МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІНЖЕНЕРНО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КОМП’ЮТЕРНИХ СИСТЕМ ТА МЕРЕЖ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ
ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ З КУРСУ

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

ОСНОВНІ РОЗДІЛИ

для студентів 1-го курсу інженерно-технічного факультету,
напряму підготовки «Комп’ютерна інженерія». Частина 2.

Ужгород – 2019

Методичні вказівки і завдання до лабораторних робіт з курсу «Математичний аналіз». Основні розділи для студентів 1-го курсу інженерно-технічного факультету, напряму підготовки «Комп'ютерна інженерія». Частина 2.

Укладачі: Горват П.П., канд. фіз.-м. н., доц,, зав. кафедри комп'ютерних систем та мереж;
Король І.Ю., канд. фіз.-м. н., доцент кафедри комп'ютерних систем та мереж;
Гапак О.М., канд. пед. наук, доцент кафедри комп'ютерних систем та мереж;
Мигалина С.І., ст. викладач, кафедри комп'ютерних систем та мереж;
Тютюнникова Г.С., ст. викладач, кафедри комп'ютерних систем та мереж.

Рецензент: Глебена М.І., канд. фіз.-мат. наук., доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації, УжНУ.

Відповідальний за випуск: Горват П.П.., канд. фіз.-мат. наук, доцент, зав кафедри комп'ютерних систем та мереж.

Дані методичні вказівки розглянуто та схвалено на засіданні кафедри комп'ютерних систем та мереж, протокол №7 від 30 січня 2019 року.

ВСТУП

Підготовка інженера, в тому числі і фахівця з комп'ютерної інженерії на сучасному етапі, базується не тільки на засвоєнні основних розділів математики та вмінні застосовувати їх на практиці традиційним способом, а і вмінні застосовувати їх з використанням сучасних комп'ютерних технологій.

Практика викладання курсів "Вища математика" та "Математичний аналіз" для інженерів показує, що для досягнення хороших успіхів у засвоєнні знань, одержаних на заняттях з інформатики та математики, є можливим лише при умові, коли ці дві складові поєднуються. При поєднанні цих складових спостерігається більша зацікавленість студентів у вивченні матеріалу, ніж на звичайних практичних чи лабораторних заняттях. Це зумовлено, в першу чергу, можливістю оперативного експерименту та творчого підходу при вирішенні тих інших конкретних завдань.

На сьогоднішній день розроблена достатня кількість пакетів прикладних програм, які дозволяють швидко і ефективно виконувати потрібні обчислення, аналітичні перетворення, графічні побудови тощо, а тому є можливість приділити більше уваги постановці задачі, побудові математичної моделі та дослідженню розв'язків, що необхідно, на нашу думку, студентам інженерних спеціальностей.

Для комп'ютерної підтримки вивчення математики ми пропонуємо використовувати універсальне математичне середовище Mathcad, правила користування яким вкрай прості, а можливості великі. В пакеті прикладних програм Mathcad інтегровані три процесори: текстовий, математичний та графічний. Середовище Mathcad містить досить широкий набір функцій та обчислювальних засобів і дозволяє робити записи функцій та математичних виразів у загальноприйнятій нотації. Зокрема, Mathcad може виконувати складні алгебраїчні перетворення й спрощення, розв'язувати у символьному вигляді або чисельно алгебраїчні та трансцендентні рівняння (системи рівнянь і нерівностей), знаходити скінчені та нескінчені суми, добутки, границі, похідні та інтеграли тощо. Крім цього, Mathcad володіє вбудованою мовою програмування, яка дає змогу користувачеві запрограмувати розв'язання спеціальних задач.

В рекомендованих методичних вказівках даються короткі теоретичні відомості до кожної лабораторної роботи як з відповідного розділу математичного аналізу, так і можливостей середовища Mathcad. Крім цього, в кожній лабораторній роботі розглядаються типові приклади з відповідної теми та їх розв'язання за допомогою засобів середовища Mathcad.

Лабораторна робота № 7

Тема: РАЦІОНАЛЬНІ ТА ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНІ ФУНКЦІЇ

Мета роботи: Ознайомитись з основними можливостями програми Mathcad для розкладу раціональних функцій на лінійні і квадратичні множники та дробово-раціональних функцій на суму найпростіших раціональних дробів.

Зміст роботи:

1.Вивчити можливості програми Mathcad для розкладу раціональних функцій на лінійні і квадратичні множники.

2. Вивчити основні можливості програми Mathcad для розкладу дробово-раціональних функцій на суму найпростіших раціональних дробів.

3. Виконати запропоновані завдання з використанням засобів програми Mathcad.

Зміст звіту: Короткі теоретичні відомості. Постановка завдань та результати їх виконання.

1^0. Основні відомості про раціональні функції

Многочленом (поліномом або цілою раціональною функцією) називається функція вигляду

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \qquad (1)$$

де n – натуральне число, яке називається степенем многочлена; $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, a_n – коефіцієнти многочлена, дійсні або комплексні числа; незалежна змінна x також може бути як дійсною, так і комплексною.

Лема 1. *Для того, щоб многочлен* (1) *тотожно дорівнював нулю, необхідно і достатньо, щоб усі його коефіцієнти дорівнювали нулю*.

Наслідок. *Для того, щоб два многочлени $P_n(x)$ і $Q_n(x)$ однакових степенів були тотожно рівні між собою, необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти при однакових степенях х многочлені були рівні між собою*.

Теорема 1 (*Теорема Безу*). *Остача від ділення многочлена $P_n(x) = 0$ на різницю $x - a$ дорівнює $P_n(a)$*.

Теорема 2 (*Основна теорема алгебри*). *Будь-який многочлен степеня $n > 0$ з будь-якими дійсними або комплексними коефіцієнтами, має хоча би один корінь – дійсний або комплексний.*

Теорема 3. *Будь-який многочлен $P_n(x)$ степеня n має точно n коренів, враховуючи їх кратність*.

Теорема 4. *Будь-який многочлен n-го степеня можна подати у вигляді*

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n), \qquad (2)$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – дійсні або комплексні корені многочлена, a_0 – коефіцієнт многочлена при x^n.

Вираз (2) називається ***розкладом многочлена на лінійні множники***.

Якщо серед коренів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є рівні між собою (кратні корені), то вираз (2) можна записати у вигляді

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\ldots(x - x_m)^{k_m}, \qquad (3)$$

де $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – кратності, а $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Нехай число $\alpha + i\beta$ – комплексний корінь многочлена $P_n(z)$, тобто $P_n(\alpha + i\beta) = 0$. Тоді справедлива теорема.

Теорема 5. *Якщо многочлен* $P_n(z)$ *з дійсними коефіцієнтами має корінь* $z = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$*, то* $\bar{z} = \alpha - i\beta$ *також є коренем цього многочлена*.

Таким чином, у розкладі $P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$ деякі множники входять попарно-спряженими.

Перемноживши лінійні множники, які відповідають парі комплексно спряжених коренів, одержимо тричлен другого степеня з дійсними коефіцієнтами:

$[x-(\alpha+i\beta)][x-(\alpha-i\beta)] = x^2 + px + q$, де $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2 + \beta^2$.

Якщо число $\alpha + i\beta$ є коренем кратності k, то число $\alpha - i\beta$ має ту ж саму кратність.

Таким чином, многочлен з дійсними коефіцієнтами розкладається на множники з дійсним коефіцієнтами першого і другого степеня відповідної кратності, тобто

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\ldots(x - x_r)^{k_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}\ldots(x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}, \quad (4)$$

де

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_r + 2l_1 + 2l_2 + \ldots + 2l_s = n.$$

2⁰. Розкладання правильного раціонального дробу на найпростіші

Найпростішими або ***елементарними*** називаються дроби вигляду:

I. $\dfrac{A}{x-a}$; II. $\dfrac{A}{(x-a)^m}$; III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$; IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}$.

Тут $m \geq 2$, $m \in N$; *A, B, p, q, a* – дійсні числа; $D = p^2 - 4q < 0$ – квадратний тричлен не має дійсних коренів. Числа А і В називаються ***невизначеними коефіцієнтами***.

Відношення двох многочленів

$$R(x) = \frac{Q_r(x)}{P_n(x)} \quad (5)$$

називають ***правильним раціональним*** дробом, якщо $r < n$, і ***неправильним***, якщо $r > n$.

Якщо дріб (5) неправильний, то його завжди можна подати у вигляді алгебраїчної суми многочлена і правильного раціонального дробу, тобто

$$\frac{Q_r(x)}{P_n(x)} = M(x) + \frac{Q_{r_1}(x)}{P_n(x)} \quad (6)$$

Теорема 6. *Будь-який правильний раціональний дріб можна єдиним способом подати у вигляді суми скінченого числа елементарних дробів, тобто*

$$R(x) = \frac{Q_r(x)}{P_n(x)} = \frac{Q_r}{a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}} =$$

$$= \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \ldots +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2++p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{R_{l_1}x+S_{l_1}}{(x^2++p_1x+q_1)^{l_1}} \quad (7)$$

$$+ \frac{R_1x+S_1}{x^2+p_sx+q_s} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+p_sx+q_s)^2} + \ldots + \frac{R_{l_s}x+S_{l_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}.$$

Вираз (7) називається ***розкладом правильного раціонального дробу на суму елементарних раціональних дробів***.

