УДК 517.3

В. Я. Рибак, Ю. Ю. Рубіш, Ю. М. Сегеда (Ужгородський нац. ун-т)

УЗАГАЛЬНЕННЯ ЧИСЕЛ СТІРЛІНГА ПЕРШОГО РОДУ

By means of fractional integrodifferentiation the discrete Stirlings' function of first kind is generalized to continuous one.

Дискретна функція Стірлінга першого роду за допомогою апарату дробового інтегро-диференціювання узагальнюється до неперервної функції.

Раніше ми вже звертались до узагальнення математичних понять методами дробового інтегро-диференціювання [1–4]. Зараз пропонується узагальнення чисел Стірлінга першого роду. Метою роботи є популяризація основ та можливостей дробового інтегро-диференціювання.

Числа Стірлінга першого роду $|S_n^{(m)}|$ означують як число перестановок із n символів, які мають точно m циклів [5]. Генератрисою для них виступає $\ln(1+x)$, а саме:

$$(\ln(1+x))^m = m! \sum_{i=0}^{\infty} S_{m+i}^{(m)} \frac{x^{m+i}}{(m+i)!}, \ |x| < 1, \ n, m \in N. \tag{1}$$

Знайдемо рекурентну формулу для обчислення послідовніих чисел на основі (1). Для цього логарифмуємо вираз (1), а потім беремо від нього похідну першого порядку.

$$m \sum_{i=0}^{\infty} S_{m+i}^{(m)} \frac{x^{m+i}}{(m+i)!} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x) \sum_{i=0}^{\infty} (m+i) S_{m+i}^{(m)} \frac{x^{m+i}}{(m+i)!}. \tag{2}$$

Виконуємо множення у правій частині (2), розгортаючи у ряд $\ln(1+x)$.

$$m \sum_{i=0}^{\infty} S_{m+i}^{(m)} \frac{x^{m+i}}{(m+i)!} = \sum_{i=0}^{\infty} (m+i) S_{m+i}^{(m)} \frac{x^{m+i}}{(m+i)!} + \sum_{k=1}^{\infty} x^{m+k} \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j(j+1)} \frac{S_{m+k-j}^{(m)}}{\Gamma(m+k-j)}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, знаходимо:

$$\frac{S_{m+n}^{(m)}}{(m+n)!} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{j(j+1)} \frac{S_{m+n-j}^{(m)}}{\Gamma(m+n-j)}, \ m \in R, \ n \in N. \tag{3}$$

Формула (3) дозволяє послідовно обчислювати $S_{m+n}^{(m)}$. Наприклад, для $n = 1, 2, 3, 4$ отримуємо.

$$S_m^{(m)} = 1; \ S_{m+1}^{(m)} = -\frac{\Gamma(m+2)m}{\Gamma(m+1)2}; \ S_{m+2}^{(m)} = \frac{\Gamma(m+3)}{\Gamma(m+1)} \frac{m^2 + 5/3m}{2!2^2};$$

$$S_{m+3}^{(m)} = \frac{\Gamma(m+4)}{\Gamma(m+1)} \frac{m^3 + 5m^2 + 6m}{3!2^3};$$

$$S_{m+4}^{(m)} = \frac{\Gamma(m+5)}{\Gamma(m+1)} \frac{m^4 + 10m^3 + 97/3m^2 + 502/15m}{4!2^4}.$$

Узагальнюємо (3) до виразу, який дозволяє обчислювати $S_{m+n}^{(m)}$ за табульованими значеннями чисел Стірлінга $S_{n+i}^{(i)}$.

$$S_{m+n}^{(m)} = \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(m+1)} \sum_{i=0}^{n} i! \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-m \\ n-i \end{pmatrix} \frac{S_{n+i}^{(i)}}{(n+i)!}, \; m \in R, \; n \in N. \tag{4}$$

До джерел чисел Стірлінга можна підійти також з іншого боку.

