow x = y.$$

Виконання другої та третьої аксіом очевидне, тобто $\rho(x,y)$ задає метрику на X.

Завдання 2. *Дослідити на збіжність у метричному просторі X послідовність $\{x_n\}$, якщо:*

а) $X = \mathbf{R}, \quad x_n = n \sin \frac{1}{n}$;

б) $X = L_2[0,1], \qquad x_n(t) = t^n$;

в) $X = l_1, \qquad x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{9}, 0, \frac{1}{27}, 0, \ldots, \frac{1}{3^n}}_{2n-1}, 0, 0, \ldots \right)$;

г) $X = l_2, \qquad x_n = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0, 0, \ldots \right)$;

д) $X = l_2, \qquad x_n = \left(\underbrace{1, 1, \ldots, 1, 1}_{n}, 0, 0, \ldots \right)$.

Розв'язання. а) У просторі $\mathbf{R}$ поточкова збіжність співпадає зі збіжністю за метрикою, тому послідовність $\{x_n\}$ збіжна до

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

б) Знайдемо поточкову границю:

$$x_0(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \lim_{n\to\infty} t^n = \begin{cases} 0, & \text{при } t \in [0,1); \\ 1, & \text{при } t = 1. \end{cases}$$

Дослідимо цю послідовність на збіжність за метрикою:

$$\rho(x_n(t), x_0(t)) = \sqrt{\int_0^1 |t^n - x_0(t)|^2 \, dt} =$$

$$= \sqrt{\int_0^1 |t^n - 0|^2 \, dt + \int_1^1 |t^n - 1|^2 \, dt} = \sqrt{\int_0^1 t^{2n} dt + 0} =$$

$$= \sqrt{\left.\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Отже, дана послідовність збігається в $L_2[0,1]$. Відмітимо, що якби потрібно було дослідити цю послідовність на збіжність у просторі $C_{[0,1]}$, то навіть після знаходження поточкової границі було б зрозуміло, що збіжності немає, адже $x_0(t) \notin C_{[0,1]}$.

в) Знаходячи поточкову границю послідовності $\{x_n\} \subset l_1$, одержимо

$$x_0 = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{9}, 0, \ldots, 0, \frac{1}{3^n}, 0, \frac{1}{3^{n+1}}, 0, \ldots\right),$$

тобто послідовність, у якій $x_0^{(2k)} = 0$, $x_0^{(2k-1)} = \frac{1}{3^k}$. Така послідовність є елементом простору l_1, бо

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|x_0^{(i)}\right| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} < \infty.$$

Дослідимо тепер збіжність за метрикою.

$$\rho(x_n, x_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \left|x_n^{(i)} - x_0^{(i)}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right| + |0 - 0| + \left|\frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right| + \ldots + \left|\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^n}\right| + \sum_{i=n+1}^{\infty} \left|0 - \frac{1}{3^i}\right| =$$

$$= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{3^{n+1} \cdot 2} = \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

Оскільки послідовність $\frac{1}{2 \cdot 3^n}$ є нескінченно малою, то $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ за метрикою.

г) Поточковою границею послідовності з загальним членом

$$x_n = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0, 0, \ldots \right)$$

є нульовий елемент, тобто $x_0 = (0, 0, \ldots)$. Але

$$\rho(x_n, x_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \left| x_n^{(i)} - x_0^{(i)} \right|^2} = 1,$$

тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) \neq 0$. Отже, збіжності за метрикою немає.

д) Поточковою границею послідовності $\{x_n\}$ є $x_0 = (1, 1, 1, \ldots)$. Але оскільки ряд $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \left| x_0^{(i)} \right|$ є розбіжний, то дана послідовність не збігається навіть поточково.

Завдання 3. *Довести повноту метричного простору $C_{[a,b]}$.*

Розв'язання. Розглянемо довільну фундаментальну послідовність $\{x_n\}$ із $C_{[a,b]}$, тобто таку, для якої виконується

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathrm{N} \ \ \forall n > n_\varepsilon \ \forall p \in \mathrm{N} \ \max_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x_{n+p}(t)| < \varepsilon.$$

Перейдемо в останній нерівності до границі при $p \to \infty$. Очевидно, одержимо твердження

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathrm{N} \ \ \forall n > n_\varepsilon \ \ \max_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x(t)| \le \varepsilon < 2\varepsilon,$$

де $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$. Але твердження, яке ми отримали, є означенням рівномірно збіжної функціональної послідовності. А з курсу математичного аналізу відомо, що границею рівномірно збіжної послідовності неперервних функцій є неперервна функція. Тобто границя будь-якої фундаментальної послідовності з $C_{[a,b]}$ теж належить $C_{[a,b]}$, чим і підтверджується повнота цього метричного простору.

Завдання 4. *Визначити точки дотику, внутрішні, ізольовані, межові та граничні точки, а також замикання множини $A = [1,\ 7] \bigcup \{2n : n \in \mathbf{N}\}$.*

Розв'язання. Точка дотику множини A – це точка, будь-який окіл якої має непорожній перетин з множиною A. Тому множина точок дотику є $[1,\ 7] \bigcup \{2n:\ n \in N\} = A$.

Внутрішня точка – це точка, що міститься в A разом з деяким своїм околом. Тому внутрішніми є точки відкритого інтервалу $(1, 7)$.

Ізольвана точка множини A – це така точка для якої існує відкритий окіл, що у перетині з множиною A дає тільки цю точку. Тому ізольованими будуть: $\{2n:\ n = 4,\ 5,\ 6,\ \ldots\}$.

Межова точка множини A – це точка в кожному околі якої містяться як точки, що належить множині A, так і точки, що їй не належать. Межовими будуть: $\{1,\ 7\} \bigcup \{2n:\ n = 4,\ 5,\ 6,\ \ldots\}$.

Очевидно, існують проколоті околи $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_{2n})$ (наприклад, при $\varepsilon = \frac{1}{3}$), де $x_{2n} = 2n$, що $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_{2n}) \cap \{2n : n = 4, 5, 6, \ldots\} = \varnothing$. Також, очевидно, що для $\forall x_0 \in [1, 7]$ маємо $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_{2n}) \cap [1, 7] \neq \varnothing$. Отже, граничними є кожна точка $[1,\ 7]$.

Замикання множини – це сукупність всіх її точок дотику, тому $[A] = [1,\ 7] \bigcup \{2n:\ n \in N\}$.

Завдання 5. *Дослідити на компактність у просторі $C_{[0,1]}$ такі множини:*

а) $x_n(t) = t^n, n \in \mathbf{N}$;

б) $x_n(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbf{N}$;

в) $x_\alpha(t) = \cos(t + \alpha), \alpha \in \mathbf{R}$;

г) $x_\alpha(t) = \cos(\alpha t), \alpha \in \mathbf{R}$;

д) $x_n(t) = e^{t-n}, n \in \mathbf{N}$.

Розв'язання. Для дослідження компактності у просторі неперервних на $[a, b]$ функцій $C_{[a,b]}$ використовують теорему Арцелла, згідно якої, для компактності множини функцій $K \subset C_{[a,b]}$ достатньо, щоб множина K була рівномірно обмеженою та одностайно неперервною.
а) Дана множина є рівномірно обмеженою, бо

$$\exists C = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \forall t \in [0, 1] : |t^n| \leq C.$$

Перевіримо умову одностайної неперервності:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall t_1, t_2 \in [0, 1] \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad |x_n(t_1) - x_n(t_2)| < \varepsilon.$$

Утворивши вираз $|x_n(t_1) - x_n(t_2)| = |t_1^n - t_2^n|$, і перетворюючи його за допомогою формули Лагранжа, одержуємо вираз, котрий неможливо оцінити зверху сталою, не залежною від n : $|t_1^n - t_2^n| = n\xi^{n-1} |t_1 - t_2|$. Тому спробуємо довести заперечення даного твердження:

$$\exists\varepsilon > 0 \quad \forall\delta_\varepsilon > 0 \quad \exists t_1, t_2 \in [0,1] \quad \exists n \in \mathbf{N} \quad |x_n(t_1) - x_n(t_2)| \geq \varepsilon.$$

На цьому етапі важливо зрозуміти геометричний зміст умови одностайної неперервності, схожий до змісту умови рівномірної неперевності, що вивчалась в курсі математичного аналізу: незалежно від значення параметру n, двом досить близьким значенням аргументу відповідають як завгодно близькі значення функції. Тому, якщо потрібно довести заперечення умови одностайної неперевності, треба підібрати значення t_1, t_2 з тієї частини проміжку $[0,1]$, де функції зростають чи спадають якнайшвидше. На відповідних графіках функцій $y(t) = t^n$ видно, що функції найшвидше зростають при великих значеннях n коли t знаходиться в околі одиниці. Тому виберемо $t_1 = 1$, $t_2 = 1 - \frac{1}{n}$. При цьому $|t_1 - t_2| = \frac{1}{n}$, що може бути зробленим меншим від δ, адже $\forall\delta > 0 \quad \exists n \in \mathbf{N} : n > \frac{1}{\delta}$. Дослідимо тепер

$$|x_n(t_1) - x_n(t_2)| = \left|1 - \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^n\right| \to 1 - e^{-1} \neq 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким чином, множина не є одностайно неперервною, а тому не буде і компактною.

б) Оскільки $\forall t \in [0,1]$ справджуються очевидні нерівності $-\frac{1}{2} \leq t - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$, або або $\forall n \in N$, $|x_n(t)| \leq \frac{1}{2}$, то виконується умова рівномірної обмеженості функцій із $C_{[0,1]}$.

Перевіримо, чи має місце одностайна неперервність, тобто, чи виконується умова:

$$(\forall\epsilon > 0), (\exists\delta_\epsilon > 0), (\forall n \in N), (\forall t_1, t_2 : |t_1 - t_2| < \delta) : \left|\left(t_1 - \tfrac{1}{2}\right)^n - \left(t_2 - \tfrac{1}{2}\right)^n\right| < \varepsilon.$$

Згідно теореми Лагранжа $\exists\xi \in (0,1)$ така, що

$$\left|(t_1 - \tfrac{1}{2})^n - (t_2 - \tfrac{1}{2})^n\right| = \left|n\left(t - \tfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right|_{t=\xi} |t_1 - t_2| = n\left|\xi - \tfrac{1}{2}\right|^{n-1} |t_1 - t_2|.$$

Послідовність $n \cdot a^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ якщо тільки $|a| < 1$. Тому вона буде обмеженою, тобто $\exists C$, $(\forall n \in N)$: $n\left|\xi - \frac{1}{2}\right| \leq C$. Тоді

$$\left|(t_1 - \tfrac{1}{2})^n - (t_2 - \tfrac{1}{2})^n\right| = C\,|t_1 - t_2| \leq C \cdot \delta.$$

Для виконання умови $\left|(t_1 - \frac{1}{2})^n - (t_2 - \frac{1}{2})^n\right| < \varepsilon$ досить вимагати, щоб $C \cdot \delta < \varepsilon$, тобто $\delta < \frac{\varepsilon}{C}$. Існування параметра δ доводить компактність даної послідовності.

в) Очевидно, що $(\forall\alpha \in R) : |\cos(\alpha + t)| \leq 1$, тобто множина є рівномірно обмеженою. Разом із цим

$$|\cos(\alpha + t_1) - \cos(\alpha + t_2)| = \left|(\cos(\alpha + t))'_{t=\xi}\right| |t_1 - t_2| =$$
$$= |\sin(\alpha + \xi)|\,|t_1 - t_2| \leq |t_1 - t_2| < \delta.$$

Таким чином, вибравши $\delta < \varepsilon$, ми довели одностайну неперервність даної множини, а разом із цим і її компактність.

г) Як і в попередньому випадку $(\forall\alpha \in R) : |\cos\alpha t| \leq 1$. Але

$$|\cos\alpha t_1 - \cos\alpha t_2| = |\alpha sin(\alpha\xi)|\,|t_1 - t_2|.$$

Розглядаючи $\alpha = \frac{1}{\xi}\cdot\frac{\pi}{2}$, і $t_2 = t_1 + \xi$, отримаємо

$$|\cos\alpha t_1 - \cos\alpha t_2| = \tfrac{1}{\xi}\cdot\tfrac{\pi}{2}\cdot\sin(\tfrac{1}{\xi}\cdot\tfrac{\pi}{2}\cdot\xi)\,|\xi| = \tfrac{\pi}{2} \nrightarrow 0.$$

Таким чином, умова одностайної неперервності не виконується, і тому дана множина не є компактною.

д) При $t \in [0,1]$ $\forall n \in N$ $0 < e^{t-n} \le e^{1-1} = e^0 = 1$, тому дана множина є рівномірно обмеженою.

$$\left|e^{t_1-n} - e^{t_2-n}\right| = \left|e^{\xi-n}\right| |t_1 - t_2| \le |t_1 - t_2| < \delta.$$

Як тільки $\varepsilon > \delta$, то одностайна неперервність має місце. Таким чином, множина є компактною.

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *Чи є метрикою в* X *функція* $\rho(x,y)$, *якщо:*

1. $X = C_{[0,1]}$, $\quad \rho(x,y) = \max\limits_{t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} |x(t) - y(t)|\,;$
2. $X = \mathbf{R}^n$, $\quad \rho(x,y) = \max\limits_{1\le i\le n} ||x_i| - |y_i||\,;$
3. $X = C_{[a,b]}$, $\quad \rho(x,y) = \int\limits_a^b |x(t) - y(t)|\,dt;$
4. $X = \mathbf{R}^+$, $\quad \rho(x,y) = |\ln(x+1) - \ln(y+1)|\,;$
5. $X = l_2$, $\quad \rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=k_0}^{\infty}(x_k - y_k)^2};$
6. $X = l_p$, $\quad \rho(x,y) = \sqrt[p]{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^p};$
7. $X = C_{[0,1]}$, $\quad \rho(x,y) = \max\limits_{t\in\left[\frac{1}{2},1\right]} \left|x'(t) - y'(t)\right| + \max\limits_{t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} |x(t) - y(t)|\,;$
8. $X = \mathbf{R}$, $\quad \rho(x,y) = 1 - \cos|x - y|\,;$
9. $X = C_{[a,b]}$, $\quad \rho(x,y) = |x(a) - y(b)|\,;$
10. $X = \mathbf{R}$, $\quad \rho(x,y) = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right|.$

Завдання 2. *Чи є збіжною в* X *послідовність* $\{x_n\}$, *якщо:*

1. $X = C_{[0,1]}$, $\quad x_n(t) = t^{3n} - t^{3n-1};$

2. $X = R^m, \quad x_n = \left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \ldots, \frac{1}{2^{n+m}}\right);$

3. $X = l_2, \quad x_n = \left(\underbrace{1, 0, 1, 0, .., 1}_{2n-1}, 0, 0, 0...\right);$

4. $X = L_2\,[0,1]\,, \quad x_n\,(t) = e^{-nt};$

5. $X = l_2, \quad x_n = \left(1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}.., \frac{1}{2n-1}, 0, 0, 0...\right);$

6. $X = C_{[2,3]}, \quad x_n\,(t) = 2^{-nt};$

7. $X = C_{[0,1]}, \quad x_n(t) = \ln\left(1 + \dfrac{t}{n}\right);$

8. $X = C_{[0,1]}, \quad x_n(t) = \dfrac{nt}{1+nt};$

9. $X = C_{[0,1]}, \quad x_n(t) = \mathrm{arctg}(t+n);$

10. $X = l_2, \quad x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n}, 0, 0, \ldots\right).$

Завдання 3. *Визначити точки дотику, внутрішні, ізольовані, межові та граничні точки множини A, а також замикання цієї множини:*

1. $A = [2,4) \bigcup [7,8)\,;$
2. $A = [0,9) \bigcup \{1, 10, 100\}\,;$
3. $A = [1,4) \bigcup \{e^{-n} : n \in \mathbf{N}\}\,;$
4. $A = [2,3) \bigcup \left\{n^2 : n \in \mathbf{N}\right\};$
5. $A = \left\{\frac{(-1)^n}{n} + (-1)^n : n \in \mathbf{N}\right\};$
6. $A = (0,3) \bigcup \left\{\sin\frac{\pi n}{4} : n \in \mathbf{N}\right\};$
7. $A = \mathbf{N} \cup [1,8);$
8. $A = [1,4) \bigcup \mathbf{Q}_{[0,1]};$
9. $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\} \cup (1,5);$
10. $A = [2,5) \bigcup \left\{2 + \dfrac{1}{1+n^2} : n \in \mathbf{N}\right\}.$

Завдання 4. *Чи є компактною в метричному просторі $C_{[a,b]}$ множина функцій $x_n(t)$, якщо:*

1. $[a,b] = \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \; x_n(t) = (2t)^n;$

2. $[a,b] = [2,3], \quad x_n(t) = (t-2)^n;$

3. $[a,b] = [0,1]\,, \; x_\alpha(t) = \sin\left(\alpha + t\right), \alpha \in \mathbf{R};$

4. $[a,b] = [2,3], \quad x_n(t) = (t-2)^n;$

5. $[a,b] = [0,1]\,, \; x_\alpha(t) = \sin\left(\alpha t\right), \alpha \in \mathbf{R};$

6. $[a,b]=[0,1]\,,\ x_n(t)=\dfrac{t^n}{n};$

7. $[a,b]=[0,1]\,,\ x_n(t)=\operatorname{arctg}\dfrac{t}{n};$

8. $[a,b]=[0,1]\,,\ x_n(t)=3^{-nt};$

9. $[a,b]=[0,1]\,,\ x_n(t)=e^{t-n};$

10. $[a,b]=[0,1]\,,\ x_n(t)=\operatorname{arcctg} nt.$

6.2 Принцип стискаючих відображень. Теорема Банаха

Теоретичні відомості

Нехай (X,ρ) – метричний простір. Відображення цього простору в себе, $A: X\to X$ називається *стискаючим*, якщо

$$(\exists\alpha\in(0,1))\ \ (\forall x_1,x_2\in X):\ \rho\left(Ax_1,Ax_2\right)\le\alpha\rho\left(x_1,x_2\right).$$

Точка x^* називається *нерухомою точкою* відображення $A: X\to X$ якщо $Ax^*=x^*$. Відображення A називається ще *оператором стиску*, а точка x^* називається *нерухомою точкою* оператора.

Теорема Банаха. Стискаюче відображення, що діє в повному метричному просторі, має одну і тільки одну нерухому точку.

Для розв'язування алгебраїчних, інтегральних, диференціальних рівнянь застосовується метод послідовних наближень. Ідея методу проілюстрована в доведенні теореми Банаха, і вона полягає в тому, щоб привести задане рівняння $Ax=0$ до еквівалентного вигляду

$$x=\widetilde{A}x,$$

де відображення $\widetilde{A}$ було б стискаючим. Тоді, обравши довільно елемент x_0, послідовно знаходимо $x_1=\widetilde{A}x_0,\ x_2=\widetilde{A}x_1,\dots,x_n=\widetilde{A}x_{n-1}$. Нарешті, точний розв'язок x^* знаходиться в результаті граничного переходу при $n\to\infty$: $x^*=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Якщо знайти загальний вигляд x_n складно, тоді знаходять розв'язок наближено з потрібною точністю. При цьому користуються наступним наслідком теореми Банаха: якщо відображення $A: X\to X$ стискаюче, то $\rho\left(x_n,x^*\right)\le\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho\left(x_0,Ax_0\right)$.

При розв'язуванні інтегральних рівнянь корисним також є таке твердженням: якщо оператор A визначається формулою

$$Ax(t)=\lambda\int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds+g(t)$$

та діє з простору $C_{[a,b]}$ в простір $C_{[a,b]}$, де $K(t,s)$– неперервна на $[a,b]\times[a,b]$ функція, $x(t)$, $g(t)\in C_{[a,b]}$, то $Ax(t)$ є оператором стиску для будь-якого $\lambda\in\mathbf{R}$.

Розв'язання типових задач

Завдання 1. *Нехай $K(t,s)$– неперервна фнукція в прямокутнику $[a,b]\times[a,b]$. При якому λ оператор $Ax(t)=\lambda\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds+\varphi(t)$, $\varphi(t)\in C_{[a,b]}$ є оператором стиску в просторі $C_{[a,b]}$?*

Розв'язання. Оператор $Ax(t)$ є оператором стиску, якщо

$$(\exists\alpha\in(0,1))\ \left(\forall x(t),y(t)\in C_{[a,b]}\right):\ \rho(Ax,Ay)\le\alpha\rho\left(x(t),y(t)\right).$$

Справедливі такі співвідношення:

$$\rho\left(Ax,Ay\right)=\max_{a\le t\le b}\left|\lambda\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds+\varphi(t)-\lambda\int\limits_a^b K(t,s)y(s)ds-\varphi(t)\right|=$$

$$=\max_{a\le t\le b}\left|\lambda\int\limits_a^b K(t,s)\left(x(s)-y(s)\right)ds\right|\le\max_{a\le t\le b}|\lambda|\int\limits_a^b|K(t,s)|\left|x(s)-y(s)\right|ds\le$$

$$\le|\lambda|\,M\int\limits_a^b\max_{a\le s\le b}|x(s)-y(s)|\,ds=|\lambda|\,M\max_{a\le s\le b}|x(s)-y(s)|\,(b-a)=$$

$$=|\lambda|\,M\,(b-a)\,\rho(x,y).$$

У процесі даних оцінок ми використали те, що функція $K(t,s)$ є неперервна на замкненій обмеженій множині $[a,b]\times[a,b]$, тому вона є й обмежена на ній, тобто $\forall(t,s)\in[a,b]\times[a,b]$, $|K(t,s)|\le M$. Крім того врахували властивості інтегралів Рімана.

Таким чином, для того, щоб $Ax(t)$ був оператором стиску достатньо, щоб $0<|\lambda|\,M\,(b-a)<1$, або $0<|\lambda|<\dfrac{1}{M(b-a)}$.

Завдання 2. *Довести, що рівняння $x(t)+\dfrac{1}{2}\cos x(t)+\varphi(t)=0$, де $x(t)$ та $\varphi(t)\in C_{[a,b]}$ має єдиний розв'язок в $C_{[a,b]}$.*

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді

$$-\frac{1}{2}\cos x(t)-\varphi(t)=x(t),$$

тоді якщо $Ax(t)=-\dfrac{1}{2}\cos x(t)-\varphi(t)$, то рівняння має вигляд

$$Ax(t)=x(t).\tag{6.1}$$

Оскільки метричний простір $C_{[a,b]}$ є повним, то існування і єдиність розв'язку операторного рівняння (6.1) випливає з теореми Банаха, оскільки A є оператором стиску, що є очевидним:

$$\rho\left(Ax(t), Ay(t)\right) = \max_{t\in[a,b]}\left|-\frac{1}{2}\cos x(t) - \varphi(t) + \frac{1}{2}\cos y(t) + \varphi(t)\right| =$$

$$= \max_{t\in[a,b]}\left|-\frac{1}{2}\cos x(t) + \frac{1}{2}\cos y(t)\right| = \max_{t\in[a,b]}\left|\sin\frac{x(t)+y(t)}{2}\cdot\sin\frac{x(t)-y(t)}{2}\right| \le$$

$$\le \max_{t\in[a,b]}\left|\sin\frac{x(t)-y(t)}{2}\right| \le \max_{t\in[a,b]}\frac{1}{2}\left|x(t)-y(t)\right| = \frac{1}{2}\rho(x(t), y(t)).$$

В останньому ланцюжку перетворень ми використали нерівності $|\sin x| \le |x|$ та $|\sin x| \le 1$.

Таким чином для $\alpha = \dfrac{1}{2}$ оператор A є оператором стиску. Тому рівняння, що задане в умові, має єдиний розв'язок.

Завдання 3. *Методом послідовних наближень розв'язати інтегральне рівняння задане в просторі* $C_{[0,1]}$:

а) $x(t) = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 ts^2x(s)ds + 1;$

б) $x(t) = \dfrac{t^2}{2} + t + \int\limits_0^t x(s)ds.$

Розв'язання. а) Спочатку перевіримо, чи є відображення

$$Ax(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 ts^2x(s)ds + 1$$

стискаючим в просторі $C_{[0,1]}$:

$$\rho\left(Ax(t), Ay(t)\right) = \max_{0\le t\le 1}\left|\frac{1}{2}\int_0^1 ts^2x(s)ds + 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 ts^2y(s)ds - 1\right| =$$

$$= \max_{0\le t\le 1}\left|\frac{1}{2}\int_0^1 ts^2\left(x(s)-y(s)\right)ds\right| \le \max_{0\le t\le 1}\frac{1}{2}\int_0^1\left|ts^2\right|\max_{0\le s\le 1}|x(s)-y(s)|\,ds =$$

$$= \max_{0\le t\le 1}\frac{1}{2}t\cdot\left.\frac{s^3}{3}\right|_0^1\cdot\rho\left(x(t), y(t)\right) = \frac{1}{6}\rho\left(x(t), y(t)\right).$$

Таким чином, застосування методу послідовних наближень до розв'язання інтегрального рівняння є можливим. Виберемо нульове наближення. Нехай $x_0(t) = 0$. Тоді

$x_1(t) = 1;$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 ts^2 ds + 1 = \frac{1}{2}t\left.\frac{s^3}{3}\right|_0^1 + 1 = \frac{1}{6}t + 1;$$

$$x_3(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 ts^2\left(\frac{1}{6}s + 1\right)ds + 1 = \frac{1}{12}t\left.\frac{s^4}{4}\right|_0^1 + \frac{1}{2}t\left.\frac{s^3}{3}\right|_0^1 + 1 = \frac{t}{3!}\left(1 + \frac{1}{8}\right) + 1;$$

$$x_4(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 ts^2\left(\frac{s}{3!}\left(1 + \frac{1}{8}\right) + 1\right)ds + 1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{8} + 1\right)t\left.\frac{s^4}{4}\right|_0^1 +$$

$$+\frac{1}{2}t\left.\frac{s^3}{3}\right|_0^1 + 1 = \frac{t}{3!}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2}\right) + 1.$$

За індукцією одержимо

$$x_n(t) = \frac{t}{3!}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \ldots + \frac{1}{8^{n-2}}\right) + 1.$$

Для знаходження розв'язку здійснимо граничний перехід:

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \frac{t}{3!}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \ldots + \frac{1}{8^n} + \ldots\right) + 1 =$$

$$= \frac{t}{3!}\frac{1}{1 - \frac{1}{8}} + 1 = \frac{t}{3!}\cdot\frac{8}{7} + 1.$$

б) Безпосередньою перевіркою (див. приклад а)) переконуємося в тому, що відображення $Ax(t) = \frac{t^2}{2} + t + \int\limits_0^t x(s)ds$ є оператором стиску. Тому для знаходження розв'язку інтегрального рівняння можемо застосовувати медод послідовних наближень. За нульове наближення виберемо $x_0(t) = 0$.

$$x_1(t) = \frac{t^2}{2} + t = \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2!}\right) - 1\right] + \left[(1 + t) - t - 1\right].$$

$$x_2(t) = \frac{t^2}{2} + t + \int\limits_0^t \left(\frac{s^2}{2} + s\right)ds = \frac{t^2}{2} + t + \left.\left(\frac{s^3}{3!} + \frac{s^2}{2}\right)\right|_0^t = \frac{t^2}{2} + t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^2}{2!} =$$

$$= \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\right) - 1\right] + \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2!}\right) - t - 1\right].$$

$$x_3(t) = \frac{t^2}{2} + t + \int\limits_0^t \left(\frac{s^2}{2} + s + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^2}{2!}\right)ds = \frac{t^2}{2} + t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^3}{3!} =$$

$$= \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!}\right) - 1\right] + \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\right) - t - 1\right].$$

$$x_4(t) = \frac{t^2}{2} + t + \int\limits_0^t \left(\frac{s^2}{2} + s + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + \frac{s^3}{3!} \right) ds = \frac{t^2}{2} + t +$$

$$+ \frac{t^3}{3!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^4}{4!} =$$

$$= \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} \right) - 1 \right] + \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} \right) - t - 1 \right].$$

Таким чином за індукцією отримаємо, що

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k!} - 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - t - 1.$$

Знайшовши границю $x_n(t)$, отримаємо розв'язок:

$$x(t) = \lim_{n \to \infty} x_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} - 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} - t - 1 = 2e^t - t - 2.$$

Завдання 4. *Довести, що рівняння $x^5 + x + 1 = 0$ має єдиний корінь та знайти проміжок, якому цей корінь належить. Звести рівняння до такого вигляду, щоб його можна було розв'язати методом послідовних наближень. Знайти кількість ітерацій, необхідних для знаходження кореня з точністю, що не перевищує $0,01$.*

Розв'язання. Доведення існування і єдиності кореня здійснимо графічними міркуваннями. Перепишемо рівняння у вигляді $x^5 = -x - 1$. Зобразимо графіки функцій $y = x^5$ та $y = -x - 1$.

Мал. 1

З мал. 1 видно, що графіки мають єдину точку перетину, причому її абсциса $x \in (-1, 0)$.

Зобразимо рівняння у вигляді $x = x - \lambda \left(x^5 + x + 1 \right)$ та підберемо параметр λ так, щоб формула $Ax = x - \lambda \left(x^5 + x + 1 \right)$ визначала оператор стиску. Тоді, оскільки $\mathbf{R}$ є повним метричним простором, оператор A матиме єдину нерухому точку. Звідси випливатиме, що початкове рівняння має єдиний розв'язок.

Позначимо $g(x) = x^5 + x + 1$. Розглянемо рівності (врахувавши, що метрика в $\mathbf{R}$ визначається так: $\rho(x, y) = |x - y|$):

$$\rho(Ax, Ay) = |x - \lambda g(x) - y + \lambda g(y)| = |(x - y) + \lambda (g(y) - g(x))| =$$
$$= \left|(x - y) - \lambda g'(z)(x - y))\right| = |x - y| \left|1 - \lambda g'(z)\right|.$$

Оскільки $g'(x) = 5x^4 + 1 > 0$, функція $g(x)$ зростає на $[-1, 0]$, то

$$\min_{x\in[-1,0]} g(x) = g(-1) = -1, \quad \max_{x\in[-1,0]} g(x) = g(0) = 1,$$

тому вибравши $\lambda = \frac{1}{6}$, матимемо

$$\rho(Ax, Ay) = |x - y| \left|1 - \frac{1}{6} g'(z)\right| \leq |x - y| \left|1 - \frac{1}{6} \cdot 1\right| = \frac{5}{6} |x - y| = \frac{5}{6} \rho(x, y).$$

Використаємо формулу

$$\rho(x_n, x) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(Ax_0, x_0).$$

За нульове наближення виберемо $x_0 = 0$, тоді $Ax_0 = -\frac{1}{6}$, $\rho(Ax_0, x_0) = \frac{1}{6}$. Тому для знаходження кількості ітерацій залишається розв'язати нерівність

$$\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 - \frac{5}{6}} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,01\,,$$
$$n > \log_{\frac{5}{6}} 0,01.$$

Найменший натуральний розв'язок останньої нерівності є шукана кількість ітерацій.

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *Методом послідовних наближень розв'язати інтегральне рівняння в просторі* $C_{[a,b]}$:

1. $x(t) = 1 + \int_0^t x(s)\, ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a, b] = [0, 1];$

2. $x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(t - s) + \sin(t + s))\, x(s)\, ds + 1, \quad x_0(t) = 0, \quad [a, b] = [0, \pi];$

3. $x(t) = 2^t + \int_0^t 2^{t-s} x(s)\, ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a, b] = [0, 1];$

4. $x(t) = 1 + t^2 - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1+t^2}{1+s^2} x(s)\, ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a, b] = [0, 1];$

5. $x(t) = t - \int_0^t (t - s)\, x(s)\, ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a, b] = [0, 1];$

6. $x(t) = 1 + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 s x(s)\, ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a,b] = [0,\pi];$

7. $x(t) = t^2 + \int_0^2 x(s)\, ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a,b] = [0,2];$

8. $x(t) = 1 + \int_0^1 s^3 x(s)\, ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a,b] = [0,1];$

9. $x(t) = 1 + \int_0^1 t^2 s^2 x(s)\, ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a,b] = [0,1];$

10. $x(t) = 2\cos t - \dfrac{\cos t}{2\pi}\int_0^{\pi} t^2 s x(s)\, ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a,b] = [0,\pi].$

Завдання 2. *Довести, що задане рівняння має єдиний корінь та знайти проміжок, якому цей корінь належить. Звести рівняння до такого вигляду, щоб його можна було розв'язати методом послідовних наближень. Знайти кількість ітерацій, необхідних для знаходження кореня з точністю, що не перевищує* $0,01$*, якщо:*

1.	$x^3 + x - 3 = 0;$	**2.**	$x^5 + 2x - 1 = 0;$
3.	$x^7 + x - 4 = 0;$	**4.**	$x^5 + x - 5 = 0;$
5.	$x^3 + 3x - 1 = 0;$	**6.**	$x^5 + 3x - 2 = 0;$
7.	$x^5 + x + 4 = 0;$	**8.**	$x^3 + 3x + 3 = 0;$
9.	$x^5 + 6x + 1 = 0;$	**10.**	$x^5 + 10x - 1 = 0.$

7 Лінійні нормовані простори. Збіжність у нормованих просторах

Перелік необхідних питань теорії

1. Лінійний простір. Підпростір лінійного простору.
2. Ізоморфізм у лінійних просторах.
3. Лінійна залежність і незалежність.
4. Базис лінійного простору. Розмірність.
5. Означення норми і нормованого простору.
6. Збіжність у нормованих просторах.
7. Повнота нормованого простору.