3^0. Застосування програми Mathcad для розкладання многочлена на лінійні та квадратичні множники

Приклад 1. Користуючись програмою Mathcad розкласти на множники наступні многочлени:

1. x^3-5x^2+4x; 2. x^3-3x+2; 3. x^3-x^2+x-1.

Розв'язання. Розкладання многочлена на множники здійснюється за допомогою команди **factor** з полички **Symbolic**. Для цього потрібно набрати многочлен, наприклад, многочлен x^3-5x^2+4x і натиснути кнопку **factor**. При цьому появиться запис вигляду $x^3-5x^2+4x\ \text{factor}, \blacksquare \rightarrow$. Для одержання результату потрібно за допомогою клавіші **BackSpase** вилучити із запису квадратик і кому і натиснути клавішу **Enter**. В результаті таких дій, одержимо лістинг:

1. $x^3-5x^2+4x\ \text{factor} \rightarrow x\cdot(x-1)\cdot(x-4)$
2. $x^3-3\cdot x+2\ \text{factor} \rightarrow (x-1)^2\cdot(x+2)$
3. $x^3-x^2+x-1\ \text{factor} \rightarrow (x-1)\cdot\left(x^2+1\right)$.

4^0. Застосування програми Mathcad для розкладання раціонального дробу на найпростіші

Розкласти раціональні дроби на найпростіші можна різними способами. В програмі **Mathcad** це можна зробити шляхом зведення задачі до розв'язання системи лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів за допомогою обчислювального блоку **Given…Find** або за допомогою команди **parfrac**.

Приклад 2. Користуючись програмою Mathcad розкласти на суму найпростіших раціональних дробів наступні раціональні функції:

Випадок 1. Знаменник має тільки дійсні різні корені $\dfrac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$.

Розв'язання. У цьому випадку розкладання шукаємо у вигляді

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4}.$$

Невідомі коефіцієнти шукаємо з рівності многочленів

$$x^2+2x+6=A(x-2)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x-2)$$

Систему лінійних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів можемо дістати шляхом порівняння коефіцієнтів при однакових степенях x або шляхом надання конкретних числових значень змінній x у лівій і правій частинах рівності многочленів.

У першому випадку це зручно зробити за допомогою команди **collect** з полички **Symbolic**, яка збирає коефіцієнти при однакових степенях x. Процес розв'язання задачі у цьому випадку має вигляд

$$\frac{x^2+2\cdot x+6}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4}$$

$$x^2+2x+6 = A\cdot(x-2)\cdot(x-4)+B\cdot(x-1)\cdot(x-4)+C\cdot(x-1)\cdot(x-2)$$

$$A\cdot(x-2)\cdot(x-4)+B\cdot(x-1)\cdot(x-4)+C\cdot(x-1)\cdot(x-2)\ \text{collect}, x \rightarrow (B+A+C)\cdot x^2+(-6\cdot A-5\cdot B-3\cdot C)\cdot x+8\cdot A+2\cdot C+4\cdot B$$

$$x^2+2x+6 = (B+A+C)\cdot x^2+(-6\cdot A-5\cdot B-3\cdot C)\cdot x+8\cdot A+2\cdot C+4\cdot B$$

$A := 0 \qquad B := 0 \qquad C := 0$

Given

$B+A+C = 1 \qquad -6\cdot A-5\cdot B-3\cdot C = 2 \qquad 8\cdot A+2\cdot C+4\cdot B = 6$

$$\text{Find}(A, B, C) = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Зауважимо, що для запису рівностей використовується логічна операція ’=’ з полички **Boolean**.

У другому випадку систему рівнянь зручно одержати за допомогою введення функцій користувача, одна з яких задає ліву частину рівності, а друга – праву і обчислити їх при різних значеннях змінної x. Процес розв’язання задачі у цьому випадку має вигляд

$$\frac{x^2+2\cdot x+6}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4}$$

$$x^2+2x+6 = A\cdot(x-2)\cdot(x-4)+B\cdot(x-1)\cdot(x-4)+C\cdot(x-1)\cdot(x-2)$$

$fl(x) := x^2+2x+6 \qquad fp(x, A, B, C) := A\cdot(x-2)\cdot(x-4)+B\cdot(x-1)\cdot(x-4)+C\cdot(x-1)\cdot(x-2)$

$$fl(x) = fp(x, A, B, C)$$

$A := 0 \qquad B := 0 \qquad C := 0$

Given

$fl(1) = fp(1, A, B, C) \qquad fl(2) = fp(2, A, B, C) \qquad fl(4) = fp(4, A, B, C)$

$$\text{Find}(A, B, C) = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Якщо нас цікавить тільки результат розкладання на найпростіші дроби, то це можна виконати за допомогою команди **parfrac**

$$\frac{x^2+2\cdot x+6}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4)}\ \text{convert}, \text{parfrac}, x \rightarrow \frac{3}{(x-1)}-\frac{7}{(x-2)}+\frac{5}{(x-4)}$$

Випадок 2. Знаменник має тільки дійсні корені, серед яких можуть бути і кратні $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}$.

Розв'язання. У цьому випадку розкладання шукаємо у вигляді

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+3}.$$

Невідомі коефіцієнти шукаємо з рівності многочленів

$$x^2+1=A(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)^2(x+3)+D(x-1)^2$$

Подальший хід розв'язання за першим способом побудови системи рівнянь видно з наведеного лістингу

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} \qquad \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+3}$$

$$x^2+1 = A(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)^2(x+3)+D(x-1)^3$$

$$A\cdot(x+3)+B\cdot(x-1)(x+3)+C\cdot(x-1)^2(x+3)+D\cdot(x-1)^3 \text{ collect}, x$$

$$(C+D)\cdot x^3+(B+C-3\cdot D)\cdot x^2+(2\cdot B-5\cdot C+A+3\cdot D)\cdot x+3\cdot A+3\cdot C-3\cdot B-D$$

$$A:=0 \quad B:=0 \quad C:=0 \quad D:=0$$

Given

$$C+D=0 \quad B+C-3\cdot D=1 \qquad 2\cdot B-5\cdot C+A+3\cdot D=0 \qquad 3\cdot A+3\cdot C-3\cdot B-D=1$$

$$\text{Find}(A,B,C,D)\rightarrow\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{3}{8}\\ \frac{5}{32}\\ \frac{-5}{32}\end{pmatrix}$$

Звернемо увагу на те, що рядок присвоєнь $A:=A \quad B:=B \quad C:=C$ потрібно для відміни попередніх числових значень цих змінних, якщо вони були.

Якщо систему рівнянь будувати другим способом, то лістинг може мати вигляд:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+3}$$

$A := A \qquad B := B \qquad C := C$

$$x^2 + 1 = A(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)^2(x+3) + D(x-1)^3$$

$fl(x) := x^2 + 1 \qquad fp(x, A, B, C, D) := A\cdot(x+3) + B\cdot(x-1)\cdot(x+3) + C\cdot(x-1)^2\cdot(x+3) + D\cdot(x-1)^3$

$fl(x) = fp(x, A, B, C, D)$

$A := 0 \qquad B := 0 \qquad C := 0 \qquad D := 0$

Given

$fl(1) = fp(1, A, B, C, D) \qquad fl(2) = fp(2, A, B, C, D) \qquad fl(3) = fp(3, A, B, C, D) \qquad fl(4) = fp(4, A, B, C, D)$

$$\mathrm{Find}(A, B, C, D) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{5}{32} \\ \frac{-5}{32} \end{pmatrix}$$

Результат розкладання на найпростіші дроби, одержаний за допомогою команди **parfrac,** має вигляд:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} \text{ convert}, \text{parfrac}, x \rightarrow \frac{1}{2\cdot(x-1)^3} + \frac{3}{8\cdot(x-1)^2} + \frac{5}{32\cdot(x-1)} - \frac{5}{32\cdot(x+3)}$$

Випадок 3. Серед коренів знаменника дробу є дійсні прості і комплексні корені.