Нехай задана функція $y = y(x)$. Візьмемо від неї похідну D^r дробового порядку, $r \in R$, за правилом Лейбніца.

$$D^r y = y \frac{x^{-r}}{\Gamma(1-r)} + \binom{r}{1} y' \frac{x^{1-r}}{\Gamma(2-r)} + \binom{r}{2} y'' \frac{x^{2-r}}{\Gamma(3-r)} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d^i y}{dx^i} \binom{r}{i} \frac{x^{i-r}}{\Gamma(1+i-r)}. \tag{5}$$

В останньому виразі переходимо до нової незалежної змінної $z = \ln x$.

$$\begin{aligned} & y' = \tfrac{dy}{dx} = \tfrac{dy}{dz}\tfrac{dz}{dx} = \tfrac{1}{x}\tfrac{dy}{dz}; \; \tfrac{d^2y}{dx^2} = e^{-2z}\left(\tfrac{d^2y}{dz^2} - \tfrac{dy}{dz}\right); \\ & \tfrac{d^3y}{dx^3} = e^{-3z}\left(\tfrac{d^3y}{dz^3} - 3\tfrac{d^2y}{dz^2} + 2\tfrac{dy}{dz}\right) = e^{-3z}\left(S_3^{d(3)}\tfrac{d^3y}{dz^3} + S_3^{(2)}\tfrac{d^2y}{dz^2} + S_3^{(1)}\tfrac{dy}{dz}\right); \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \tfrac{d^my}{dx^m}\Big|_{x=e^z} = e^{-mz}\sum_{k=0}^{m} S_m^{(k)}\tfrac{d^ky}{dz^k}. \end{aligned} \tag{6}$$

Остаточно маємо:

$$D^r y(x)\Big|_{x=e^z} = e^{-rz} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{r}{i} \frac{1}{\Gamma(1+i-r)} \sum_{k=0}^{i} S_i^{(k)} \frac{d^k y}{dz^k}. \tag{7}$$

У цьому прикладі похідна дробового порядку виступає генеруючою функцією для чисел Стірлінга першого роду.

Формулу (6) можна подати і так:

$$D^m y(x)\Big|_{x=e^z} = e^{-mz} \sum_{i=0}^{\infty} S_m^{(k)} D^k y(z), \tag{8}$$

тому що $S_m^{(k)} = 0$ при $k > m$ $(k, m \in N)$. Але при такому записі (8) дає можливість продовжити m до дійсного числа. Переходимо від m до $r \in R$ у (8).

$$D^r y(x)\Big|_{x=e^z} = e^{-rz} \sum_{i=0}^{\infty} S_r^{(k)} D^k y(z). \tag{9}$$

Повернемося знову до виразу (7). Групуємо тут члени при однакових порядках похідних $D^k y(z)$.

$$D^r y(x)\Big|_{x=e^z} = e^{-rz} \sum_{i=0}^{\infty} D^i y(z) \sum_{j=0}^{\infty} \begin{pmatrix} r \\ i+j \end{pmatrix} \frac{S_{i+j}^{(i)}}{\Gamma(1-r+i+j)}. \tag{10}$$

Із порівняння (9) та (10) випливає

$$S_r^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{r}{n+i} \frac{S_{n+i}^{(n)}}{\Gamma(1-r+n+i)},\ n \in N. \tag{11}$$

Нескладний аналіз показує, що формула (11) може бути поширена на дійсні верхні індекси: $n \to p \in R$, оскільки при такому переході (11) зберігає закладений зміст.

$$S_r^{(p)} = \Gamma(r+1) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1-p+r-i)\Gamma(1+p-r+i)} \frac{S_{p+i}^{(p)}}{\Gamma(1+p+i)}. \tag{12}$$

Розкриваємо $S_{p+i}^{(p)}$ за допомогою (4) і остаточно отримуємо:

$$S_r^{(p)} = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+1)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1-p+r-i)\Gamma(1+p-r+i)} \cdot \sum_{j=0}^{i} j! \binom{p}{j} \binom{i-p}{i-j} \frac{S_{i+j}^{(j)}}{(i+j)!} =$$

$$= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+1)} \frac{\sin \pi(p-r)}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{p-r+i} \cdot \sum_{j=0}^{i} j! \binom{p}{j} \binom{i-p}{i-j} \frac{S_{i+j}^{(j)}}{(i+j)!}, r \neq -1, -2, -3, ... \tag{13}$$

Графік функції $S(r, x) = S_r^{(x)}$ показано на рис. 1. Побудову зроблено за формулою (13).