Теоретичні відомості

Лінійним або *векторним простором* над полем дійсних чисел $\mathbf{R}$ називається непорожня множина L, якшо ця мнодина задовольняє таким умовам:
1. Для будь-яких двох елементів x, y із L однозначно визначений третій елемент із L, який позначається символом $x + y$ і називається сумою елементів x та y та виконуються аксіоми:

1) $(\forall x, y \in L) : (x + y = y + x)$ (комутативність);
2) $(\forall x, y, z \in L) : ((x + y) + z = x + (y + z))$ (асоціативність);
3) $(\exists \theta \in L) (\forall x \in L) : (x + \theta = x)$ (існування нульового елемента);
4) $(\forall x \in L) (\exists - x \in L) : (x + (-x) = \theta)$ (існування протилежного елемента).

Введену операцію, що задовольняє цим аксіомам, називаємо додаванням елементів у просторі L.
2. Для будь-якого дійсного числа $\alpha \in \mathbf{R}$ і довільного елемента $x \in L$ визначений елемент $\alpha x \in L$ (добуток x на число α), причому виконуються такі аксіоми:

1) $(\forall \alpha,\, \beta \in R) (\forall x \in L)\; :\; (\alpha\, (\beta x) = (\alpha\beta)\, x)$ (асоціативний закон множення);

2) $(\forall x \in L) : (1 \cdot x = x)$ (множенню одиниці на елемент x відповідає цей же елемент $x \in L$);

3) $(\forall \alpha, \beta \in R)\,(\forall x \in R) : ((\alpha + \beta)\,x = \alpha x + \beta x)$ (дистрибутивний закон множення);

4) $(\forall \alpha \in R)\,(\forall x, y \in L) : (\alpha\,(x + y) = \alpha x + \alpha y)$ (дистрибутивний закон множення).

Аксіоми 3) і 4) формулюють правило «розкриття дужок» в просторі L. Введений цим визначенням лінійний простір L над полем дійсних чисел $\mathbf{R}$ називають дійсним лінійним простором. Якщо ж замість поля дійсних чисел розглядати поле комплексних чисел $\mathbf{C}$, тоді такий лінійний простір L називається комплексним лінійним простором. Можна розглядати лінійні простори над довільним полем.

Підмножина L_1 лінійного простору L називається *підпростором* лінійного простору L, якщо L_1 є лінійним простором відносно операцій, введених в L. Інакше, L_1 – підпростір лінійного простору L, якщо для довільних $x, y \in L_1$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ маємо $\alpha x + \beta y \in \mathbf{R}$.

Множина елементів $x_1, x_2, ..., x_n$ з лінійного простору L називається *лінійно залежною*, якщо існують такі дійсні числа $c_1, c_2, ..., c_n$, не всі рівні нулю, що $c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n = \theta$. Якщо ж цей вираз дорівнює нульовому елементу лише при $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$, то множина $x_1, x_2, ..., x_n$ називається *лінійно незалежною*.

Нескінченна система елементів $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$ із лінійного простору L називається *лінійно незалежною*, якщо будь-яка її скінченна підсистема лінійно незалежна.

Множина елементів $x_1, x_2, ..., x_n$ з лінійного простору L називається *базисом* лінійного простору L, якщо вона є лінійно незалежною, але додавання до неї будь-якого елемента перетворює її в лінійно залежну. Іншими словами, базис – максимальна лінійно незалежна система елементів з L.

Відомо, що якщо множина елементів $x_1, x_2, ..., x_n$ є базисом у лінійному просторі L, то будь-який елемент із L може бути зображений (причому єдиним способом) у вигляді лінійної комбінації елементів базису.

Усі базиси одного й того ж лінійного простору L складаються з однакової кількості елементів, причому число елементів базису називається *розмірністю* лінійного простору. *Базисом* в n-вимірному просторі L називається будь-яка система із n лінійно незалежних елементів. Якщо ж в просторі L можна вказати систему із довільного скіченного числа лінійно незалежних елементів, тоді такий простір L назвемо *нескінченновимірним.*

Лінійний простір L називається *нормованим простором*, якщо кожному його елементу x ставиться у відповідність дійсне невід'ємне число $\|x\|$ (*норма* x), причому виконуються такі умови:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

2) $\forall \alpha \in R, \forall x \in L : \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$;

3) $\forall x, y \in L : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Відмітимо, що будь-який лінійний простір, на якому задана метрика $\rho(x, y)$, є нормованим простором з нормою $\|x\| = \rho(x, \theta)$. В одному і тому ж лінійному просторі L норма може задаватись по-різному. Прикладами нормованих просторів є:

1. Множина дійсних чисел $\mathbf{R}$ з нормою $\|x\| = |x|$;
2. Простір n-вимірних векторів $\mathbf{R}^n$ з нормою $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$;
3. Множина послідовностей $l_p = \{(x_1, x_2, ...), x_i \in \mathbf{R}\}$ для яких виконується умова $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ з нормою $\|x\| = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p}$, де число $p \geq 1$ фіксоване;
4. Множина функцій $L_p[a, b]$ для яких виконується умова $\int_a^b |x(t)|^p \, dt < \infty$ з нормою $\|x\| = \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)|^p \, dt}$, де число $p \geq 1$ фіксоване;
5. $C_{[a,b]}$ – множина неперервних на сегменті $[a, b]$ функцій з нормою $\|x\| = \sup\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$.

Послідовність $\{x_n\} \subset L$ називається *збіжною* у нормованому просторі L, якщо $\exists x \in L : \lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$.

Послідовність $\{x_n\} \subset L$ називається *фундаментальною* у нормованому просторі L, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_\varepsilon \in N) (\forall n > n_\varepsilon) (\forall m > n_\varepsilon) : \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Іноді умову фундаментальності ще записують у формі:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_\varepsilon \in N) (\forall n > n_\varepsilon) (\forall p \in N) : \|x_n - x_{n+p}\| < \varepsilon.$$

Якщо будь-яка фундаментальна послідовність у нормованому просторі L є збіжною, то простір називається *повним*. Повний нормований простір ще називають *банаховим* простором.

Розв'язання типових задач

Завдання 1. *На множині* $\mathbf{R}^+$ *введено операції* $x \oplus y = \{x, y\}$, $\lambda \otimes x = x^\lambda (\lambda \in \mathbf{R})$. *Чи буде* $\mathbf{R}^+$ *з такими операціями утворювати лінійний простір?*

Розв'язання. Зауважимо, що множина $\mathbf{R}^+$ – це множина додатніх дійсних чисел. Якщо $x, y \in \mathbf{R}^+$, то і $\max\{x, y\} \geq 0$, а також $x^\lambda > 0$, тобто дана множина замкнена відносно операцій $\oplus$ і $\otimes$.

Перевіримо виконання аксіом лінійного простору:

$$\forall x, y : \max\{x, y\} = \max\{y, x\}$$

$$\forall x, y, z : \max\{\max\{x, y\}, z\} = \max\{x, \max\{y, z\}\},$$

тобто аксіоми комутативності та асоціативності виконуються. Перевіримо аксіому існування нуля:

$$\exists \tilde{0} \in \mathbf{R}^+ \quad \forall x \in \mathbf{R}^+ : \max(\tilde{0}, x) = x.$$

Але

$$\forall x \in \mathbf{R}^+, \forall y \in \mathbf{R}^+ \max(x, y) \neq 0,$$

тому дана множина не утворює лінійного простору.

Завдання 2. *Чи утворюють у лінійному просторі неперевних на* $[-1, 1]$ *функцій* $C_{[-1;1]}$ *підпростір періодичні функції?*

Розв'язання. Якщо функція $y = f(x)$ є періодичною з періодом T, то і функція $\lambda y = \lambda f(x)$ теж буде періодичною з тим же періодом, адже

$$f(x + T) = f(x) \Rightarrow \lambda f(x + T) = \lambda f(x).$$

Але якщо розглядати суму періодичних функцій, то вона буде періодичною лише у тому разі, якщо їх періоди мають спільне кратне. А це не завжди так, наприклад, функції $y = \sin x$ і $y = \sin\sqrt{2}x$ мають періоди відповідно 2π і $\sqrt{2}\pi$, для яких не існує спільного кратного, тобто числа, котре націло ділиться і на 2π, і на $\sqrt{2}\pi$.

Це означає, що періодичні функції не утворюють підпростору лінійного простору $C_{[-1;1]}$.

Завдання 3. *Чи задає норму на лінійному просторі* X *функція* $\|x\|$, *якщо:*

а) $X = C'_{[0,1]}, \|x(t)\| = \int\limits_0^1 |\, x(t)\, |dt + \max\limits_{x \in [0,1]} |\, x'(t)\, |;$

б) $X = \mathbf{R}^m, \|\, x\, \| = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{i} |\, x_j\, |^3\right)^{\frac{1}{3}};$

в) $X = l_2, \|x\| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sqrt{|\, x_i\, |};$

г) $X = m$, де m – множина всіх обмежених числових послідовностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $\|x\| = \max\limits_{k \in N} x_k$.

Розв'язання. а) $C'_{[0,1]}$ – це множина функцій, неперервних на $[0,1]$ разом зі своєю похідною. Тобто, $\forall x(t) \in C'_{[0,1]} \quad \exists \int\limits_0^1 |x(t)|\,dt$ та $x'(t) \quad \forall t \in [0,1]$. Отже, функція $\|x\|$ є визначеною на всій множині $C'_{[0,1]}$. (Відмітимо, що на $C_{[0,1]}$ таке задання функції $\|x\|$ було б некоректним, адже $x'(t)$ існує не для всіх неперервних функцій. Наприклад, для неперервної функції $x = |t|$ не існує похідної у точці $t_0 = 0$.)

$\|x\| = \int\limits_0^1 |x(t)|dt + \max\limits_{x \in [0,1]} \left|x'(t)\right| \geqslant 0$ як сума двох невід'ємних доданків.

Перевіримо аксіоми норми:

1) Якщо $\|x\| = 0$, то $\begin{cases} \int\limits_0^1 |x(t)|dt = 0; \\ \max\limits_{x \in [0,1]} \left|x'(t)\right| = 0. \end{cases}$ Друга умова системи має місце тоді і тільки тоді, коли $\forall t \in [0,1] \quad \left|x'(t)\right| = 0 \Rightarrow x(t) = c = const \quad \forall t \in [0,1]$. Але одночасно повинно виконуватись, що $\int\limits_0^1 |x(t)|dt = 0 \Rightarrow \ x(t) \equiv 0$ й перша аксіома виконується.

2) $\forall \alpha \in \mathbf{R}$

$$\|\alpha x\| = \int\limits_0^1 |\alpha x(t)|dt + \max_{t \in [0,1]} |(\alpha x(t))'| = |\alpha| \int\limits_0^1 |x(t)|dt + $$
$$+ |\alpha| \max_{t \in [0,1]} |x'(t)| = |\alpha| \|x\|.$$

Тут використано властивість лінійності інтегрування та диференціювання.

3) $\forall x, y \in C'_{[0,1]}$

$$\|x + y\| = \int\limits_0^1 |x(t) + y(t)|dt + \max_{t \in [0,1]} |(x(t) + y(t))^{'}| \leq$$
$$\leq \int\limits_0^1 (|x(t)| + |y(t)|)dt + \max_{t \in [0,1]} (|(x'(t) + y'(t)|) \leq$$

$$\leq \int\limits_0^1 |x(t)|dt + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)| + \int\limits_0^1 |y(t)|dt + \max_{t\in[0,1]} |y'(t)| = \|x\| + \|y\|.$$

У процесі оцінок використано нерівності $|a+b| \leq |a| + |b|$ та $\max\limits_X (f(x)+$ $+g(x)) \leq \max\limits_X f(x) + \max\limits_X g(x)$, а також властивість лінійності інтеграла та похідної.

б) На множині $\mathbf{R}^m$ функція $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^m \sum\limits_{j=1}^i |x_j|^3\right)^{\frac{1}{3}}$ є визначеною скрізь, причому очевидно, що $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^m$.

1) Запишемо формулу для $\|x\|$ у іншій формі

$$\|x\| = \Big(|x_1|^3 + \big(|x_1|^3 + |x_2|^3\big) + \ldots + \big(|x_1|^3 + |x_2|^3 + \ldots + |x_m|^3\big)\Big)^{\frac{1}{3}} =$$

$$\Big(m|x_1|^3 + (m-1)|x_2|^3 + ... + |x_m|^3\Big)^{\frac{1}{3}} = 0 \Longleftrightarrow \forall i = \overline{1,m} \quad |x_i| = 0,$$

а, отже, $x = \theta$.

2)

$$\|\alpha x\| = (m|\alpha x_1|^3 + (m-1)|\alpha x_2|^3 + ... + |\alpha x_m|^3)^{\frac{1}{3}} =$$
$$= \big(m|\alpha|^3|x_1|^3 + (m-1)|\alpha|^3|x_2|^3 + ... + |\alpha|^3|x_m|^3\big)^{\frac{1}{3}} =$$
$$= |\alpha| \big(m|x_1|^3 + (m-1)|x_2|^3 + ... + |x_m|^3\big)^{\frac{1}{3}} = |\alpha|\|x\|.$$

3)

$$\|x+y\| = \big(m|x_1+y_1|^3 + (m-1)|x_2+y_2|^3 + ... + |x_m+y_m|^3\big)^{\frac{1}{3}} =$$
$$= \big(|\sqrt[3]{m}x_1 + \sqrt[3]{m}y_1|^3 + |\sqrt[3]{m-1}x_2 + \sqrt[3]{m-1}y_2|^3 + ... + |x_m+y_m|^3\big)^{\frac{1}{3}} \leqslant$$
$$\leq \big(|\sqrt[3]{m}x_1|^3 + |\sqrt[3]{m-1}x_2|^3 + ... + |x_m|^3\big)^{\frac{1}{3}} +$$
$$+ \big(|\sqrt[3]{m}y_1|^3 + |\sqrt[3]{m-1}y_2|^3 + ... + |y_m|^3\big)^{\frac{1}{3}} =$$
$$= \big(m|x_1|^3 + (m-1)|x_2|^3 + ... + |x_m|^3\big)^{\frac{1}{3}} +$$
$$+ \big(m|y_1|^3 + (m-1)|y_2|^3 + ...|y_m|^3\big)^{\frac{1}{3}} = \|x\| + \|y\|.$$

Отже, $\|x\|$ задає норму на $\mathbf{R}^m$.

в) Для функції $\|x\|$ виконуються всі аксіоми норми, але разом з цим вона норму не задає. Адже не для всіх елементів $x \in l_2$ функція $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|$ набуває скінченних значень. Наприклад, для $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right) \in l_2$

$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ розбіжний, а тому $\|x\|$ не є нормою в l_2.
г) Якщо розглядати обмежену послідовність, яка складається лише з від'ємних членів $\left(\text{наприклад, } \left\{-1+\dfrac{1}{n+1} : n\in\mathbf{N}\right\}\right)$, то $\max\limits_{n\in\mathbf{N}} x_n = -\dfrac{1}{2} <$ 0, тому $\|x\|$ не задає норму на m.

Зауважимо, що навіть якби задати функцію $\|x\| = \max\limits_{n\in N}|x_n|$, то вона все одно не задавала б норму, адже не для всіх обмежених послідовностей існує максимальний елемент, наприклад, $\overline{\exists}\ \max\limits_{n\in\mathbf{N}}\left\{1-\dfrac{1}{n}\right\}$.

Завдання 4. *Дослідити на збіжність у нормованому просторі послідовність* $\{x_n, n\in\mathbf{N}\}$ *якщо:*

а) $E = C'_{[0,1]}, \quad x_n(t) = \cos t - \cos\dfrac{t}{n}$;

б) $E = L_3[0,1], \quad x_n(t) = \dfrac{nt}{\sqrt{1+n^2}}$

в) $E = l_2, \quad x_n = \left(\underbrace{0,0,...,0}_{n-1}, \dfrac{1}{\sqrt{(n-1)n}}, \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, ...\right)$;

г) $E = C_{[0,1]}, \quad x_n(t) = e^{-nt}$;

д) $E = l_1, \quad x_n = \left(\underbrace{0,0,...,0}_{n}, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, ...\right)$.

Розв'зання. а) На просторі $C'_{[0,1]}$ норму задаємо формулою:

$$\|x\| = \max_{t\in[0,1]}|x(t)| + \max_{t\in[0,1]}|x'(t)|$$

(перевірку зробити читачу).
Знайдемо поточкову границю послідовності $\{x_n\}$.

$$x_0(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \lim_{n\to\infty}\left(\cos t - \cos\frac{t}{n}\right) = \cos t - \cos 0 = \cos t - 1$$

$\cos t - 1 \in C'_{[0,1]}$, тому далі дослідимо значення $\|x_n - x_0\|$.

$$\|x_n - x_0\| = \left\|\cos t - \cos\frac{t}{n} - \cos t + 1\right\| = \left\|1 - \cos\frac{t}{n}\right\| =$$

$$= \max_{t\in[0,1]}\left|1-\cos\frac{t}{n}\right| + \max_{t\in[0,1]}\left|\left(1-\cos\frac{t}{n}\right)'\right|.$$

Розглянемо обидва доданки в правій частині останньої рівності.
$\left(1-\cos\frac{t}{n}\right)'=\frac{1}{n}\sin\frac{t}{n}=0$ при $\frac{t}{n}=\pi k$. Позначимо $t_n=\pi nk,\quad n\in\mathbf{N}$, $k\in\mathbf{Z}$.
Із усіх значень t_n проміжку $[0,1]$ належать тільки $t_0=0$.
$\left|1-\cos\frac{t}{n}\right|\Big|_{t=0}=|1-1|=0,\qquad \left|1-\cos\frac{t}{n}\right|\Big|_{t=1}=\left|1-\cos\frac{1}{n}\right|=1-\cos\frac{1}{n}.$
Тому $\max\limits_{t\in[0,1]}\left|1-\cos\frac{t}{n}\right|=1-\cos\frac{1}{n}\to 0,\quad$ при $\quad n\to\infty$.
$\left(1-\cos\frac{t}{n}\right)''=\left(\frac{1}{n}\sin\frac{t}{n}\right)'=\frac{1}{n^2}\cos\frac{t}{n}=0\quad$ при $\quad\frac{t}{n}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in\mathbf{Z}$;
$t_n=\frac{\pi}{2}n+\pi nk\quad n\in\mathbf{N},\ k\in\mathbf{Z}$.
Жодне зі значень $t_n\notin[0,1]$, тому обчислюємо значення тільки на кінцях проміжка.
$\left|\left(1-\cos\frac{t}{n}\right)'\right|\Big|_{t=0}=\left|\frac{1}{n}\sin\frac{t}{n}\right|\Big|_{t=0}=0.$
$\left|\left(1-\cos\frac{t}{n}\right)'\right|\Big|_{t=1}=\left|\frac{1}{n}\sin\frac{t}{n}\right|\Big|_{t=1}=\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}.$
Тобто $\max\limits_{t\in[0,1]}\left|\left(1-\cos\frac{t}{n}\right)'\right|=\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\to 0,\quad n\to\infty$.

Таким чином, $\|x_n-x_0\|\to 0\quad$ при $\quad n\to\infty$, отже $\{x_n\}$ є збіжною в $C'_{[0,1]}$.
б) Досліджуючи на поточкову збіжність $\{x_n\}$, знайдемо:

$$x_0(t)=\lim_{n\to\infty}x_n(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{nt}{\sqrt{n^2+1}}=t,$$

$t\in L_3[0,1]$, тому є сенс досліджувати числову послідовність $\{\|x_n-x_0\|\}$.

$$\|x_n-x_0\|=\sqrt[3]{\int_0^1|x_n(t)-x_0(t)|^3\,dt}=\sqrt[3]{\int_0^1\left|\frac{nt}{\sqrt{n^2+1}}-t\right|^3dt}=$$

$$=\left|\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}-1\right|\sqrt[3]{\int_0^1 t^3dt}=\left|\frac{n-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}}\right|\sqrt[3]{\frac{t^4}{4}\Big|_0^1}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left|\frac{n-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}}\right|.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}(n+\sqrt{n^2+1})}=0,$$

то $\|x_n-x_0\|\to 0\quad$ при $\quad n\to\infty$, тобто $\{x_n\}$ є збіжною в $L_3[0,1]$.

в) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\underbrace{0,0,...,0}_{n-1},\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)n}},\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}},...\right) = (0,0,\ldots)\,.$
Поточкова границя $x_0 = (0,0,...) \in l_2$, тому досліджуємо

$$\|x_n - x_0\| = \|x_n\| = \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty}\left(x_n^{(k)}\right)^2} = \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(k-1)k}}.$$

Даний вираз прямує до нуля як залишок збіжного ряду, тому і послідовність є збіжною.

г) Поточкова границя

$$x_0(t) = \lim_{n\to\infty} e^{-nt} = \begin{cases} 0, & t \in (0,1]; \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Оскільки $x_0(t) \notin C_{[0,1]}$, то дана послідовність не буде збіжною навіть поточково.

д) Поточковою границею послідовності x_n буде $x_0 = (0,0,...) \subset l_1$.

$$\|x_n - x_0\| = \|x_n\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_n^{(k)} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

як залишок розбіжного ряду і тому збіжності числової послідовності $\{\|x_n - 0\|\}$ до нуля при $n \to \infty$ немає.

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *На множині X введено операції $x \oplus y$, $\lambda \otimes x$. Чи буде X з такими операціями утворювати лінійний простір, якщо:*

1. $X = \mathbf{R}^+,\ x \oplus y = x + y,\ \lambda \otimes x = \lambda x,\ (\lambda \in \mathbf{R})\,;$
2. $X = \mathbf{R},\ x \oplus y = xy,\ \lambda \otimes x = \lambda x,\ (\lambda \in \mathbf{R})\,;$
3. $X = \mathbf{R},\ x \oplus y = \max\left(|x|, |y|\right),\ \lambda \otimes x = \lambda x,\ (\lambda \in \mathbf{R})\,;$
4. $X = \mathbf{R},\ x \oplus y = \max\left(x, y\right),\ \lambda \otimes x = \lambda x,\ (\lambda \in \mathbf{R})\,;$
5. $X = \mathbf{R},\ x \oplus y = xy,\ \lambda \otimes x = x^\lambda,\ (\lambda \in \mathbf{R})\,;$
6. $X = \mathbf{R},\ x \oplus y = x + y,\ \lambda \otimes x = \lambda x,\ (\lambda \in \mathbf{R})\,;$
7. $X = \mathbf{R},\ x \oplus y = \max\left(|x|, |y|\right),\ \lambda \otimes x = x^\lambda,\ (\lambda \in \mathbf{R})\,;$
8. $X = \mathbf{R}^+,\ x \oplus y = xy,\ \lambda \otimes x = \lambda x,\ (\lambda \in \mathbf{R})\,;$
9. $X = \mathbf{R}^+,\ x \oplus y = xy,\ \lambda \otimes x = \lambda x,\ (\lambda \in \mathbf{R})\,;$

10. $X = \mathbf{R}^+,\ x \oplus y = \max\left(|x|, |y|\right),\ \lambda \otimes x = \lambda x,\ (\lambda \in \mathbf{R})$.

Завдання 2. *Чи утворюють в лінійному просторі* $C_{[-1,1]}$ *підпростір такі множини:*

1. *двічі неперервно диференційовні функції;*
2. *непарні функції;*
3. *періодичні функції;*
4. *монотонно зростаючі функції;*
5. *функції, для яких* $x(0) = 0$*;*
6. *функції, для яких* $\int_{-1}^{1} x(t)\,dt = 0$*;*
7. *функції, для яких* $\int_{-1}^{0} x(t)\,dt = \int_{0}^{1} x(t)\,dt$;
8. *квадратичні функції;*
9. *многочлени фіксованого степеня;*
10. *монотонні функції.*

Завдання 3. *Чи задає норму в лінійному просторі* L *функція* $\|x\|$, *якщо:*

1. $L = C_{[0,1]},\ \|x(t)\| = \int_0^1 |p(t)\,x(t)|\,dt,\ p(t) \in C_{[0,1]},\ p(t) \not\equiv 0$;
2. $L = C^2_{[a,b]},\ \|x(t)\| = |x'(a)| + |x'(b)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;
3. $L = \mathbf{R}^m,\ \|x\| = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^i x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$;
4. $L = C_{[0,1]},\ \|x(t)\| = \left(\int_0^1 x^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$;
5. $L = \mathbf{R}^m,\ \|x\| = \left(\sum_{k=1}^m (\alpha_k x_k)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ \alpha \in \mathbf{R}^m$;
6. $L = C^2_{[a,b]},\ \|x(t)\| = \int_a^b |x(t)|\,dt + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;
7. $L = C^2_{[a,b]},\ \|x(t)\| = |x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;
8. $L = C_0$(множина збіжних до нуля послідовностей,) $\|x(t)\| = \max\limits_{k\in\mathbf{N}} |x_k|$;

9. $L = \mathbf{R}^m, \ \|x\| = \sum_{i=1}^{m} \dfrac{|x_i|}{2^i};$

10. $L = C$(множина всіх збіжних послідовностей,) $\|x\,(t)\| = \inf\limits_{k\in\mathbf{N}} |x_k|\,.$

Завдання 4. *Чи буде збіжною в нормованому просторі E послідовність $\{x_n, \ n \in \mathbf{N}\}$, якщо*:

1. $E = l_2, \quad x_n = \left(\underbrace{0, ..., 0,}_{n-1} \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n+1}, ...\right);$
2. $E = L_2\,[0,1]\,, \ \ x_n\,(t) = t^n;$
3. $E = C'_{[0,1]}, \ \ x_n\,(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} - \dfrac{t^n}{n};$
4. $E = l_2, \quad x_n = \left(\underbrace{1, 0, ..., 0, \frac{1}{n},}_{n} 0, 0, ...\right);$
5. $E = C_{[0,1]}, \ x_n\,(t) = t^n;$
6. $E = L_2\,[0,1]\,, \ x_n\,(t) = nt^n;$
7. $E = L_2\,[0,1]\,, \ \ x_n\,(t) = \sin t - \sin\dfrac{t}{n};$
8. $E = C'_{[0,1]}, \ x_n\,(t) = \sin t - \sin\dfrac{t}{n};$
9. $E = L_2\,[0,1]\,, \ \ x_n\,(t) = nt^{n-1};$
10. $E = C_{(-\infty,\infty)}, \ x_n\,(t) = \sqrt[4]{t^4 + \dfrac{1}{n^4}}.$

8 Гільбертів простір

Перелік необхідних питань теорії

1. Поняття евклідового простору, гільбертового простору.
2. Властивості скалярного добутку.
3. Нерівність Коші-Буняковського.
4. Існування ортогональних базисів, ортогоналізація.
5. Ізоморфізм гільбертових просторів.
6. Підпростори, ортогональні доповнення, лінійний многовид.
7. Проекція елемента на підпростір гільбертового простору.

Теоретичні відомості

Одним із способів введення норми в лінійному просторі є можливість задання в ньому поняття скалярного добутку. *Скалярним добутком* двох елементів x та y з лінійного простору H називається дійсне число (x, y), що задовольняє умовам:

1. $(x, x) \geq 0$, причому $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
2. $\forall x, y \in H : (x, y) = (y, x)\,;$
3. $\forall \alpha \in \mathbf{R} : (\alpha x, y) = \alpha\,(x, y)\,;$
4. $\forall x, y, z \in H :\ (x + y, z) = (x, z) + (y, z)\,.$

Якщо у дійсному лінійному просторі H введено скалярний добуток, то цей простір називається *евклідовим.* Комплексний лінійний простір H називається *унітарним,* якщо кожній парі його елементів x та y ставиться у відповідність комплексне число (x, y) , й виконуються наступні умови:

1. $(x, x) \geq 0$, причому $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
2. $\forall x, y \in H : (x, y) = \overline{(y, x)},$
3. $\forall \alpha \in \mathbf{C} : (\alpha x, y) = \alpha\,(x, y)\,;$
4. $\forall x, y, z \in H :\ (x + y, z) = (x, z) + (y, z)\,.$

У кожному евклідовому чи унітарному просторі H за допомогою скалярного добутку можна ввести норму, поклавши $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Таким чином дійсний чи комплексний лінійний простір H стає нормованим простором. Якщо для нормованого простору норма визначається рівністю $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, то цю норму називають породженою скалярним добутком. Щоб у нормованому просторі H можна було ввести скалярний добуток який породжуватиме норму, необхідно і досить, щоб для всіх його елементів x та y виконувалась рівність:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Ця рівність характеризує відому властивість паралелограма в евклідовому просторі.

Нескінченно вимірний простір H зі скалярним добутком називається *гільбертовим,* якщо він є повним відносно норми, що породжена скалярним добутком(або є повним в розумінні метрики $\rho(x,y) = \|x-y\|$).

Кутом між ненульовими елементами евклідового простору називається кут $\varphi \in [0,\pi]$ такий, що $\cos\varphi = \dfrac{(x,y)}{\|x\|\,\|y\|}$. Якщо $\cos\varphi = 0$, то елементи x та y називаються *ортогональними* (позначають $x \perp y$.) Очевидно, ортогональними є такі і тільки такі елементи $x, y \in H \setminus \{0\}$, для яких скалярний добуток $(x,y) = 0$.

Лінійним многовидом в гільбертовому просторі H називається така сукупність L елементів із H, що якщо $x, y \in L$, то $\alpha x + \beta y \in L$ для будь-яких чисел α і β. Замкнений лінійний многовид L в гільбертовому просторі H називається *підпростором* цього простору H.

Якщо елемент $x \in H$ є ортогональним до всіх елементів деякої множини $L \subset H$, то кажуть, що x *ортогональний* до L і позначають $x \perp L$. Множина всіх елементів $x \in H$, що ортогональні до L, називається *ортогональним доповненням* до L і позначається $L^\perp$. Відомо, що $L^\perp$ завжди є лінійним підпростором простору H, навіть якщо L і не є підпростором. Якщо ж L – підпростір, то має місце наступна властивість:

Нехай H – гільбертів простір, $L \subset H$ – підпростір. Тоді $H = L \oplus L^\perp$, тобто довільний елемент $x \in H$ єдиним чином зображається у вигляді $x = u + v$, де $u \in L$, $v \in L^\perp$. При цьому $\rho(x,L) = \|x-u\| = \|v\|$. Елемент u називається *проекцією* елемента x на підпростір L.

Якщо M – замкнена множина у гільбертовому просторі H, то для довільного $x \notin H$ існує єдиний елемент $y \in M$ такий, що $\rho(x,M) = \|x-y\|$.

Система елементів $e_1, e_2, \dots$ в евклідовому (унітарному) просторі називається *ортогональною,* якщо $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$ і *ортонормованою,* якщо $(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Будь-яку систему $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ лінійно незалежних елементів можна перетворити в ортонормовану з допомогою процесу ортогоналізації Шмідта. Покладемо $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Нехай $y_2 = x_2 - c_{21}e_1$. Підберемо число c_{21} так, щоб $y_2 \perp e_1$. Очевидно, для цього треба взяти $c_{21} = (x_2, e_1)$. Покладемо $e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ уже побудовані. Візьмемо $y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} c_{nk}e_k$, де $c_{nk} = (x_n, e_k)$, і нарешті одержимо $e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$.

Розв'язання типових задач

Завдання 1. *Чи задають скалярний добуток у просторі* $\mathbf{R}^2$ *функції:*

а) $(x, y) = |x_1 + y_1|\, |x_2 + y_2|$;

б) $(x, y) = \sqrt{x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2}$.

Розв'язання. У кожному випадку скалярний добуток (x, y) як функція є визначеною на всій множині $\mathbf{R}^2$, тому необхідно перевірити аксіоми скалярного добутку.