Хід розв'язання за першим способом побудови системи рівнянь видно з наведеного лістингу

$$\frac{1}{x^5 - x^2} \qquad x^5 - x^2 \text{ factor} \rightarrow x^2\cdot(x-1)\cdot\left(x^2 + x + 1\right)$$

$$\frac{1}{x^2\cdot(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{D\cdot x + E}{x^2 + x + 1}$$

$$A\cdot(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right) + B\cdot x\left(x^2+x+1\right)(x-1) + C\cdot x^2\cdot\left(x^2+x+1\right) + (D\cdot x + E)\cdot x^2\cdot(x-1) \text{ collect}, x$$

$$(C + B + D)\cdot x^4 + (A + C + E - D)\cdot x^3 + (-E + C)\cdot x^2 - B\cdot x - A$$

$$1 = (C + B + D)\cdot x^4 + (A + C + E - D)\cdot x^3 + (-E + C)\cdot x^2 - B\cdot x - A$$

$A := 0 \qquad B := 0 \qquad C := 0 \qquad D := 0 \qquad E := 0$

Given

$C + B + D = 0 \qquad A + C + E - D = 0 \qquad C - E = 0 \qquad -B = 0 \qquad -A = 1$

$$\mathrm{Find}(A,B,C,D,E) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Якщо систему рівнянь будувати другим способом, то лістинг може мати вигляд:

$$\frac{1}{x^5 - x^2} \qquad x^5 - x^2 \text{ factor } \rightarrow x^2\cdot(x-1)\cdot\left(x^2 + x + 1\right)$$

$$\frac{1}{x^2\cdot(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{D\cdot x + E}{x^2 + x + 1}$$

$$\mathrm{fl}(x) := 1$$

$$\mathrm{fp}(x,A,B,C,D,E) := A\cdot(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right) + B\cdot x\cdot\left(x^2+x+1\right)\cdot(x-1) + C\cdot x^2\cdot\left(x^2+x+1\right) + (D\cdot x+E)\cdot x^2\cdot(x-1)$$

$$\mathrm{fl}(x) = \mathrm{fp}(x,A,B,C,D,E)$$

$$A := 0 \quad B := 0 \quad C := 0 \quad D := 0 \quad E := 0$$

Given

$$\mathrm{fl}(1) = \mathrm{fp}(1,A,B,C,d,E) \quad \mathrm{fl}(2) = \mathrm{fp}(2,A,B,C,D,E) \quad \mathrm{fl}(3) = \mathrm{fp}(3,A,B,C,D,E)$$

$$\mathrm{fl}(4) = \mathrm{fp}(4,A,B,C,D,E) \quad \mathrm{fl}(5) = \mathrm{fp}(5,A,B,C,D,E)$$

$$\mathrm{find}(A,B,C,D,E) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Результат розкладання на найпростіші дроби, одержаний за допомогою команди **parfrac,** має вигляд:

$$\frac{1}{x^2\cdot(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)} \text{ convert, parfrac, } x \rightarrow \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{3\cdot(x-1)} - \frac{1}{3}\cdot\frac{(x-1)}{\left(x^2+x+1\right)}$$

Випадок 4. Серед коренів знаменника кратні комплексні корені.
Хід розв'язання за першим способом видно з наведеного лістингу:

$$\frac{x^3-2\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2} \qquad \frac{x^3-2\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A\cdot x+B}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{C\cdot x+D}{x^2+1}$$

$$x^3-2\cdot x = (A\cdot x+B)+(C\cdot x+D)\cdot\left(x^2+1\right)$$

$$(A\cdot x+B)+(C\cdot x+D)\cdot\left(x^2+1\right) \text{ collect}, x \rightarrow C\cdot x^3+D\cdot x^2+(A+C)\cdot x+B+D$$

$$A := 0 \quad B := 0 \quad C := 0 \quad D := 0$$

Given

$$C = 1 \quad D = 0 \quad A+C = -2 \quad B+D = 0$$

$$\text{Find}(A,B,C,D) \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Якщо систему рівнянь будувати другим способом, то лістинг може мати вигляд:

$$\frac{x^3-2\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2} \qquad \frac{x^3-2\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A\cdot x+B}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{C\cdot x+D}{x^2+1}$$

$$x^3-2\cdot x = (A\cdot x+B)+(C\cdot x+D)\cdot\left(x^2+1\right)$$

$$fl(x) := x^3-2\cdot x \quad fp(x,A,B,C,D) := (A\cdot x+B)+(C\cdot x+D)\cdot\left(x^2+1\right)$$

$$fl(x) = fp(x,A,B,C,D)$$

$$A := 0 \quad B := 0 \quad C := 0 \quad D := 0$$

Given

$$fl(1) = fp(1,A,B,C,D) \quad fl(2) = fp(2,A,B,C,D)$$

$$fl(3) = fp(3,A,B,C,D) \quad fl(4) = fp(4,A,B,C,D)$$

$$\text{Find}(A,B,C,D) \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Результат розкладання на найпростіші дроби, одержаний за допомогою команди **parfrac,** має вигляд:

$$\frac{x^3-2\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2} \text{ convert}, \text{parfrac}, x \rightarrow -3\cdot\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{x}{\left(x^2+1\right)}$$

Завдання для самостійної роботи

Розкласти на найпростіші дроби наступні дробово-раціональні функції:

1. $\dfrac{10x-25}{x^2-3x-4}$; 2. $\dfrac{x^2-x+1}{x^3(x+2)^2}$; 3. $\dfrac{2x^3+3}{x^3-5x^2+6x}$; 4. $\dfrac{3x^3-2x^2+7x+2}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}$;

5. $\dfrac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}$; 6. $\dfrac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}$; 7. $\dfrac{1}{(x^2-2x+1)(x^2-2x+2)}$; 8. $\dfrac{1}{x^4+4}$

9. $\dfrac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}$; 10. $\dfrac{x^3+1}{x^3-x^2}$; 11. $\dfrac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^2+2x^2}$.

Лабораторна робота № 8

Тема: ОБЧИСЛЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Мета роботи: Ознайомитись з основними можливостями програми Mathcad для обчислення невизначених інтегралів.

Зміст роботи:

1. Вивчити можливості програми Mathcad для обчислення невизначених інтегралів.

Зміст звіту: Короткі теоретичні відомості. Постановка завдань та результати їх виконання.

1^0. Поняття первісної та невизначеного інтеграла

Означення 1. *Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на проміжку $\langle a,b\rangle$, якщо $F(x)$ диференційовна на $\langle a,b\rangle$ і в кожній точці $x\in\langle a,b\rangle$ $F'(x)=f(x)$.*

Наприклад, первісною функції $f(x)=x^2$ є функція $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$, оскільки $F'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}\right)'=\dfrac{3x^2}{3}=x^2$.

Теорема 1. *Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на проміжку $\langle a,b\rangle$, то всяка інша первісна функції $f(x)$ на цьому самому проміжку має вигляду $F(x)+C$, де C – довільна стала.*

Означення 2. *Сукупність усіх первісних $F(x)+C$ для заданої функції $f(x)$ називають* ***невизначеним інтегралом*** *і позначають $\int f(x)dx$, отже*

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C. \tag{1}$$

Тут $\int$ – знак інтеграла, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, $f(x)$ – підінтегральна функція, x – змінна інтегрування, C – стала інтегрування.

2^0. Основні властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x)$.

2. $d\int f(x)dx=f(x)dx$.

3. $\int dF(x)=F(x)+C$.

4. Якщо $\int f(x)\,dx=F(x)+C$ і $u=\varphi(x)$, то $\int f(u)\,du=F(u)+C$.

Наприклад, $\int xdx=\dfrac{x^2}{2}+C$. Користуючись властивістю 4, можемо записати формулу $\int udu=\dfrac{u^2}{2}+C$, де $u=\varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну. Зокрема: $\int\sin x\,d\sin x=\dfrac{\sin^2 x}{2}+C$; $\int\ln x\,d\ln x=\dfrac{\ln^2 x}{2}+C$.

5. $\int C\,f(x)\,dx=C\int f(x)\,dx$, де C – стала.

6. $\int[C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\ldots+C_nf_n(x)]dx=C_1\int f_1(x)\,dx+C_2\int f_2(x)\,dx+\ldots+C_n\int f_n(x)\,dx$.

3^0. Таблиця основних інтегралів

№ п/п	$\int f(x)\,dx = F(x) + C$	Перевірка умовою $\left(F(x)+C\right)' = f(x)$
1	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C\right)' = x^n$
2	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$(\ln x + C)' = \frac{1}{x}$
3	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{\ln a \cdot a^x}{\ln a} = a^x$
4	$\int e^x dx = e^x + C$	$(e^x + C)' = e^x$
5	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$(\sin x + C)' = \cos x$
6	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$(-\cos x + C)' = \sin x$
7	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} dx = tg\,x + C$	$(tg\,x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
8	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -ctg\,x + C$	$(-ctg\,x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x}$
9	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	$\left(\arcsin\frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
10	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$	$\left(\frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{x^2 + a^2}$

Додамо до основної таблиці інтегралів ще три інтеграли, які часто використовуються:

1) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;

2) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$;

3) $\int \sqrt{a + x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a + x^2} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{a + x^2}\right| + C$.

4^0. Обчислення невизначеного інтеграла в програмі Mathcad

В програмі **Mathcad** для обчислення невизначених інтегралів є оператор

$$\int \blacksquare \, d\blacksquare$$

Для обчислення інтеграла потрібно: на поличці **Calculus** клацнути ЛКМ на відповідній кнопці, ввести функцію і ім’я змінної інтегрування у відповідні знакомісця, клацнути на кнопці символьного знаку дорівнює ”→” і натиснути клавішу ”Enter”.

Приклад 1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int\left(x^3+\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x^3}\right)dx$, б) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Лістинг для знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int\left(x^3+\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x^3}\right)dx \rightarrow \frac{1}{4}\cdot x^4+\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{x^2} \qquad \int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \rightarrow \operatorname{asin}\left(\frac{1}{2}\cdot x\right)$$

Зауваження. При інтегруванні за допомогою програми **Mathcad** стала інтегрування не додається.

