УДК 519.21

Ю. Ю. Млавець (Ужгородський національний університет)

УМОВА "H" ДЛЯ ПРОСТОРІВ ОРЛІЧА ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

The conditions under which for Orlicz spaces of exponential type the condition **H** is carried out are found.

Знаходяться умови при яких для просторів Орліча експоненціального типу виконується умова **H**.

Вступ. Ю. В. Козаченко та Є. І. Островський в роботі [1] ввели поняття банахових просторів типу субгауссових, а саме просторів $Sub_{\varphi}(\Omega)$ випадкових величин та процесів, які є узагальненнями просторів субгауссових випадкових величин [2]. Простори φ-субгауссових випадкових величин – це простори центрованих випадкових величин із певним ростом експоненціальних моментів. Властивості таких просторів, оцінки та умови збіжності сум незалежних випадкових величин із цих просторів, коли процес визначений на просторі з псевдометрикою, породженою цим процесом, розглянуті в монографії В. В. Булдигіна та Ю. В. Козаченка [3]. Властивості φ-субгауссових просторів вивчалися також у роботі А. Р. Джуліано, Ю. В. Козаченка та Т. Нікітіної [4].

Ширшим класом випадкових величин, ніж гауссові, є φ-субгауссові та передгауссові випадкові величини з просторів Орліча. У монографії В. В. Булдигіна та Ю. В. Козаченка [3] викладена теорія просторів Орліча випадкових величин та теорія випадкових процесів з просторів Орліча випадкових величин. Простори Орліча експоненціального типу досліджувалися при розв'язанні різних задач теорії випадкових процесів, зокрема в роботі Є. І. Островського [5].

В даній роботі знаходяться умови при яких для просторів Орліча експоненціального типу виконується умова **H**.

Означення 1 (див. [3]). *Неперервна парна опукла функція $U = \{U(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається C-функцією, якщо $U(x)$ монотонно зростає при $x > 0$ і $U(0) = 0$.*

Означення 2 (див. [3]). *Нехай U – довільна C-функція. Простором Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$ називається сім'я випадкових величин, якщо для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа $r_\xi > 0$, що*

$$EU\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty.$$

Простір Орліча – це простір Банаха з нормою

$$\|\xi\|_U = \inf\left\{r > 0 : EU\left(\frac{\xi}{r}\right) \leq 1\right\},$$

яка називається нормою Люксембурга.

Означення 3 (див. [3]). *Скажемо, що C-функція U задовольняє g-умову, якщо існують константи $z_0 \geq 0$, $K > 0$ і $A > 0$ такі, що при $x \geq z_0$, $y \geq z_0$ має місце нерівність:*

$$U(x)U(y) \leq AU(Kxy).$$

Означення 4 (див. [3]). *C-функція Орліча $U=\{U(x),\ x\in\mathbb{R}\}$ називається N-функцією Орліча (N-функція), якщо виконуються такі умови:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{U(x)}{x}=0;\ \lim_{x\to 0}\frac{U(x)}{x}=\infty.$$

Означення 5 (див. [3]). *Нехай $\varphi=\{\varphi(x),\ x\in\mathbb{R}\}$ – N-функція. Функція φ^*, яка визначається умовою*

$$\varphi^*(x)=\sup_{y\in\mathbb{R}}(xy-\varphi(y))$$

називається перетворенням Юнга-Фенхеля відносно φ.

Означення 6 (див. [6]). *Для простору Орліча $L_U(\Omega)$ виконується умова* **H**, *якщо для будь-яких центрованих незалежних випадкових величин $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ із простору $L_U(\Omega)$ має місце нерівність:*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right\|_U^2\le C_U\sum_{k=1}^{n}\|\xi_k\|_U^2,$$

де C_U – деяка абсолютна константа.

Приклади просторів Орліча, для яких виконується умова **H** [6]:

- простори $L_p(\Omega), p\ge 2$, де $C_U=C_p=\sqrt{2}\left(\Gamma(p+1)/2\sqrt{\pi}\right)^{1/p}$;
- простори $L_U(\Omega)$, де $U(x)$ такі C-функції, що існують $p>q\ge 2$, для яких $U\left(\sqrt[q]{x}\right)$ – опукла, а $U\left(\sqrt[p]{x}\right)$– увігнута і $C_U=2B_p$, де $B_p=2k^{\frac{1}{2}}$, а $2k$ – найменше парне число, не менше, ніж p;
- простори Орліча породжені C-функцією $U(x)=exp\left\{|x|^{\alpha}\right\}-1$, де $1\le\alpha\le 2$. При $\alpha\ge 2$ для цих просторів умова **H** не виконується.