а)

$$(x, x) = |2x_1|\, |2x_2| = 4\, |x_1 x_2| \geq 0.$$

Але для того, щоб $(x, x) = 0$ в нашому прикладі достатньо, щоб виконувалась лише одна із умов: $x_1 = 0$ або $x_2 = 0$. Тобто, можливо, що $(x, x) = 0$, але $x \neq \theta$. Отже, функція (x, y) не задає скалярного добутку на $\mathbf{R}^2$.

б)

$$(x, x) = \sqrt{x_1^2 x_1^2 + x_2^2 x_2^2} = \sqrt{x_1^4 + x_2^4} \geq 0.$$

Якщо $(x, x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x_1^4 + x_2^4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0; \\ x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad x = \theta$. Навпаки, при $x = \theta$ $(x, x) = 0$.

$$(x, y) = \sqrt{x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2} = \sqrt{y_1^2 x_1^2 + y_2^2 x_2^2} = (y, x).$$

$$(\alpha x, y) = \sqrt{(\alpha x_1)^2 y_1^2 + (\alpha x_2)^2 y_2^2} = \sqrt{\alpha^2 (x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2)} =$$
$$= |\alpha| \sqrt{(x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2)} = |\alpha|\, (x, y) \neq \alpha(x, y),$$

тобто дана функція не задає скалярний добуток на $\mathbf{R}^2$.

Завдання 2. *Нехай H – гільбертів простір, норма в якому породжується скалярним добутком. Довести, що $\forall x, y \in H$*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

(рівність паралелограма).

Розв'язання. Насамперед варто звернути увагу на те, що справжній паралелограм довелося б розглядати лише у просторах $\mathbf{R}^2$ та $\mathbf{R}^3$(на площині та у просторі). Тут вона більш звична нам у геометричній інтерпретації, відомій зі шкільного курсу математики: у будь-якому паралелограмі сума квадратів довжин сторін дорівнює сумі квадратів довжин діагоналей. Для всіх інших множин H паралелограм суто умовний.

Той факт, що норма в H породжена скалярним добутком, означає, що $\forall x \in H \;\; \|x\| = \sqrt{(x,x)}$. З огляду на цю властивість, запишемо $\forall x, y \in H$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) =$$
$$= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) + (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y) =$$
$$= 2\left((x,x) + (y,y)\right) = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Рівність доведено.

Завдання 3. *Довести, що норма не породжується скалярним добутком в просторах:*

а) $C_{[a,b]}$,

б) $l_p, \;\; 1 \le p \ne 2$.

Розв'язання. Використаємо результат попередньої задачі, і в обох випадках підберемо елементи x та y так, щоб рівність паралелограма не виконувалась.

а) Розглянемо конкретний простір, наприклад, $C_{[0,1]}$. Функції $x(t)$ і $y(t)$ із $C_{[0,1]}$ виберемо так, щоб одна з них була сталою, а друга – лінійною, наприклад, нехай $x(t) = 1, \;\; y(t) = t$. При цьому $x(t) + y(t) = t + 1, \; x(t) - y(t) = 1 - t$.

У просторі $C_{[a,b]}$ – множині неперервних на $[a,b]$ функцій, ми вводили норму $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$. Тоді норми одержаних функцій: $\|x(t)\| = 1, \;\; \|y(t)\| = 1, \;\; \|x(t) + y(t)\| = 2, \;\; \|x(t) - y(t)\| = 1$. Підставимо одержані числа у рівність паралелограма, і одержимо: $2^2 + 1^2 \ne 2\left(1^2 + 1^2\right)$. Оскільки рівність паралелограма не виконується принаймні для однієї пари функцій, то норма не породжується скалярним добутком.

Доцільно зауважити, що ми довели потрібне твердження, не задаючи на множині $C_{[a,b]}$ скалярного добутку. З огляду на це, задачу можна

було сформулювати так: довести, що на просторі $C_{[a,b]}$ не можна задати скалярний добуток так, щоб він породжував норму.
б) На просторах l_p виберемо наступні елементи:

$$x=(1,1,0,0,...)\,,\ y=(1,-1,0,0,...)\,.$$

При цьому одержимо $x+y=(2,0,0,...)\,,\ x-y=(0,2,0,0,...)$, а норми елементів x, y, $x+y$, $x-y$ (враховуючи визначення $\|x\|=\sqrt[p]{\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p}$) дорівнюватимуть

$$\|x\|=\sqrt[p]{2},\ \|y\|=\sqrt[p]{2},\ \|x+y\|=2,\ \|x-y\|=2.$$

Підставляючи одержані значення в рівність паралелограма, одержимо співвідношення,

$$2^2+2^2=2\left(2^{\frac{2}{p}}+2^{\frac{2}{p}}\right),$$
$$8=4\cdot 2^{\frac{2}{p}},$$

що справедливе лише при $p=2$. Тобто скалярний добуток не породжує норми на l_p.

Завдання 4. *У гільбертовому просторі H визначити ортогональне доповнення $L^{\perp}$, якщо:*

а) $H=l_2,\quad L=\{x\in l_2:\,x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,0,0,...),\quad \xi_i\in\mathbf{R}^+\}\quad$ (n – фіксоване);

б) $H=L_2[-1,1],\quad L=\left\{x(t):x(t)=0,t\in\left[-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right]\right\}$.

Розв'язання. а) Якщо $y\in L^{\perp}$, то $\forall x\in L\quad (x,y)=0$. Крім того, за визначенням скалярний добуток

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}x_ky_k=\xi_1y_1+\xi_2y_2+...+\xi_ny_n=0,$$

якщо тільки $y_k=0\quad \forall k=\overline{1,n}$. Тобто

$$L^{\perp}=\left\{y\in l_2:y=\left(\underbrace{0,0,...,0}_{n},y_{n+1},y_{n+2},...\right),\ y_{n+1},y_{n+2},\ldots-\text{будь-які.}\right\}$$

б) Скалярний добуток в просторі $L_2[-1,1]$

$$(x,y)=\int_{-1}^{1}x(t)y(t)dt=\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}x(t)y(t)dt+\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}x(t)y(t)dt+\int_{\frac{1}{3}}^{1}x(t)y(t)dt=$$
$$=\int_{-1}^{\frac{1}{3}}x(t)y(t)dt+\int_{\frac{1}{3}}^{1}x(t)y(t)dt=0$$

якщо виконується умова $y(t) = 0 \quad \forall t \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; 1\right]$. Тобто

$$L^{\perp} = \left\{ y \in L_2[-1;1] : y(t) = 0 \quad \forall t \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; 1\right] \right\}.$$

Завдання 5. *Знайти проекцію елемента $x(t) = \sin\frac{\pi}{2}t$ із простору $L_2[0,1]$ на підпростір L цього простору, породжений елементами $a_1(t) = 1$, $a_2(t) = t$, $a_3(t) = t^2$.*

Розв'язання. Кожен елемент простору L зображається у вигляді $u = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$, де c_0, c_1, c_2 – дійсні числа. Щоб різниця $x - u$ була ортогональна до будь-якого елемента $v \in L$, достатньо щоб ця різниця була ортогональною до базисних елементів підпростору L, тобто до елементів 1, t, t^2. Тому розглянемо систему скалярних добутків:

$$\begin{cases} \left(\sin\frac{\pi}{2}t - c_0 - c_1 t - c_2 t^2, 1\right) = 0; \\ \left(\sin\frac{\pi}{2}t - c_0 - c_1 t - c_2 t^2, t\right) = 0; \\ \left(\sin\frac{\pi}{2}t - c_0 - c_1 t - c_2 t^2, t^2\right) = 0. \end{cases}$$

Користуючись властивостями скалярного добутку, запишемо дану систему у вигляді

$$\begin{cases} \left(c_0 + c_1 t + c_2 t^2, 1\right) = \left(\sin\frac{\pi}{2}t, 1\right); \\ \left(c_0 + c_1 t + c_2 t^2, t\right) = \left(\sin\frac{\pi}{2}t, t\right); \\ \left(c_0 + c_1 t + c_2 t^2, t^2\right) = \left(\sin\frac{\pi}{2}t, t^2\right). \end{cases}$$

Звідси одержимо

$$\begin{cases} c_0 \int\limits_0^1 dt + c_1 \int\limits_0^1 tdt + c_2 \int\limits_0^1 t^2 dt = \int\limits_0^1 \sin\frac{\pi}{2}tdt; \\ c_0 \int\limits_0^1 tdt + c_1 \int\limits_0^1 t^2 dt + c_2 \int\limits_0^1 t^3 dt = \int\limits_0^1 t\sin\frac{\pi}{2}tdt; \\ c_0 \int\limits_0^1 t^2 dt + c_1 \int\limits_0^1 t^3 dt + c_2 \int\limits_0^1 t^4 dt = \int\limits_0^1 t^2\sin\frac{\pi}{2}tdt. \end{cases}$$

Обчислимо всі інтеграли, які фігурують у цій системі: $\int\limits_0^1 dt = 1$, $\int\limits_0^1 tdt = \frac{1}{2}$, $\int\limits_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$, $\int\limits_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}$, $\int\limits_0^1 t^4 dt = \frac{1}{5}$, $\int\limits_0^1 \sin\frac{\pi}{2}tdt = \frac{2}{\pi}$, $\int\limits_0^1 t\sin\frac{\pi}{2}tdt = \frac{4}{\pi^2}$, $\int\limits_0^1 t^2\sin\frac{\pi}{2}tdt = \frac{8\pi - 16}{\pi^3}$.

Таким чином, система набуде вигляду системи лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів c_0, c_1, c_2 :

$$\begin{cases} c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 = \frac{2}{\pi}; \\ \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{4}c_2 = \frac{4}{\pi^2}; \\ \frac{1}{3}c_0 + \frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{5}c_2 = \frac{8\pi - 16}{\pi^3}. \end{cases}$$

Розв'яжемо її методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{4}{\pi^2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{8\pi - 16}{\pi^3} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{\pi} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{4 - \pi}{\pi^2} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & \frac{8\pi - 16 - 2\pi^2}{\pi^3} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{\pi} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{4 - \pi}{\pi^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{4\pi - 16 - \pi^2}{\pi^3} \end{array}\right).$$

$$\begin{cases} c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 = \frac{2}{\pi}; \\ \frac{1}{12}c_1 + \frac{1}{12}c_2 = \frac{4 - \pi}{\pi^2}; \\ \frac{1}{180}c_2 = \frac{4\pi - 16 - \pi^2}{\pi^3}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{180\left(4\pi - 16 - \pi^2\right)}{\pi^3}; \\ c_1 = \frac{168\pi^2 - 472\pi + 2080}{\pi^3}; \\ c_0 = \frac{66\pi^2 - 256\pi + 960}{\pi^3}. \end{cases}$$

Таким чином, проекція елемента $\sin\frac{\pi}{2}t$ на підпростір, породжений елементами 1, t, t^2 визначається так:

$$u(t) = \frac{180\left(4\pi - 16 - \pi^2\right)}{\pi^3}t^2 + \frac{168\pi^2 - 472\pi + 2080}{\pi^3}t + \frac{66\pi^2 - 256\pi + 960}{\pi^3}.$$

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *Чи задає скалярний добуток в просторі* $\mathbf{R}^2$ *наступна функція:*

1. $(x, y) = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2)$;
2. $(x, y) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$;
3. $(x, y) = |x_1 + x_2|\,|y_1 + y_2|$;
4. $(x, y) = x_1 y_2$;
5. $(x, y) = (x_1 + y_1)^2 (x_2 + y_2)^2$;

6. $(x, y) = |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|$;
7. $(x, y) = (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2$;
8. $(x, y) = \sqrt{x_1 y_1 + x_2 y_2}$;
9. $(x, y) = x_1 + y_2$;
10. $(x, y) = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

Завдання 2. *У просторі H знайти $L^\perp$, якщо:*

1. $H = L_2[-1, 1]$, $L = \{x(t) = ct, c \in \mathbf{R}\}$;
2. $H = l_2$, $L = \left\{\left(\underbrace{1, 1, ...1}_{n}, 0, 0, ...\right)\right\}$($n$ – фіксоване число);
3. $H = L_2[-1, 1]$, $L = \left\{x(t):\ x(t) = 0\ \ \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right\}$;
4. $H = l_2$, $L = \{x \in l_2\ :\ x = (\xi_1, 0, \xi_3, 0, \xi_5, ...),\ \xi_{2n-1} \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}\}$;
5. $H = l_2$, $L = \{x \in l_2:\ x = (\xi_1, 0, 0, 0, ...),\ \xi_1 \in \mathbf{R}\}$;
6. $H = L_2[-\pi, \pi]$, $L = \{x(t) = \cos nt, n \in \mathbf{N}\}$;
7. $H = l_2$, $L = \left\{\left(\underbrace{1, 0, 0, ...1}_{2n+1}, 0, 0, ...\right), n \in \mathbf{N}\right\}$;
8. $H = l_2$, $L = \left\{\left(\underbrace{1, 0, 1, 0, ...1, 0}_{2n}, \xi_{2n+1}, \xi_{2n+2}, ...\right), \xi_{2n+1}, \xi_{2n+1}, \ldots \in \mathbf{R},\right.$ $\left. n \in \mathbf{N}\right\}$;
9. $H = l_2$, $L = \{x \in l_2:\ x = (\xi_1, 0, 0, 0, ...),\ \xi_1 \in \mathbf{R}\}$;
10. $H = L_2[-\pi, \pi]$, $L = \{x(t) = \sin nt, n \in \mathbf{N}\}$.

Завдання 3. *Знайти проекцію елемента x із гільбертового простору H на його підпростір, породжений елементами a_1, a_2, a_3, якщо:*

1. $x(t) = \sqrt[3]{1 + t}$, $H = L_2[0, 1]$, $a_1(t) = 1$, $a_2(t) = t$, $a_3(t) = t^2$;
2. $x(t) = \sin \pi t$, $H = L_2[0, 1]$, $a_1(t) = 1$, $a_2(t) = t$, $a_3(t) = t^2$;
3. $x(t) = e^t - 2$, $H = L_2[0, 1]$, $a_1(t) = 1$, $a_2(t) = t$, $a_3(t) = t^2$;

4. $x = (1,1,2,1,0,0,...)$, $H = l_2$, $a_1 = (3,0,0,...)$, $a_2 = (1,1,0,0,...)$, $a_3 = (2,1,2,0,0,...)$;

5. $x = (2,3,2,3,0,0,...)$, $H = l_2$, $a_1 = (1,0,0,0,...)$, $a_2 = (1,1,1,0,0,...)$, $a_3 = (0,-1,1,0,0,...)$;

6. $x = (5,4,3,2,0,0,...)$, $H = l_2$, $a_1 = (0,0,1,0,0,...)$, $a_2 = (0,1,1,0,0,...)$, $a_3 = (1,0,2,0,0,...)$;

7. $x(t) = (t-1)^2$, $H = L_2[0,1]$, $a_1(t) = 1$, $a_2(t) = t$, $a_3(t) = t^2$;

8. $x(t) = \operatorname{ch} t$, $H = L_2[0,1]$, $a_1(t) = 1$, $a_2(t) = t$, $a_3(t) = t^2$;

9. $x = (-2,2,-2,2,0,0,...)$, $H = l_2$, $a_1 = (0,1,2,3,0,0,0,...)$, $a_2 = (0,0,-1,3,0,0,...)$, $a_3 = (0,0,0,6,0,0,0,...)$;

10. $x = (5,4,3,2,0,0,...)$, $H = l_2$, $a_1 = (0,0,1,0,0,...)$, $a_2 = (0,1,1,0,0,...)$, $a_3 = (1,0,2,0,0,...)$.

9 Лінійні функціонали і лінійні оператори. Простори операторів

Перелік необхідних питань теорії

1. Лінійні неперевні функціонали. Норма функціонала.
2. Лінійні неперевні оператори. Норма оператора.
3. Спряжені простори. Сильна топологія в спряженому просторі.
4. Слабка топологія і слабка збіжність в лінійному топологічному просторі.
5. Слабка топологія в спряженому просторі.
6. Приклади лінійних функціоналів і лінійних операторів.
7. Простір операторів. Обернений оператор, оборотність.

Теоретичні відомості

Числова функція f, визначена на деякому лінійному просторі L, називається *функціоналом.* Функціонал, визначений в дійсному лінійному просторі називається *лінійним*, якщо $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ для $\forall x, y \in L, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Функіонал f, визначений на топологічному лінійному просторі E, називається *неперервним* на E, якщо $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x_0 \in E$ знайдеться окіл U елемента x_0 такий, що $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для $\forall x \in U$.

Для неперервного лінійного функціонала f в нормованому просторі E число $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$ називається *нормою функціонала* f.

Відображення $A : X \to Y$ називається *лінійним оператором*, що діє із лінійного топологічного простору X в лінійний топологічний простір Y, якщо виконуються такі умови:

1. $(\forall x, y \in X) \;\; A\,(x + y) = Ax + Ay$;
2. $(\forall x \in X) \; (\forall \alpha \in \mathbf{R}) \;\; A\,(\alpha x) = \alpha Ax$.

Іноді ці дві умови замінюють на одну, більш загальну:

$$(\forall x, y \in X) \;\; (\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}) \;\; A\,(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Областю визначення оператора A є сукупність D всіх тих $x \in X$, для яких оператор A заданий. Вважають, що D – лінійний многовид, причому не вимагається виконання рівності $D = X$.

Оператор $A : X \to Y$ називається *обмеженим*, якщо

$$\left(\exists C \in \mathbf{R}^{+}\right) \ (\forall x \in X) \ \|Ax\| \le C \|x\| .$$

Оператор $A : X \to Y$ називається *неперервним* у точці $x_0 \in X$, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0) \, (\exists \delta_\varepsilon > 0) \, (\forall x \ \ \|x - x_0\| < \delta) \Rightarrow (\|A\,(x - x_0)\| < \varepsilon) \, .$$

Якщо оператор є лінійним і обмеженим, то він неперервний.

Для будь-якого обмеженого оператора A, що діє із нормованого простору в нормований визначається норма оператора A співвідношенням

$$\|A\| = \sup_{x \in X} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

На практиці, для знаходження норми оператора, більш зручно використовувати співвідношення:

$$\|A\| = \sup_{x \in X : \|x\| < 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \in X : \|x\| > 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Лінійним неперервним функціоналом називається лінійний неперервний оператор $f : X \to R$. Оскільки функціонал – особливий вид оператора, то всі твердження, сформульовані для операторів, справедливі і для функціоналів.

Для лінійних функціоналів, заданих в лінійному просторі E, визначають операції додавання і множення їх на число так: *сумою* $f_1 + f_2$ двох лінійних функціоналів f_1 і f_2 на лінійному просторі E називають такий функціонал $f = f_1 + f_2$, для якого $\forall x \in E$ справедлива рівність $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а *добутком* $\alpha \cdot f$ лінійного функціонала f на число α називається функціонал $f(x) = \alpha \cdot f(x) \quad \forall x \in E$.

Зауважимо, що рівності, якими визначається сума двох функціоналів і добуток функціонала на число α, можуть бути записані так:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Сукупність всіх неперервних лінійних функціоналів, заданих на деякому топологічному лінійному просторі E, утворюють лінійний простір. Цей лінійний простір називається *спряженим* до простору E і позначається символом E^*.

Серед різних способів введення топології в спряженому просторі E^* важливими є *сильна* і *слабка* топології.

Для неперервних лінійних функціоналів, визначених в нормованих просторах E, норма функціонала $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} |f(x)|$ задовольняє всім вимогам, що містяться у визначенні нормованого простору. Тобто, спряженому простору E^* притаманна структура нормованого простору. Топологія в E^*, що відповідає введеній вище нормі, називається *сильною* топологією в E^*.

Структура простору H^*, спряженого до гільбертового H, стає очевидною, якщо сформулювати таку теорему: для кожного неперервного лінійного функціонала f, заданого в дійсному гільбертовому просторі H, існує єдиний елемент $x_0 \in H$, такий, що $f(x) = (x, x_0) \;\; \forall x \in H$, причому $\|f\| = \|x_0\|$. І навпаки. Якщо $x_0 \in H$, тоді формула $f(x) = (x, x_0)$ визначає такий неперервний лінійний функціонал f, що $\|f\| = \|x_0\|$.

Нехай E – лінійний топологічний простір, на якому задана сукупність всіх неперервних функціоналів $\{f\}$. Виберемо скінченне число функціоналів: $f_1, f_2, \ldots, f_n$, $n \in \mathbf{N}$. Для $\forall \varepsilon > 0$ множина $\{x \in E| \, |f_i(x)| < \varepsilon\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, є відкритою в просторі E і, очевидно, є деяким околом нульового елемента E. Топологія в E, для якої сукупність $\{x \in E| \, |f_i(x)| < \varepsilon\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, є визначальною системою околів нуля, називається *слабкою* топологією в просторі E. Якщо E нормований простір, то слабка топологія в E задовольняє аксіомі віддільності Хаусдорфа. Збіжність в E, що визначається слабкою топологією, називається *слабкою збіжністю.* Інакше поняття слабкої збіжності формулюється так: послідовність (x_n) елементів із E називається *слабко збіжною* до елемента $x_0 \in E$, якщо для будь-якого неперервного лінійного функціонала $\varphi(x)$, заданого на E, числова послідовність $(\varphi(x_n))$ збіжна до $\varphi(x_0)$. Кожна слабко збіжна послідовність елементів у нормованому просторі є обмеженою. Прийнявши за систему околів нуля сукупність множин виду $\{f| \, |f(x)| < \varepsilon, x \in A\}$, де A – довільна обмежена множина в E, а ε – будь-яке додатне число, тоді в спряженому просторі E^* ми дістанемо топологію, яка називається *сильною.* Якщо ж замість всіх обмежених множин в E розглядати всі скінченні підмножини $A \subset E$, тоді ми матимемо *слабку топологію в спряженому просторі* E. Оскільки кожна скінченна множина $A \subset E$ обмежена (але не навпаки), тому слабка топологія простору E^* є слабшою ніж сильна топологія.

Слабка збіжність послідовності (φ_n) лінійних функціоналів у спряженому просторі E^* є збіжністю на кожному фіксованому елементі із E :

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{x \in E} \varphi(x) \text{ при } n \to \infty, \text{ де } \varphi_n, \varphi \in E^*.$$

У спряженому просторі E^* послідовність (φ_n), яка є збіжною в сильній топології, є збіжною і в слібкій топології (але не навпаки).

Розглянемо приклади лінійних неперервних функціоналів в основних просторах:

1. $\mathbf{R}: f(x) = ax,\ a \in \mathbf{R}$. При цьому $\|f\| = |a|$.

2. $\mathbf{R}^n:\ f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k,\ (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n$. $\|f\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$.

3. $l_p\ \ (p > 1)$: будь-який неперервний лінійний функціонал визначений в просторі l_p зображується у вигляді $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k,\ (a_1, a_2, ..., a_n, ...) \in l_q,\ \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. $\|f\| = \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q}$, де $q = \frac{p}{1-p}$. Простір, спряжений до простору l_p, є ізометричним простору l_q.

4. l_1 : Кожний неперервний лінійний функціонал f в просторі l_1 зображується у виді $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k,\ (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ – обмежена послідовність. Тоді $\|f\| = \sup\limits_{n \in N} |a_n| < +\infty$. Спряжений простір до l_1 є ізометричним простору m (простір m – це множина, що утворена зі всіляких обмежених числових послідовностей).

5. $L_p[a,b]\ \ (p > 1)\ :\ f(x) = \int_a^b a(t)\, x(t)\, dt,\quad x(t) \in L_p[a,b]\quad a(t) \in L_q[a,b],\ \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. При цьому $\|f\| = \sqrt[q]{\int_a^b |a(t)|^q\, dt}$. Спряжений простір до $L_p[a,b]$ ізометричний простору $L_q[0,1]$.

6. $L_1[a,b]$: неперервний лінійний функціонал в цьому просторі зображається у вигляді $f(x) = \int_a^b a(t)\, x(t)\, dt,\ a(t)$ – обмежена функція майже скрізь на $[a,b]$. $\|f\| = \sup\limits_{x \in [a,b]} |a(t)|$. Спряжений простір до простору $L_1[0,1]$ ізометричний простору $M[a,b]$ – сукупності всіх вимірних і обмежених майже скрізь на $[a,b]$ функцій.

7. $C_{[a,b]}$: неперервний лінійний функціонал в даному просторі визначається так: $f(x) = \int_{[a,b]} x(t)\, d(g(t))$(в розумінні інтеграла Стільтьєса), де $g(t)$ – функція обмеженої варіації. У цьому випадку $\|f\| = Var_a^b |a(t)|$. Спряжений простір до простору $C_{[a,b]}$ ізометричний підпростору $V_0[a,b] \subset V[a,b]$ – множина всіх функцій обмеженої варіації, причому $\forall g(t) \in V_0[a,b]$ виконуються такі умови: $g(0) = 0$, $g(t) = \frac{1}{2}[g(t+0) + g(t-0)]$ при $t \in [a,b]$.

Розглянемо приклади лінійних операторів.

1. Нехай E – лінійний топологічний простір. Покладемо $Ax = x$ для кожного $x \in E$. Такий оператор, що відображає кожен елемент простору в себе, називається *одиничним.*

2. Нехай E_1 і E_2 – довільні лінійні топологічні простори. І нехай $Ox = \theta$ для всіх $x \in E_1$, де θ – нельовий елемент простору E_2. Тоді O називається *нульовим оператором.*

3. Розглянемо загальний вигляд лінійного оператора, що відображає скінченновимірний простір в скінченновимірний: $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ (відповідно в $\mathbf{R}^n$ базисом є сукупність елементів $e_1, e_2, \dots, e_n$, а в просторі $\mathbf{R}^m$ – базис $f_1, f_2, \dots, f_m$.) Кожен вектор x із $\mathbf{R}^n$ зображується у вигляді: $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, де x_i – якісь коефіцієнти. Із лінійності оператора A $\quad Ax = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i A e_i$. Таким чином, якщо відомо, що є образами базисних векторів $e_1, e_2, \dots, e_n$ при відображенні A, тоді оператор A визначений. Розглянемо далі зображення векторів Ae_i за базисом $f_1, f_2, \dots, f_m : Ae_i = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{ki} \cdot f_k$, де $i = 1, 2, \dots, n$, a_{ki} – якісь числа. Таким чином оператор A визначається матрицею коефіцієнтів
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{9.1}$$
Звідси робимо висновок: образом простору $\mathbf{R}^n$ в просторі $\mathbf{R}^m$ є лінійний підпростір, розмірність якого дорівнює рангу матриці (9.1) (у будь-якому випадку розмірність підпростору в $\mathbf{R}^m$ є не вищою n.)

   Очевидно, кожен лінійний оператор, що задається в скінченновимірному просторі, є неперервним оператором.

4. Нехай H_1 – деякий підпростір гільбертового простору H. Кожен елемент $h \in H$ зобразимо у вигляді суми $h = h_1 + h_2$, де $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_1^{\perp}$ – ортогональному доповненню підпростору H_1. Іншими словами, зображуємо простір H у вигляді прямої суми підпростору H_1 та його ортогонального доповнення. Позначимо символом P оператор, який відображає кожен елемент $h \in H$ в елемент $h_1 \in H_1$, тобто $Ph = h_1$. Цей оператор називається оператором *ортогонального проектування або ортопроектором* простору H на підпростір H_1.

   Лінійність і неперевність цього оператора P перевіряється безпосередньо.

5. Розглянемо в просторі $C_{[a,b]}$ оператор, що визначається формулою $\phi(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$, де $\varphi(t) \in C_{[a,b]}$, $K(x,t)$ – фіксована неперервна функція від $(x,t) \in [a,b] \times [a,b]$. Очевидно, що цей оператор неперевний у випадках коли в просторі $C_{[a,b]}$ визначається норма $\|\varphi\| = \max\limits_{a \le t \le b} |\varphi(t)|$, або коли в просторі $C^2_{[a,b]}$ норма вводиться так: $\|\varphi\| = \left(\int_a^b \varphi^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

6. Важливим прикладом є диференціальний оператор, який визначений, очевидно, не на всьому просторі $C_{[a,b]}$, а лише на лінійному многовиді неперервно-диференційовних на $[a,b]$ функцій. Оператор диференціювання можемо розглядати як оператор, що відображає простір D_1 – простір неперевно-диференційовних на $[a,b]$ функцій в простір $C_{[a,b]}$. В просторі D_1 задаємо норму так: $\|\varphi\|_1 = \max\limits_{t \in [a,b]} |\varphi(t)| + \max\limits_{t \in [a,b]} |\varphi^{'}(t)|$. Очевидно, що в цьому просторі D_1 оператор диференціювання D є лінійним і неперервним. Він відображає простір D_1 на весь простір $C_{[a,b]}$.

   Якщо ж оператор D визначати в підпросторі неперервно-диференційовних функцій із $C_{[a,b]}$, то, очевидно, він є лінійним, але не є неперервним. Наприклад, розглянувши збіжну до нуля в метриці простору $C_{[a,b]}$ функціональну послідовність $\varphi_n(t) = \dfrac{\sin nt}{n}$, маємо відповідну послідовність функцій $D\varphi_n(t) = \cos nt$, яка не є збіжною на $[a,b]$. Оператор D, що діє з простору D_1 в простір $C_{[a,b]}$, визначений на всьому просторі D_1 і є неперервним, але не до кожної функції $\varphi(t) \in D_1$ можемо застосувати цей оператор D двічі. Тому розглядають оператор D в просторі нескінченно диференційовних функцій на $[a,b]$, який позначають символом D_∞. В просторі D_∞ топологія визначається системою норм:

$$\|\varphi\|_n = \sup_{t \in [a,b]\, n \in \mathbf{N}} \left\{ |\varphi(t)|, |\varphi^{'}(t)|, \ldots, |\varphi^{(n)}(t)| \right\}.$$

   Оператор диференціювання відображає простір D_∞ в себе.

   Зауважимо, що простір D_∞ є достатньо вузьким в порівнянні з простором D_1.

   Можливість розглядати оператор диференціювання D в значно ширших просторах і поряд з цим забезпечувати неперервність цього оператора D з'являється при вивченні узагальнених функцій, в просторі яких теж визначається диференціювання функцій.

Лінійні неперервні оператори $A : X \to Y$ утворюють лінійний простір, на якому операції додавання і множення на число визначаються так:

$$(A + B)\, x = Ax + Bx \quad (\forall x \in X)\,,$$

$$(\alpha A)\, x = \alpha Ax \quad (\forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbf{R})\,.$$

При цьому виконуються всі аксіоми лінійного простору.

Розглянемо послідовність операторів $A_n : X \to Y$. Така послідовність називається *збіжною* до $A : X \to Y$, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists n_\varepsilon \in N)\, (\forall n \geq n_\varepsilon) : (\|A_n - A\| < \varepsilon)\,.$$

Нехай $A : X \to Y$ – оператор, що діє із простору X в простір Y, D_A – область визначення оператора A, R_A – область значень оператора A. Очевидно, $D_A \subset X$, $R_A \subset Y$. Оператор A називається *оборотним*, якщо для будь-якого $y \in R_A$ операторне рівняння $Ax = y$ має єдиний розв'язок.

Оператор $A^{-1} : Y \to X$ називається *оберненим* до $A : X \to Y$, якщо $\forall x \in X \quad A^{-1}(Ax) = x$.

Множина $KerA \overset{def}{=} \{x \in X : Ax = \theta\}$ називається *ядром* оператора A.

Обернений операторA^{-1} до оператора A існує тоді і тільки тоді, коли $KerA = \{\theta\}$.

Розв'язання типових задач

Завдання 1. *Перевірити лінійність, неперервність і знайти норму оператора A(якщо він є лінійним і неперервним):*

а) $A : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}$, $Ax(t) = \int_0^1 e^{3t-2s} x(s)\, ds$;

б) $A : l_2 \to l_2$, $Ax = (x_1 + x_2, 0, x_3 + x_4, 0, x_5 + x_6, 0, ...)$;

в) $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = tx(t)$.

Розв'язання. а) Перевіримо умову лінійності : $\forall x(t), y(t) \in C_{[0,1]}$, $\forall \alpha$, $\beta \in \mathbf{R}$

$$A(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \int_0^1 e^{3t-2s} (\alpha x(s) + \beta y(s))\, ds =$$

$$= \alpha \int_0^1 e^{3t-2s} x(s)\, ds + \beta \int_0^1 e^{3t-2s} y(s)\, ds = \alpha Ax(t) + \beta Ay(t)\,,$$

тобто оператор є лінійним.