5^0. Методи інтегрування

5.1^0. Метод безпосереднього інтегрування

Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла та таблиці основних інтегралів називають *безпосереднім інтегруванням.*

Приклад 2. Зайти інтеграл: а) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2dx$.

$$\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2dx=\int\left(x+2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)dx=\int\left(x+2x^{\frac{1}{6}}+x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=$$

$$=\int xdx+2\int x^{\frac{1}{6}}dx+\int x^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{x^2}{2}+2\frac{x^{7/6}}{7/6}+\frac{x^{1/3}}{1/3}+C=\frac{x^2}{2}+\frac{12}{7}x\sqrt[6]{x}+3\sqrt[3]{x}+C.$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{12}{7}\cdot x^{\frac{7}{6}}+3\cdot x^{\frac{1}{3}}$$

5.2^0. Метод заміни змінної. Внесення функції під знак диференціала

Суть цього методу полягає у введені під знаком інтеграла такої нової змінної, що після підстановки і заміни диференціала заданої змінної на диференціал нової змінної дістають табличний інтеграл, або інтеграл, який легко зводиться до табличних. Обгрунтування такого методу дається теоремою.

Теорема. *Нехай* $F(x)$ *– первісна функції* $f(x)$ *на проміжку* $\langle a,b\rangle$, *тобто* $\int f(x)\,dx=F(x)+C$ *і нехай функція* $x=\varphi(t)$, ($dx=\varphi'(t)\,dt$) *визначена і диференційовна на проміжку* $\langle\alpha,\beta\rangle$, *причому множина значень цієї функції є проміжок* $\langle a,b\rangle$. *Тоді справедлива формула*

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt=F(\varphi(t))+C.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{(2x+1)^2}$.

Виконаємо заміну $2x+1=t$, $2dx = dt$, звідки $dx = \frac{1}{2}dt$. Підставивши одержані вирази в заданий інтеграл, дістанемо:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\int t^{-2}dt = -\frac{1}{2}t^{-1} + C = -\frac{1}{2}\frac{1}{2x+1} + C.$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx \to \frac{-1}{2\cdot(2\cdot x+1)}$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{\ln^7 x dx}{x}$.

Використаємо метод внесення функції під знак диференціала. Очевидно, що $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$. Тоді

$$I = \int \frac{\ln^7 x dx}{x} = \int \ln^7 x \cdot \frac{dx}{x} = \int \ln^7 x d(\ln x) = [\ln x = t] = \int t^7 dt = \frac{1}{8}t^8 + C = \frac{1}{8}\ln^8 x + C.$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \frac{\ln(x)^7}{x}\,dx \to \frac{1}{8}\cdot\ln(x)^8$$

***Наслідок* 1**. *Якщо підінтегральний вираз можна розкласти на множники* $f(\varphi(x))$ *та* $\varphi'(x)dx$*, то доцільно зробити заміну* $\varphi(x) = t$*. Тоді* $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(t)dt$.

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int e^{\sin x}\cos x dx$.

Оскільки підінтегральний вираз можна представити у вигляді добутку і $e^{\sin x}\cos x dx = e^{\sin x}(\sin x)' dx$, то ввівши заміну $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$, дістанемо $\int e^{\sin x}\cos x dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$.

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int e^{\sin(x)}\cos(x)\,dx \to \exp(\sin(x))$$

***Наслідок* 2**. *Якщо підінтегральна функція має вигляд* $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$*, тобто, у чисельнику є похідна від знаменника, то за допомогою заміни* $\varphi(x) = t$*,* $\varphi'(x)dx = dt$ *інтеграл зводиться до табличного.*

Справді, $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(\varphi(x)) + C$.

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int \frac{3\cos 3x}{1+\sin 3x}dx$.

Скориставшись наслідком 2, дістанемо

$$\int \frac{3\cos 3x}{1+\sin 3x}dx = \int \frac{(1+\sin 3x)'}{1+\sin 3x}dx = \begin{bmatrix} 1+\sin 3x = t \\ 3\cos 3x dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(1+\sin 3x) + C.$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \frac{3\cos(3x)}{1+\sin(3x)}\,dx \to \ln(1+\sin(3\cdot x))$$

5.2. Метод інтегрування частинами

Цей метод застосовується, якщо під інтегралом є добуток функцій.

Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$, тоді $d(u\cdot v) = u\cdot dv + v\cdot du$. Інтегруємо обидві частини $\int d(u\cdot v) = \int u\cdot dv + \int v du$. Звідки, з врахуванням властивості 3^0 невизначеного інтеграла, дістанемо формулу для інтегрування частинами

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Приклад 7. Знайти інтеграл $I = \int arctg\, x dx$.

Використавши інтегрування частинами, дістанемо

$$I = \begin{bmatrix} u = arctg\, x, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, & v = \int dx = x \end{bmatrix} = x\,arctg\, x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\,arctg\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \operatorname{atan}(x)\,dx \to x\cdot\operatorname{atan}(x) - \frac{1}{2}\cdot\ln\left(1+x^2\right)$$

6. Інтегрування основних класів функцій

6.1. Інтегрування раціональних функцій

Нехай треба знайти інтеграл від раціональної функції $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$.

Враховуючи те, що раціональну функцію можна подати у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу, дістанемо:

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = \int S_l(x)dx + \int \frac{R_k(x)}{Q_n(x)}dx.$$

Інтеграл від многочлена береться безпосередньо, а інтеграл від правильного раціонального дробу зводиться до інтегрування найпростіших раціональних дробів.

6.1.1. Інтегрування найпростіших дробів

Найпростішими **(*елементарними*)** ***дробами*** називаються дроби вигляду:

$I.\ \dfrac{A}{x-a};$ $II.\ \dfrac{A}{(x-a)^k},\ k\ge 2,\ k\in N;$

$III.\ \dfrac{Bx+C}{x^2+px+q},\ p^2-4q<0;$ $IV.\ \dfrac{Dx+E}{(x^2+px+q)^k},\ p^2-4q<0,\ k\ge 2,\ k\in N.$

Інтегрування найпростіших дробів I та II типів не представляє труднощів. Справді,

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C,$$

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C.$$

Розглянемо інтегрування раціонального дробу III типу $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$.

Якщо зробити заміну $x=t-\dfrac{p}{2},\ dx=dt$ і ввести позначення $a^2=q-\dfrac{p^2}{4}$, то

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{\left(t-\frac{p}{2}\right)^2+p\left(t-\frac{p}{2}\right)+q}dt=\int\frac{At+B-A\cdot\frac{p}{2}}{t^2+a^2}dt=$$

$$=A\int\frac{t}{t^2+a^2}dt+\left(B-A\cdot\frac{p}{2}\right)\int\frac{1}{t^2+a^2}dt.$$

Перший інтеграл знаходиться безпосередньо:

$$\int\frac{t}{t^2+a^2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2+a^2}dt=\frac{1}{2}\ln(t^2+a^2)+C,$$

а другий є табличним (номер 10), оскільки за умовою $q-\dfrac{p^2}{4}>0$. Тоді

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+\frac{\left(B-A\cdot\frac{p}{2}\right)}{a}arctg\,\frac{t}{a}+C,\ \text{де}\ t=x+\frac{p}{2}.$$

Оскільки $t^2+a^2=x^2+px+q$, то

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{\left(B-A\cdot\frac{p}{2}\right)}{a}arctg\,\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C.$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $I=\displaystyle\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$.

Виділимо в чисельнику дробу вираз, який є похідною від знаменника, після чого розіб'ємо на два інтеграли:

$$I=\int\frac{\frac{3}{2}(2x-4)-1+6}{x^2-4x+8}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx+5\int\frac{1}{x^2-4x+8}dx.$$

Перший інтеграл береться зразу, оскільки в чисельнику є похідна від знаменника. Другий інтеграл зводиться до табличного, якщо виділити в знаменнику повний квадрат і зробити заміною $x-2=t$:

$$I=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8)+5\int\frac{1}{(x-2)^2+2^2}dx=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8)+\frac{5}{2}arctg\frac{x-2}{2}+C\cdot$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx\to\frac{3}{2}\cdot\ln\left(x^2-4\cdot x+8\right)+\frac{5}{2}\cdot\operatorname{atan}\left(\frac{1}{2}\cdot x-1\right)$$

Розглянемо інтегрування раціонального дробу IV типу. Тобто треба знайти $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx$, де $\frac{p^2}{4}-q<0$.