Означення 7 (див. [3]). *Нехай ψ – довільна N-функція. Простір Орліча породжений N-функцією*

$$U(x)=\exp\{\psi(x)\}-1,\ x\in\mathbb{R}$$

називається простором Орліча експоненціального типу.

Позначимо цей простір $Exp_\psi(\Omega)$, а норму $\|\cdot\|_{U(\psi)}$.

Означення 8 (див. [4]). *Скажемо, що для N-функції ψ виконується умова Q, якщо*

$$\liminf_{x\to 0}\frac{\psi(x)}{x^2}=C>0,$$

де C може дорівнювати $+\infty$.

Прикладами N-функції, для яких виконується умова Q, є такі:

1) $\psi(x)=C|x|^{\alpha},\ C>0,\ 1<\alpha\le 2;$

2) $\psi(x) = \begin{cases} C\,|x|^2\,, & |x| \le 1, \\ C\,|x|^\alpha\,, & |x| > 1,\ \alpha > 2. \end{cases}$

Означення 9 (див. [4]). *Нехай φ – N-функція, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $Sub_\varphi(\Omega)$ (φ-субгауссова), якщо $E\xi = 0$, $E\exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує константа $a > 0$ така, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується наступна нерівність:*

$$E\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\{\varphi(\lambda a)\}.$$

У роботах [1, 4] доведено, що простір $Sub_\varphi(\Omega)$ є простором Банаха відносно норми

$$\tau_\varphi(\xi) = \inf\left(a \ge 0 \colon E\exp\lambda\xi \le \exp\{\varphi(\lambda a)\},\ \lambda \in \mathbb{R}\right).$$

Нехай $L_U(\Omega)$ – простір Орліча експоненціального типу, породжений N - функцією $U(x) = \exp\{\psi(x)\} - 1$, де $\psi(x)$ така N-функція, що для N-функції $\psi^*(x)$ виконується умова Q.

Приклад 1. *Якщо $\psi(x) = C\,|x|^\alpha$, $\alpha \ge 2$, тоді $\psi^*(x) = C_\beta\,|x|^\beta$, де $C_\beta = \frac{\alpha-1}{\alpha}\left(\frac{1}{C\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, $\beta > 1$ таке число, що $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Причому, коли $C = \frac{1}{\alpha}$, тоді $C_\beta = \frac{1}{\beta}$.*

Розглянемо простір Орліча експоненціального типу $L_U(\Omega)$, де $U(x) = \exp\{\psi(x)\} - 1$, такий що для $\psi^*(x)$ виконується умова Q, а також простір $Sub_{\psi^*}(\Omega)$.

Теорема 1 (див. [4]). *Для того, щоб випадкова величина ξ, $E\xi = 0$, належала простору $Exp_\psi(\Omega)$, необхідно й достатньо, щоб ξ належала простору $Sub_{\psi^*}(\Omega)$, причому норми $\|\xi\|_{U(\psi)}$ та $\tau_{\psi^*}(\xi)$ еквівалентні, тобто справджуються нерівності*

$$\|\xi\|_{U(\psi)} \le 3\tau_{\psi^*}(\xi),$$

$$\tau_{\psi^*}(\xi) \le R_\psi\,\|\xi\|_{U(\psi)},$$

де $R_\psi = S_{\psi^*} e^{\frac{49}{48}}$, $S_{\psi^*} = \max\limits_{i=\overline{1,3}} \gamma_i^{-1}$, а $\gamma_i = \gamma_i(\lambda_0)$ визначаються у такий спосіб: γ_1 – корінь рівняння $\gamma = \lambda_0\sqrt{c_0(1-\gamma)}$, де $\lambda_0 > 0$, $c_0 = \inf\limits_{0<|\lambda|\le\lambda_0} \frac{\psi^*(\lambda)}{\lambda^2}$, γ_2 корінь рівняння $\gamma^3 - 2(1-\gamma) = 0$, γ_3 – корінь рівняння $\gamma = \psi^{*(-1)}(2)\sqrt{c_0(1-\gamma)}$.