Щоб довести неперервність оператора, скористаємося відомою властивістю, згідно якої лінійний обмежений оператор є неперервним. Перевіримо обмеженість оператора A :

$$\|Ax(t)\| = \max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 e^{3t-2s}x(s)\,ds\right| \le \max_{t\in[0,1]}\int_0^1 \left|e^{3t-2s}\right|\cdot|x(s)|\,ds \le$$

$$\le \max_{t\in[0,1]}\int_0^1 e^{3t-2s}\max_{s\in[0,1]}|x(s)|\,ds = \|x(t)\|\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 e^{3t-2s}ds =$$

$$= \|x(t)\|\max_{t\in[0,1]} e^{3t}\left.\frac{e^{-2s}}{-2}\right|_0^1 = \frac{1-e^{-2}}{2}\|x(t)\|\max_{t\in[0,1]} e^{3t} = \frac{e^3-e}{2}\|x(t)\|. \quad (9.2)$$

Таким чином $\forall x(t)\in C_{[0,1]}$ $\|Ax(t)\| \le \dfrac{e^3-e}{2}\cdot\|x(t)\|$, тобто оператор A обмежений.

Якщо тепер нам вдасться підібрати функцію $x^*(t)\in C_{[0,1]}$, для якої остання нестрога нерівність перетворювалася б у рівність, цим самим буде доведено, що $\|A\| = \dfrac{e^3-e}{2}$.

Виберемо функцію $x^*(t)$ так, щоб у ланцюжку перетворень (9.2) зберігалися лише рівності, тобто такою, щоб $\forall t\in[0,1]\quad x(t)=\|x(t)\|$. Цій умові задовольняє будь-яка додатна стала функція, наприклад, $x^*(t){=}1$. При цьому $\|Ax^*(t)\| = \dfrac{e^3-e}{2}\|x^*(t)\|$ і $\|A\| = \dfrac{e^3-e}{2} = \dfrac{1}{2}e(e^2-1)$.

б) Очевидні такі рівності(враховуючи відповідні операції в просторі l_2):

$$A(\alpha x+\beta y) =$$
$$= (\alpha x_1+\beta y_1+\alpha x_2+\beta y_2, 0, \alpha x_3+\beta y_3+\alpha x_4+\beta y_4, 0, ...) =$$
$$= (\alpha(x_1+x_2)+\beta(y_1+y_2), 0, \alpha(x_3+x_4)+\beta(y_3+y_4), 0, ...) =$$
$$= \alpha(x_1+x_2, 0, x_3+x_4, 0...)+\beta(y_1+y_2, 0, y_3+y_4, 0, ...).$$

Отже, оператор A – лінійний.

Обмеженість оператора A отримаємо з визначення норми елемента $Ax\in l_2$:

$$\|Ax\| = \sqrt{(x_1+x_2)^2+(x_3+x_4)^2+(x_5+x_6)^2+...} \le$$

$$\le \sqrt{2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_4^2+...} \le \sqrt{2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2} = \sqrt{2}\|x\|, \quad (9.3)$$

тобто оператор A обмежений, а це й означає його неперервність.

Виберемо в просторі l_2 такий елемент x^*, щоб скрізь у перетвореннях (9.3) зберігалася рівність: $x^* = (1,1,0,0,...)$, тоді $\|x^*\| = \sqrt{2}$, $\quad Ax^* = (2,0,0,...)$, $\quad \|Ax^*\| = 2$. Таким чином $2 = \|Ax^*\| = \sqrt{2}\|x^*\|$, інакше кажучи, $\|A\| = \sqrt{2}$.

в) Лінійність оператора є очевидною:

$$\forall x(t), y(t) \in L_2[0,1], \ \forall \alpha, \beta \in R$$
$$A(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \alpha t x(t) + \beta t y(t) = \alpha A x(t) + \beta A y(t).$$

Для доведення неперервності оператора скористаємося тією ж властивістю, що і в попередніх прикладах: з обмеженості лінійного оператора випдиває його неперервність.

$$\|Ax(t)\| = \sqrt{\int_0^1 t^2 x^2(t)\,dt} \leq \sqrt{\int_0^1 x^2(t)\,dt} = \|x(t)\|. \tag{9.4}$$

Це означає, що оператор A обмежений, причому $\|A\| \leq 1$.

Знову, як і у попередніх прикладах, підберемо елемент, при якому в перетворенні 9.4 зберігалася б рівність. Але на відміну від попередніх випадків, підбиратимемо не один елемент $x^*(t)$, а цілу послідовність $x_n^*(t)$ так, щоб виконувалася збіжність $\|Ax_n^*(t)\| - \|x_n^*(t)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Нехай $x_n^*(t) = \sqrt{2n+1}t^n$. Тоді $\|x_n^*(t)\| = \sqrt{\int_0^1 (2n+1)\,t^{2n}dt} = 1$,

$$\|Ax_n^*(t)\| = \sqrt{\int_0^1 (2n+1)\,t^{2n+2}dt} = \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Завдання 2. *Показати, що оператор* $A : X \to C_{[0,1]}$, *де* $Ax(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$, *а* X *– простір* $C'_{[0,1]}$ *із нормою* $\|x(t)\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$ *не є неперервним. Разом із цим, той самий оператор неперервно діє з* $C'_{[0,1]}$ *в* $C_{[0,1]}$.

Розв'язання. Оскільки неперервність лінійного оператора еквівалентна його обмеженості, то на першому етапі задачі достатньо показати, що оператор A є необмеженим. Для цього можна, наприклад, вказати таку послідовність $\{x_n\} \subset X$, щоб $\|x_n\| = 1$, але $\|Ax_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$; або ж таку, щоб $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, але $\|Ax_n\| \geq const > 0$.

Розглянемо послідовність $x_n(t) = \dfrac{1}{n}\sin nt$. $\|x_n(t)\|_X = \max\limits_{t\in[0,1]} \left|\dfrac{1}{n}\sin nt\right| \leq \dfrac{1}{n}$, тобто $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Але поряд із цим $Ax_n(t) = \cos nt$, і $\|Ax_n(t)\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |\cos nt| = 1$. Таким чином, оператор A необмежений.

Нехай тепер оператор A діє з простору $C'_{[0,1]}$, норма на якому, як відомо, дорівнює $\|x(t)\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)|$ в $C_{[0,1]}$. Тоді

$$\|Ax(t)\| = \max_{t\in[0,1]} |x'(t)| \leq \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)| = \|x(t)\|.$$

Це означає, що $\|A\| \leq 1$. Виберемо послідовність $\left\{x_n^*(t) = \dfrac{t^n}{n+1}\right\}$. Для таких функцій

$$\|x_n^*(t)\| = \max_{t\in[0,1]} \frac{t^n}{n+1} + \max_{t\in[0,1]} \frac{n}{n+1} t^{n-1} = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = 1.$$

В той же час

$$\|Ax_n^*(t)\| = \max_{t\in[0,1]} \frac{n}{n+1} t^n = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Отже, у другому випадку оператор A неперервний і $\|A\| = 1$.

Завдання 3. *Перевірити лінійність, неперервність і знайти норми наступних функціоналів:*

а) $f : L_2[0,1] \to \mathbf{R},\ f(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} tx(t^2)dt;$

б) $f : l_3 \to R : f(x) = 3x_2 + 7x_4.$

Розв'язання. а) Простір $L_p[0,1]$ є множина всіх функцій $x(t)$, $t \in [0,1]$, для яких $\int_0^1 |x(t)|^p dt < \infty$, $p \geq 1$. Відомо, що прикладом загального, лінійного, неперервного функціонала в просторі $L_2[a,b]$ є такий:

$$f(x) = \int_a^b x(t)g(t)dt,$$

де $x(t) \in L_2[a,b]$, $g(t)$ – якась обмежена вимірна функція із $L_2[0,1]$. У данній задачі, де $f(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} tx(t^2)dt$, спочатку зробимо у цьому визначеному інтегралі заміну $t^2 = s$. Тоді $t = \sqrt{s}$, $dt = \dfrac{1}{2\sqrt{s}}ds$, при $t = 0$ $s = 0$, а при $t = \dfrac{1}{2}$ $s = \dfrac{1}{4}$, тобто

$$f(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} tx(t^2)dt = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}x(s)ds.$$

Таким чином,

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{якщо } t \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right]; \\ 0, & \text{якщо } t \in \left(\dfrac{1}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

Інакше кажучи, функціонал є лінійним і неперервним, причому

$$\|f\| = \|g(t)\|_{L_2[0,1]} = \sqrt{\int_0^1 g^2(t)dt} = \sqrt{\int_0^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dt + \int_{\frac{1}{4}}^1 0dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{4}} dt} = \frac{1}{2}\sqrt{t|_0^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{4}.$$

б) У просторі l_p, $p > 1$ усі лінійні неперервні фунціонали мають вигляд:

$$f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + ...,$$

де $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in l_q$ причому $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Оскільки $f(x) = 3x_2 + 7x_4$, то $a = (0, 3, 0, 7, 0, 0, \ldots)$. Враховуючи, що $p = 3$, маємо: $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{q} = 1$, $q = \dfrac{3}{2}$. $a \in l_{\frac{3}{2}}$, тому функціонал f лінійний та

$$\|f\| = \|a\|_{l_{\frac{3}{2}}} = (3^{\frac{3}{2}} + 7^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^3 + 2\sqrt{21}^3 + 7^3} = \sqrt[3]{370 + 2\sqrt{21}^3}.$$

Завдання 4. *Нехай X – лінійний простір $C_{[0,1]}$ з нормою $\|x\| = \int\limits_0^1 |x\,(t)|\,dt$. Чи буде неперервним функціонал $f\,(x) = x\,(0)$?*

Розв'язання. Даний функціонал не буде неперервним, і це можна показати двома способами.

1 спосіб. Покажемо, що функціонал необмежений, тобто що

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists x_n\,(t) \in X \quad |f\,(x_n)| > n\,\|x_n\,(t)\|\,.$$

Покладемо

$$x_n\,(t) = \begin{cases} n\,(1 - nt)\,, \text{при}\, 0 \le t \le \dfrac{1}{n}; \\ 0, \text{при}\, \dfrac{1}{n} \le t \le 1. \end{cases}$$

Очевидно, що функції $x_n(t)$ є неперервними і

$$\|x_n\,(t)\| = \int_0^{\frac{1}{n}} n\,(1 - nt)\,dt = -\left.\frac{(1 - nt)^2}{2}\right|_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Разом із цим

$$|f\,(x_n)| = |x_n\,(0)| = n > \frac{n}{2} = n\,\|x_n\,(t)\|\,.$$

2 спосіб. Заперечення неперервності функціонала означає, що існує така послідовність $\{x_n\,(t)\,, n \in \mathbf{N}\}$, що $\|x_n\,(t)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, але $|f\,(x_n)| \not\to 0$.

Такою буде, наприклад, послідовність функцій

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, \text{ при } 0 \le t \le \dfrac{1}{n}; \\ 0, \text{при } \dfrac{1}{n} \le t \le 1. \end{cases}$$

Дійсно, $\|x_n(t)\| = \int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nt)\, dt = -\dfrac{1}{n} \dfrac{(1-nt)^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Однак при цьому $|f(x_n)| = x_n(0) = 1$ для всіх n, тобто $f(x_n) \not\to 0$ при $n \to \infty$.

Завдання 5. *Дослідити на збіжність послідовність операторів:*

а) $A_n : C_{[0,\frac{\pi}{2}]} \to C_{[0,\frac{\pi}{2}]}, \quad A_n x(t) = \sin^n t \cdot x(t)$;

б) $A_n : l_1 \to l_1, \quad A_n x = (x_{2n+1}, x_{2n+2}, \ldots)$;

в) $A_n : l_2 \to l_2, \quad A_n x = \left(\dfrac{x_1}{e^n}, \dfrac{x_2}{e^n}, ..., \dfrac{x_k}{e^n}, \ldots\right)$.

Розв'язання. а) Оскільки при $\forall t \in \mathbf{R}$ маємо $\sin t \in [0, 1]$, то поточкова границя

$$Ax(t) = \lim_{n\to\infty} A_n x(t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right); \\ x\left(\dfrac{\pi}{2}\right), \text{якщо } t = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Але тоді $Ax(t) \notin C_{[0,\frac{\pi}{2}]}$, тому послідовність операторів не є збіжною навіть поточково.

Відмітимо, що якби $A_n : C_{[0,\frac{\pi}{4}]} \to C_{[0,\frac{\pi}{4}]}$ то для $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ послідовність операторів A_n була б поточково збіжною до нульового оператора.

б) Знайдемо поточкову границю A_n. Оскільки множина l_1 це сукупність нескінченних абсолютно збіжних послідовностей, то $\forall x \in l_1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ є збіжним. Тому згідно необхідної умови збіжності ряду $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. А тому і

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x = (0, 0, \ldots) = \Theta x, \quad \Theta - \text{нульовий оператор.}$$

Знайдемо норму різниці операторів $A_n - \Theta$.

$$\forall x \in l_1, \quad \|A_n x - \Theta x\| = \|A_n x\| = \sum_{k=2n+1}^{\infty} |x_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|x\|,$$

тобто $\|A_n - \Theta\| \le 1$. Але при $x^* = \left(\underbrace{0, 0, ..., 0, 1,}_{2n+1} 0, 0, \ldots\right), \quad \|x^*\| = 1$,

$A_n x^* - \Theta x^* = (1, 0, 0, \ldots), \quad \|A_n x^* - \Theta x^*\| = 1$.

Інакше кажучи,

$$\|A_n x^* - \Theta x^*\| = 1 = 1 \cdot \|x^*\|,$$

тобто $\|A_n - \Theta\| = 1 \not\to 0$ при $n \to \infty$, отже послідовність операторів не є збіжною.

в) Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{e^n} = 0$, то поточкова границя

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x = (0, 0, \ldots) = \Theta x.$$

$$\|A_n x - \Theta x\| = \|A_n x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x_k}{e^n}\right)^2} = \frac{1}{e^n}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} {x_k}^2} = \frac{\|x\|}{e^n}.$$

Таким чином $\|A_n - \Theta\| = \dfrac{1}{e^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Отже, послідовність операторів A_n збігається до нульового оператора.

Завдання 6. *Знайти оператор, обернений до* A, *або довести, що його не існує. Якщо* A^{-1} *існує і є обмеженим, то оцінити* $\|A\|$ *та* $\|A^{-1}\|$:

а) $A : l_2 \to l_2, \quad Ax = (x_1 + x_2, 3x_1 - x_2, 4x_3 - x_1, x_4, x_5, \ldots);$

б) $A : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}, \quad Ax(t) = (1 - t)x(t);$

в) $A : L_2[0, 1] \to L_2[0, 1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 t^2(s - 2)x(s)ds + (3 + t)\, x(t).$

Розв'язання. У всіх трьох випадках перед знаходженням оберненого оператора потрібно перевірити достатню умову його існування, тобто чи $\ker A = \{x \in X : Ax = \theta\} = \{\theta\}$.

а) Складемо систему для відшукання ядра оператора:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 3x_1 - x_2 = 0, \\ 4x_3 - x_1 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Очевидно, що всі x_i, починаючи з $i = 4$, рівні нулю. Розв'яжемо перші три рівняння системи. Визначник даної однорідної підсистеми

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -16$$

є відмінним від нуля, а це означає, що вона має тільки тривіальний(нульовий) розв'язок, тому переходимо до відшукання оберненого оператора. Для цього достатньо розв'язати відносно x операторне рівняння $Ax = y$.

На просторі l_2 рівняння $Ax = y$ має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1, \\ 3x_1 - x_2 = y_2, \\ 4x_3 - x_1 = y_3, \\ x_4 = y_4, \\ x_5 = y_5, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 = y_1 + y_2, \\ 3x_1 - x_2 = y_2, \\ 4x_3 = x_1 + y_3, \\ x_4 = y_4, \\ x_5 = y_5, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2), \\ x_2 = \frac{3}{4}(y_1 + y_2) + y_2 = \frac{3}{4}y_1 + \frac{7}{4}y_2, \\ x_3 = \frac{1}{4}(y_3 + \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_2), \\ x_4 = y_4, \\ x_5 = y_5, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Тобто

$$A^{-1}y = \left(\frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_2, \frac{3}{4}y_1 + \frac{7}{4}y_2, \frac{1}{16}y_1 + \frac{1}{16}y_2 + \frac{1}{4}y_3, y_4, y_5, \dots\right).$$

Оцінимо норми A та A^{-1} :

$$\forall x \in l_2, \quad \|Ax\| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (3x_1 - x_2)^2 + (4x_3 - x_1)^2 + x_4 + x_5 + ...} \leq$$

$$\leq \sqrt{2x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + 18x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + 32x_3{}^2 + 2x_1{}^2 + x_4{}^2 + x_5{}^2 + ...} =$$

$$= \sqrt{22x_1{}^2 + 4x_2{}^2 + 32x_3{}^2 + x_4{}^2 + x_5{}^2 + ...} =$$

$$= \sqrt{22x_1{}^2 + 4x_2{}^2 + 32x_3{}^2 + x_4{}^2 + x_5{}^2 + ...} \leq \sqrt{32(x_1{}^2 + x_2{}^2 + ...)} = 4\sqrt{2}\|x\|,$$

тобто $\|A\| \leq 4\sqrt{2}$;

$$\forall x \in l_2, \quad \|A^{-1}y\| =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_2\right)^2 + \left(\frac{3}{4}y_1 + \frac{7}{4}y_2\right)^2 + \left(\frac{1}{16}y_1 + \frac{1}{16}y_2 + \frac{1}{16}y_3\right)^2 + y_4{}^2 + y_5{}^2 + ...} \leq$$

$$\leq \sqrt{2\frac{1}{16}y_1{}^2 + 2\frac{1}{16}y_2{}^2 + 2\frac{9}{16}y_1{}^2 + 2\frac{49}{16}y_2{}^2 + \frac{2}{256}(y_1 + y_2)^2 + 2\frac{1}{16}y_3{}^2 + y_4{}^2 + y_5{}^2 + ...} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{5}{8}y_1{}^2 + \frac{25}{8}y_2{}^2 + \frac{2}{128}y_1{}^2 + \frac{2}{128}y_2{}^2 + \frac{1}{8}y_3{}^2 + y_4{}^2 + y_5{}^2 + ...} =$$

$$= \sqrt{\frac{41}{64}{y_1}^2 + \frac{201}{64}{y_2}^2 + \frac{1}{8}{y_3}^2 + {y_4}^2 + {y_5}^2 + ...} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{201}{64}({y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2 + ...)} = \frac{\sqrt{201}}{8}\|y\|,$$

тобто $\|A^{-1}\| \leq \dfrac{\sqrt{201}}{8}$.

б) На просторі $C_{[0,1]}$ рівняння $Ax = \theta$ має вигляд

$$(1-t)x(t) = 0.$$

Звідки або $t = 1$, або $x(t) = 0$ для всіх $t \in [0,1)$. Оскільки $x(t) \in C_{[0,1]}$, то й $x(1) = 0$. Таким чином $\ker A = \{\theta\}$.

Розв'язком рівняння $y(t) = (1-t)x(t)$ є функція $x(t) = \dfrac{y(t)}{1-t}$, тобто

$$A^{-1}y = \frac{1}{1-t}y(t).$$

Але при $t \to 1$, $\quad \dfrac{1}{1-t} \to \infty$ і даний оператор є необмеженим.

в) Перевіримо спочатку, чи дорівнює ядро оператора A нульовому елементу простору $L_2[0,1]$. Для цього розглянемо рівняння

$$\int\limits_0^1 t^2(s-2)x(s)ds + (3+t)x(t) = 0.$$

Або, позначивши $\int_0^1 (s-2)x(s)ds = c$,

$$t^2 + (3+t)x(t) = 0.$$

Звідки, оскільки $3 + t \neq 0 \quad \forall t \in [0,1]$,

$$x(t) = -\frac{ct^2}{3+t}.$$

Знайдемо константу c. Для цього останню рівність домножимо на $(t-2)$ та результат проінтегруємо від 0 до 1:

$$c = -c\int\limits_0^1 \frac{t^2(t-1)}{3+t}dt.$$

Останній інтеграл обчислимо окремо:

$$\int\limits_0^1 \frac{t^2(t-2)}{t+3}dt = \int\limits_0^1 (t^2 - 5t + 15 - \frac{45}{t+3})dt =$$

$$= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 15t - 45ln|t+3|\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 15 - 45ln4 + 45ln3 =$$

$$= \frac{77}{6} - 45ln\frac{4}{3}.$$

Таким чином,

$$c\left(\frac{83}{6} - 45ln\frac{4}{3}\right) = 0, \quad \Rightarrow c = 0.$$

Тоді $x(t) = -\dfrac{0 \cdot t^2}{3+t} = 0$, або одне й те саме, що $\ker A = \theta$.

Операторне рівняння $Ax(t) = y(t)$ на просторі $L_2[0,1]$ має вигляд

$$\int_0^1 t^2(s-2)x(s)ds + (3+t)x(t) = y(t).$$

Розв'яжемо його відносно $x(t)$:

$$(3+t)x(t) = y(t) - t^2\int_0^1 (s-2)x(s)ds;$$

$$x(t) = \frac{1}{3+t}\left(y(t) - t^2\int_0^1 (s-2)x(s)ds\right).$$

Використавши вже введене позначення $\int\limits_0^1 (s-2)x(s)ds = c$, матимемо, що

$$x(t) = \frac{1}{3+t}(y(t) - t^2c).$$

Для знаходження сталої c домножимо ліву і праву частини останньої рівності на $(t-2)$ і проінтегруємо в межах від 0 до 1:

$$\int_0^1 (t-2)x(t)dt = \int_0^1 \frac{t-2}{3+t}y(t)dt - c\int \frac{t^2(t-2)}{t+3}dt.$$

Або ж

$$c = \int_0^1 \frac{t-2}{3+t}y(t)dt - c\int \frac{t^2(t-2)}{t+3}dt.$$

Оскільки $\int\limits_0^1 \dfrac{t^2(t-2)}{t+3}dt = \dfrac{77}{6} - 45ln\dfrac{4}{3}$ (див. вище), то

$$c = \int\limits_0^1 \frac{t-2}{t+3}y(t)dt - \left(\frac{77}{6} - 45ln\frac{4}{3}\right)c.$$

Остаточно,

$$c = \frac{1}{\frac{83}{6} - 45ln\frac{4}{3}} \int\limits_0^1 \frac{t-2}{t+3}y(t)dt$$

та

$$x(t) = \frac{1}{3+t}(y(t) - \frac{6t^2}{83 - 270ln\frac{4}{3}} \int\limits_0^1 \frac{s-2}{s+3}y(s)ds).$$

Таким чином,

$$A^{-1}y(t) = \frac{y(t)}{3+t} - \frac{6t^2}{(3+t)(83 - 270ln\frac{4}{3})} \int\limits_0^1 \frac{s-2}{s+3}y(s)ds.$$

Оцінимо норму оператора A.

$$\|Ax(t)\| = \max_{t\in[0,1]} \left| \int\limits_0^1 t^2(s-2)x(s)ds + (3+t)x(t) \right| \leq$$

$$\leq \max_{t\in[0,1]} \left(\int\limits_0^1 \left|t^2(s-2)x(s)\right| ds + |3+t||x(t)| \right) =$$

$$\leq \max_{t\in[0,1]} \int\limits_0^1 \left|t^2(s-2)\right| \max_{0\leq s\leq 1} |x(s)|ds + \max_{0\leq t\leq 1} (|3+t||x(t)|) =$$

$$= \left(-\int\limits_0^1 (s-2)ds + 4 \right) \|x\| = \left(-\frac{(s-2)^2}{2}\Bigg|_0^1 + 4 \right) \|x\| = \frac{11}{2}\|x\|.$$

Отже, $\|A\| \leq \dfrac{11}{2}$. Норма оператора A^{-1} оцінюється аналогічно.

Завдання 7. *Нехай* $X = \left\{ x\left(t\right) \in C'_{[0,1]} : x\left(0\right) = 0 \right\}$ *з нормою* $\|x\left(t\right)\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x\left(t\right)| + \max\limits_{t\in[0,1]} \left|x'\left(t\right)\right|$. *Оператор* $A : X \to C_{[0,1]}$ *визначається формулою*

$$Ax\left(t\right) = x'\left(t\right) - 2tx\left(t\right).$$

Довести, що існує неперервний оператор A^{-1}.

Розв'язання. Задача знаходження оберненого оператора A^{-1} зводиться до розв'язання задачі Коші для лінійного диференціального рівняння:

$$\begin{cases} Ax \equiv x'(t) - 2tx(t) = y(t); \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Знайдемо розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння

$$x'(t) - 2tx(t) = 0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = 2tx(t), \\ &\frac{dx}{x} = 2tdt, \\ &\ln|x(t)| = t^2 + C_1, \\ &x(t) = Ce^{t^2}. \end{aligned}$$

З початкової умови $x(0) = 0$ випливає, що однорідне рівняння має тільки нульовий розв'язок, тому відшукання оберненого оператора має зміст.

Згідно методу варіації сталих, розв'язок неоднорідного рівняння запишеться у вигляді $x(t) = C(t)e^{t^2}$. З початкової умови $x(0) = 0$, і з того факту, що $e^0 = 1$ випливає, що $C(0) = 0$. Знайдемо невідому функцію $C(t)$, підставивши $x(t) = C(t)e^{t^2}$ у початкове рівняння.

$$\begin{aligned} &C'(t)e^{t^2} + C(t)e^{t^2} \cdot 2t - 2tC(t)e^{t^2} = y(t), \\ &C'(t) = y(t)e^{-t^2}, \\ &C(t) = \textstyle\int_0^t y(s)e^{-s^2}ds. \end{aligned}$$

Нижня межа інтегрування вибрана з метою забезпечення виконання початкової умови $C(0) = 0$. Таким чином,

$$x(t) = e^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}y(s)\,ds = \int_0^t e^{t^2-s^2}y(s)\,ds.$$

Оскільки ядро $e^{t^2-s^2}$ даного інтегрального оператора є неперервною функцією при $t \in [0,1]$, $s \in [0,1]$, то даний оператор є неперервним.

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *Перевірити лінійність, неперервність і знайти норму оператора A (якщо він є лінійним і неперервним):*

1. $A : C_{[-1,1]} \to C_{[-1,1]},\ Ax(t) = \int_{-1}^{1}(t-2s)x(s)\,ds;$

2. $A: C_{[0,\frac{\pi}{2}]} \to C_{[0,\frac{\pi}{2}]},\ Ax(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t+s)\, x(s)\, ds;$

3. $A: C_{[0,\frac{\pi}{2}]} \to C_{[0,\frac{\pi}{2}]},\ Ax(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t-2s)\, x(s)\, ds;$

4. $A: C_{[0,1]} \to C_{[0,1]},\ Ax(t) = \left(t^2+t\right) x(t);$

5. $A: l_2 \to l_2,\ Ax = (0,0,0,x_4,x_5,\ldots);$

6. $A: l_2 \to l_2,\ Ax = (x_4,x_4,x_4,x_4,x_5,x_6,\ldots);$

7. $A: l_2 \to l_2,\ Ax = (2x_1-x_2, 2x_2, 3x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots);$

8. $A: l_2 \to l_2,\ Ax = (x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_4, x_4, x_5, x_6, \ldots);$

9. $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ Ax(t) = t\int_0^1 x(s)\, ds;$

10. $A: L_2[-1,1] \to L_2[-1,1],\ Ax(t) = \int_{-1}^1 (2t-3s)\, x(s)\, ds.$

Завдання 2. *Перевірити лінійність, неперервність і знайти норми функціоналів:*

1. $f: l_2 \to \mathbf{R},\ f(x) = x_5 - x_4;$

2. $f: l_2 \to \mathbf{R},\ f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_k}{\sqrt{k(k+1)}};$

3. $f: l_2 \to \mathbf{R},\ f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_k}{\pi^{2k}};$

4. $f: L_2[0,1] \to \mathbf{R},\ f(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{t}x\left(t^2\right) dt;$

5. $f: L_2[0,1] \to \mathbf{R},\ f(x) = \int_0^1 \cos \pi t x(t)\, dt;$

6. $f: L_2[0,1] \to \mathbf{R},\ f(x) = \int_0^1 sign\left(t - \dfrac{1}{2}\right) x(t)\, dt;$

7. $f: C_{[-1,1]} \to \mathbf{R},\ f(x) = \int_{-1}^1 x(t)\, signtdt;$

8. $f: C_{[-1,1]} \to \mathbf{R},\ f(x) = 2\int_{-1}^0 x(t)\, dt + \int_0^1 x(t)\, dt;$

9. $f: C_{[0,1]} \to \mathbf{R},\ f(x) = \int_0^1 (t-1) x(t)\, dt;$

10. $f: C_{[0,1]} \to \mathbf{R},\ f(x) = \int_0^1 x(t)\, dt - x(0).$

Завдання 3. *Дослідити на збіжність послідовність операторів:*

1. $A_n: l_2 \to l_2,\ A_n x = \left(\underbrace{0,0,...,0,}_{n} x_n, 0, 0, \ldots\right);$

2. $A_n : l_2 \to l_2,\ A_n x = \left(x_1, x_2, ..., x_n, \underbrace{0, 0, ..., 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, ...\right);$

3. $A_n : l_2 \to l_2,\ A_n(x) = \left(\frac{x_1}{\sqrt[n]{n}}, \frac{x_2}{\sqrt[n]{n}}, \frac{x_3}{\sqrt[n]{n}}, ...\right);$

4. $A_n : l_2 \to l_2,\ A_n x = \left(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\right);$

5. $A_n : l_1 \to l_1,\ A_n x = \left(\underbrace{x_2, x_1, x_4, x_3, \ldots, x_{2n}, x_{2n-1}}_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+2}, \ldots\right);$

6. $A_n : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]},\ A_n x(t) = \int_0^1 \sqrt{(t-s)^2 + \frac{1}{n}} x(s)\, ds;$

7. $A_n : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]},\ A_n x(t) = \left|t^2 - t\right|^n x(t);$

8. $A_n : C_{[-1,1]} \to C_{[-1,1]},\ A_n x(t) = \left(1 - t^2\right)^n x(t);$

9. $A_n : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]},\ A_n x(t) = \operatorname{arctg} ntx(t);$

10. $A_n : L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ A_n x(t) = t^n x(t).$

Завдання 4. *Знайти обернений оператор A^{-1} до оператора A або довести, що його не існує. Якщо A^{-1} існує і обмежений, то оцінити норму A та A^{-1}:*

1. $A : L_2[-1,1] \to L_2[-1,1], \quad Ax(t) = x(t) - \int_{-1}^1 t^3 s^2 x(s)\, ds;$

2. $A : L_2[0,\pi] \to L_2[0,\pi], \quad Ax(t) = 2x(t) + \int_0^\pi \sin tx(s)\, ds;$

3. $A : L_2[-\pi,\pi] \to L_2[-\pi,\pi], \quad Ax(t) = x(t) - 2\int_{-\pi}^\pi \cos t \sin sx(s)\, ds;$

4. $A : L_2[-\infty,\infty] \to L_2[-\infty,\infty], \quad Ax(t) = \frac{1}{1+t^2} x(t);$

5. $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad Ax(t) = x(t) + \int_0^1 t^4 sx(s) ds;$

6. $A : L_2[1,2] \to L_2[1,2], \quad Ax(t) = x(t) + \int_1^2 (t+1)^2 (s-2)^2 x(s) ds;$

7. $A : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}, \quad Ax(t) = \left(t^2 + t\right) x(t);$

8. $A : l_2 \to l_2, \quad Ax = (x_1 + x_2, x_2, 2x_3 - x_2, x_4, x_5, ...);$

9. $A : l_2 \to l_2, \quad Ax = (x_1, 2x_1 - x_2, x_1 + x_4, x_4 - x_3, x_5, x_6, ...);$

10. $A : l_2 \to l_2, \quad Ax = (x_3 - x_2, x_2 + x_3, x_3, x_4, \ldots).$

10 Спряжені і компактні оператори. Власні значення і власні елементи оператора. Спектр і резольвента

Перелік необхідних питань теорії

1. Спряжені і самоспряжені оператори.
2. Компактні оператори.
3. Власні значення і власні елементи.
4. Резольвента.
5. Спектр. Класифікація точок спектра.