Виділимо в чисельнику похідну від квадратного тричлена, який знаходиться у знаменнику:

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)}{(x^2+px+q)^n}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx.$$

Перший інтеграл в правій частині рівності знаходиться за допомогою заміни $x^2+px+q=t,\ (2x+p)=dt$, а другий перетворимо так, виділивши в знаменнику повний квадрат:

$$\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{1}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^n}dx\cdot$$

Ввівши заміну $x+\frac{p}{2}=z,\ dx=dz$ і позначення $q-\frac{p^2}{4}=a^2$, одержимо

$$\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{1}{(z^2+a^2)^n}dz.$$

Зауваження. Для інтеграла $I_n = \int \frac{1}{(z^2+a^2)^n} dz,$ де n – ціле додатне число, має місце наступна рекурентна формула:

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{z}{(z^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{n-1}.$$

Ця формула дає можливість після $(n-1)$-кратного застосування звести даний інтеграл I_n до табличного інтегралу $I_1 = \int \frac{1}{z^2+a^2} dz$.

Приклад 9. Знайти інтеграл $I = \int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2} dx$.

Маємо

$$I = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)+(2-3)}{(x^2+2x+10)^2} dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+10)^2} dx - \int \frac{1}{[(x+1)^2+9]^2} dx.$$

У першому інтегралі зробимо заміну $x^2+2x+10=t,\ (2x+2)dx=dt$, а у другому інтегралі покладемо $x+1=z,\ dx=dz$. Тоді

$$I = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2} dt - \int \frac{1}{(z^2+9)^2} dz = \frac{3}{2}\int t^{-2} dt - \int \frac{1}{(z^2+9)^2} dz =$$

$$= -\frac{3}{2}t^{-1} - \left[\frac{1}{2\cdot 9\cdot(2-1)} \cdot \frac{z}{(z^2+9)^{2-1}} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2} \cdot \int \frac{1}{z^2+9} dz\right] =$$

$$= -\frac{3}{2t} - \frac{1}{18} \cdot \frac{z}{z^2+9} - \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{3} arctg\, \frac{z}{3} + C.$$

Повертаючись до старих змінних, одержимо

$$I = -\frac{3}{2(x^2+2x+10)} - \frac{1}{18} \cdot \frac{x+1}{x^2+2x+10} - \frac{1}{54} \cdot arctg\, \frac{x+1}{3} + C =$$

$$= -\frac{1}{18} \cdot \frac{x+28}{x^2+2x+10} - \frac{1}{54} \cdot arctg\, \frac{x+1}{3} + C.$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \frac{3x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2} dx \rightarrow \frac{1}{36} \cdot \frac{(-2\cdot x - 56)}{\left(x^2+2\cdot x+10\right)} - \frac{1}{54} \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{1}{3}\cdot x + \frac{1}{3}\right)$$

6.1.2. Інтегрування раціональних дробів за допомогою розкладу на найпростіші дроби

Якщо підінтегральний дріб неправильний, то необхідно з нього спочатку виділити цілу частину, а потім правильний раціональний дріб розкласти на найпростіші дроби.

Приклад 10. Знайти інтеграл $I = \int \frac{1}{x^5 - x^2} dx$.

Розкладемо знаменник на множники:

$$x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1) = x^2(x-1)(x^2 + x + 1).$$

Тоді

$$\frac{1}{x^5 - x^2} = \frac{1}{x(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Звільнившись від знаменника, дістанемо:

$$1 = Ax(x-1)(x^2+x+1) + B(x-1)(x^2+x+1) + Cx^2(x^2+x+1) + (Dx+E)x^2(x-1).$$

При $x = 0$ маємо $1 = -B$, тобто $B = -1$; при $x = 1$ маємо $1 = 3C$, тобто $C = \frac{1}{3}$.

Перепишемо попередню рівність у вигляді

$$1 = (A + C + D)\cdot x^4 + (C + B + E - D)\cdot x^3 + (-E + C)\cdot x^2 - Ax - B.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при x^2, x^3, x^4, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} C - E = 0, \\ B + C - D + E = 0, \\ A + C + D = 0, \end{cases}$$

з якої знаходимо: $E = \frac{1}{3},\ D = -\frac{1}{3},\ A = 0$. Таким чином,

$$\frac{1}{x^5 - x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x-1}{3(x^2+x+1)}.$$

Підставивши в інтеграл, дістанемо:

$$\int \frac{1}{x^5 - x^2} dx = -\int \frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \cdot$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \frac{1}{x^5 - x^2} dx \rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\cdot\ln(-1+x) - \frac{1}{6}\cdot\ln\left(x^2 + x + 1\right) + \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\mathrm{atan}\left[\frac{1}{3}\cdot(2\cdot x + 1)\cdot\sqrt{3}\right]$$

6.2. Інтегрування раціональних виразів, що містять тригонометричні функції

Інтеграл вигляду $\int R(\sin x, \cos x, tg\, x, ctg\, x)dx,$ де R є раціональною функцією від $\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$, $ctg\, x$, за допомогою підстановки $t = tg\frac{x}{2}$, яка називається *універсальною тригонометричною підстановкою*, зводиться до інтеграла від раціональної функції відносно нової змінної t, а отже, виражається через елементарні функції.

Дійсно,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ tg\, x = \frac{2t}{1-t^2}, ctg\, x = \frac{1-t^2}{2t},\ x = 2arctg\, t, dx = \frac{2}{1+t^2}dt,$$

тому

$$\int R(\sin x, \cos x, tg\, x, ctg\, x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}, \frac{1-t^2}{2t}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)dt,$$

де $R_1(t)$ – раціональна функція від t.

Приклад 11. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x + 5}dx$.

Підінтегральна функція є раціональна відносно $\sin x$ і $\cos x$. Використавши універсальну підстановку, дістанемо:

$$I = \int \frac{1}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t^2+4t+4}dt = \int \frac{1}{(t+2)^2}dt = -\frac{1}{t+2} + C$$

Повертаючись до старої змінної, одержимо

$$I = \int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x + 5}dx = -\frac{1}{tg\frac{x}{2} + 2} + C.$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \frac{1}{4\sin(x) + 3\cos(x) + 5}\,dx \to \frac{-1}{\left(\tan\left(\frac{1}{2}\cdot x\right) + 2\right)}$$

Приклад 12. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

Використавши універсальну підстановку, дістанемо

$$I = \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt = -2\int \frac{1}{t^2-2t-1}dt.$$

Квадратний тричлен $t^2 - 2t - 1$ має корені $1-\sqrt{2}$ та $1+\sqrt{2}$. Тому

$$\frac{1}{t^2-2t-1} = \frac{A}{t-(1-\sqrt{2})} + \frac{B}{t-(1+\sqrt{2})} = \frac{A\left(t-(1+\sqrt{2})\right) + B\left(t-(1-\sqrt{2})\right)}{t^2-2t-1}.$$

Надаючи змінній t значення $1-\sqrt{2}$ та $1+\sqrt{2}$, дістанемо: $-2\sqrt{2}A=1$, $2\sqrt{2}B=1$. Звідки отримаємо: $A=-\frac{\sqrt{2}}{4}$, $B=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Отже, $$I=-2\int\frac{1}{t^2-2t-1}dt=-2\left(\int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}}{t-(1-\sqrt{2})}dt+\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{t-(1+\sqrt{2})}dt\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ln\left|t-(1-\sqrt{2})\right|-\ln\left|t-(1+\sqrt{2})\right|\right)+C=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{tg\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|+C\cdot$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int\frac{1}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx\rightarrow\sqrt{2}\cdot\operatorname{atanh}\left[\frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\tan\left(\frac{1}{2}\cdot x\right)-2\right)\cdot\sqrt{2}\right]$$

Зауваження **1.** При знаходженні інтегралів за допомогою програми **Mathcad** часто первісна (результат) виражається через обернені гіперболічні функції (див. лістинг останнього прикладу). Щоб уникнути обернених гіперболічних формул можна скористатись явним вираженням обернених гіперболічних функцій через логарифмічні функції:

$y=arcsh(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $y=arcch(x)=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$, для $x\geq 1$ і $-\infty<y\leq 0$;

$y=arcch(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, для $x\geq 1$ і $0\geq y<+\infty$;

$y=arcth(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, для $|x|<1$;

$y=arccth(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, для $|x|>1$.

Зауваження **2.** На практиці універсальну тригонометричну підстановку використовують, якщо $\sin x$ і $\cos x$ входять у невисокому степені (інакше розрахунки будуть дуже складні).

Разом з тим, в окремих випадках, для знаходження інтеграла вигляду $I=\int R(\sin x,\cos x)dx$ можна обійтися без універсальної тригонометричної підстановки.

1⁰. Підінтегральна функція $R(\sin x,\cos x)$ є непарною відносно $\sin x$, тобто $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, тоді можна скористатись підстановкою $\cos x=t$, $-\sin xdx=d\cos x=dt$.

2⁰. Підінтегральна функція $R(\sin x,\cos x)$ є непарною відносно $\cos x$, тобто $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, тоді можна скористатись підстановкою $\sin x=t$, $\cos xdx=dt$.

3^0. Підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ є парною відносно $\sin x$ і $\cos x$ сукупно, тобто: $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, тоді можна скористатись підстановкою $tg\, x = t$ або $ctg\, x = t$. У цьому випадку: $tg\, x = t,$ $x = arctg\, t,$ $dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt,$ $\sin^2 x = \dfrac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+tg^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2}$.

Приклад 13. Знайти інтеграл $I = \displaystyle\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx$.