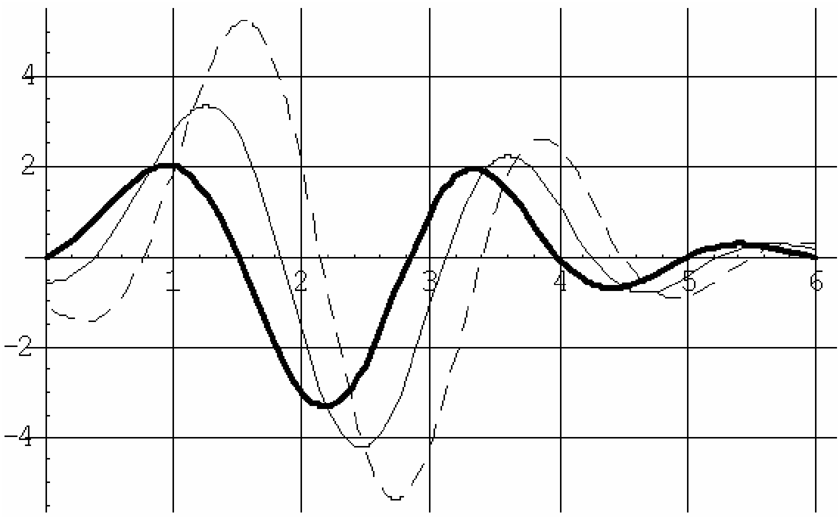

Рис. 1. Графік залежності $S_r^{(x)}$: $r = 3,0$ – суцільна жирна крива; $r = 3,25$ – суцільна тонка крива; $r = 3,5$ – пунктирна крива.

На завершення відзначимо основні властивості $S_r^{(p)}$, які випливають із (13).

1. $S_r^{(r+1)} = S_r^{(r+2)} = \ldots = 0$.

2. $\lim\limits_{p \to \infty} S_r^{(p)} = 0$.

3. Функція $S_r^{(p)}$ на додатній півосі знакозмінна і має нескінченну кількість нулів у точках $p = r + n$.

4. Для $S_r^{(p)}$ справедливе головне рекурентне співвідношення:

$$S_{r+n+1}^{(r)} = S_{r+n}^{(r-1)} - (r+n)S_{r+n}^{(r)},\ r \in R; n \in N.$$

Список використаної літератури

1. *Рибак В. Я., Король І. Ю., Рубіш Ю. Ю.* Узагальнення функцій Бесселя // Зб. "Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій". – Львів: Каменяр, 1998. – С. 186–192.
2. *Рибак В. Я.* Про узагальнення чисел Стірлінга другого роду // Наук. вісник Ужгор. ун-ту. Сер. Матем. і інформ. – Ужгород: УжНУ, 2002. – Вип. 7. – С. 90–95.
3. *Рибак В. Я.* Перетворення диференціальних рівнянь за допомогою операторів дробового інтегро-диференціювання // Наук. вісник Ужгор. ун-ту. Сер. Матем. і інформ. – Ужгород: УжНУ, 2006. – Вип. 12. – С. 103–108.
4. *Рибак В. Я., Король І. Ю., Рубіш Ю. Ю.* Про один клас алгебраїчних кривих // Наук. вісник Ужгор. ун-ту. Сер. Матем. і інформ. – Ужгород: УжНУ, 2010. – Вип. 21. – С. 119–122.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1967.– Т. 3. – 299 с.

Одержано 10.05.2015