Теоретичні відомості

Розглянемо неперервний лінійнии оператор $A : X \to Y$, де X, Y – евклідові простори. Для лінійного обмеженого оператора A, що діє в евклідовому просторі, згідно загального визначення норми оператора A, маємо:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \in X} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Для $Ax \in Y$, $y \in Y$ визначений скалярний добуток. Якщо в скалярному добутку (Ax, y) зафіксувати y, тоді отримаємо лінійний функціонал від $x : f(x) = (Ax, y)$, де $x \in X$. Причому $|f(x)| = |(Ax, y)| \leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$. Цей функціонал зображується у вигляді $(Ax, y) = (x, u)$, де $u \in X$, $x \in X$. Відповідність $y \to u$ породжує лінійний обмежений оператор $u = A^*y$. Таким чином, оператор $A^* : Y \to X$ називається *спряженим* до оператора A, якщо

$$(\forall x \in X)\,(\forall y \in Y) : ((Ax, y) = (x, A^*y))\,.$$

Якщо $A : X \to X$ і $(\forall x, y \in X) : ((Ax, y) = (x, Ay))$, то оператор A називається *самоспряженим.*

Відомо, що якщо оператор A є лінійним і неперервним, то і спряжений до нього теж є лінійним і неперервним.

Нехай оператор $A : X \to Y$, де X, Y – нормовані простори. Оператор A називається *компактним,* якщо довільну обмежену множину він відображає в передкомпактну.

Якщо $A : X \to X$ і існує таке число λ, що $Ax = \lambda x$, де $x \in X$, $x \neq \theta$, то λ називається *власним значенням* оператора A, а x – відповідним *власним елементом.*

Комплексне число λ називається *регулярною точкою* оператора A, якщо для оператора $A-\lambda I$ існує обернений, що є лінійним неперервним оператором визначеним на X. Сукупність всіх регулярних точок оператора A називається *резольвентною множиною* оператора A і позначається $\rho\left(A\right)$.

Якщо $\lambda \in \rho\left(A\right)$, то оператор $R_\lambda\left(A\right) = \left(A-\lambda I\right)^{-1}$ називається *резольвентою* оператора A.

Доповнення до множини $\rho\left(A\right)$ в комплексній площині називається *спектром* оператора A і позначається $\sigma\left(A\right)$.

Для точок спектра лінійного оператора A є три можливості:

1. для оператора $A-\lambda I$ не існує оберненого. Це означає, що λ є власним значенням оператора A. Множину власних значень оператора A називають ще точковим спектром і позначають $\sigma_p\left(A\right)$;

2. для оператора $A-\lambda I$ існує обернений, але замикання множини його значень $\overline{R\left(A-\lambda I\right)}$ не співпадає з множиною X. У цьому випадку кажуть, що $\lambda \in \sigma_r\left(A\right)$ – залишковому спектру оператора A;

3. для оператора $A-\lambda I$ існує обернений, і замикання множини його значень $\overline{R\left(A-\lambda I\right)}$ співпадає з множиною X, але $R\left(A-\lambda I\right) \neq X$. У цьому випадку кажуть, що $\lambda \in \sigma_c\left(A\right)$ – неперервному спектру оператора A.

Розв'язання типових задач

Завдання 1. *Знайти* A^*, *оцінити* $\|A\|$ *та* $\|A^*\|$, *якщо:*

а) $A : L_2[0,\pi] \to L_2[0,\pi], \quad Ax(t) = x(t) + 2\int\limits_0^\pi \cos 2t \sin 3s x(s) ds;$

б) $A : l_2 \to l_2, \quad Ax = \left(3x_2 - x_3, 2x_3, x_3 - 2x_1, 0, 0, \ldots\right).$

Розв'язання. а) Як відомо, оператор A^*, спряжений до A, визначається формулою: $\forall x, y \in L_2[0,1]$ $(Ax, y) = (x, A^*y)$. Розглянемо скалярний добуток

$$(Ax, y) = \int_0^\pi \left(x(t) + 2\int\limits_0^\pi \cos 2t \sin 3s x(s) ds \right) y(t) dt =$$

$$= \int_0^\pi x(t)y(t)dt + 2\int_0^\pi \left(\int\limits_0^\pi \cos 2t \sin 3s x(s)y(t)ds\right) dt =$$

(у другому інтегралі змінимо порядок інтегрування)

$$= \int_0^\pi x(t)y(t)dt + 2\int_0^\pi \left(\int\limits_0^\pi \cos 2t \sin 3s x(s)y(t)dt\right) ds =$$

$$= \int_0^\pi x(t)y(t)dt + 2\int_0^\pi x(s)\left(\int\limits_0^\pi \cos 2t \sin 3s y(t)dt\right) ds =$$

(у другому інтегралі перепозначимо змінні)

$$= \int_0^\pi x(t)y(t)dt + 2\int_0^\pi x(t)\left(\int\limits_0^\pi \cos 2s \sin 3t y(s)ds\right) dt =$$

$$= \int_0^\pi x(t)\left(y(t) + 2\int_0^\pi \cos 2s \sin 3t y(s)ds\right) dt,$$

звідки можна зробити висновок, що

$$A^* y(t) = y(t) + 2\int_0^\pi \cos 2s \sin 3t y(s)ds.$$

Оцінимо норму оператора A. $\forall x(t) \in L_2[0,1]$

$$\|Ax(t)\| = \sqrt{\int_0^\pi \left(x(t) + 2\int_0^\pi \cos 2t \sin 3s x(s)ds\right)^2 dt} \le$$

$\left(\text{згідно нерівності } (a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2\right) \le$

$$\le \sqrt{\int_0^\pi 2x^2(t)dt + 2\cdot 4\int_0^\pi \left(\int_0^\pi \cos 2t \sin 3s x(s)ds\right)^2 dt} \le$$

згідно нерівності Коші-Буняковського

$$\le \sqrt{2\|x\|^2 + 8\int_0^\pi \left(\sqrt{\int_0^\pi \cos^2 2t \sin^2 3s x(s)ds}\sqrt{\int_0^\pi x^2(s)ds}\right)^2 dt} =$$

$$= \sqrt{2\|x\|^2 + 8\int_0^\pi \left(\sqrt{\cos^2 2t\int_0^\pi \frac{1-\cos 6s}{2}ds}\|x\|\right)^2 dt} =$$

$$= \sqrt{2\|x\|^2 + 8\|x\|^2 \int_0^\pi \left(\cos 2t \sqrt{\frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{6}\sin 6s\right)\Big|_0^\pi}\right)^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\|x\|^2 \left(2 + 8\int_0^\pi \cos^2 2t \cdot \frac{\pi}{2} dt\right)} = \sqrt{\|x\|^2 \left(2 + 8\int_0^\pi \frac{1+\cos 4t}{2} \cdot \frac{\pi}{2} dt\right)} =$$

$$= \|x\| \sqrt{2 + 2\pi \left(t + \frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^\pi\right)} = \sqrt{2 + 2\pi^2}\|x\|,$$

тобто $\|A\| \leq \sqrt{2 + 2\pi^2}$. Аналогічно оцінюється $\|A^*\|$ і отримуємо $\|A^*\| \leq \sqrt{2 + 2\pi^2}$.

б) Оскільки в просторі $l_2 \quad (x, y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i$, то

$$(Ax, y) = (3x_2 - x_3)y_1 + 2x_3y_2 + (x_3 - 2x_1)y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 + \ldots =$$
$$= 3x_2y_1 - x_3y_1 + 2x_3y_2 + x_3y_3 - 2x_1y_3 =$$
$$x_1 \cdot (-2y_3) + x_2 \cdot 3y_1 + x_3(-y_1 + 2y_2 + y_3) =$$
$$= x_1 \cdot (-2y_3) + x_2 \cdot 3y_1 + x_3(-y_1 + 2y_2 + y_3) + x_4 \cdot 0 + x_5 \cdot 0 + \ldots = (x, A^*y).$$

Таким чином, $A^*y = (-2y_3, 3y_1, -y_1 + 2y_2 + y_3, 0, 0, \ldots)$.

Далі, $\forall x \in l_2$

$$\|Ax\| = \sqrt{(3x_2 - x_3)^2 + (2x_3)^2 + (x_3 - 2x_1)^2} \leq$$
$$\leq \sqrt{18x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_3^2 + 2x_3^2 + 8x_1^2} = \sqrt{8x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2} \leq$$
$$\leq \sqrt{18}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq \sqrt{18}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} = \sqrt{18}\|x\|,$$

тобто $\|A\| \leq \sqrt{18}$.

Аналогічно $\forall y \in l_2$

$$\|A^*y\| = \sqrt{(2y_3)^2 + (3y_1)^2 + (-y_1 + 2y_2 + y_3)^2} \leq$$
$$\leq \sqrt{4y_3^2 + 9y_1^2 + 8y_2^2 + 2(y_3 - y_1)^2} \leq \sqrt{4y_3^2 + 9y_1^2 + 8y_2^2 + 4y_3^2 + 4y_1^2} =$$
$$= \sqrt{13y_1^2 + 8y_2^2 + 8y_3^2} \leq \sqrt{13}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \leq \sqrt{13}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2} = \sqrt{13}\|y\|,$$

тобто $\|A^*\| \leq \sqrt{13}$.

Завдання 2. *У просторі* $L_2[a, b]$ *розглянемо оператор Фредгольма*

$$Ax(t) = x(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds,$$

де функція $K(t, s)$ *(ядро оператора) – визначена і обмежена* $\forall (x, y) \in$

$[a,b]\times[a,b]$. *Довести, що*

$$A^*y(t)=y(t)+\lambda\int_a^b K(s,t)\,y(s)\,ds.$$

Розв'язання. Утворимо скалярний добуток $(Ax(t), y(t))$ і зобразимо його у вигляді $(x(t), A^*y(t))$, змінивши при цьому у другому доданку порядок інтегрування і перепозначивши змінні:

$$\begin{aligned}(Ax(t),y(t)) &= \int_a^b\left(x(t)+\lambda\int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds\right)y(t)\,dt=\\ &=\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt+\lambda\int_a^b\int_a^b K(t,s)\,x(s)\,y(t)\,dsdt=\\ &=\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt+\lambda\int_a^b\int_a^b K(t,s)\,x(s)\,y(t)\,dtds=\\ &=\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt+\lambda\int_a^b\int_a^b K(s,t)\,x(t)\,y(s)\,dsdt=\\ &=\int_a^b x(t)\left(y(t)+\lambda\int_a^b K(t,s)\,y(s)\,ds\right)dt=(x(t),A^*y(t)).\end{aligned}$$

Отже, $A^*y(t)=y(t)+\lambda\int_a^b K(s,t)\,y(s)\,ds$, і завдання виконано.

Завдання 3. *Дослідити на компактність оператор* $A: C_{[0,1]}\to C_{[0,1]}$, *якщо:*

а) $Ax(t)=x^2\left(\sqrt[3]{t}\right)$;

б) $Ax(t)=\int_0^1 t^2\sqrt{s}x(s)ds.$

Розв'язання. а) Якщо оператор компактний, то він відображає будь-яку обмежену множину M у компактну K. Якщо в ролі множини M розглянути $M=\left\{x(t): x(t)=t^{\frac{3}{2}n}\right\}$, де $n\in\mathbf{N}$, то, оскільки $t\in[0,1]$, маємо, що при $\forall n\in\mathbf{N}$ справедлива нерівність $|x(t)|\le 1$. Тобто множина M є рівномірно обмеженою. Очевидно,

$$\begin{aligned}K&=\left\{y(t):\ y(t)=x^2\left(\sqrt[3]{t}\right),\ \text{де } x(t)\in M\right\}=\\ &=\left\{y(t):\ y(t)=x^2\left(\sqrt[3]{t}\right),\ x(t)=t^{\frac{3}{2}n}\right\}=\\ &=\left\{y(t):\ y(t)=\left(\left(\sqrt[3]{t}\right)^{\frac{3}{2}n}\right)^2\right\}=\{y(t):\ y(t)=t^n\}.\end{aligned}$$

Але множина $\{t^n\}$ не є компактною в $C_{[0,1]}$ (див. задачу 5 з 6-го розділу.) А це означає, що й оператор A не є компактним в $C_{[0,1]}$.

б) Розглянемо довільну обмежену множину $M\in C_{[0,1]}$. Нехай $\forall\ x(t)\in M$ справджується нерівність $|x(t)|\le C$. Тоді $\forall\ y(t)\in K$(образ множини

M) $y(t) = \int_0^1 t^2\sqrt{s}x(s)ds$. Дослідимо K на компактність за допомогою теореми Арцела:

$$\forall\ y(t) \in K: \quad |y(t)| = \left|\int_0^1 t^2\sqrt{s}x(s)ds\right| \le \int_0^1 t^2\sqrt{s}|x(s)|ds \le$$

$$\le Ct^2\int_0^1 \sqrt{s}ds\ Ct^2\frac{2s^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1 = Ct^2\cdot\frac{2}{3} \le \frac{2C}{3}.$$

Тобто множина K обмежена. Дослідимо її на рівностепеневу неперервність, тобто потрібно перевірити чи виконуються умови визначення рівностепеневої неперервності:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta_\varepsilon > 0 \quad \forall y(t) \in K \quad \forall t^{'}, t^{''} \in [0,1] \quad \left(|t^{'} - t^{''}| < \delta\right) \Rightarrow$$

$$\left(|y(t^{'}) - y(t^{''})| < \varepsilon\right).$$

Перевіримо, чи виконується дана умова.

$$|y(t^{'}) - y(t^{''})| = \left|\int_0^1 \left(t^{'}\right)^2\sqrt{s}x(s)ds - \int_0^1 \left(t^{''}\right)^2\sqrt{s}x(s)ds\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 \left(\left(t^{'}\right)^2 - \left(t^{''}\right)^2\right)\sqrt{s}x(s)ds\right| \le \int_0^1 \left|\left(t^{'}\right)^2 - \left(t^{''}\right)^2\right|\sqrt{s}x(s)ds \le$$

$$\le 2\,|\xi|\left|t^{'} - t^{''}\right| C\int_0^1 \sqrt{s}ds \le 2\delta C\ \frac{2s^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}\delta C.$$

Таким чином, щоб виконувалася умова $|y(t^{'}) - y(t^{''})| < \varepsilon$ достатньо, щоб $\frac{4}{3}\delta C < \varepsilon$, а це можливо при $\delta < \frac{3\varepsilon}{4C}$.

Отже множина K компактна, тому компактним буде й оператор A.

Завдання 4. *При яких значеннях* $\alpha, \beta, \gamma > 0$ *оператор* $A : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}$, *що діє за формулою* $Ax\,(t) = \int_0^1 t^\alpha s^\beta x\,(s^\gamma)\,ds$ *буде компактним?*

Розв'язання. Перетворимо вираз для оператора A, здійснивши заміну $s^\gamma = p$. При цьому $s = p^{\frac{1}{\gamma}}$, $ds = \dfrac{1}{\gamma}p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}dp$, $s = 0 \Rightarrow p = 0$, $s = 1 \Rightarrow p = 1$. Тобто інтеграл набуває вигляду

$$Ax\,(t) = \frac{1}{\gamma}\int_0^1 t^\alpha p^{\frac{\beta}{\gamma}} x\,(p)\,p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}dp = \frac{1}{\gamma}\int_0^1 t^\alpha p^{\frac{\beta+1-\gamma}{\gamma}} x\,(p)\,dp.$$

Якщо розглянути довільну обмежену множину K, тобто таку, що

$$\exists C \quad \forall x\,(t) \in K \quad \|x\,(t)\| \le C,$$

то її образом буде множина M, для якої

$$\|Ax\,(t)\| = \max_{t\in[0,1]}\left|\frac{1}{\gamma}\int_0^1 t^\alpha p^{\frac{\beta+1-\gamma}{\gamma}}x\,(p)\,dp\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\gamma}C\max_{t\in[0,1]}|t^\alpha|\left.\frac{p^{\frac{\beta+1-\gamma}{\gamma}+1}}{\frac{\beta+1-\gamma}{\gamma}+1}\right|_0^1 = \frac{1}{\gamma}C\frac{\gamma}{\beta+1} = \frac{C}{\beta+1}.$$

Інтеграл в останньому перетворенні є збіжним при $\dfrac{\beta+1-\gamma}{\gamma} > -1$, тобто при $\dfrac{\beta+1}{\gamma} > 0$. Враховуючи умову $\gamma > 0$, робимо висновок, що $\beta > -1$. Поряд із цим зауважимо, що для того, щоб значення виразу $\max\limits_{t\in[0,1]}|t^\alpha|$ було скінченним, необхідно, щоб $\alpha \geq 0$. При виконанні цих умов множина M буде рівномірно обмеженою.

Перевіримо виконання умови рівностепеневої неперервності, тобто доведемо, що

$$(\forall\varepsilon > 0\ )\,(\exists\delta_\varepsilon > 0)\ \ (\forall t_1, t_2 \in [0,1] :\ |t_1 - t_2| < \delta)\ \ (\forall x\,(t) \in K) \Rightarrow$$
$$|Ax\,(t_1) - Ax\,(t_2)| < \varepsilon.$$

Із визначення оператора A маємо

$$|Ax\,(t_1) - Ax\,(t_2)| = \left|\frac{1}{\gamma}\int_0^1 t_1^\alpha p^{\frac{\beta+1-\gamma}{\gamma}}x\,(p)\,dp - \frac{1}{\gamma}\int_0^1 t_2^\alpha p^{\frac{\beta+1-\gamma}{\gamma}}x\,(p)\,dp\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\gamma}\int_0^1 |t_1^\alpha - t_2^\alpha|\,p^{\frac{\beta+1-\gamma}{\gamma}}\,|x\,(p)|\,dp \leq \frac{C}{\gamma}\,|t_1^\alpha - t_2^\alpha|\int_0^1 p^{\frac{\beta+1-\gamma}{\gamma}}dp =$$

$$= \frac{C}{\beta+1}\,|t_1^\alpha - t_2^\alpha| = \frac{C}{\beta+1}\left|\alpha\xi^{\alpha-1}\right||t_1 - t_2|\,,$$

де $\xi \in [0,1]$ (тут використано формулу Лагранжа, а також перетворення аналогічні тим, що проведені при оцінюванні попереднього виразу з тими ж обмеженнями). Оцінюючи отриманий вираз далі, маємо: $\dfrac{C}{\beta+1}\left|\alpha\xi^{\alpha-1}\right||t_1 - t_2| < \dfrac{C\alpha\delta}{\beta+1}$. Причому ця оцінка можлива лише якщо $\alpha - 1 \geq 0$, тобто $\alpha \geq 1$. Таким чином, оператор A буде компактним при таких значеннях параметрів: $\alpha \geq 1$, $\beta > -1$, $\gamma > 0$.

Завдання 5. *Знайти власні значення і власні елементи оператора A, якщо:*

а) $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 t^2 e^s x(s)ds;$

б) $A : l_2 \to l_2, \quad Ax = (x_5 + 3x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots);$

в) $A: l_2 \to l_2, \quad Ax = (0, 3x_2 - x_3, 2x_1, x_4, 0, 0, \ldots);$

г) $A: C^{'}_{[0,1]} \to C_{[0,1]}, \quad Ax(t) = x^{'}(t).$

Розв'язання. У кожному із цих завдань необхідно розв'язати операторне рівняння $Ax = \lambda x$. а) Для даного випадку рівняння $Ax = \lambda x$ набуває вигляду

$$\int_0^1 t^2 e^s x(s) ds = \lambda x(t),$$

або

$$\lambda x(t) = t^2 \int_0^1 e^s x(s) ds.$$

Позначивши $\int\limits_0^1 e^s x(s) = C$, матимемо

$$\lambda x(t) = Ct^2.$$

Для обчислення значення сталої C утворимо у лівій частині останньої рівності вираз, що дорівнює C. Для цього домножимо ліву і праву частини рівності на e^t та проінтегруємо від 0 до 1. Одержимо:

$$\lambda \int_0^1 e^t x(t) = C \int_0^1 t^2 e^t dt,$$

Неважко переконатись, що $\int_0^1 t^2 e^t = e - 2$. Таким чином

$$\lambda C = C(e - 2),$$

звідки

$$C(\lambda - e + 2) = 0.$$

Якщо $C = 0$, то для будь-якого значення $\lambda \quad x(t) \equiv 0$, а це означає, що $x(t)$ не є власною функцією даного оператора.

Нехай $C \neq 0$, тоді $\lambda - e + 2 = 0$, або $\lambda = e - 2$. Це власне значення даного оператора, і відповідні йому власні функції визначаються так:

$$x(t) = \frac{C}{e - 2} t^2,$$

або, в силу довільності C,

$$x(t) = Ct^2.$$

б) В даному випадку операторне рівняння $Ax = \lambda x$ має вигляд

$$(x_5 + 3x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots),$$

що еквівалентно ситемі рівнянь:

$$\begin{cases} x_5 + 3x_1 = \lambda x_1, \\ x_2 = \lambda x_2, \\ x_3 = \lambda x_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3-\lambda)x_1 + x_5 = 0, \\ (1-\lambda)x_2 = 0, \\ (1-\lambda)x_3 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Розглянемо випадок, коли $\lambda = 1$. Тоді з другого, третього та наступних рівнянь випливає, що $x_2, x_3, \dots$ можуть набувати довільних значень. Разом із цим перша рівність системи матиме вигляд

$$2x_1 = -x_5,$$

а це означає, що $\lambda = 1$ є власним значенням оператора A і відповідний йому власний елемент має вигляд

$$\left(-\frac{x_5}{2}, x_2, x_3, x_4, \dots\right),$$

де $x_2, x_3, x_4, \dots$– будь-які числа.

Нехай тепер $\lambda \neq 1$. Тоді з другого, третього і наступних рівнянь системи робимо висновок, що $x_2 = x_3 = \dots = 0$ і перше рівняння набуває вигляду

$$(3-\lambda)x_1 = 0.$$

Якщо $\lambda = 3$, то x_1 може бути довільним, тобто $\lambda = 3$ – власне значення, а

$$(x_1, 0, 0, \dots)$$

відповідний власний елемент.

Якщо $\lambda \neq 3$ і $\lambda \neq 1$, то $x_1 = 0$, тобто $x = \theta$ – нульовий розв'язок. А це означає, що x не може бути власним елементом.

в) Як і в попередньому випадку рівняння $Ax = \lambda x$ має вигляд

$$(0, 3x_2 - x_3, 2x_1, x_4, 0, 0, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3\ \dots),$$

що еквівалентно системі:

$$\begin{cases} \lambda x_1 = 0, \\ 3x_2 - x_3 - \lambda x_2 = 0, \\ 2x_1 - \lambda x_3 = 0, \\ x_4 - \lambda x_4 = 0, \\ \lambda x_5 = 0, \\ \lambda x_6 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Якщо $\lambda = 0$, то $x_1, x_5, x_6, \dots$ можуть набувати довільних значень і система запишеться у вигляді

$$\begin{cases} 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ 2x_1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 3x_2, \\ x_1 = x_4 = 0, \end{cases}$$

тобто

$$(0, x_2, 3x_2, 0, x_5, x_6, \ldots)$$

є власний елемент, що відповідає власному значенню $\lambda = 0$.

Якщо $\lambda \neq 0$, то $x_1 = x_5 = x_6 = \ldots = 0$ і система набуває вигляду

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_2 - x_3 = 0, \\ -\lambda x_3 = 0, \\ (1-\lambda)x_4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3-\lambda)x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ (1-\lambda)x_4 = 0. \end{cases}$$

Якщо $\lambda = 3$, то x_2 може бути довільним, а $x_4 = 0$. Якщо $\lambda = 1$, то x_4 може бути довільним, а $x_2 = 0$.

Отже, власному значенню $\lambda = 0$ відповідають власні елементи $(0, x_2, 3x_2, 0, x_5, x_6, \ldots)$; власному значенню $\lambda = 3$ відповідають власні елементи $(0, x_2, 0, 0, \ldots)$; власному значенню $\lambda = 1$ відповідають власні елементи $(0, 0, 0, x_4, 0, 0, \ldots)$.

г) Операторне рівняння $Ax(t) = \lambda x(t)$ еквівалентно

$$x^{'}(t) = \lambda x(t).$$

Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x,$$
$$\frac{dx}{x} = \lambda dt,$$
$$\ln x = \lambda t + C,$$
$$x(t) = Ce^{\lambda t}.$$

Тобто будь-яке значення $\lambda \in \mathbf{R}$ є власним значенням оператора A, а відповідні власні функції мають вигляд $x(t) = Ce^{\lambda t}$.

Завдання 6. *Знайти власні значення і власні функції симетричного оператора* $A : L_2[-1,1] \to L_2[-1,1], \quad Ax(t) = \int_{-1}^{1} K(t,s)x(s)ds$, *де* $K(t,s) = \begin{cases} t+1, & t \leq s \\ s+1, & s \leq t. \end{cases}$

Розв'язання. Для даного оператора рівняння $Ax = \lambda x$ набуває вигляду

$$\int_{-1}^{t} (s+1)x(s)ds + \int_{t}^{1} (t+1)x(s)ds = \lambda x(t).$$

Продиференціювавши ліву і праву частини даного рівняння, одержимо:

$$(t+1)x(t) + \int_{t}^{1} x(s)ds - (t+1)x(t) = \lambda x^{'}(t),$$

або

$$\int_t^1 x(s)ds = \lambda x^{'}(t).$$

Продиференціювавши отримане рівняння, маємо

$$-x(t) = \lambda x^{''}(t).$$

Це лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Якщо $\lambda = 0$, то $x(t) \equiv 0$, тобто $x(t)$ не може бути власною функцією.

Нехай $\lambda \neq 0$. Тоді характеристичне рівняння має вигляд:

$$\lambda k^2 + 1 = 0.$$

При $\lambda < 0$ визначаємо $k = \pm \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}$, і загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$x(t) = C_1 e^{\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}t} + C_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}t}.$$

Для знаходження сталих C_1 і C_2 необхідно задати крайові умови. Із початкового рівняння

$$\int_{-1}^t (s+1)x(s)ds + \int_t^1 (t+1)x(s)ds = \lambda x(t)$$

робимо висновок, що $x(-1) = 0$, а з рівняння

$$\int_t^1 x(s)ds = \lambda x^{'}(t),$$

що $x^{'}(1) = 0$. Підставимо крайові умови у знайдений розв'язок:

$$\begin{cases} C_1 e^{-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}} + C_2 e^{\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}} = 0, \\ C_1 \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} e^{\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}} - C_2 \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} e^{-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}} = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї системи

$$\begin{vmatrix} e^{-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}} & e^{\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}} \\ \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} e^{\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}} & -\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} e^{-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} e^{-\frac{2}{\sqrt{-\lambda}}} - \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} e^{\frac{2}{\sqrt{-\lambda}}} \neq 0,$$

що означає, що система рівнянь має тільки тривіальний розв'язок, а саме $C_1 = C_2 = 0$. Тобто $x(t) \equiv 0$, тому $x(t)$ не може бути власною функцією.

Нехай тепер $\lambda > 0$. Тоді $k = \pm \dfrac{i}{\sqrt{\lambda}}$ та

$$x(t) = C_1 \cos \frac{t}{\sqrt{\lambda}} + C_2 \sin \frac{t}{\sqrt{\lambda}}.$$

Підставимо крайові умови:

$$\begin{cases} C_1 \cos \dfrac{-1}{\sqrt{\lambda}} + C_2 \sin \dfrac{-1}{\sqrt{\lambda}} = 0, \\ -C_1 \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} + C_2 \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 \cos \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} - C_2 \sin \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0, \\ C_1 \sin \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} - C_2 \cos \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \cos \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} & \sin \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ \sin \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} & \cos \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix} = -\cos^2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \sin^2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Якщо визначник лінійної системи дорівнює нулю, тоді система матиме ненульовий розв'язок:

$$-\cos^2 \tfrac{1}{\sqrt{\lambda}} + \sin^2 \tfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0,$$
$$\cos \tfrac{2}{\sqrt{\lambda}} = 0,$$
$$\tfrac{2}{\sqrt{\lambda}} = \tfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$
$$\sqrt{\lambda} = \tfrac{4}{\pi + 2\pi n}, \quad n \in \mathbf{Z},$$
$$\lambda = \tfrac{16}{(\pi + 2\pi n)^2}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Отже, вказані λ – власні значення, а

$$x(t) = C_1 \cos \frac{\pi + 2\pi n}{4} t + C_2 \sin \frac{\pi + 2\pi n}{4} t$$

– власні функції.

Завдання 4. *Знайти спектр і резольвенту оператора* A, *якщо*:

а) $A : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}, \quad Ax(t) = x(0) + tx(1);$

б) $A : C'_{[0,1]} \to C_{[0,1]}, \quad Ax(t) = x'(t);$

в) $A : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}, \quad Ax(t) = tx(t);$

г) $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad Ax(t) = \int_0^1 t^2 (s+1) x(s)\, ds;$

д) $A : l_2 \to l_2, \quad Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ..., \frac{x_n}{n}, ...\right).$

Розв'язання. Для знаходження резольвенти оператора A у кожному з випадків необхідно знайти оператор, обернений до $A - \lambda I$, інакше кажучи, розв'язати рівняння $Ax - \lambda x = y$.

а) У даному випадку рівняння $Ax - \lambda x = y$ має вигляд

$$x(0) + tx(1) - \lambda x(t) = y(t).$$

Для його розв'язання відмітимо, що при $\lambda \neq 0$

$$x(t) = \frac{x(0)+tx(1)-y(t)}{\lambda},$$
де $x(0)$, $x(1)$ – деякі сталі числа. Для їх знаходження підставимо у початкове рівняння значення $t = 0$ і $t = 1$. Отримаємо:
$$\begin{cases} x(0) - \lambda x(0) = y(0), \\ x(0) + x(1) - \lambda x(1) = y(1). \end{cases}$$
Розв'яжемо дану систему відносно $x(0)$, $x(1)$:
$$\begin{cases} x(0)(1-\lambda) = y(0), \\ x(0) + x(1)(1-\lambda) = y(1), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = \frac{y(0)}{1-\lambda}, \\ x(1) = \frac{1}{1-\lambda}\left(y(1) - \frac{y(0)}{1-\lambda}\right). \end{cases}$$
Таким чином, $x(t) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{y(0)}{1-\lambda} + \frac{t}{1-\lambda}\left(y(1) - \frac{y(0)}{1-\lambda}\right) - y(t)\right)$ і можемо записати
$$R_\lambda(A)(y(t)) = (A - \lambda I)^{-1}(y(t)) =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{y(0)}{1-\lambda} + \frac{t}{1-\lambda}\left(y(1) - \frac{y(0)}{1-\lambda}\right) - y(t)\right).$$
Очевидно, резольвента оператора не існує при $\lambda = 0$ і $\lambda = 1$. Тобто, ці значення λ є власними значеннями оператора A і тому належать до точкового спектра $\sigma_p(A)$, а залишковий і неперервний спектри для нього є порожніми множинами.

б) Рівняння
$$x'(t) - \lambda x(t) = y(t)$$
є лінійним неоднорідним рівнянням, для розв'язання якого застосовується метод варіації сталих. Для цього спочатку шукають розв'язок відповідного однорідного рівняння
$$x'(t) - \lambda x(t) = 0.$$
Оскільки це рівняння з відокремлюваними змінними, то, переписавши його у вигляді $\frac{dx}{dt} = \lambda x$, а потім перетворивши до $\frac{dx}{x} = \lambda dt$ і проінтегрувавши, отримаємо $\ln x = \lambda t + C$, або $x(t) = Ce^{\lambda t}$. Після цього розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді $x(t) = C(t)e^{\lambda t}$. Підставимо $x(t)$ у початкове рівняння і одержимо:
$$\left(C(t)e^{\lambda t}\right)' - \lambda C(t)e^{\lambda t} = y(t),$$
$$C'(t)e^{\lambda t} + \lambda C(t)e^{\lambda t} - \lambda C(t)e^{\lambda t} = y(t),$$
$$C'(t)e^{\lambda t} = y(t),$$
звідки
$$C(t) = \int e^{-\lambda t} y(t)\,dt.$$
Таким чином, резольвента оператора A має вигляд:
$$R_\lambda(A)(y(t)) = e^{\lambda t}\int e^{-\lambda t} y(t)\,dt.$$

Вона існує для всіх $\lambda \in \mathbf{R}$, тобто $\sigma = \emptyset$.