► Підінтегральна функція є непарною відносно $\sin x$, тому можна скористатись підстановкою $\cos x = t$, $-\sin x dx = d\cos x = dt$.

$$I = \int \frac{(1+\sin^2 x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} \cdot \sin x dx = -\int \frac{2-\cos^2 x}{2\cos^2 x - 1} d\cos x) =$$

$$= -\int \frac{2-t^2}{2t^2-1}dt = \int \frac{t^2-2}{2t^2-1}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t^2-4}{2t^2-1}dt = \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{2}\int \frac{1}{2t^2-1}dt =$$

$$= \frac{1}{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}}\int \frac{1}{\left(\sqrt{2}t\right)^2 - 1^2} d\left(\sqrt{2}t\right) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1} + C =$$

$$= \frac{1}{2}t - \frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1} + C = \frac{1}{2}t + \frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}t+1}{\sqrt{2}t-1} + C.$$

Таким чином,

$$I = \int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x}dx = \frac{1}{2}\cos x + \frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}\cos x + 1}{\sqrt{2}\cos x - 1} + C .$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \frac{\sin(x) + \sin(x)^3}{\cos(2x)}\, dx \rightarrow \frac{3}{4}\cdot\sqrt{2}\cdot \operatorname{atanh}\left(\cos(x)\cdot\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\cos(x)$$

Щоб одержати результат, який не містить обернену гіперболічну функцію, потрібно зробити заміну за наведеною вище формулою.

Приклад 14. Знайти інтеграл $I = \int \cos^3 x \sin^2 x dx$.

Підінтегральна функція є непарною відносно $\cos x$, тому скористаємось підстановкою $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$.

$$\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^2 x \sin^2 x \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)\sin^2 x\, d\sin x =$$

$$= \int (1-t^2)\cdot t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C .$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \cos(x)^3\cdot\sin(x)^2\, dx \rightarrow \frac{-1}{5}\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)^4 + \frac{1}{15}\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)^2 + \frac{2}{15}\cdot\sin(x)$$

Одержаний результат відрізняється за формою від результату, одержаному традиційним методом.

Щоб одержати результат у потрібному вигляді, спочатку виконаємо підготовчу роботу і зробимо заміну в „”ручному режимі”, а потім знайдемо інтеграл за допомогою програми Mathcad і виконаємо підстановку

$$\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^2 x \sin^2 x \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)\sin^2 x\, d\sin x = \int (1-t^2)t^2 dt .$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \left(1-t^2\right)\cdot t^2\, dt \rightarrow \frac{-1}{5}\cdot t^5 + \frac{1}{3}\cdot t^3 \text{ substitute}, t = \sin(x) \ \rightarrow \frac{-1}{5}\cdot \sin(x)^5 + \frac{1}{3}\cdot \sin(x)^3$$

Приклад 15. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$.

Підінтегральна функція є парною відносно $\sin x$ і $\cos x$ сукупно, а тому можна скористатись підстановкою $tg\, x = t$.

$$I = \int \frac{(1+t^2)^2(1+t^2)}{t^4(1+t^2)}dt = \int\left(\frac{1}{t^4}+\frac{2}{t^2}+1\right)dt = -\frac{1}{3t^3}-\frac{2}{t}+t+C =$$
$$= -\frac{1}{3tg^3 x}-\frac{2}{tg\, x}+tg\, x + C .$$

Лістинг знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int \frac{1}{\sin(x)^4\cdot\cos(x)^2}\, dx \rightarrow \frac{-1}{3\cdot\sin(x)^3\cdot\cos(x)} + \frac{4}{3\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)} - \frac{8}{3\cdot\sin(x)}\cdot\cos(x)$$

Одержаний результат відрізняється від результату, одержаним традиційним методом.

Щоб одержати результат у потрібному вигляді, спочатку, за допомогою програми Mathcad, спростимо підінтегральну функцію, виконавши формальні заміни, а потім знайдемо інтеграл від спрощеної функції за допомогою програми Mathcad і виконаємо підстановку.

Лістинг виконаних робіт має вигляд:

$$\text{tgx} = t \quad x = \text{arctgt} \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\int \frac{1}{\sin(x)^4\cdot\cos(x)^2}\, dx \qquad \frac{1}{\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2\cdot\frac{1}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2} \text{ simplify } \rightarrow \frac{1}{t^4}\cdot\left(1+t^2\right)^2$$

$$\int \frac{1}{t^4}\cdot\left(1+t^2\right)^2 dt \rightarrow t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3\cdot t^3} \text{ substitute}, t = \tan(x) \ \rightarrow \tan(x) - \frac{2}{\tan(x)} - \frac{1}{3\cdot\tan(x)^3}$$

Результати співпадають.

6.3. Інтегрування деяких типів функцій, що містять ірраціональності

1⁰. Інтеграл вигляду $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{l}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ за допомогою підстановки $t^n=\frac{ax+b}{cx+d}$ при $ad\neq bc$, де n спільний знаменник дробів $\frac{m}{l},\ldots,\frac{r}{s}$ зводиться до інтеграла від раціональної функції від *t*.

Зокрема, при $a=1,\quad b=0,\quad c=0,\quad d=1$ інтеграл і підстановка мають вигляд: $\int R\left(x,x^{\frac{m}{l}},\ldots,x^{\frac{r}{s}}\right)dx,\ t^n=x.$

Приклад 16. Знайти інтеграл $I=\int\frac{1}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}+(2x+1)^{\frac{1}{2}}}dx$.

Оскільки спільним знаменником дробів $\frac{2}{3},\ \frac{1}{2}$ є число $n=6$, то виконаємо підстановку $2x+1=t^6,\ dx=3t^5dt$. Отже,

$$I=\int\frac{3t^5dt}{t^4+t^3}=3\int\frac{t^2dt}{t+1}=3\int\frac{t^2-1+1}{t+1}dt=3\int\left(t+1+\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{3}{2}t^2+3t+3\ln|t+1|+C.$$

Повернемося до старої змінної. Оскільки $t=\sqrt[6]{2x+1}=(2x+1)^{\frac{1}{6}}$, то

$$I=\frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{1}{3}}+3(2x+1)^{\frac{1}{6}}+3\ln\left((2x+1)^{\frac{1}{6}}-1\right)+C.$$

Звертаємо увагу на те, що безпосереднє застосування програми Mathcad для знаходження інтегралів даного типу дає дуже довгий аналітичний вираз, який не піддається копіюванню, а тому не зручний для використання (у цьому легко пересвідчитись). Тому, при знаходженні інтегралів даного типу, пропонується зробити заміну в ручному режимі, потім, за допомогою команди substitute, повернутись до старої змінної.

Лістинг виконаних робіт може мати вигляд:

$$I(x):=\int\frac{1}{(2\cdot x+1)^{\frac{2}{3}}-(2\cdot x+1)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$2x+1=t^6\qquad x=\frac{1}{2}\cdot\left(t^6-1\right)\qquad dx=3t^5dt\qquad t:=\sqrt[6]{2x+1}$$

$$I(t):=\int\frac{3t^5}{t^4-t^3}\,dt\rightarrow 3\cdot t+\frac{3}{2}\cdot t^2+3\cdot\ln(t-1)$$

$$I(t)\ \text{substitute},t=\sqrt[6]{2\cdot x+1}\ \rightarrow 3\cdot(2\cdot x+1)^{\frac{1}{6}}+\frac{3}{2}\cdot(2\cdot x+1)^{\frac{1}{3}}+3\cdot\ln\left[-1+(2\cdot x+1)^{\frac{1}{6}}\right]$$

Одержані результати співпадають.

Приклад 17. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}$.

Перетворимо квадратний тричлен до вигляду $x^2 - 6x + 8 = \,= (x-3)^2 - 1$ і зробимо заміну $x - 3 = t,\ dx = dt$. Тоді

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) + C = \ln(x - 3) + \sqrt{x^2 - 6x + 8} + C.$$

Лістинг запланованих робіт може мати вигляд:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6\,x + 8}}\,dx \to \ln\left[x - 3 + \left(x^2 - 6\cdot x + 8\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Завдання для самостійної роботи

1. Користуючись методом безпосереднього інтегрування, обчислити невизначені інтеграли.

1) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}dx$, 2) $\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}dx$, 3) $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$, 4) $\int \frac{tgx}{\sin 2x}dx$.

2. Користуючись інваріантністю формули інтегрування (підведення під знак диференціала), обчислити інтеграли.

1) $\int (x+9)^{15}dx$, 2) $\int \frac{dx}{(3x-2)^7}$, 3) $\int \sqrt{3-2x}dx$, 4) $\int \frac{x^4}{\sqrt{3+2x^5}}dx$.

3. Застосовуючи потрібну заміну змінної, обчислити інтеграли.

1) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+3}dx$, 2) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$, 3) $\int \frac{e^{2x}}{e^x+5}dx$, 4) $\int \frac{1}{\sqrt{3+e^x}}dx$.

4. Застосовуючи інтегрування частинами, обчислити інтеграли.

1) $\int x\sin 2x dx$, 2) $\int x\cos^2 x dx$, 3) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$, 4) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$.