Приклад 2. *Якщо функція $\psi^*(x) = \frac{|x|^\beta}{\beta}$, де $1 < \beta \le 2$, тоді з теореми 1 маємо, що $c_0 = \frac{1}{\beta}\,|\lambda_0|^{\beta-2}$ і $\gamma_1 = \lambda_0^{\frac{\beta}{2}} \frac{1}{\sqrt{\beta}}\sqrt{1-\gamma}$, $\gamma_2 = 0,770917$, $\gamma_3 = 2^{\frac{1}{\beta}} \beta^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{2}} \lambda_0^{\frac{\beta}{2}-1}\sqrt{1-\gamma}$. Вибиремо λ_0 таке, щоб $\gamma_1 > \gamma_2$ і $\gamma_3 > \gamma_2$, тоді $S_{\psi^*} = \frac{1}{\gamma_2} = 1,2972$.*

Теорема 2 (див. [4]). *Нехай простір $Sub_{\psi^*}(\Omega)$ такий, що функція $\psi^*(\sqrt{x})$, $x > 0$ опукла і $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – незалежні центровані випадкові величини з простору $Sub_{\psi^*}(\Omega)$, тоді має місце нерівність:*

$$\tau^2_{\psi^*}\Big(\sum_{k=1}^n \xi_k\Big) \le \sum_{k=1}^n \tau^2_{\psi^*}(\xi_k).$$

З теорем 1-2 випливає, що має місце така теорема.

Теорема 3. *Нехай $Exp_{\psi}(\Omega)$ такий простір, що функція $\psi^*(\sqrt{x})$, $x > 0$, опукла і $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ – незалежні центровані випадкові величини з цього простору. Тоді справджується нерівність*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right\|^2_{U(\psi)} \leq 9R^2_{\psi}\sum_{k=1}^{n}\|\xi_k\|^2_{U(\psi)},$$

тобто для цього простору виконується умова **H** *з константою $9R^2_{\psi}$, де R_{ψ} визначена в теоремі 1.*

Доведення. Згідно теорем 1 і 2 маємо, що

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right\|^2_{U(\psi)} \leq 9\tau^2_{\psi^*}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) \leq 9\sum_{k=1}^{n}\tau^2_{\psi^*}(\xi_k) \leq 9R^2_{\psi}\sum_{k=1}^{n}\|\xi_k\|^2_{U(\psi)}.$$

Таким чином, твердження теореми доведено.

Теорема 3 має місце для просторів Орліча $Exp_{\psi}(\Omega)$, коли

$$\psi^*(x) = \begin{cases} \frac{|x|^2}{\alpha}, \ |x| \leq 1; \\ \frac{|x|^{\alpha}}{\alpha}, \ |x| > 1, \ \alpha > 2, \end{cases} \tag{1}$$

оскільки

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\beta|x|^2}{4(\beta-1)}, \ x \leq 2\left(1-\frac{1}{\beta}\right); \\ |x| - \left(1-\frac{1}{\beta}\right), \ 2\left(1-\frac{1}{\beta}\right) < x < 1; \\ \frac{|x|^{\beta}}{\beta}, \ x \geq 1, \end{cases} \tag{2}$$

де $\beta > 1$ таке число, що $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

Зауважимо, що при $\alpha \geq 2$ маємо $1 < \beta \leq 2$.

Означення 10 (див. [3]). *Нехай $f_1 = (f_1(x), x \in \mathbf{R})$ і $f_2 = (f_2(x), x \in \mathbf{R})$ парні дійсні функції. Будемо говорити, що f_1 підпорядкована f_2 ($f_1 \prec f_2$), якщо існують сталі $x_0 \geq 0$ і $k > 0$, такі, що для всіх $x \geq x_0$*

$$f_1(x) \leq f_2(kx).$$

Означення 11 (див. [3]). *Нехай $f_1 = (f_1(x), x \in \mathbf{R})$ і $f_2 = (f_2(x), x \in \mathbf{R})$ парні дійсні функції. Якщо $f_1 \prec f_2$ і $f_2 \prec f_1$, тоді будемо говорити, що функції f_1 і f_2 еквівалентні ($f_1 \sim f_2$).*

Теорема 4. *Нехай $Exp_{\widetilde{\psi}}(\Omega)$ такий простір, де $\widetilde{\psi}(x) = C|x|^{\beta}$, $1 < \beta \leq 2$ і $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – незалежні центровані випадкові величини з цього простору. Тоді справджується нерівність*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right\|^2_{U(\psi)} \leq 9R^2_{\psi}\left(1+e^{\frac{1}{\beta}}\right)^4\sum_{k=1}^{n}\|\xi_k\|^2_{U(\psi)},$$

тобто для цього простору виконується умова **H** *з константою $9R^2_{\psi}\left(1+e^{\frac{1}{\beta}}\right)^4$, де R_{ψ} визначена в теоремі 1.*