в) Рівняння

$$tx(t) - \lambda x(t) = y(t)$$

має простий розв'язок $x(t) = \frac{y(t)}{t-\lambda}$. Очевидно, резольвента оператора A

$$R_\lambda(A)(y(t)) = \frac{y(t)}{t-\lambda}$$

існує для всіх дійсних значень λ. Однак при $\lambda \in [0,1]$ оператор $R_\lambda(A)$ буде необмеженим(враховуючи, що $t \in [0,1]$). Це означає, що всі $\lambda \in [0,1]$ є точками спектра оператора A. Відмітимо також, що A не має власних значень, бо рівняння $x(t)(t-\lambda) = 0$ для будь-якого λ має лише тривіальний розв'язок. Разом із цим, множина значень $R(A - \lambda I)$ не співпадає з множиною $C_{[0,1]}$(наприклад, не містить функцій $y(t) = t^\alpha$, де α – довільне дійсне додатне число, адже їх образом повинні були б бути функції $x(t) = \frac{t^\alpha}{t-\lambda} \notin C_{[0,1]}$).

г) Рівняння

$$\int_0^1 t^2 (s+1)\, x(s)\, ds - \lambda x(t) = y(t)$$

є інтегральним. Переписавши рівняння у вигляді

$$t^2 \int_0^1 (s+1)\, x(s)\, ds - \lambda x(t) = y(t)$$

та ввівши позначення $\int_0^1 (s+1)\, x(s)\, ds = C$, отримаємо:

$$Ct^2 - \lambda x(t) = y(t),$$
$$x(t) = \frac{1}{\lambda}\left(Ct^2 - y(t)\right).$$

Для знаходження сталої C домножимо ліву і праву частини останньої рівності на $t+1$ і результат проінтегруємо в межах від 0 до 1:

$$\int_0^1 (t+1)\, x(t)\, dt = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \left(Ct^2 - y(t)\right)(t+1)\, dt.$$

Врахуємо, що $\int_0^1 (t+1)\, x(t)\, dt = C$ і обчислимо $\int_0^1 t^2 (t+1)\, dt = \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1$ $= \frac{7}{12}$. Підставимо отримані значення у попередній вираз:

$$C = \frac{C}{\lambda} \cdot \frac{7}{12} - \lambda \int_0^1 y(t)(t+1)\, dt,$$

звідки

$$C\left(1 - \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{7}{12}\right) = -\lambda \int_0^1 y(t)(t+1)\, dt,$$
$$C = -\frac{12\lambda^2}{12\lambda - 7}\int_0^1 y(t)(t+1)\, dt.$$

Таким чином,

$$x(t) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{12\lambda^2 t^2}{7 - 12\lambda}\int_0^1 (s+1)\, y(s)\, ds - y(t)\right) = R_\lambda(A).$$

Оскільки резольвента не існує для $\lambda = 0$ і $\lambda = \frac{7}{12}$, то саме вони і складають спектр оператора, причому $\left\{0, \frac{7}{12}\right\} = \sigma_p$.

д) Для знаходження резольвенти розв'яжемо систему рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1-\lambda x_1=y_1, \\ \frac{x_2}{2}-\lambda x_2=y_2, \\ \frac{x_3}{3}-\lambda x_3=y_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1(1-\lambda)=y_1, \\ x_2\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)=y_2, \\ x_3\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)=y_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=\frac{y_1}{1-\lambda}, \\ x_2=\frac{y_2}{\frac{1}{2}-\lambda}, \\ x_3=\frac{y_3}{\frac{1}{3}-\lambda}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Отже, $R_\lambda(A)=\left(\frac{y_1}{1-\lambda},\frac{y_2}{\frac{1}{2}-\lambda},\frac{y_3}{\frac{1}{3}-\lambda},\ldots\right)$. Зрозуміло, що резольвента не існує для $\lambda=\frac{1}{n},\ n\in\mathbf{N}$. Це означає, що всі ці числа є власними значеннями оператора A, інакше кажучи, $\sigma_p=\left\{\frac{1}{n},n\in\mathbf{N}\right\}$. Крім того, при $\lambda=0=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\quad R_\lambda(A)=(y_1,2y_2,3y_3,\ldots)$, а цей оператор не буде обмеженим у l_2. Справді, якщо припустити, що $\exists C,\ \forall x\in l_2\,\|Ax\|\le C\,\|x\|$, то підібравши $x=\left(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n},1,0,\ldots\right)$, де $n>C$ (цього можна досягти враховуючи необмеженість множини натуральних чисел), отримаємо протиріччя: $\|(0,0,..,0,n,0,\ldots)\|=n>C=C\,\|(0,0,..,0,1,0,\ldots)\|$. Таким чином, $\lambda=0$ теж належить спектру оператора A.

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *Знайти оператор A^*, спряжений до A, оцінити $\|A\|$ та $\|A^*\|$, якщо:*

1. $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1],\quad Ax(t)=\int_0^1(1-t)^2s^2x(s)ds;$
2. $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1],\quad Ax(t)=\int_0^1t^2s^2x(s)ds;$
3. $A:L_2[-1,1]\to L_2[-1,1],\quad Ax(t)=x(t)+\int_{-1}^1t^3\sqrt{s}x(s)ds;$
4. $A:L_2[0,\pi]\to L_2[0,\pi],\quad Ax(t)=x(t)+2\int_0^\pi\cos t\sin sx(s)ds;$
5. $A:L_2[0,\pi]\to L_2[0,\pi],\quad Ax(t)=x(t)-\int_0^1t^3\sin(s-1)x(s)ds;$
6. $A:l_2\to l_2,\quad Ax=(x_2,x_3-x_2,x_4,-x_3,0,0,\ldots);$
7. $A:l_2\to l_2,\quad Ax=(0,0,x_5,-3x_1,0,0,\ldots);$
8. $A:l_2\to l_2,\quad Ax=(2x_3-x_2,3x_1,x_1-x_3,0,0,\ldots);$
9. $A:l_2\to l_2,\quad Ax=(x_2-x_1,x_3-x_2,x_4-x_3,0,0,\ldots);$
10. $A:l_2\to l_2,\quad Ax=(0,x_2,0,x_4,0,x_6,\ldots).$

Завдання 2. *Чи є компактним оператор* $A : C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$ *якщо:*

1. $[a,b] = [0,1]$, $Ax(t) = tx(0)$;
2. $[a,b] = [0,1]$, $\quad Ax(t) = x(t) + 1$;
3. $[a,b] = [0,1]$, $\quad Ax(t) = x(\sqrt{t})$;
4. $[a,b] = [-\pi,\pi]$, $\quad Ax(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin s x(s) ds$;
5. $[a,b] = [0,1]$, $Ax(t) = \int_0^1 t^2 s^2 x(s) ds$;
6. $[a,b] = [0,1]$, $Ax(t) = \int_0^1 e^{ts} x(s) ds$;
7. $[a,b] = [0,1]$, $Ax(t) = \int_0^1 \sin ts^2 x(s) ds$;
8. $[a,b] = [-1,1]$, $Ax(t) = x\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$;
9. $[a,b] = [0,1]$, $Ax(t) = x(t^2)$;
10. $[a,b] = [0,1]$, $Ax(t) = t^2 x(t)$.

Завдання 3. *Знайти власні значення і власні елементи таких операторів:*

1. $A : l_2 \to l_2$, $\quad Ax = (0, 3x_2 - x_3, 2x_1, x_5, 0, 0, \ldots)$;
2. $A : l_2 \to l_2$, $Ax = (x_3, x_4, x_5, \ldots)$;
3. $A : l_2 \to l_2$, $Ax = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots)$, $\quad k$ – фіксоване;
4. $A : l_2 \to l_2$, $Ax = (2x_3 + x_1, 4x_2, x_3, x_4, \ldots)$;
5. $A : l_2 \to l_2$, $Ax = (-x_1 + 4x_2, 2x_1 - 3x_2, x_3, x_4, \ldots)$;
6. $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^1 t \sin \pi s x(s) ds$;
7. $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^1 K(t,s) x(s) ds$, $K(t,s) = \begin{cases} t, t \le s; \\ s, s < t; \end{cases}$
8. $A : L_2[-1,1] \to L_2[-1,1]$, $Ax(t) = \int_{-1}^1 K(t,s) x(s) ds$, $\quad K(t,s) = \begin{cases} (t+1)(1-s), t \le s; \\ (s+1)(1-t), s < t; \end{cases}$

9. $A : L_2\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to L_2\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $Ax(t) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} K(t,s)x(s)ds$, $K(t,s) = \begin{cases} \cos 2t \sin 2s, t \leq s; \\ \sin 2t \cos 2s, s < t; \end{cases}$

10. $A : L_2\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \to L_2\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $Ax(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} K(t,s)x(s)ds$, $K(t,s) = \begin{cases} \cos t \sin s, t \leq s; \\ \sin t \cos s, s < t. \end{cases}$

Завдання 4. *Знайти резольвенту та спектр оператора* A, *якщо:*

1. $A : l_2 \to l_2, \quad Ax = (x_4 - x_1, 2x_1 - x_2, x_3, x_4, 0, 0, \ldots)\,;$
2. $A : l_2 \to l_2, \quad Ax = (-3x_2, x_3, 2x_1, x_4, x_5, \ldots)\,;$
3. $A : l_2 \to l_2, \quad Ax = (x_3 + x_2, x_2 + x_1, x_1 + x_3, x_4, x_5, \ldots)\,;$
4. $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad Ax(t) = \int_0^1 t \sin s x(s)ds;$
5. $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad Ax(t) = \int\limits_0^1 \frac{x(s)}{\sqrt[4]{t}} ds;$
6. $A : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}, \quad Ax(t) = \int_0^1 t^2 s x(s)ds;$
7. $A : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}$, $Ax(t) = (t-1)x(0) + x(1);$
8. $A : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}$, $Ax(t) = x(0) + tx(0);$
9. $A : C_{[1,2]} \to C_{[1,2]}$, $Ax(t) = x(1) + t^2 x(2);$
10. $A : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}, \quad Ax(t) = \int_0^1 s^4 x(s)ds - x(t).$

11 Інтегральні рівняння

Перелік необхідних питань теорії

1. Означення та класифікація інтегральних рівнянь.
2. Повторні ядра та резольвента інтегрального рівняння. Метод резольвент.
3. Метод послідовних наближень розв'язування інтегральних рівнянь.
4. Розв'язування інтегральних рівнянь з виродженими ядрами методом їх зведення до системи алгебраїчних рівнянь.
5. Метод розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерра зведенням їх до диференціальних рівнянь.
6. Симетричні ядра. Власні числа та власні функції симетричного ядра. Розв'язування інтегральних рівнянь з симетричними ядрами.
7. Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь.

Теоретичні відомості

Інтегральним рівнянням називається рівняння, що містить невідому функцію під знаком інтеграла. Наприклад, інтегральним рівнянням відносно функції $\varphi(t)$ є рівняння

$$a(t)\varphi(t) + f(t) = \lambda \int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds, \tag{11.1}$$

де $a(t)$, $f(t)$, $k(t,s)$ - відомі функції, λ - деякий параметр, змінні t і s пробігають деякий фіксований відрізок $[a,b]$.

Функція $k(t,s)$ в рівнянні (11.1) називається *ядром інтегрального рівняння.*

Рівняння (11.1) належить до *лінійних* інтегральних рівнянь, оскільки шукана функція входить в рівняння лінійно. Багато задач математичної фізики розв'язуються за допомогою нелінійних інтегральних рівнянь. Наприклад, рівнянь виду $\varphi(t) = \lambda \int_a^b k(t,s)g(\varphi(s),s)ds$, де $k(t,s)$, $g(u,s)$– задані, $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$, $(u,s) \in [a,b] \times [a,b]$. Надалі обмежимось розглядом лінійних інтегральних рівнянь.

Розглянемо основні класи таких рівнянь.

Якщо невідома функція міститься лише під знаком інтеграла, то рівняння називається *інтегральним рівнянням першого роду*. Інтегральні рівняння, в яких невідома функція міститься також і поза інтегральним доданком, називається *інтегральним рівнянням другого роду*.

Якщо межі інтегрування фіксовані, то інтегральне рівняння називається *рівнянням Фредгольма*. У випадку, коли хоча б одна межа інтегрування змінна, то інтегральне рівняння називається *рівнянням Вольтерра*.

Отже, надалі розглядатимемо такі основні типи інтегральних рівнянь:

а) *інтегральне рівняння Фредгольма другого роду*

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds = f(t); \tag{11.2}$$

б) *інтегральне рівняння Фредгольма першого роду*

$$\int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds = f(t); \tag{11.3}$$

в) *інтегральне рівняння Вольтерра другого роду*

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^t k(t,s)\varphi(s)ds = f(t), \quad t \in (a,b]; \tag{11.4}$$

г) *інтегральне рівняння Вольтерра першого роду*

$$\int_a^t k(t,s)\varphi(s)ds = f(t), \quad t \in (a,b]. \tag{11.5}$$

Слід зауважити, що рівняння Вольтерра є частинним випадком рівняння Фредгольма, якщо вважати $k(t,s) \equiv 0$ при $s > t$. Однак фізичні задачі, що приводять до рівнянь Вольтерра і рівнянь Фредгольма, а також властивості розв'язків та методи розв'язання цих рівнянь суттєво відрізняються. Тому рівняння Вольтерра доцільно виділити в окремий клас.

Якщо в рівняннях (11.2) – (11.5) $f(t) \equiv 0$, то рівняння називають *однорідними інтегральними рівняннями*. В іншому випадку – *неоднорідними*.

Інтегрування в рівняннях (11.2) – (11.5) може здійснюватись як по відрізку $[a,b]$, $a < b$ числової осі, так і на деяких областях більшої розмірності. При цьому класифікація інтегральних рівнянь не змінюється. Наприклад, якщо функції $k(A,B)$, $f(A)$ визначені при $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, де Ω – область в тривимірному просторі, тоді неоднорідне рівняння Фредгольма другого роду запишеться так:

$$\varphi(A) = \int\limits_{\Omega} k(A,B)\varphi(B)d\sigma(B) + f(A),$$

де $d\sigma(P)$ – елемент об'єму області Ω, що містить точку B.

Розглянемо основні методи розв'язування лінійних інтегральних рівнянь.

11.1 Метод резольвент розв'язування інтегральних рівнянь

Теоретичні відомості

Метод резольвент – це метод розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольтерра другого роду.

Розглянемо інегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds = f(t), \quad (\lambda \in \mathbb{C}.) \tag{11.6}$$

Введемо в розгляд послідовність функцій
$k_1(t,s) \equiv k(t,s)$;
$k_2(t,s) = \int_a^b k(t,\tau)k_1(\tau,s)d\tau$,
$k_3(t,s) = \int_a^b k(t,\tau)k_2(\tau,s)d\tau, \ldots$
$k_n(t,s) = \int_a^b k(t,\tau)k_{n-1}(\tau,s)d\tau$ і т.д.

Послідовність функцій $\{k_n(t,s), n = 1,2,...\}$ називається *послідовністю ітерованих* (або *повторних*) ядер.

Відомо, що якщо ядро $k(t,s)$ при $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$ задавольняє умовам: $k(t,s)$ – дійсна функція тотожньо не рівна нулеві, $k(t,s)$ – неперервна функція відносно (t,s) $k(t,s) = k(s,t)$ (тобто ядро $k(t,s)$ симетричне), тоді цими ж властивостями володіють повторні ядра.

Розвязок рівняння (11.6) можна представити у вигляді

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t,s,\lambda)f(s)ds, \tag{11.7}$$

де функція $R(t,s,\lambda)$ називається *резольвентою ядра* $k(t,s)$ і визначається за формулою

$$R(t,s,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n k_{n+1}(t,s). \tag{11.8}$$

Розглянемо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^t k(t,s)\varphi(s)ds = f(t). \tag{11.9}$$

Послідовність ітерованих ядер у цьому випадку визначається за наступною рекурентною формулою:
$k_1(t,s) \equiv k(t,s)$;
$k_n(t,s) = \int_s^t k(t,\tau)k_{n-1}(\tau,s)d\tau$, $n = 2,3,4,...$

Тоді розв'язок рівняння (11.9) записується в такому вигляді:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t R(t,s,\lambda) f(s) ds, \tag{11.10}$$

де резольвента $R(t,s,\lambda)$ визначається як і раніше за формулою (11.8).

Розв'язання типових задач

Завдання 1. *Методом резольвент розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма:*

$$x(t) = \frac{1}{e^\pi + 1} \int_0^\pi \left(e^t \cos s\right) x(s) ds + \frac{t}{4}, \quad t \in [0, \pi].$$

Розв'язання. Побудуємо послідовність ітерованих ядер:

$k_1(t,s) = k(t,s) = e^t \cos s;$

$k_2(t,s) = \int\limits_0^\pi k(t,\tau) k_1(\tau,s) d\tau = \int\limits_0^\pi \left(e^t \cos\tau\right)\left(e^\tau \cos s\right) d\tau = e^t \cos s \int\limits_0^\pi e^\tau \cos\tau d\tau.$

Проінтегрувавши два рази частинами маємо, що $\int_0^\pi \cos\tau e^\tau d\tau = -\dfrac{e^\pi + 1}{2}$.

Таким чином $k_2(t,s) = -\dfrac{e^\pi + 1}{2} e^t \cos s;$

$k_3(t,s) = \int\limits_0^\pi k(t,\tau) k_2(\tau,s) d\tau = \int\limits_0^\pi e^t \cos\tau \left(-\dfrac{e^\pi + 1}{2} e^\tau \cos s\right) d\tau = -\dfrac{e^\pi + 1}{2} e^t \times$

$\times \cos s \int_0^\pi \cos\tau e^\tau d\tau = \left(\dfrac{e^\pi + 1}{2}\right)^2 e^t \cos s = (-1)^2 \left(\dfrac{e^\pi + 1}{2}\right)^2 e^t \cos s;$

$k_4(t,s) = \int_0^\pi k(t,\tau) k_3(\tau,s) d\tau = \int\limits_0^\pi e^t \cos\tau \left(\dfrac{e^\pi + 1}{2}\right)^2 e^\tau \cos s d\tau = \left(\dfrac{e^\pi + 1}{2}\right)^2 \times$

$\times e^t \cos s \int_0^\pi \cos\tau e^\tau d\tau = -\left(\dfrac{e^\pi + 1}{2}\right)^3 e^t \cos s = (-1)^3 \left(\dfrac{e^\pi + 1}{2}\right)^3 e^t \cos s;$

. . . .

$k_n(t,s) = \int\limits_0^\pi k(t,\tau) k_{n-1}(\tau,s) d\tau = \int\limits_0^\pi e^t \cos\tau (-1)^{n-2} \left(\dfrac{e^\pi + 1}{2}\right)^{n-2} e^\tau \cos s d\tau =$

$(-1)^{n-2} \left(\dfrac{e^\pi + 1}{2}\right)^{n-2} e^t \cos s \int_0^\pi \cos\tau e^\tau d\tau = (-1)^{n-1} \left(\dfrac{e^\pi + 1}{2}\right)^{n-1} e^t \cos s.$

Отже, резольвента ядра $k(t,s) = e^t \cos s$ запишеться так:

$$R(t,s,\lambda) = \sum_{n=0}^\infty \lambda^n k_{n+1}(t,s) = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{e^\pi + 1}\right)^n (-1)^n \left(\frac{e^\pi + 1}{2}\right)^n e^t \cos s =$$

$$= e^t \cos s \sum_{n=0}^\infty \left(-\frac{1}{2}\right)^n = e^t \cos s \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} e^t \cos s.$$

Тому розв'язок $x(t)$ нашого інтегрального рівняння Фредгольма має вигляд:

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^\pi R(t,s,\lambda) f(s)ds = \frac{t}{4} + \frac{1}{e^\pi + 1}\int_0^\pi \frac{2}{3} e^t \cos s \cdot \frac{s}{4} ds =$$

$$= \frac{e^t}{6\left(e^\pi+1\right)} \int_0^\pi s \cos s ds + \frac{t}{4} = \frac{e^t}{6\left(e^\pi+1\right)}\left(s \cdot \sin s|_0^\pi - \int_0^\pi \sin s ds \right) + \frac{t}{4} =$$

$$= \frac{e^t}{6\left(e^\pi+1\right)} \cos s|_0^\pi + \frac{t}{4} = -\frac{e^t}{3\left(e^\pi+1\right)} + \frac{t}{4}.$$

Завдання 2. *Методом резольвент розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра:*

$$x(t) = 2\int_0^t e^{t-s} x(s)ds + \cos t.$$

Розв'язання. Побудуємо послідовність повторних ядер:

$k_1(t,s) = k(t,s) = e^{t-s};$

$k_2(t,s) = \int_s^t e^{t-\tau} e^{\tau - s} d\tau = \int_s^t e^{t-s} d\tau = e^{t-s}\ \tau|_s^t = e^{t-s}(t-s);$

$$k_3(t,s) = \int_s^t e^{t-\tau} e^{\tau-s} (\tau - s) d\tau = e^{t-s}\int_s^t (\tau - s) d\tau = e^{t-s}\ \left.\frac{(\tau-s)^2}{2}\right|_s^t =$$

$$= e^{t-s}\frac{(t-s)^2}{2};$$

$$k_4(t,s) = \int_s^t e^{t-\tau} e^{\tau-s} \frac{(\tau-s)^2}{2} d\tau = e^{t-s}\int_s^t \frac{(\tau-s)^2}{2} d\tau = e^{t-s}\ \left.\frac{(\tau-s)^3}{2\cdot 3}\right|_s^t =$$

$$= e^{t-s}\frac{(t-s)^3}{2\cdot 3};$$

....

$$k_n(t,s) = e^{t-s}\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Тоді резольвента ядра $k(t,s) = e^{t-s}$ зображується так:

$$R(t,s,\lambda) = \sum_{n=0}^\infty 2^n e^{t-s}\frac{(t-s)^n}{n!} = e^{t-s}\sum_{n=0}^\infty \frac{\left(2\left(t-s\right)\right)^n}{n!} = e^{t-s}e^{2(t-s)} = e^{3(t-s)}.$$

Розв'язок нашого інтегрального рівняння Вольтерра запишеться у такому вигляді:

$$x(t) = \cos t + 2\int_0^t e^{3(t-s)} \cos s ds = \cos t + 2e^{3t}\int_0^t e^{-3s} \cos s ds.$$

Обчислимо інтеграл $\int_0^t e^{-3s}\cos s ds$: маємо $\int_0^t e^{-3s}\cos s ds = \dfrac{1}{10}\left(e^{-3t}\left(\sin t - \right.\right.$ $\left.\left. -3\cos t\right) + 3\right).$

Тоді шуканий розв'язок нашого інтегрального рівняння Вольтерра

$$x(t) = \cos t + 2e^{3t} \int_0^t e^{-3s} \cos s ds =$$
$$= \cos t + 2e^{3t} \left(\frac{1}{10} \left(e^{-3t} (\sin t - 3\cos t) + 3 \right) \right) = \frac{1}{5} \sin t + \frac{2}{5} \cos t + \frac{3}{5} e^{3t}.$$

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *Методом резольвент розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма:*

1. $x(t) = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos s x(s) ds + \cos t, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}];$

2. $x(t) = \dfrac{e}{3} \int\limits_{-1}^{1} t e^s x(s) ds + \dfrac{3t^2+1}{e^t}, \quad t \in [-1, 1];$

3. $x(t) = \dfrac{1}{6\pi} \int\limits_0^{2\pi} (\cos t \cos s + 3 \sin 2t \sin 2s)\, x(s) ds + 5 \cos t, \quad t \in [0, 2\pi];$

4. $x(t) = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (\sin t \sin s + \cos 2t \cos 2s)\, x(s) ds + \cos 2t, \quad t \in [0, 2\pi];$

5. $x(t) = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos s x(s) ds + \cos t, \quad t \in [0, \dfrac{\pi}{2}];$

6. $x(t) = 2 \int\limits_{-1}^{1} t^2 s^2 x(s) ds + e^t, \quad t \in [-1, 1];$

7. $x(t) = \int\limits_{-1}^{0} (1+t)(1-s) x(s) ds + \pi \cos \pi t, \quad t \in [-1, 0];$

8. $x(t) = \int\limits_{-1}^{1} (ts + t^2 s^2) x(s) ds + 3(t+1), \quad t \in [-1, 1];$

9. $x(t) = \dfrac{1}{2} \int\limits_0^1 (1 + (2t-1)(2s-1))\, x(s) ds + 3t^2, \quad t \in [0, 1];$

10. $x(t) = -\dfrac{1}{8\pi} \int\limits_0^{2\pi} (2 + \cos t \cos s)\, x(s) ds + 2t, \quad t \in [0, 2\pi].$

Завдання 2. *Методом резольвент розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра:*

1. $x(t) = \int\limits_0^t \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} s} x(s)ds + \operatorname{ch} t, \quad t \in [0, T];$

2. $x(t) = \int\limits_0^t (t-s)x(s)ds + t, \quad t \in [0, T];$

3. $x(t) = \int\limits_0^t \frac{1+s^2}{1+t^2} ds + \frac{1}{1+t^2}, \quad t \in [0, T];$

4. $x(t) = 2\int\limits_0^t e^{t^2-s^2} x(s)ds + e^{t^2+2t}, \quad t \in [0, T];$

5. $x(t) = 2\int\limits_0^t e^{t-s} x(s)ds + \sin t, \quad t \in [0, T];$

6. $x(t) = \int\limits_0^t tsx(s)ds + t, \quad t \in [0, T];$

7. $x(t) = -\int\limits_0^t 3^{t-s} x(s)ds + t3^t, \quad t \in [0, T];$

8. $x(t) = \int\limits_0^t \frac{1+t^2}{1+s^2} x(s)ds + 1 + t^2, \quad t \in [0, T];$

9. $x(t) = \int\limits_0^t \frac{2+\cos t}{2+\cos s} x(s)ds + e^t \sin t, \quad t \in [0, T];$

10. $x(t) = -\int\limits_0^t \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} s} x(s)ds + t \operatorname{ch} t, \quad t \in [0, T].$

11.2 Метод послідовних наближень розв'язування інтегральних рівнянь

Теоретичні відомості

Метод послідовних наближень використовується для розвязування інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольтерра другого роду.

Нехай

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b k(t, s)\varphi(s)ds + f(t), \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \tag{11.11}$$

причому ядро $k(t,s)$ - неперервна в квадраті $[a,b]\times[a,b]$ функція двох змінних, а вільний член $f(t)$ - неперервна на $[a,b]$ функція. Виберемо довільну неперервну на $[a,b]$ функцію $\varphi_0(t)$ і підставимо її в праву частину (11.11). Маємо

$$\varphi_1(t) = \lambda \int_a^b k(t,s)\varphi_0(s)ds + f(t),$$

причому $\varphi_1(t)$ також неперервна на $[a,b]$. Отриману функцію $\varphi_1(t)$ знову підставимо в (11.11). Результатом знову буде неперервна функція

$$\varphi_2(t) = \lambda \int_a^b k(t,s)\varphi_1(s)ds + f(t).$$

Таким же способом, задамо послідовність функцій

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \ldots, \varphi_n(t), \ldots, \tag{11.12}$$

яка є збіжна на $[a,b]$ до розв'язку інтегрального рівняння (11.11). Таким чином, розв'язком рівняння (11.11) буде границя послідовності функцій (11.12), тобто

$$\varphi(t) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \varphi_n(t).$$

Зауваження 1. Кожна функція послідовності (11.12) залежить від вибору початкового наближення $\varphi_0(t)$, однак гранична функція $\varphi(t)$ від вибору $\varphi_0(t)$ не залежить.

Зауваження 2. Даний метод застосовують і при розвязуванні інтегральних рівнянь Вольтера другого роду. Якщо $\varphi_0(t)$ вибрати рівне $f(t)$, то метод послідовних наближень фактично співпадає з методом резольвент.

Розв'язання типових задач

Завдання 1. *Розв'язати методом послідовних наближень інтегральне рівняння Фредгольма*

$$x(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 tsx(s)ds + \frac{5}{6}t.$$

Розв'язання. За початкове наближення виберемо функцію $x_0(t) = 0$. Тоді

$x_1(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 ts\cdot 0ds + \frac{5}{6}t = \frac{5}{6}t,$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 ts\cdot\frac{5}{6}sds + \frac{5}{6}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}t\int_0^1 s^2ds + \frac{5}{6}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}t\left.\frac{s^3}{3}\right|_0^1 + \frac{5}{6}t =$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}t + \frac{5}{6}t = \frac{5}{6}t\left(1+\frac{1}{6}\right),$$

$$x_3(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 ts\cdot\frac{5}{6}s\left(1+\frac{1}{6}\right)ds + \frac{5}{6}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}t\left(1+\frac{1}{6}\right)\int\limits_0^1 s^2ds + \frac{5}{6}t =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}t\left(1+\frac{1}{6}\right)\frac{s^3}{3}\bigg|_0^1 + \frac{5}{6}t = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}t\left(1+\frac{1}{6}\right) + \frac{5}{6}t = \frac{5}{6}t\left(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}\right),$$

Продовжуючи цей процес, отримаємо

$$x_n(t) = \frac{5}{6}t\left(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\ldots+\frac{1}{6^n}\right) = \frac{5}{6}t\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{6^k}.$$

Знайдемо границю отриманої послідовності:

$$x(t) = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n(t) = \frac{5}{6}t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{6^k} = x.$$

Завдання 2. *Розв'язати методом послідовних наближень інтегральне рівняння Вольтерра*

$$x(t) = \int\limits_0^t \frac{x(s)}{1+s^2}ds + \operatorname{arctg} t.$$

Розв'язання. За початкове наближення виберемо функцію $x_0(t) = 0$. Тоді

$$x_1(t) = \int\limits_0^t \frac{0}{1+s^2}ds + \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg} t,$$

$$x_2(t) = \int\limits_0^t \frac{\operatorname{arctg} s}{1+s^2}ds + \operatorname{arctg} t = \frac{\operatorname{arctg}^2 s}{2}\bigg|_0^t + \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg} t + \frac{\operatorname{arctg}^2 t}{2},$$

. . . .

$$x_n(t) = \operatorname{arctg} t + \frac{\operatorname{arctg}^2 t}{2} + \ldots + \frac{\operatorname{arctg}^n t}{n!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{arctg}^k t}{k!}.$$

Отже, розв'язком рівняння є границя побудованої послідовності

$$x(t) = \lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{arctg}^k t}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}^k t}{k!} = e^{\operatorname{arctg} t} - 1.$$

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *Розв'язати методом послідовних наближень інтегральне рівняння Фредгольма:*

1. $x(t) = 2t - \int\limits_0^1 tsx(s)ds, \quad x_0(t) = 0;$

2. $x(t) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{t-s}x(s)ds, \quad x_0(t) = 0;$

3. $x(t)=2\sin t-\frac{\sin t}{2\pi}\int_0^\pi sx(s)ds,\quad x_0(t)=0;$

4. $x(t)=\cos t-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi 2\cos t\cos s x(s)ds,\quad x_0(t)=0;$

5. $x(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\sin(t-s)+\sin(t+s))\,x(s)ds+1,\quad x_0(t)=0;$

6. $x(t)=2-\int_0^1 sx(s)ds,\quad x_0(t)=0;$

7. $x(t)=1+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 s x(s)ds,\quad x_0(t)=0;$

8. $x(t)=1+\frac{1}{2}\int_0^1 ts^2x(s)ds,\quad x_0(t)=0;$

9. $x(t)=t-\frac{1}{2}\int_0^1 x(s)ds,\quad x_0(t)=0;$

10. $x(t)=\dfrac{1}{2}(1-t)-\pi\int\limits_0^1(1-t)\sin 2\pi s x(s)ds,\quad x_0(t)=\dfrac{1}{2}(1-t).$

Завдання 2. *Розв'язати методом послідовних наближень інтегральне рівняння Вольтерра:*

1. $x(t)=1+\int\limits_0^t x(s)ds,\quad x_0(t)=0;$

2. $x(t)=\frac{t^2}{2}+t+\int\limits_0^t x(s)ds,\quad x_0(t)=0;$

3. $x(t)=1-t^2+t\int\limits_0^t x(s)ds,\quad x_0(t)=1-t^2;$

4. $x(t)=1+t\int\limits_0^t x(s)ds,\quad x_0(t)=1;$

5. $x(t)=1+t^p\int\limits_0^t x(s)ds,\quad x_0(t)=1,\ p=1,2,\ldots;$

6. $x(t)=t-\int\limits_0^t(t-s)x(s)ds,\quad x_0(t)=0;$

7. $x(t)=2^t+\int\limits_0^t 2^{t-s}x(s)ds,\quad x_0(t)=1;$

8. $x(t)=1+\int\limits_0^t(t-s)x(s)ds,\quad x_0(t)=0;$

9. $x(t)=2-\int\limits_0^t x(s)ds,\quad x_0(t)=0;$

10. $x(t) = t + \int\limits_0^t sx(s)ds, \quad x_0(t) = 0.$

11.3 Розв'язування інтегральних рівнянь з виродженими ядрами методом зведення їх до системи алгебраїчних рівнянь

Теоретичні відомості

Широкий клас інтегральних рівнянь розв'язується методом зведення до системи алгебраїчних рівнянь, а саме інтегральні рівняння з виродженими ядрами.