5. Обчислити інтеграли, що містять дробово-раціональні функції.

1) $\int \frac{x^2+1}{x(x+1)(x-1)}dx$, 2) $\int \frac{x^3}{x^2-4}dx$, 3) $\int \frac{1}{x^2(x-1)}dx$, 4) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$,

5) $\int \frac{1}{x(x^2+2)}dx$, 6) $\int \frac{x}{x^3-1}dx$, 7) $\int \frac{1}{x^4+2x^2+1}dx$.

6. Обчислити інтеграли від тригонометричних функцій.

1) $\int \cos^3 x\sin x dx$, 2) $\int \sin^3 x dx$, 3) $\int \frac{1}{\sin^3 x}dx$, 4) $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}dx$,

5) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$, 6) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx$, 7) $\int \frac{1}{3+2\sin x+\cos x}dx$.

7. Обчислити інтеграли від ірраціональних функцій.

1) $\int \frac{\sqrt{x}}{3x-\sqrt[3]{x^2}}dx$, 2) $\int \frac{1}{x(\sqrt{x}-\sqrt[5]{x})}dx$, 3) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}dx$, 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}dx$.

Індивідуальні завдання

Користуючись програмою Mathcad обчислити інтеграли.

№	Внесення під знак диференціалу	Інтегрування за частинами	Розклад на прості дроби	Інтегрування тригонометри ч-них функцій	Інтегрування ірраціональних функцій
1	$\int 3^{2x}dx$	$\int \ln(x^2+1)dx$	$\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$	$\int \sin 3x\cos xdx$	$\int \frac{(x+1)}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$
2	$\int e^{2-x^3}x^2dx$	$\int xe^{3x}dx$	$\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$	$\int \cos^2 3xdx$	$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}+1}dx$
3	$\int \cos(2x-3)dx$	$\int x\sin 2xdx$	$\int \frac{x^3dx}{x^2-4}$	$\int \sin^2 xdx$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$
4	$\int e^x\sin(e^x)dx$	$\int x3^x dx$	$\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$	$\int \sin^2\frac{x}{2}dx$	$\int \frac{1}{\sqrt[3]{3x+1}-1}dx$
5	$\int \sin^5 x\cos xdx$	$\int xarctgxdx$	$\int \frac{dx}{x^2-8x)}$	$\int \sin 3x\sin xdx$	$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$
6	$\int \sin(4-5x)dx$	$\int xe^x dx$	$\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$	$\int \cos^5 xdx$	$\int \frac{\sqrt{x}}{3x-\sqrt[3]{x^2}}dx$
7	$\int 2e^{-3x}dx$	$\int x\cos 5xdx$	$\int \frac{x^3}{x-1}dx$	$\int \sin^3 xdx$	$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$
8	$\int e^{\frac{1}{x}}x^{-2}dx$	$\int xe^{-x}dx$	$\int \frac{(x-4)dx}{(x-2)(x-3)}$	$\int \sin^4 xdx$	$\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}dx$
9	$\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}dx$	$\int \arccos xdx$	$\int \frac{1}{x^2-6x+13}dx$	$\int \sin^3 x\cos^2 xdx$	$\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$
10	$\int (1-x^2)^7 xdx$	$\int xe^{-\frac{x}{3}}dx$	$\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx$	$\int \cos^3 x\sin xdx$	$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$
11	$\int \cos^3 x\sin xdx$	$\int \sqrt{x}\ln xdx$	$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$	$\int \cos^3 xdx$	$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$
12	$\int \frac{1}{x\ln^3 x}dx$	$\int (2x+1)\sin xdx$	$\int \frac{(3x^2+2x-3)dx}{x^3-x}$	$\int \cos^7 xdx$	$\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^3}}dx$
13	$\int (x+19)^{19}dx$	$\int x^3\ln xdx$	$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}dx$	$\int \sin^2\frac{x}{2}dx$	$\int \frac{\sqrt{x+4}+1}{\sqrt[3]{x}}dx$

Лабораторна робота № 9

Тема: ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Мета роботи: Ознайомитись з основними можливостями програми Mathcad для обчислення визначених інтегралів.

Зміст роботи:

1. Вивчити можливості програми Mathcad для обчислення визначених інтегралів.
2. Ознайомитись із застосуваннями визначеного інтеграла.

Зміст звіту: Короткі теоретичні відомості. Постановка завдань та результати їх виконання.

1^0. Обчислення визначеного інтеграла

Нехай на відрізку $[a,\ b]$ визначена неперервна функція $y = f(x)$ така, що $f(x) \ge 0$ для усіх $x \in [a,\ b]$. Розіб'ємо відрізок $[a,\ b]$ на n частин: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Довжина цих частин $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1,\ 2, \ldots, n$. Виберемо точки ξ_k такі, що $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$ і обчислимо $f(\xi_k)$. Інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a,\ b]$ називається сума вигляду

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \qquad (1)$$

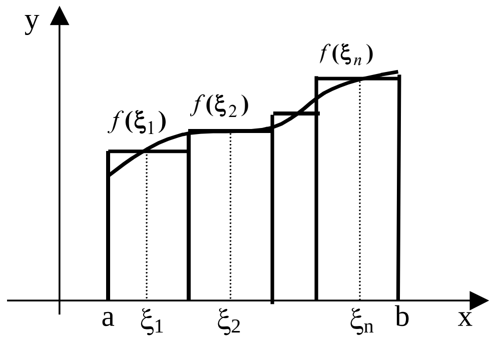


Рис. 1

Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ н а відрізку $[a,\ b]$ називається границя інтегральної суми (1) при умові, що довжина найбільшого із елементарних відрізків прямує до нуля

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\,. \qquad (2)$$

Геометрично інтегральна сума або визначений інтеграл (у даному випадку) виражають площу криволінійної трапеції.

2^0. Основні властивості визначеного інтеграла:

1. $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$;

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$;

3. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$;

4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \quad c \in [a;b]$;

6. Якщо m та M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ $(a < b)$, тобто $m \le f(x) \le M$, то

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

7. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, де $a < b$ то знайдеться таке значення $\xi \in [a,b]$, що виконується рівність

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Число $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ називається середнім значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

3⁰. Правила обчислення визначеного інтеграла

Формула Ньютона-Лейбніца. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то визначений інтеграл обчислюється за формулою

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{3}$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі. Нехай функція f(x) неперервна на відрізку $[a,b]$. Зробимо підстановку $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна разом з своєю похідною $\varphi'(t)$ на $\alpha \le t \le \beta$, $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$. Тоді, якщо складна функція $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на $[\alpha, \beta]$, то має місце рівність

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{4}$$

Інтегрування частинами. Нехай функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a,b]$. Тоді має місце формула

$$\int\limits_a^b udv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu. \tag{5}$$

4^0. Невласні інтеграли

Невласними інтегралами називаються: інтеграли з нескінченими межами; інтеграли від необмежених функцій.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і інтегровна на довільному відрізку $[a,t]$, Якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_a^t f(x)dx$, то її називають *невласним інтегралом першого роду* від функції $f(x)$ на інтервалі $[a,+\infty]$ і позначають $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Якщо границя існує і скінчена, то невласний інтеграл називається *збіжний*, у протилежному випадку – *розбіжний*.

Аналогічно визначаються невласні інтеграл на інтервалах $(-\infty,b]$ і $(-\infty,+\infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int\limits_t^b f(x)dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int\limits_t^c f(x)dx + \lim_{t\to+\infty}\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx.$$

Точку $x = b$ називають *особливою точкою функції* $f(x)$, якщо $f(x)\to\infty$ при $x\to b-0$.

Нехай функція неперервна на відрізку $[a,b-\delta]$ при довільному $\delta > 0$ такому, що $b-\delta > a$. Тоді, якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{\delta\to0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx$, то її називають *невласним інтегралом другого роду* і записують: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\delta\to0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx$.

Аналогічно, якщо особливою точкою є точка $x = a$, то невласний інтеграл визначається так: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)dx$.

Якщо вказані границі скінчені, то кажуть, що інтеграли збігаються.

Якщо вказані границі нескінченні або не існують, то інтеграли також називаються невласними інтегралами, але розбіжними.

5^0. Обчислення визначеного інтеграла в програмі Mathcad

В програмі **Mathcad** для обчислення визначених інтегралів є оператор

$$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare \, d\blacksquare$$

Для введення визначеного інтеграла потрібно на поличці **Calculus** клацнути ЛКМ на відповідній кнопці, у відповідні знакомісця ввести функцію, ім'я змінної інтегрування та межі інтегрування. Після введення визначеного інтеграла його можна обчислити точно або наближено (із певною кількістю десяткових знаків після коми).

Для ***точного*** обчислення визначеного інтеграла потрібно, після його введення, клацнути на кнопці символьного знаку дорівнює "→" і натиснути клавішу "**Enter**".

Для ***наближеного*** обчислення інтеграла потрібно, після його введення, натиснути клавішу "=".

Зауваження 1. У випадку, коли результат є скінчене десяткове число, результати, одержані обома способами, співпадають.