Доведення. Очевидно, що функція $\widetilde{\psi}(x) = C\,|x|^{\beta}$ еквівалентна функції (2). Отже, простори $Exp_{\psi}(\Omega)$ та $Exp_{\widetilde{\psi}}(\Omega)$ містять одні й ті ж елементи і їх норми – еквівалентні. Дійсно, нехай ξ належить простору $Exp_{\widetilde{\psi}}(\Omega)$. Для простоти покладемо $C = \frac{1}{\beta}$, тобто $\widetilde{\psi}(x) = \frac{|x|^{\beta}}{\beta}$. Отже, $\widetilde{\psi}(x) = \psi(x)$ при $|x| \geq 1$. При $r > 0$ маємо

$$E\exp\left\{\psi\left(\frac{|\xi|}{r}\right)\right\} - 1 = E\,\mathbb{I}\left\{\frac{|\xi|}{r} \leq 1\right\}\exp\left\{\psi\left(\frac{|\xi|}{r}\right)\right\} +$$
$$+ E\,\mathbb{I}\left\{\frac{|\xi|}{r} > 1\right\}\exp\left\{\psi\left(\frac{|\xi|}{r}\right)\right\} - 1 \leq \exp\{\psi(1)\} +$$
$$+ E\,\mathbb{I}\left\{\frac{|\xi|}{r} > 1\right\}\exp\left\{\widetilde{\psi}\left(\frac{|\xi|}{r}\right)\right\} - 1 \leq e^{\frac{1}{\beta}} + E\exp\left\{\widetilde{\psi}\left(\frac{|\xi|}{r}\right)\right\} - 1.$$

Якщо покласти $r = \|\xi\|_{U(\widetilde{\psi})}$, тоді отримаємо, що $E\exp\left\{\psi\left(\frac{|\xi|}{\|\xi\|_{U(\widetilde{\psi})}}\right)\right\} - 1 \leq e^{\frac{1}{\beta}} + 1$. Отже, $\|\xi\|_{U(\psi)} \leq \|\xi\|_{U(\widetilde{\psi})}\left(1 + e^{\frac{1}{\beta}}\right)$.

Аналогічно дістанемо, що

$$\|\xi\|_{U(\widetilde{\psi})} \leq \|\xi\|_{U(\psi)}\left(1 + e^{\frac{1}{\beta}}\right).$$

З теореми 3 випливає, що

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right\|^2_{U(\widetilde{\psi})} \leq \left(1 + e^{\frac{1}{\beta}}\right)^2\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right\|^2_{U(\psi)} \leq$$
$$\leq 9R_{\psi}^2\left(1 + e^{\frac{1}{\beta}}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\|\xi_k\|^2_{U(\psi)} \leq 9R_{\psi}^2\left(1 + e^{\frac{1}{\beta}}\right)^4\sum_{k=1}^{n}\|\xi_k\|^2_{U(\widetilde{\psi})}.$$

Тобто, для простору $Exp_{\widetilde{\psi}}(\Omega)$ виконується умова **H** з константою $C_{\widetilde{\psi}} = 9R_{\psi}^2\left(1 + e^{\frac{1}{\beta}}\right)^4$.

Висновки. В роботі на основі властивостей просторів Орліча експоненціального типу знайдені достатні умови за яких для цих просторів виконується умова **H**. Ці результати можна використати для підрахунку методом Монте-Карло кратних інтегралів із заданою точністю і надійністю.

1. *Козаченко Ю. В., Островский Е. И.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских // Теория вероятн. и матем. статист. – 1985. – Т. 32.– С. 42–53.
2. *Kahane J. P.* Propriétés locales des fonctions à series de Fouries aléatories // Studia Math. – 1960. – Vol. 19, no. 1.– P. 1–25.
3. *V. V. Buldygin and Yu. V. Kozachenko* Metric Characterization of Random Variables and Random Processes, AMS, Providence, RI, 2000.
4. *R. Giuliani Antonini, Yu. V. Kozachenko, T. Nikitina* Spaces of φ-subgaussian random variables // Rediconti Accademia Nazionale dell Scienze detta dei XL, Memorie di Matimatica e Applicazioni. – 2003. – no. 121. – P. 95–124.
5. *Островский Е. И.* Обобщение нормы Булдыгина-Козаченко и центральная предельная теорема в банаховых пространствах // Теория вероятн. и ее применен. – 1982. – Т. 27, № 3.– С. 618–623.
6. *Yu. V. Kozachenko and Yu. Yu. Mlavets* Probability of large deviations of sums of random processes from Orlicz space // Monte Carlo Methods Appl. – 2011. – Vol. 17. – P. 155–168.

Одержано 14.10.2014