Ядро $k(t,s)$ називається виродженим, якщо його можна зобразити у вигляді скінченної суми $k(t,s) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)b_k(s)$, де функції $a_k(t)$ і $b_k(s)$ неперервні і лінійно незалежні визначені на $[a,b]$.

Зауважимо, що вироджене ядро має скінченне число власних значень. Якщо ж симетричне ядро має скінченне число власних значень, то воно вироджене.

Розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds + f(t) \tag{11.13}$$

матиме вигляд

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(t), \tag{11.14}$$

де $c_k = \int_a^b b_k(s)\varphi(s)ds$ - невідомі сталі, оскільки функція $\varphi(s)$ невідома.

Отже, розв'язування рівняння (11.13) зводиться до відшукання сталих c_k, $k = 1, 2, \dots, n$. Підставляючи (11.14) в інтегральне рівняння і прирівнюючи коефіцієнти при $a_k(t)$, приходимо до висновку, що сталі c_k повинні визначатися із системи алгебраїчних рівнянь

$$c_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{km} c_k = f_m, \quad m = 1, 2, \dots, n$$

де $a_{km} = \int_a^b a_k(t)b_m(t)dt$, $f_m = \int_a^b b_m(t)f(t)dt$. Нас цікавить нетривіальний розв'язок даної системи алгебраїчних рівнянь. Це можливо, якщо визначник $\Delta(\lambda)$ цієї системи відмінний від 0, тоді рівняння (11.13) має єдиний розв'язок, що визначається формулою (11.14).

У випадку невиродженого ядра можна шукати наближений розв'язок інтегрального рівняння (11.13), замінюючи в ньому ядро $k(t,s)$ на «близьке» до нього вироджене ядро $\widetilde{k}(t,s)$. За $\widetilde{k}(t,s)$ можна вибрати, наприклад, частинну суму ряду Фур'є ядра $k(t,s)$ по деякій системі ортонормованих функцій $\{\psi_n(t)\}$:

$$\widetilde{k}(t,s) = \sum_{n=1}^{N} \omega_n(s)\psi_n(t),$$

де $\omega_n(s) = \int_a^b k(t,s)\psi_n(t)dt$.

Якщо ядро $k(t,s)$ є аналітичною функцією s, то наближене ядро $\widetilde{k}(t,s)$ можна шукати у вигляді частинної суми степеневого ряду

$$\widetilde{k}(t,s) = \sum_{n=0}^{N} c_n(t)(s-q)^n,$$

де $q \in [a,b]$,

$$c_n(t) = \frac{1}{n!}\,\frac{\partial^n}{\partial s^n}k(t,s)\bigg|_{s=q}.$$

Розв'язання типових задач

Завдання 1. *Розв'язати інтегральне рівняння*

$$x(t) = \lambda\int_{-1}^{1}(st + s^2t^2)x(s)ds + 1.$$

Розв'язання. Ядро даного рівняння вироджене, тому розвязок $x(t)$ шукатимемо у вигляді

$$x(t) = \lambda at + \lambda bt^2 + 1,$$

де $a = \int_{-1}^{1} sx(s)ds$; $b = \int_{-1}^{1} s^2x(s)ds$. Домноживши рівність записану для $x(t)$ на t та t^2 відповідно та проінтегрувавши на проміжку $[-1,1]$ отримаємо систему рівнянь для відшукання коєфіцієнтів a та b :

$$\begin{cases} a = \int_{-1}^{1}(\lambda at^2 + \lambda bt^3 + t)dt; \\ b = \int_{-1}^{1}(\lambda at^3 + \lambda bt^4 + t^2)dt; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2\int_{0}^{1}(\lambda at^2)dt; \\ b = 2\int_{0}^{1}(\lambda bt^4 + t^2)dt; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{2}{3}\lambda a; \\ b = \dfrac{2}{5}\lambda b + \dfrac{2}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\left(1-\dfrac{2}{3}\lambda\right)=0; \\ b\left(1-\dfrac{2}{5}\lambda\right)=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Якщо $\lambda \neq \frac{3}{2}$ і $\lambda \neq \frac{5}{2}$, то $a = 0$, $b = \frac{10}{3(5-2\lambda)}$. Отже,

$$x(t) = \lambda \frac{10}{3(5-2\lambda)} t^2 - 1$$

є єдиний розв'язок системи нашого інтегрального рівняння.

Якщо $\lambda = \frac{3}{2}$, то $b = \frac{5}{3}$, a-довільне. В цьому випадку розв'язок інтегрального рівняння запишеться так:

$$x(t) = \frac{3}{2}at - \frac{15}{4}t^2 + 1.$$

Якщо $\lambda = \frac{5}{2}$, то рівняння розв'язків не має.

Завдання 2. *Знайти наближений розв'язок інтегрального рівняння*

$$x(t) = \int_0^1 t\sin(ts)x(s)ds + \cos t,$$

замінивши його ядро наближеним.

Розв'язання. Замінимо ядро $k(t,s) = t\sin(ts)$ рівняння на близьке вироджене ядро $\widetilde{k}(t,s)$. За $\widetilde{k}(t,s)$ виберемо

$$\widetilde{k}(t,s) = t\left[ts - \frac{1}{6}t^3s^3\right].$$

Тут ми врахували розвинення функції $\sin(ts)$ в степеневий ряд. Відповідний наближений розв'язок позначимо $x^{(1)}(t)$. Тоді

$$x^{(1)}(t) = \int_0^1 t^2\left(s - \frac{1}{6}t^2s^3\right)x^{(1)}(s)ds + \cos t.$$

Розв'язок $x^{(1)}(t)$ шукатимемо у вигляді $x^{(1)}(t) = \cos t + c_1t^2 + c_2t^4$.

Підставивши останній вираз в інтегральне рівняння, отримаємо $\cos t + c_1t^2 + c_2t^4 = \int_0^1 t^2\left(s - \frac{1}{6}t^2s^3\right)\left(\cos s + c_1s^2 + c_2s^4\right) + \cos t.$

Прирівнюючи коефіцієнти при t^2 і t^4, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} c_1 = & \int_0^1 s(\cos s + c_1s^2 + c_2s^4)ds; \\ c_2 = & \int_0^1 \left(\frac{1}{6}\right)s^3\left(\cos s + c_1s^2 + c_2s^4\right)ds; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = & \cos 1 - 1 + \sin 1 - \frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{6}; \\ c_2 = & -\frac{1}{6}\left(6 - 3\cos 1 - 5\sin 1 + \frac{c_1}{6} + \frac{c_2}{8}\right). \end{cases}$$

Розв'язавши отриману систему двох алгебраїчних рівнянь, отримаємо

$c_1 \approx 0.4742$, $c_2 \approx -0.1569$. Таким чином
$$x^{(1)}(t) = \cos t + 0.4742t^2 - 0.1569t^4.$$

Точним розв'язком вихідного інтегрального рівняння, як можна переконатись безпосередньою підстановкою, є функція $x(t) \equiv 1$. На відрізку $[0,1]$ максимальне відхилення $x^{(1)}(t)$ від $x(t)$ складає 0.14.

Апроксимуємо ядро $k(t,s)$ більш точно ніж в першому випадку, а саме за наближене ядро виберемо
$$\widetilde{k}^{(2)}(t,s) = t\left(ts - \frac{t^3s^3}{6} + \frac{t^5s^5}{120}\right).$$
Тоді наближений розв'язок шукатимемо у вигляді
$$x^{(2)}(t) = \cos t + c_1t^3 + c_2t^4 + c_3t^6.$$
Повторивши попередні міркування, отримаємо розв'язок
$$x^{(2)}(t) = \cos t + 0.5079t^3 - 1.41\cdot 10^{-2}t^4 + 3.562\cdot 10^{-1}t^6.$$
Максимальне відхилення $x^{(2)}(t)$ від точного розв'язку $x(t)$ на відрізку $[0,1]$ складає 0.034. Тобто похибка обчислень в цьому випадку приблизно в 5 разів менша ніж в попередньому.

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *За допомогою зведення до систем алгебраїчних рівнянь розв'язати інтегральне рівняння* ($\lambda \in \mathbb{C}$):

1. $x(t) = \lambda\int_{-1}^{1}(t^4 + 5t^3s)x(s)ds + t^2 - t^4, \quad t \in [-1,1];$
2. $x(t) = \lambda\int_{-1}^{1}(ts^3 + 5t^2s^2)x(s)ds + 7t^3 - 3, \quad t \in [-1,1];$
3. $x(t) = \lambda\int_{-1}^{1}(t^2 - ts)x(s)ds + t^2 + t, \quad t \in [-1,1];$
4. $x(t) = \lambda\int_{-1}^{1}(s^2 - ts)x(s)ds + t^2 - t, \quad t \in [-1,1];$
5. $x(t) = \lambda\int_{0}^{\pi}\sin(2t + s)x(s)ds + \pi - 2t, \quad t \in [0,\pi];$
6. $x(t) = \lambda\int_{0}^{\pi}\sin(t + 2s)x(s)ds + \frac{\pi}{2} - t, \quad t \in [0,\pi];$
7. $x(t) = \lambda\int_{0}^{\pi}\cos(2t + s)x(s)ds + \sin t, \quad t \in [0,\pi];$
8. $x(t) = \lambda\int_{0}^{\pi}\cos(t - 2s)x(s)ds + \cos t, \quad t \in [0,\pi];$
9. $x(t) = \lambda\int_{0}^{\pi}(\sin s + s\cos t)x(s)ds + 1 - \frac{2t}{\pi}, \quad t \in [0,\pi];$
10. $x(t) = \lambda\int_{0}^{\pi}(\sin t + t\cos s)x(s)ds + 1 + \frac{2t}{\pi}, \quad t \in [0,\pi].$

11.4 Метод розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерра зведенням їх до диференціальних

Цим методом розв'язують інтегральні рівняння Вольтерра першого та другого роду. Проілюструємо метод зведення інтегральних рівнянь до диференціальних на прикладах.

Розв'язання типових задач

Завдання 1. *Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра, звівши його до диференціального:*

$$x(t) = -2\cos t + 2\int_0^t (s-t)x(s)ds. \tag{11.15}$$

Розв'язання. Продиференціюємо обидві частини даного рівняння два рази по t:

$$x^{'}(t) = 2\sin t - 2\int_0^t x(s)ds; \tag{11.16}$$

$$x^{''}(t) = 2\cos t - 2x(t).$$

Таким чином інтегральне рівняння Вольтерра ми звели до диференціального неоднорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. З рівнянь (11.15) та (11.16) випливають початкові умови: $x(0) = -2$, $x^{'}(0) = 0$. Розв'яжемо отримане диференціальне рівняння другого порядку. Розглянемо спочатку відповідне йому однорідне диференціальне рівняння:

$$x^{''}(t) + 2x(t) = 0.$$

$$k^2 + 2 = 0, \quad k = \pm i\sqrt{2}.$$

Тому загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння запишемо у вигляді

$$x_{\text{з.о.}}(t) = C_1 \cos\sqrt{2}t + C_2 \sin\sqrt{2}t.$$

Для знаходження частинного розв'язку відповідного неоднорідного диференціального рівняння, що має вигляд

$$x_{\text{ч.н.}}(t) = A\cos t + B\sin t,$$

знайдемо сталі A та B.

$$x^{'}_{\text{ч.н.}}(t) = -A\sin t + B\cos t;$$

$$x^{''}_{\text{ч.н.}}(t) = -A\cos t - B\sin t.$$

$$-A\cos t - B\sin t + 2A\cos t + 2B\sin t = 2\cos t;$$

$$A\cos t + B\sin t = 2\cos t;$$

$$A = 2, B = 0.$$

Отже,

$$x_{\text{з.н.}}(t) = x_{\text{з.о.}}(t) + x_{\text{ч.н.}}(t) = C_1 \cos\sqrt{2}t + C_2 \sin\sqrt{2}t + 2\cos t.$$
$$x'_{\text{з.н.}}(t) = -C_1\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t + C_2\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t - 2\sin t.$$

Враховуючи початкові умови,

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + 2 = -2; \\ x'(0) = C_2\sqrt{2} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = -4; \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Таким чином розв'язок інтегрального рівняння Вольтерра має вигляд:

$$x(t) = -4\cos\sqrt{2}t + 2\cos t.$$

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра, звівши його до диференціального:*

1. $x(t) = 1 + \int_0^t sx(s)ds;$
2. $x(t) = e^t + \int_0^t x(s)ds;$
3. $x(t) = t^2 + 2t - \int_0^t (t-s)x(s)ds;$
4. $x(t) = t^2 + 2 + \int_0^t sx(s)ds;$
5. $x(t) = 3t + 1 + \int_0^t (3t - 3s)\, x(s)ds;$
6. $x(t) = 4e^t - \int_0^t (t-s)\, x(s)ds;$
7. $x(t) = t + 4\int_0^t \sin(t-s)x(s)ds;$
8. $x(t) = 1 + \int_0^t \left((t-s)^2 - (t-s)\right) x(s)ds;$
9. $x(t) = \sin t + \frac{1}{2}\int_0^t (t-s)x(s)ds;$
10. $x(t) = e^{-t}\cos t - \int_0^t \cos t \cdot e^{s-t} x(s)ds.$

11.5 Інтегральні рівняння із симетричними ядрами

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds = f(t), \quad (\lambda \in \mathbf{C}). \tag{11.17}$$

Відповідне однорідне рівняння

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds = 0 \tag{11.18}$$

завжди має тривіальний розв'язок $\varphi(t) \equiv 0$. Ті значення λ ($\lambda \neq 0$) при яких це рівняння має ненульові розв'язки називаються *власними (характеристичними) числами* рівняння (11.18) чи ядра $k(t,s)$, а кожен ненульовий розв'язок цього рівняння називається *власною функцією*, що відповідає характеристичному числу λ. Множина лінійно незалежних власних функцій, що відповідають λ завжди скінченна і називається *рангом характеристичного значення* λ.

Нехай ядро $k(t,s)$ інтегрального рівняння (11.17) задовольняє такі умови:

$$\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 dt ds < \infty,$$

$$k(t,s) = k(s,t).$$

Такі інтегральні рівняння називаються *рівняннями з симетричним ядром,* а самі функції $k(t,s)$ - *симетричними ядрами.*

Теорема 1. *Якщо λ не співпадає з характеристичними числами λ_n відповідного однорідного рівняння, то рівняння (11.17) має для $f(t)$ єдиний неперервний розв'язок, що визначається формулою*

$$\varphi(t) = f(t) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(t),$$

де $\varphi_n(t)$-ортонормовані власні функції, що відповідають числам λ_n, а

$$a_n = \int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt.$$

Теорема 2. *Нехай $\lambda \in \mathbf{C}$ співпадає із λ_k рангу q, тобто $\lambda = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_{k+q-1}$. Тоді для існування розв'язку рівняння (11.17) необхідно й досить, щоб $f(t)$ була ортогональна всім власним функціям, що відповідають числу λ_k. При цьому (11.17) має нескінченну кількість розв'язків, що містять q довільних констант і задаються формулою*

$$\varphi(t) = f(t) - \lambda \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(t) - \lambda \sum_{n=k+q}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(t) +$$

$$+ c_0\varphi_k(t) + \ldots + c_q\varphi_{k+q-1}(t),$$

де $c_0, c_1, \ldots, c_q$ - довільні сталі.

Якщо $f(t)$ ортогональна всім власним функціям $\varphi_n(t)$ ядра $k(t,s)$, то розв'язком рівняння є сама ця функція $\varphi(t) = f(t)$.

Розв'язання типових задач

Завдання 1. *Знайти характеристичні числа, відповідні нормовані власні функції та розв'язки (при кожному λ, при якому вони існують) інтегрального рівняння із симетричним ядром*

$$x(t) = \lambda \int_0^1 \min(t, s)\, x(s) ds + \sin \pi t.$$

Спочатку потрібно знайти ті λ_n, для яких відповідне однорідне рівняння

$$x(t) = \lambda \int_0^1 \min(t, s)\, x(s) ds \tag{11.19}$$

має нетривіальний розв'язок та відповідні власні функції $x_n(t)$. Очевидно, що

$$k(t, s) = \min(t, s) = \begin{cases} t, & t \le s; \\ s, & t \ge s. \end{cases}$$

Тоді рівняння (11.19) перепишеться у вигляді

$$x(t) = \lambda \int_0^t s x(s) ds + \lambda \int_t^1 t x(s) ds. \tag{11.20}$$

Продиференціювавши його двічі по змінній t, отримаємо

$$x^{'}(t) = \lambda t x(t) + \lambda \int_t^1 x(s) ds - \lambda t x(t), \tag{11.21}$$

$$x^{''}(t) = -\lambda x(t). \tag{11.22}$$

Із (11.20) та (11.21) випливають крайові умови:

$$\begin{cases} x(0) = 0; \\ x^{'}(1) = 0. \end{cases}$$

1. Якщо $\lambda < 0$, то розв'язками відповідного характеристичного рівняння будуть $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$. В такому випадку розв'язок рівняння (11.22) формуємо у вигляді

   $$x(t) = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}t} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}t}.$$

   Продиференціюємо його:

   $$x^{'}(t) = -c_1\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}t} + c_2\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}t}.$$

Врахувавши початкові умови, прийдемо до наступної системи для відшукання сталих c_1, c_2 :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0; \\ -c_1\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}} + c_2\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = -c_1; \\ -c_1\sqrt{-\lambda}\left(e^{-\sqrt{-\lambda}} + e^{\sqrt{-\lambda}}\right) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 0; \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

В такому випадку $x(t) \equiv 0$.

2. Якщо ж $\lambda > 0$, то розв'язками відповідного характеристичного рівняння будуть $k_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$. В такому випадку розв'язок рівняння (11.22) формуємо у вигляді

$$x(t) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}t + c_2 \sin\sqrt{\lambda}t.$$

Продиференціюємо і цей розв'язок:

$$x^{'}(t) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}t + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}t.$$

Врахувавши початкові умови, отримаємо таку систему:

$$\begin{cases} c_1 = 0; \\ c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0; \end{cases}$$

Оскільки $c_2 \neq 0$, (в такому випадку $x(t) \equiv 0$) то

$$\cos\sqrt{\lambda} = 0,$$
$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Власні функції, відповідні власним числам λ_n мають вигляд

$$x_n(t) = c_n \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) t.$$

Пронормуємо їх, тобто визначимо коефіцієнти c_n із умови

$$\int\limits_0^1 c_n^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) tdt = 1.$$

Обчисливши інтеграл в лівій частині цієї рівності, отримаємо $c_n = \sqrt{2}$. Отже

$$x_n(t) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) t.$$

Таким чином, при $\lambda \neq \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ розв'язком інтегрального рівняння є функція

$$x(t) = \sin \pi t - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} a_n}{\lambda - \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) t,$$

де a_n - коефіцієнти Фур'є функції $f(t) = \sin \pi t$:

$$a_n = \sqrt{2} \int_0^1 t \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) t dt = \frac{(-1)^n \sqrt{2}}{\left(\frac{1}{2} - n\right)\left(\frac{3\pi}{2} + \pi n\right)}.$$

Отже, остаточно, розв'язок інтегрального рівняння запишеться так:

$$x(t) = \sin \pi t - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\left(\frac{1}{2} - n\right)\left(\frac{3\pi}{2} + \pi n\right)\left(\lambda - \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2\right)} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) t.$$

При $\lambda = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, рівняння розв'язків не має, оскільки його права частина не ортогональна ($a_n \neq 0$) всім розв'язкам відповідного однорідного рівняння.

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *Знайти характеристичні числа, відповідні нормовані власні функції та розв'язки (при кожному λ, при якому вони існують) інтегрального рівняння із симетричним ядром*

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^b k(t, s)\, x(s) ds + f(t), \quad t \in [a, b],$$

де:

1. $k(t, s) = \cos^2(t - s)$, $a = -\pi$, $b = \pi$, $f(t) = \sin 2t$;
2. $k(t, s) = \sin t \sin s$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $f(t) = \cos t + \sin t$;
3. $k(t, s) = \begin{cases} \cos t \sin s, & t \leq s, \\ \cos s \sin t, & s \leq t, \end{cases}$ $a = 0$, $b = \pi$, $f(t) = t$;
4. $k(t, s) = \begin{cases} \sin t \cos s, & t \leq s, \\ \sin s \cos t, & s \leq t, \end{cases}$ $a = 0$, $b = \pi$, $f(t) = \sin \frac{3}{2} t$;
5. $k(t, s) = \begin{cases} \sin t \sin(1 - s), & t \leq s, \\ \sin(1 - t) \sin s, & s \leq t, \end{cases}$ $a = 0$, $b = 1$, $f(t) = \cos \pi t$;
6. $k(t, s) = \begin{cases} -t, & t \leq s, \\ -s, & s \leq t, \end{cases}$ $a = 0$, $b = 1$, $f(t) = \sin \pi t \cos \frac{\pi}{2} t$;

7. $k(t,s) = \begin{cases} t(s-1), & t \le s, \\ s(t-1), & s \le t, \end{cases}$ $a = 0,\ b = 1,\ f(t) = 1;$

8. $k(t,s) = \begin{cases} (t+1)s, & t \le s, \\ t(s+1), & s \le t, \end{cases}$ $a = 0,\ b = 1,\ f(t) = \sin \pi t + \pi \cos \pi t;$

9. $k(t,s) = \begin{cases} (t+1)(1-s), & t \le s, \\ (1-t)(s+1), & s \le t, \end{cases}$ $a = -1,\ b = 1,\ f(t) = 1;$

10. $k(t,s) = \begin{cases} (e^t - e^{-t})(e^s + e^{2-s}), & t \le s, \\ (e^s - e^{-s})(e^t + e^{2-t}), & s \le t, \end{cases}$ $a = 0,\ b = 1,\ f(t) = t.$

11.6 Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi(t) = \int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds + f(t), \tag{11.23}$$

ядро якого задовольняє умові Гільберта-Шмідта: $\int\limits_a^b \int\limits_a^b |k(t,s)|^2 \, dsdt < \infty$, причому умови виродженості чи симетричності на функцію $k(t,s)$ не накладаються. Вільний член $f(t)$ рівняння (11.23) – це задана функція із класу $L_2[a,b]$, $\varphi(t)$ – невідома функція із класу $L_2[a,b]$.

Ядра класу $L_2[a,b]$ називають ядрами *Гільберта-Шмідта.*

Запишемо рівняння (11.23) в операторній формі

$$\varphi = A\varphi + f,$$

де $A\varphi(t) = \int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds$ – інтегральний оператор Фредгольма. Покладемо $T = I - A$, де I – одиничний оператор. Тоді (11.23) перепишеться у вигляді

$$T\varphi = f. \tag{11.24}$$

Введемо в розгляд такі рівняння

$$T\varphi = 0 \tag{11.25}$$

– відповідне (11.23) однорідне операторне рівняння,

$$T^*\psi = g \tag{11.26}$$

– спряжене рівняння, де $T^* = I - A^*$, A^* – оператор, спряжений оператору Фредгольма,

$$T^*\psi = 0 \tag{11.27}$$

– відповідне спряжене однорідне рівняння.

Зв'язок між властивостями розв'язків рівнянь (11.24)-(11.27) встановлюють такі теореми Фредгольма.

Перша теорема Фредгольма. *Неоднорідне рівняння (11.24) має розв'язок при тих і лише тих f, котрі є ортогональними кожному розв'язку спряженого однорідного рівняння (11.27).*

Друга теорема Фредгольма (Альтернатива Фредгольма). *Або рівняння (11.24) має для будь-якого $f \in L_2[a, b]$ один і лише один розв'язок, або однорідне рівняння (11.25) має ненульовий розв'язок.*

Третя теорема Фредгольма. *Однорідні рівняння (11.25) та (11.27) мають одну і ту ж кількість (причому скінченну) лінійно незалежних розв'язків.*

Зауважимо, що ці теореми справедливі для інтегральних рівнянь з симетричними ядрами. Оскільки оператори A і A^* співпадають, то третя теорема Фредгольма стає тривіальною. Якщо A – вироджений інтегральний оператор, то відповідні інтегральні рівняння зводяться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Очевидно, що теореми Фредгольма в цьому випадку формулюються у вигляді теорем для відповідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розв'язання типових задач

Завдання 1. *Встановити, при яких значеннях $\lambda \in \mathbf{C}$ інтегральне рівняння*

$$x(t) = \lambda \int_a^b ts^2 e^{-s^4} x(s)ds + t$$

має розв'язок в просторі $L_2[a; b]$?

Розв'язання. За другою теоремою Фредгольма дане інтегральне рівняння має розв'язок в просторі $L_2[a; b]$ для тих λ, котрі не є власними числами (характеристичними числами) відповідного однорідного рівняння. Відповідне однорідне рівняння має вигляд

$$x(t) = \lambda \int_a^b ts^2 e^{-s^4} x(s)ds,$$

або

$$x(t) = \lambda ct, \tag{11.28}$$

де

$$c = \int_a^b s^2 e^{-s^4} x(s)ds. \tag{11.29}$$

Домножимо обидві частини (11.28) на $t^2e^{-t^4}$ та проінтегруємо від a до b. Отримаємо

$$\int_a^b t^2e^{-t^4}x(t)dt = \lambda c\int_a^b t^3e^{-t^4} = -\frac{\lambda c}{4}\, e^{-t^4}\Big|_a^b = \frac{\lambda c}{4}\frac{e^{b^4}-e^{a^4}}{e^{a^4+b^4}},$$

або ж, врахувавши (11.29),

$$c\left(1-\frac{\lambda}{4}\frac{e^{b^4}-e^{a^4}}{e^{a^4+b^4}}\right)=0.$$

Оскільки $c\neq 0$, то

$$\lambda=\frac{4e^{a^4+b^4}}{e^{b^4}-e^{a^4}}.$$

Отже, для всіх λ таких, що $\lambda\neq\dfrac{4e^{a^4+b^4}}{e^{b^4}-e^{a^4}}$ дане інтегральне рівняння має розв'язок в просторі $L_2[a;b]$.

Завдання 2. *Для яких $f(t)\in L_2[0,1]$ рівняння*

$$x(t)=\int_0^1 ts^2x(s)ds+f(t)$$

має розв'язок?

Розв'язання. Використаємо першу теорему Фредгольма. Відповідне однорідне спряжене рівняння

$$y(t)=4\int_0^1 t^2sy(s)ds,$$

або

$$y(t)=4at^2,$$

де

$$a=\int_0^1 sy(s)ds.$$

Отже, власною функцією оператора A^* є $y(t)=t^2$. Щоб дане рівняння мало розв'язок, $f(t)$ має бути ортогональною до всіх власних функцій спряженого оператора A^*, тобто

$$\int_0^1 t^2y(t)dt=0.$$

Очевидно, що $y(t)=\cos\pi t^3$.

Завдання 3. *Знайти всі значення параметрів p та q для яких інтегральне рівняння*

$$x(t) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (t \sin s + \cos t) x(s) ds + pt + q$$

має розв'язок в просторі $L_2[a, b]$ для довільних $\lambda \in \mathbf{C}$.

Розв'язання. Згідно першої теореми Фредгольма для існування розв'язку інтегрального рівняння достатньо, щоб функція $f(t) = pt+q$ була ортогональна до кожного розв'язку $y(t)$ відповідного однорідного спряженого рівняння:

$$y(t) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (s \sin t + \cos s) y(s) ds.$$

Розв'язок цього спряженого однорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y(t) = \lambda c_1 \sin t + \lambda c_2, \tag{11.30}$$

де $c_1 = \int_{-\pi}^{\pi} s y(s) ds$, $c_2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos s y(s) ds$. Домноживши рівність (11.30) на t та проінтегрувавши на проміжку $[-\pi, \pi]$, матимемо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} t y(t) dt = \lambda c_1 \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt + \lambda c_2 \int_{-\pi}^{\pi} t dt,$$

або, після обчислень інтегралів, присутніх в останній рівності, отримаємо

$$c_1 = 2\pi \lambda c_1.$$

Домноживши (11.30) на $\cos t$ та проінтегрувавши на проміжку $[-\pi, \pi]$, матимемо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos t y(t) dt = \lambda c_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t dt + \lambda c_2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt,$$

або, після відповідних обчислень інтегралів, можемо записати, що

$$c_2 = 0.$$

Таким чином маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} c_1(1 - 2\pi\lambda) = 0, \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

Звідси очевидним є такий висновок:

1. при $\lambda \neq \dfrac{1}{2\pi}$ отримаємо $c_1 = c_2 = 0$. Отже, $y(t) = 0$ і $(y, f) = 0$ для всіх $f(t)$, тобто при довільних p та q;

2. при $\lambda = \dfrac{1}{2\pi}$ матимемо $c_2 = 0$, c_1 -довільне і $y(t) = \dfrac{c_1}{2\pi} \sin t$. Тому $(y, f) = 0$, якщо
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{c_1}{2\pi} \sin t \, (pt + q) \, dt = \frac{c_1}{2\pi} p \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt = 0.$$

В цьому випадку, q – довільне, а $p = 0$.

Завдання 4. *Знайти всі значення* λ, *при яких рівняння*

$$x(t) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t+s)x(s)ds + f(t)$$

має єдиний розв'язок для будь-яких функцій f.

Розв'язання. Дане інтегральне рівняння матиме єдиний розв'язок для тих λ, що не є власними значеннями відповідного однорідного рівняння. Відповідне однорідне рівняння

$$x(t) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t+s)x(s)ds,$$

або

$$x(t) = \lambda a \cos t - \lambda b \sin t,$$

де $a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos s)x(s)ds$, $b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin s)x(s)ds$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\cos t dt = \lambda a \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\cos^2 t dt - \frac{\lambda b}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t) \sin 2t dt,$$

$$a = \lambda a \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} a + \frac{\lambda b}{4} \cos 2t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \lambda a \frac{\pi}{4} - \frac{\lambda b}{2}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\sin t dt = \frac{\lambda a}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\sin 2t dt - \lambda b \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t) \sin^2 t dt,$$

$$b = -\frac{\lambda a}{4} \cos 2t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \lambda b \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda a}{2} - \lambda b \frac{\pi}{4}.$$

Таким чином отримуємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно a і b :

$$\begin{cases} a\left(1 - \lambda\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\lambda}{2} b = 0, \\ b\left(1 + \lambda\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\lambda}{2} a = 0. \end{cases}$$

Визначник даної системи

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda\frac{\pi}{4} & -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda\frac{\pi}{4} \end{vmatrix} = 1 - \frac{\lambda^2\left(\pi^2 - 4\right)}{16}.$$

Власні числа відповідного однорідного інтегрального рівняння отримуватимемо, коли визначник одержаної однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь буде рівний нулеві, тобто $1 - \dfrac{\lambda^2\left(\pi^2-4\right)}{16} = 0$. Звідси отримаємо: $\lambda = \pm\dfrac{4}{\sqrt{\pi^2-4}}$ – власні числа Тому для всіх $\lambda \neq \pm\dfrac{4}{\sqrt{\pi^2-4}}$

наше інтегральне рівняння буде мати єдиний розв'язок.

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *Знайти всі значення параметрів* p, q, r, *для яких інтегральне рівняння*

$$x(t) = \lambda \int_a^b k(t,s)x(s)ds + f(t)$$

має розв'язок в просторі $L_2[a,b]$ *для довільних* $\lambda \in \mathbf{C}$, *якщо:*

1. $k(t,s) = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{s}$, $f(t) = pt^2 + qt + r$, $t \in [a,b] = [-1,1]$;
2. $k(t,s) = 1 + ts$, $f(t) = pt^2 + qt + r$, $t \in [a,b] = [-1,1]$;
3. $k(t,s) = ts + t^2s^2$, $f(t) = pt^2 + qt + r$, $t \in [a,b] = [-1,1]$;
4. $k(t,s) = t^2 + ts^2$, $f(t) = pt + q$, $t \in [a,b] = [-1,1]$;
5. $k(t,s) = \dfrac{1}{2}\left(ts + t^2s^2\right)$, $f(t) = pt + q$, $t \in [a,b] = [-1,1]$;
6. $k(t,s) = t^2s + ts^2$, $f(t) = pt + qt^3$, $t \in [a,b] = [-1,1]$;
7. $k(t,s) = 3t + ts - 5t^2s^2$, $f(t) = pt$, $t \in [a,b] = [-1,1]$;
8. $k(t,s) = 3\sin t + \cos s$, $f(t) = pt + q$, $t \in [a,b] = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$;
9. $k(t,s) = \cos(t+s)$, $f(t) = p\sin t + q$, $t \in [a,b] = [0,\pi]$;
10. $k(t,s) = t\cos s + \sin t \sin s$, $f(t) = p + q\cos t$, $t \in [a,b] = [-\pi,\pi]$.

Завдання 2. *Знайти всі значення* λ, *при яких наступні інтегральні рівняння мають єдиний розв'язок для будь-якої функції* f :

1. $x(t) = \lambda \int_0^1 \left(t^2s^2 - \frac{2}{45}\right) x(s)ds + f(t), \quad f(t) \in C_{[0,1]}$;
2. $x(t) = \lambda \int_{-2}^2 (t^2s + ts^2)x(s)ds + f(t), \quad f(t) \in C_{[-2,2]}$;
3. $x(t) = \lambda \int_{-1}^1 (t^3 - ts^3)x(s)ds + f(t), \quad f(t) \in C_{[-1,1]}$;
4. $x(t) = \lambda \int_{-1}^1 (ts - 2t^2)x(s)ds + f(t), \quad f(t) \in C_{[-1,1]}$;
5. $x(t) = \lambda \int_{-1}^1 (t^2 - s)x(s)ds + f(t), \quad f(t) \in C_{[-1,1]}$
6. $x(t) = \lambda \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos^2(t+s)\right) x(s)ds + f(t), \quad f(t) \in C_{[0,2\pi]}$;

7. $x(t) = \lambda \int_0^{2\pi} \cos(2t - s)x(s)ds + f(t), \quad f(t) \in C_{[0,2\pi]}$;

8. $x(t) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin(t - s)x(s)ds + f(t), \quad f(t) \in C_{[0,2\pi]}$;

9. $x(t) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(t + s)x(s)ds + f(t), \quad f(t) \in C_{[0,\pi]}$;

10. $x(t) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t + s)x(s)ds + f(t), \quad f(t) \in C_{[0,\frac{\pi}{2}]}$.

12 Узагальнені функції

Перелік необхідних питань теорії

1. Простір основних функцій $D(\mathbf{R})$ та збіжність в ньому.

2. Означення узагальненої функції. Регулярні та сингулярні узагальнені функції.

3. Носії основної та узагальненої функцій.

4. Збіжність в просторі узагальнених функцій $D^{'}(\mathbf{R})$.

5. Простір основних функцій повільного росту $S(\mathbf{R})$ та збіжність в ньому.

Теоретичні відомості

В багатьох фізичних задачах класичне поняття функції в найширшому розумінні(тобто як будь-яке правило, що ставить у відповідність кожному значенню x із області визначення цієї функції деяке число y із множини значень цієї ж функції) виявляється недостатнім. Застосовуючи, наприклад, теорію математичного аналізу до тих чи інших задач, виникають ситуації, коли не можна виконати деякі операції. Функцію, що не має похідної в окремих точках або навіть скрізь в області задання, не можна диференціювати, якщо під похідною розуміти «звичайну» функцію. Звуження множини функцій, обмежившись лише розглядом аналітичних функцій, безумовно не є раціональним. Або розглянемо таку фізичну задачу як розподіл мас вздовж числової прямої. Цей розподіл зручно визначати щільністю цього розподілу. Але якщо ж на прямій існують точки, що мають додатну масу, тоді щільність такого розподілу не описується жодною «звичайною» функцією.

Подібні проблеми, виявляється, вирішуються не шляхом звуження, а шляхом істотного розширення поняття функції, вводячи так звані узагальнені функції. Основою для введення відповідних нових понять є поняття спряженого простору.

Розглянемо ідею побудови поняття узагальненої функції. Нехай f – фіксована функція на числовій прямій, інтегровна на кожному скінченному проміжку цієї прямої. І нехай φ – неперервна функція, що обертається в нуль поза деяким скінченним інтервалом. Такі функції називають фінітними. Інтервали, зовні якого функції φ дорівнюють нулеві, можуть бути різними для різних функцій φ. Кожній такій функції φ

можна за допомогою фіксованої функції f поставити у відповідність число $(f,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$, причому, очевидно цей інтеграл береться по деякому скінченному інтервалу згідно фінітності функції $\varphi(x)$. Таким чином, цю функцію f можемо розглядати як лінійний функціонал (згідно властивостей інтеграла), визначений на просторі фінітних функцій. Зауважимо, що якщо кожній фінітній функції φ поставити у відповідність значення функції φ в точці $x=x_0$, $x_0\in[a,b]$, тоді ми теж маємо лінійний функціонал на просторі фінітних функцій. Але останній – це функціонал, що зображується у вигляді інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$.

Ми приходимо до висновку, що функції $f(x)$ звичайним способом включаються в деякий ширший клас – клас всіх лінійних функціоналів заданих в просторі фінітних функцій.

Запас функцій φ, визначених на $\mathbf{R}$, можна вибирати різним способом. Однак, до цього запасу включають лише неперервні та фінітні функції і такі, що нескінченне число разів диференційовні та визначені на всій числовій прямій. Позначимо такий запас функцій φ символом $D(\mathbf{R})$. Очевидно, функції, що належать класу $D(\mathbf{R})$ утворюють лінійний простір зі звичайними операціями додавання функцій та множення їх на числа. В цьому просторі $D(\mathbf{R})$ не вводиться поняття норми, але в ньому звичайним способом вводять поняття збіжності.

Послідовність функцій $(\varphi_n(x))$ із $D(\mathbf{R})$ називається збіжною до функції $(\varphi(x))$ із $D(\mathbf{R})$, якщо:

1) існує один інтервал, зовні якого всі φ_n обертаються в нуль;

2) послідовність похідних $\left(\varphi_n^{(k)}\right)$ порядку k $(k=0,1,2,\ldots)$ збіжна на цьому інтервалі рівномірно до $\varphi^{(k)}(x)$.

Тут рівномірної збіжності відносно $k=0,1,2,\ldots$ не вимагається. Похідна нульвого порядку – це за визначенням є сама функція.

Лінійний простір $D(\mathbf{R})$ зі збіжністю визначеною вище, називається *основним простором*, а елементи цього простору називаються *основними функціями.*

Узагальненою функцією, визначеною на числовій прямій $\mathbf{R}$, називається будь-який лінійний неперервний функціонал на класі основних функцій $D(\mathbf{R})$. Значення функціоналу(узагальненої функції) f на основній функції φ будемо записувати у вигляді (f,φ) .

Пояснимо детально всі складові частини узагальненої функції.

1. Узагальнена функція f є функціоналом на $D(\mathbf{R})$, тобто кожній функції $\varphi \in D(\mathbf{R})$ ставиться у відповідність число (f, φ).

2. Узагальнена функція f є лінійний функціонал на $D(\mathbf{R})$, тобто для довільних $\varphi, \psi \in D(\mathbf{R})$, та $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$
$$(f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda\,(f, \varphi) + \mu\,(f, \psi)\,.$$

3. Узагальнена функція є неперевний функціонал на $D(\mathbf{R})$, тобто якщо $\varphi_n \to \varphi$ при $n \to \infty$ в $D(\mathbf{R})$, то
$$(f, \varphi_n) \to (f, \varphi) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Очевидно, кожна інтегровна на будь-якому скінченному інтервалі функція $f(x)$ породжує деяку узагальнену функцію, оскільки вираз
$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \tag{12.1}$$
є неперервним лінійним функціоналом на просторі $D(\mathbf{R})$.

Якщо узагальнена функція зображається у вигляді (12.1), то вона називається *регулярною*, в протилежному випадку (тобто коли зображення (12.1) неможливе) – *сингулярною.* Іншими словами, клас узагальнених функцій ділиться на дві частини: одна – це регулярні узагальнені функції (для яких можливе зображення (12.1)) і друга – це сингулярні узагальнені функції (для яких не є можливим зображення (12.1)).

Прикладом сингулярної узагальненої функції є функція Дірака (або «δ»-функція):
$$(f, \varphi) = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x))\,.$$
Це є неперервний лінійний функціонал на просторі $D(\mathbf{R})$. Цей функціонал зображують, як правило, в такому вигляді:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx,$$
розуміючи під $\delta(x)$ «функцію», яка дорівнює нулю при всіх $x \neq 0$ та обертається в точці $x = 0$ в нескінченість так, що $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$.

Простір всіх узагальнених функцій позначають $D^{'}(\mathbf{R})$.

Множину всіх точок числової прямої, в кожному околі яких $f \neq 0$, називають *носієм* узагальненої функції та позначають символом $supp\, f$.

Послідовність узагальнених функцій (f_n) називається *збіжною* до узагальненої функції f в $D^{'}(\mathbf{R})$, якщо для кожної функції $\varphi \in D(\mathbf{R})$ виконується співвідношення:

$$(f_n, \varphi) \to (f, \varphi) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тобто збіжність послідовності узагальнених функцій є збіжністю на кожному елементі із $D(\mathbf{R})$.

До простору основних функцій повільного росту $S(\mathbf{R})$ віднесемо всі нескінченну кількість разів диференційовні функції, які при $|x| \to \infty$ разом зі всіма своїми похідними прямують до нуля швидше будь-якої степені $\frac{1}{|x|}$. Збіжність в $S(\mathbf{R})$ визначимо наступним чином: $\varphi_n \to \varphi$ при $n \to \infty$ в $S(\mathbf{R})$ якщо

$$x^k \varphi_n^{(l)} \rightrightarrows \varphi^{(l)} \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \forall k, l \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Нехай $f \in C^k$, тоді для всіх $\alpha \in \mathbf{N}$, $\alpha \le k$ та $\varphi(x) \in D(\mathbf{R})$ справедливою є формула диференціювання узагальненої функції f із $D'(\mathbf{R})$:

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^\alpha (f, D^\alpha \varphi).$$

Розв’язання типових задач

Завдання 1. *Чи збігається в $D(\mathbf{R})$ послідовність основних функцій*

$$\text{а) } \varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi(x); \quad \text{б) } \varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{x}{n}\right),$$

де φ – неперервна фінітна функція, $\varphi \in D(\mathbf{R})$.

Розв’язання. а) Оскільки $\varphi(x)$ є фінітною, то існує така замкнена обмежена область $B \subset \mathbf{R}$, що $\varphi_n(x) \neq 0 \quad \forall x \in B$. Очевидно, що k-та похідна

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n}\varphi^{(k)}(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Знайдемо поточкові границі

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n^{(k)}(x) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Перевіримо, чи є $\varphi(x) = 0$ границею $\varphi_n(x)$ в $D(\mathbf{R})$, тобто чи має місце рівномірна збіжність $\varphi_n^{(k)}(x) \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$. Щоб мала місце рівномірна збіжність функціональних послідовностей $\left(\varphi_n^{(k)}(x)\right)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ до функції $\varphi(x) \equiv 0$ $\forall x \in B$ потрібно довести, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \forall x \in B \quad \left|\varphi_n^{(k)}(x) - 0\right| < \varepsilon.$$

Функція $\varphi^{(k)}(x)$ є обмеженою, бо неперервна на замкненій множині B, тобто $\exists L > 0$, що $\left|\varphi^{(k)}(x)\right| < L$, тому

$$\left|\varphi_n^{(k)}(x) - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\varphi^{(k)}(x)\right| \le \frac{L}{n} < \varepsilon.$$

Таким чином як тільки $n > \left[\dfrac{L}{\varepsilon}\right] + 1$, то $\left|\varphi_n^{(k)}(x)\right| < \varepsilon$ при $\forall x \in B$, $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$. Отже $\varphi_n(x)$ є рівномірно збіжною в $D(\mathbf{R})$ до функції $\varphi(x) = 0$.

б) Нехай $supp\, \varphi(x) = [a, b]$, причому $b > a > 0$. Тоді $supp\, \varphi\left(\dfrac{x}{2}\right) = [2a, 2b], \ldots, supp\, \varphi\left(\dfrac{x}{n}\right) = [na, nb]$. Функції $\varphi_n(x)$ немають спільної області фінітності, тому послідовність $\varphi_n(x)$ не збігається в $D(\mathbf{R})$.

Завдання 2. *Користуючись означенням, довести що функціонали f є узагальненими функціями, якщо $\varphi(x) \in D(\mathbf{R})$:*

а) $f(\varphi) = \varphi'(0)$; *б) $f(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x)dx$.*

Розв'язання. В кожному з випадків потрібно перевірити чи є даний функціонал лінійним та неперервним. а) Перевіримо лінійність.

$$f(\alpha\varphi + \beta\psi) = (\alpha\varphi + \beta\psi)'(0) = \alpha\varphi'(0) + \beta\psi'(0).$$

Отже, функціонал f є лінійним. Перевіримо неперевність функціоналу f. Нехай $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ при $n \to \infty$ в $D(\mathbf{R})$. Функції $\varphi_n(x)$ фінітні, тобто $\exists l > 0$, що $supp\, \varphi_n(x) \in U_l$. Тут U_l – скінченний інтервал, поза яким $\varphi_n(x) = 0$.

$$(f, \varphi_n(x)) = \varphi_n'(0) \rightrightarrows \varphi'(0) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

бо $\varphi_n^{(k)}(x) \rightrightarrows \varphi^{(k)}(x) \quad \forall x \in U_l$.

$supp\, f = \{0\}$.

б) Оскільки функціонал $f(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x)dx$ задається інтегралом, то лінійність є очевидною. Нехай $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ при $n \to \infty$ в $D(\mathbf{R})$. Оскільки $\varphi_n(x)$ збігається до $\varphi(x)$ рівномірно, то справедливим є граничний перехід під знаком інтеграла:

$$\lim_{n\to\infty} f(\varphi_n) = \int_{\mathbf{R}} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)dx = f(\varphi).$$

$supp\, f = \mathbf{R}$.

Завдання 3. *Довести, що функціонал $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$, що задається формулою*

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx\right) = V.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx$$

є узагальненою функцією, де $\varphi(x) \in D(\mathbf{R})$.

Розв'язання. Лінійність очевидна:

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)(\alpha\varphi + \beta\psi) = V.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)}{x}dx = V.p. \left(\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \right.$$

$$+\beta\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(x)}{x}dx\Bigg)=\alpha\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)(\varphi)+\beta\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)(\psi).$$

Для доведення неперервності зробимо в інтегралі $\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx$ заміну x на $-x$.

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)(\varphi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{\infty}^{\varepsilon}\frac{\varphi(-x)}{x}dx+\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx.$$

Зауважимо, що $x=0$ не є особливою точкою, бо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi^{'}(x)+\varphi^{'}(x)}{1}=2\varphi^{'}(0).$$

Нехай $\varphi_n(x)\to\varphi(x)$ при $n\to\infty$ в $D(\mathbf{R})$, тоді $\varphi_n(x)\rightrightarrows\varphi(x)$. Оскільки функція $\varphi(x)$– фінітна, то інтеграл буде братись по обмеженому проміжку U_l, тому згідно рівномірної збіжності послідовності $\varphi_n(x)$, можна здійснити граничний перехід під знак інтегралу, тобто

$$f(\varphi_n)=\int_0^{\infty}\frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)}{x}\to\int_0^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}=f(\varphi)\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Отже, функціонал $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ є узагальненою функцією.

Завдання 4. *Довести, що в* $D^{'}(\mathbf{R})$:

а) $f_\varepsilon(x)=\dfrac{\varepsilon}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}\xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{}\delta(x)$; *б)* $f_\varepsilon(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}dx\xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{}\sqrt{\pi}\delta(x)$.

Розв'язання. а) Згідно означення збіжності в просторі $D^{'}(\mathbf{R})$ необхідно довести, що

$$f_\varepsilon(x)=(f_\varepsilon(x),\varphi(x))=\int_{\mathbf{R}}\frac{\varepsilon\varphi(x)}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}dx\xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{}\varphi(0),\quad\varphi(x)\in D(\mathbf{R}).$$

Функція $\varphi(x)$ є неперервною на $\mathbf{R}$ в тому числі і в точці $x=0$, тому

$$\forall\eta>0\quad\exists\delta(\eta)>0\quad\forall x\in U_R\quad |x|<\delta\quad|\varphi(x)-\varphi(0)|<\eta.$$

Таким чином,

$$\left|\int_{\mathbf{R}}\frac{\varepsilon\varphi(x)}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}dx-\int_{\mathbf{R}}\frac{\varepsilon\varphi(0)}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}dx\right|\le\int_{\mathbf{R}}\frac{\varepsilon\left|\varphi(x)-\varphi(0)\right|}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}dx\le$$

$$\le\eta\frac{\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{x}}{\pi}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}=\eta\xrightarrow[\eta\to 0]{}0.$$

Збіжність має місце.

б) Аналогічно як і у випадку а) доводимо, що

$$f_\varepsilon(x) = (f_\varepsilon(x), \varphi(x)) = \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{\frac{-x^2}{\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon}} \varphi(x)dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} \sqrt{\pi}\varphi(0), \quad \varphi(x) \in D(\mathbf{R}).$$

За рахунок неперевності $\varphi(x)$

$$\forall \eta > 0 \quad \exists \delta(\eta) > 0 \quad \forall x \in U_R \quad |x| < \delta \quad |\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta,$$

тому

$$|(f_n, \varphi) - (f, \varphi)| = \left| \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{\frac{-x^2}{\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon}} \varphi(x)dx - \sqrt{\pi}\varphi(0) \right| = \left| \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{\frac{-x^2}{\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon}} \varphi(x)dx - \right.$$

$$\left. - \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{\frac{-x^2}{\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon}} \varphi(0)dx \right| \le \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{\frac{-x^2}{\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon}} |\varphi(x) - \varphi(0)|\, dx \le \sqrt{\pi}\eta \xrightarrow[\eta\to 0]{} 0.$$

В процесі обчислень ми використали інтеграл Пуассона: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx =$ $= \sqrt{\pi}$.

Завдання 5. *Чи належать до простору $S(\mathbf{R})$ функції:*

а) e^{-x^2}; б) $\dfrac{x^5}{1+x^{10}}$.

Розв'язання Потрібно перевірити, чи належать дані функції до класу C^∞ тобто чи є нескінченну кількість разів диференційовні та чи

$$\lim_{x\to\infty} \left| x^k \varphi^{(l)}(x) \right| = 0 \ \forall k, l \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \ \varphi(x) \in D(\mathbf{R}).$$

а) Оскільки будь-яка степенева функція прямує до нуля повільніше від показникової, то $\lim\limits_{x\to\infty} x^k e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^k}{e^{x^2}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = 0$.

Знайдемо похідні функції $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) = (-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2} \cdot P_1(x);$$

$$\varphi''(x) = 4x^2 e^{-x^2} - 2e^{-x^2} = e^{-x^2} \cdot P_2(x).$$

Продовжуючи цей процес,

$$\varphi^{(l)}(x) = e^{-x^2} \cdot P_l(x),$$

де $P_l(x)$– многочген степеня l. Отже $\varphi(x) \in C^\infty$.

Знайдемо границю

$$\lim_{x\to\infty} \left| x^k \varphi^{(l)}(x) \right| = \lim_{x\to\infty} \left| x^k e^{-x^2} \cdot P_l(x) \right| = \lim_{x\to\infty} \left| \frac{P_{l+k}(x)}{e^{x^2}} \right| = 0,$$

тобто функція e^{-x^2} належить до $S(\mathbf{R})$.

б) Якщо $k = 5$, то $\lim\limits_{x\to\infty} x^k \varphi(x) \ne 0$, бо $\lim\limits_{x\to\infty} x^5 \dfrac{x^5}{1+x^{10}} = 1$. Отже, $\varphi(x) =$ $\dfrac{x^5}{1+x^{10}} \notin S(\mathbf{R})$.

Завдання 6. *Чи збігається в $S(\mathbf{R})$ послідовність:*
а) $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{n}\varphi(x)$; б) $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{n}\varphi(nx)$, $\varphi(x) \in D(\mathbf{R})$.
Розв'язання. Для послідовності $\varphi_n(x)$ потрібно перевірити, чи належить гранична функція $\varphi(x)$ до $S(\mathbf{R})$ та чи $x^k\varphi_n^{(l)} \rightrightarrows \varphi^{(l)}$ при $n \to \infty$ $\forall k, l \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.
а) Знайдемо вигляд функції $\varphi(x)$: $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\varphi(x) = 0.$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left|\frac{1}{n}\varphi(x) - 0\right| = 0.$$

Знайдемо похідні функцій $\varphi_n(x)$:

$$\varphi_n^{(l)}(x) = \frac{1}{n}\varphi^{(l)}(x), \quad l = 0, 1, 2, \dots .$$

Тепер перевіримо, чи буде $x^k\varphi_n^{(l)} \rightrightarrows \varphi^{(l)}$ при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left|x^k\varphi_n^{(l)} - \varphi^{(l)}\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left|x^k\frac{1}{n}\varphi^{(l)}(x)\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in X} \left|x^k\varphi^{(l)}(x)\right| = \lim \frac{1}{n}C_{kl} = 0.$$

Отже послідовність $\varphi_n(x)$ є збіжною до нуля в $S(\mathbf{R})$.
б) Перевіримо, чи належать простору $S(\mathbf{R})$ функції $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{n}\varphi(nx)$.

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\varphi(nx) = 0.$$

Знайдемо похідні функцій $\varphi_n(x)$:

$$\varphi_n^{'}(x) = \varphi^{'}(nx);$$

$$\varphi_n^{''}(x) = n\varphi^{''}(nx).$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left|x\varphi_n^{''}(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left|xn\varphi^{''}(nx)\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbf{R}} \left|t\varphi^{''}(t)\right| \neq 0,$$

якщо тільки $\varphi(t) \neq 0$, тому послідовність $\varphi_n(x)$ не є збіжною в $S(\mathbf{R})$.
Завдання 7.*Знайдіть похідні наступних узагальнених функцій:*
а) функції Хевісайда $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases}$ *б)* $\theta(x-a)$;

в) $f(x) = \theta(x)\cos x$; *г)*$f(x) = [x]$; *д)*$f(x) = \begin{cases} x^2, |x| \le 1; \\ 0, |x| > 1. \end{cases}$

Розв'язання а)

$$\left(\theta^{'}(x), \varphi(x)\right) = -\left(\theta(x), \varphi^{'}(x)\right) = -\int\limits_0^\infty \varphi^{'} dx = -\int\limits_0^\infty d\varphi = -\varphi(\infty) + \varphi(0) =$$

$$= \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)).$$

Отже, $\theta^{'}(x) = \delta(x)$ – функція Дірака.

б) $\theta(x-a) = \begin{cases} 1, x-a > 0; \\ 0, x-a < 0; \end{cases} = \begin{cases} 1, x > a; \\ 0, x < a. \end{cases}$

$$\left(\theta^{'}(x-a), \varphi(x)\right) = -\left(\theta(x-a), \varphi^{'}(x)\right) = -\int\limits_a^\infty d\varphi = -\varphi(\infty) + \varphi(a) =$$

$$= \varphi(a) = (\delta(x-a), \varphi(x)).$$

Отже, $\theta^{'}(x-a) = \delta(x-a)$.

в)

$$\left((\theta(x)\cos x)^{'}, \varphi(x)\right) = -\int\limits_0^\infty \cos x d\varphi = -\cos x\varphi(x)|_0^\infty +$$

$$+\int\limits_0^\infty \varphi(x)(-\sin x)dx = \varphi(a) = (\delta(x), \varphi(x)) - (\theta(x)\sin x, \varphi(x)).$$

Отже, $(\theta(x)\cos x)^{'} = -\theta(x)\sin x + \delta(x)$.

г)

$$\left([x]^{'}, \varphi(x)\right) = -\left([x], \varphi^{'}(x)\right) = -\int\limits_0^1 0 d\varphi - \int\limits_1^2 1 d\varphi - \int\limits_2^3 2 d\varphi - \ldots - \int\limits_k^{k+1} k d\varphi + \ldots +$$

$$+\int\limits_{-1}^0 1 d\varphi + \int\limits_{-2}^{-1} 2 d\varphi + \int\limits_{-3}^{-2} 3 d\varphi + \ldots + \int\limits_{-k}^{-k+1} k d\varphi + \ldots =$$

$$= -\varphi(2) + \varphi(1) - 2\varphi(3) + 2\varphi(2) + \ldots - k\varphi(k+1) + k\varphi(k) + \ldots +$$

$$+\varphi(0) - \varphi(-1) + 2\varphi(-1) - 2\varphi(-2) + 3\varphi(-2) - 3\varphi(-3) + \ldots + k\varphi(-k+1) -$$

$$- k\varphi(-k) + \ldots = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \delta(x-k).$$

д)

$$\Big(f^{'}(x), \varphi(x)\Big) = -\Big(f(x), \varphi^{'}(x)\Big) = -\int\limits_{-1}^{1} x^2 d\varphi = -x^2\varphi(x)\Big|_{-1}^{1} +$$

$$+\int\limits_{-1}^{1} 2x\varphi(x)dx = -\varphi(1) + \varphi(-1) + \int\limits_{-1}^{1} 2x\varphi(x)dx =$$

$$= -\left(\delta(x-1), \varphi(x)\right) + \left(\delta(x+1), \varphi(x)\right) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(1-|x|)\cdot 2x\varphi(x)dx,$$

де

$$\theta(1-|x|) = \begin{cases} 1, |x| < 1; \\ 0, |x| > 1. \end{cases}$$

Отже, $f^{'}(x) = \delta(x+1) - \delta(x-1) + 2x\theta(1-|x|)$.

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *Нехай* φ *ненульова функція з* $D(\mathbf{R})$. *Чи збігається в* $D(\mathbf{R})$ *послідовність:*

1.	$\varphi_n(x) = \varphi(x+n)$;	2.	$\varphi_n(x) = \dfrac{1}{n!}\varphi(nx)$;
3.	$\varphi_n(x) = \dfrac{1}{n}\varphi(e^{-nx})$;	4.	$\varphi_n(x) = \dfrac{1}{n^2}\varphi(\sqrt{n}+x)$;
5.	$\varphi_n(x) = \varphi(x^{2n})$;	6.	$\varphi_n(x) = \dfrac{1}{n^n}\varphi(nx)$;
7.	$\varphi_n(x) = \dfrac{1}{n}\varphi(x+1)$;	8.	$\varphi_n(x) = \dfrac{1}{2^n}\varphi\left(\dfrac{x}{2}\right)$;
9.	$\varphi_n(x) = \dfrac{1}{2^n}\varphi\left(2^n x\right)$;	10.	$\varphi_n(x) = \dfrac{1}{2^n}\varphi\left(x-n\right)$.

Завдання 2. *Користуючись означенням довести, що такі функціонали є узагальненими функціями. Знайти* $\operatorname{supp} f$:

1.	$f(\varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}} x\varphi(x)dx$;	2.	$f(\varphi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$;
3.	$f(\varphi) = \int\limits_{-1}^{1} \lvert x\rvert\varphi^{'}(x)dx$;	4.	$f(\varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}} \lvert x\rvert\varphi(x)dx$;
5.	$f(\varphi) = \int\limits_{1}^{3} x\varphi^{''}(x)dx + \varphi(0)$;	6.	$f(\varphi) = \int\limits_{0}^{2\pi} \sin x\varphi(x)dx + \varphi(1)$;

7. $f(\varphi) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x)dx + \varphi(1)$; 8. $f(\varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}} x^2\varphi(x)dx$;

9. $f(\varphi) = \varphi(-1) + \varphi(1)$; 10. $f(\varphi) = \varphi''(0)$.

Завдання 3. *Знайти похідні перших двох порядків наступних узагальнених функцій:*

1. $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, x \geq \pi; \\ 0, x < \pi; \end{cases}$ 2. $f(x) = \begin{cases} 0, x \leq -1; \\ (x-2)^2, x > -1; \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \cos x, x \geq 0; \\ 0, x < 0; \end{cases}$ 4. $f(x) = \begin{cases} \sin x, |x| \leq \pi; \\ 0, |x| > \pi; \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \sin x, x \geq 0; \\ 0, x < 0; \end{cases}$ 6. $f(x) = \begin{cases} 1, x \leq 0; \\ x+1, 0 \leq x \leq 1; \\ x^2+1, x \geq 1; \end{cases}$

7. $f(x) = \theta(x)e^{2x}$; 8. $f(x) = \theta(x)(2x+3)$;

9. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$; 10. $f(x) = x|x|$.

Література

1. *Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. – Минск: Вышэйш. шк., 1978. – 205 с.
2. *Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г.* Функциональный анализ. – К: Выща школа, 1990. – 600 с.
3. *Боярищева Т.В.* Методичні вказівки до лабораторних занять з курсу функціонального аналізу. Частина 2. Метричні простори. Стискаючі відображення. – Ужгород: 2008. – 50 с.
4. *Боярищева Т.В.* Методичні вказівки до лабораторних занять з курсу функціонального аналізу. Частина 3. Лінійні нормовані простори. Гільбертові простори. – Ужгород: 2011. – 32 с.
5. *Боярищева Т.В.* Методичні вказівки до лабораторних занять з курсу функціонального аналізу. Частина 4. Лінійні неперервні оператори і функціонали. – Ужгород: 2011. – 24 с.
6. *Боярищева Т.В., Гудивок Т.В.* Методичні вказівки до лабораторних занять з курсу функціонального аналізу. Частина 5. Спряжені і компактні оператори. Власні значення і власні вектори оператора. Спектр і резольвента. – Ужгород: 2011. – 24 с.
7. *Васильева А.Б., Тихонов Н.А.* Интегральные уравнения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 157 с.
8. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. – М.: Высш. школа, 1982. – 274 с.
9. *Виленкин Н.Я., Горин Е.А., Костюченко А.Г.* Функциональный анализ. – М: Наука, 1964. – 424 с.
10. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. – М: Наука, 1979. – 320 с.
11. *Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П.* Методы решения задач по функциональному анализу – К: Выща школа, 1990. – 479 с.
12. *Городній М.Ф., Константінов О.Ю., Нестеренко О.Н., Чайковський А. В.* Навчальні завдання до практичних занять з функціонального аналізу. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2006. – 103с.
13. *Гуревич А.П., Корнев В.В., Хромов А.П.* Сборник задач по функциональному анализу. Изд. 2-рое, испр. – М: Лань, 2012. – 192 с.
14. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ – М: Наука, 1977. – 741 с.

15. *Кириллов А.А., Гвишиани А.Д.* Теоремы и задачи функционального анализа – М: Наука, 1979. – 381 с.
16. *Колмогоров А.М., Фомін С.В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу – К: Вища школа, 1974. – 456 с.
17. *Константінов О.Ю., Кукуш О.Г., Мішура Ю.С., Нестеренко О.Н., Чайковський А. В.* Збірник задач з функціонального аналізу. Компактні оператори. Інтегральні рівняння. Узагальнені функції – К.: ВПЦ «Київський університет», 2005. — 126 с.
18. *Константінов О.Ю., Мішура Ю.С., Нестеренко О.Н., Чайковський А.В.* Збірник задач з функціонального аналізу. Частина I. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2004. — 123 с.
19. *Моца А.І., Наконечна Г.А.* Функціональний аналіз та інтегральні рівняння. Методичні вказівки для студентів математичного факультету стаціонарної та заочної форми навчання. Частина 1. – Уж.:«Патент», 2001. – 48 с.
20. *Очан Ю.С.* Сборник задач по математическому анализу. – М: Просвещение, 1981. – 272 с.
21. *Полянин А.Д., Манжиров А.В.* Справочник по интегральным уравнениям. – М.: "Факториал Пресс", 2000. – 384 с.
22. *Рудин У.* Функциональный анализ. – М: Мир, 1975. – 443 с.
23. *Соболева Т.С.* Задачи по функциональному анализу. – М: МИНХ, 1984. – 256 с.
24. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М: Наука, 1980. – 495 с.
25. *Треногин В.А. Писаревский Б.М., Соболева Т.С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М: Наука, 1984. – 256 с.

Боярищева Тетяна Валеріївна – кандидат фіз.-мат. наук
Герич Мирослава Сергіївна – кандидат фіз.-мат. наук
Погоріляк Олександр Олександрович – кандидат фіз.-мат. наук
Синявська Ольга Олександрівна – кандидат фіз.-мат. наук
Сливка-Тилищак Ганна Іванівна – доктор фіз.-мат. наук
Слюсарчук Петро Володимирович – кандидат фіз.-мат. наук
Тегза Антоніна Михайлівна – кандидат фіз.-мат. наук

ТЕОРІЯ МІРИ Й ІНТЕГРАЛУ ЛЕБЕГА. ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник для студентів математичних, технічних та фізичних спеціальностей