Зауваження 2. Для одержання результату із потрібною кількістю знаків після коми потрібно у головному меню ЛКМ клацнути на кнопці **Формат,** а далі у випадаючому меню – на кнопці **Результат...** Після цього появиться вікно **Формат результату**, в якому вибрати формат **Decimal** і встановити потрібну кількість десяткових знаків (максимальна кількість знаків після коми – 15).

Приклад 1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_2^3 3x^2 dx$, б) $\int_0^{\pi} \sin x dx$, в) $\int_1^{\ln 2} xe^x dx$, г) $\int_0^{\pi} x^4 \sin\frac{x}{2} dx$.

Лістинг для знаходження інтегралів має вигляд:

$$\int_2^3 x^2\,dx \rightarrow \frac{19}{3} \qquad \int_2^3 x^2\,dx = 6.33 \qquad \int_2^3 x^2\,dx = 6.33333 \qquad \int_2^3 x^2\,dx = 6.33333333333333$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx \rightarrow 2 \qquad \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = 2$$

$$\int_1^{\ln(2)} x\cdot\exp(x)\,dx \rightarrow 2\cdot\ln(2) - 2 \qquad \int_1^{\ln(2)} x\cdot\exp(x)\,dx = -0.61371$$

$$\int_0^{\pi} x^4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx \rightarrow 16\cdot\pi^3 - 384\cdot\pi + 768 \qquad \int_0^{\pi} x^4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx = 57.7288$$

$$\int_1^2 x^3 \exp(2x)\,dx \rightarrow \frac{17}{8}\cdot\exp(4) - \frac{1}{8}\cdot\exp(2) \qquad \int_1^2 x^3 \exp(2x)\,dx = 115.0974$$

Як правило, програма Mathcad визначені інтеграли обчислює без проблем. Однак, у деяких випадках, точні значення можуть отримуватись у вигляді довгих виразів, якими не дуже зручно користуватись. У цьому випадку доцільно виконати заміну змінної.

Приклад 2. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 \frac{\sqrt[6]{x}+10}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx$.

Даний інтеграл містить ірраціональність, якої можна уникнути, зробивши підстановки:

$x = t^6$; $dx = 6t^5 dt$; при $x = 1,\ t = 1$; при $x = 2,\ t = \sqrt[6]{2}$.

Після цього інтеграл набуде вигляду $\int_1^{\sqrt[6]{2}} \frac{t+10}{t^3+t^2}\cdot 6t^5 dt$, який обчислюється значно простіше.

Лістинг для знаходження вихідного і перетвореного інтеграла має вигляд:

Результат обчислення інтеграла за допомогою символічного знака дорівнює $\rightarrow$

$$\int_1^2 \frac{\sqrt[6]{x}+10}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$$

$$-18\cdot\mathrm{Re}\left(\mathrm{atanh}\left(\sqrt{2}\right)\right) + \frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{2^2} + 18\cdot\ln\left(-1+\sqrt[6]{2}\right) + 54\cdot\sqrt[6]{2} - 9\cdot\ln\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{2}+1\right) +$$

$$+ 18\cdot\sqrt{2} - 18\cdot\ln\left(1+\sqrt[6]{2}\right) + 9\cdot\ln\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[6]{2}+1\right) - 27\cdot\sqrt[3]{2} - 18\cdot\ln\left(-1+\sqrt[3]{2}\right) +$$

$$+ 9\cdot\ln\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1\right) + 54\cdot\ln(2) - \frac{93}{2}$$

Результат обчислення перетвореного інтеграла за допомогою символічного знака дорівнює

$$\int_1^{\sqrt[6]{2}} \frac{t+10}{t^3+t^2}\cdot 6t^5\,dt \rightarrow \frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{2^2} + 18\cdot\sqrt{2} - 27\cdot\sqrt[3]{2} + 54\cdot\sqrt[6]{2} - 54\cdot\ln\left(1+\sqrt[6]{2}\right) - \frac{93}{2} + 54\cdot\ln(2)$$

Результат обчислення вихідного і перетвореного інтеграла за допомогою клавіші дорівнює "="

$$\int_1^2 \frac{\sqrt[6]{x}+10}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx = 4.7228 \qquad \int_1^{\sqrt[6]{2}} \frac{t+10}{t^3+t^2}\cdot 6t^5\,dt = 4.7228$$

Зауважимо, що при обчисленні вихідного інтеграла за допомогою символічного знака дорівнює, із за значної довжини результату, останній довелось розірвати на три частини.

6^0. Обчислення невласних інтегралів

Обчислення невласних інтегралів здійснюється аналогічно, як і обчислення визначених інтегралів.

Приклади обчислення невласних інтегралів першого та другого роду проілюстровано на нижче наведеному лістингу.

Невласні інтеграли першого роду

$$\int_0^{\infty} x\cdot e^{-x^2}\,dx = 0.5 \qquad \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \to \pi \qquad \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx \to \infty$$

Невласні інтеграли другого роду

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2 \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \to \infty \qquad \int_2^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx \to \infty \qquad \int_2^3 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx + \int_3^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx \to \infty$$

7⁰. Обчислення площ плоских фігур

1. Площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x) \ge 0,\quad y = 0,$ $x = a,\ x = b$, обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{7}$$

Приклад 3. Знайти площу фігури, обмежену параболою $y = 4x - x^2$ і віссю Ox.

Парабола перетинає вісь Ox в точках $O(0{,}0)$ і $M(4{,}0)$, тому площу фігури можна знайти за формулою (7). Лістинг має вигляд

$$S := \int_0^4 \left(4\cdot x - x^2\right) dx \to \frac{32}{3}$$

2. Площа фігури, обмеженої лініями $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ $(f_2(x) \ge f_1(x))$, $x = a,\ x = b$, знаходиться за формулою

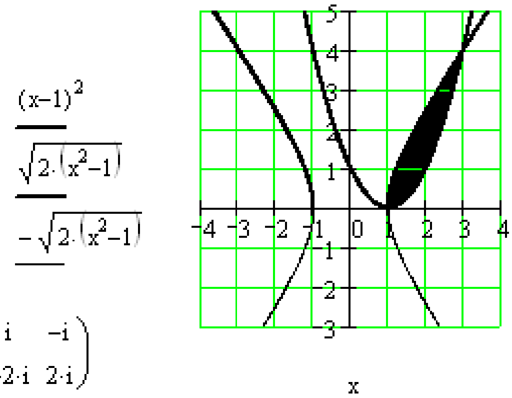
$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx. \tag{8}$$

Приклад 4. Знайти площу фігури, обмежену параболою $y = (x-1)^2$ і гіперболою $x^2 - \dfrac{y^2}{2} = 1.$

Для обчислення площі фігури спочатку потрібно знайти межі інтегрування. Для цього потрібно знайти абсциси точок перетину параболи і гіперболи, тобто розв'язати рівняння $x^2 - \dfrac{(x-1)^4}{2} = 1$ або систему рівнянь: $y = (x-1)^2,\ x^2 - \dfrac{y^2}{2} = 1$. Таким чином, межами інтегрування є: $a = x_1 = 1,\quad b = x_2 = 3.$ Після цього площу фігури можна знайти за формулою (8).

Лістинг розв'язання задачі має вигляд

$$x^2 - \frac{(x-1)^4}{2} = 1 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ i \\ -i \end{pmatrix}$$



або

$$\text{Given} \quad y = (x-1)^2 \quad x^2 - \frac{y^2}{2} = 1 \quad \text{Find}(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & i & -i \\ 0 & 4 & -2\cdot i & 2\cdot i \end{pmatrix}$$

$$\int_1^3 \sqrt{2\cdot(x^2-1)} - (x-1)^2\,dx = 2.087$$

або

$$S := \int_1^3 \sqrt{2\cdot(x^2-1)} - (x-1)^2\,dx \rightarrow \frac{10}{3} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\ln(3\cdot\sqrt{2}+4) + \frac{1}{4}\cdot\sqrt{2}\cdot\ln(2) \qquad S = 2.087$$

3. Якщо лінія задана параметричними рівняннями $x = x(t),\ y = y(t),$ то площа криволінійної трапеції, обмеженої цією лінією, віссю Ox та прямими $x = a,\ x = b$, знаходиться за формулою

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt\,. \qquad (9)$$

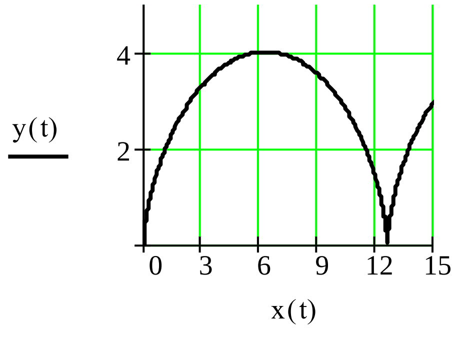
Приклад 5. Знайти площу фігури, обмежену однією аркою циклоїди $x(t) = 2(t - \sin(t))$, $y(t) = 2(1 - \cos(t))$ і віссю Ox.

У цього випадку площу фігури можна знайти за формулою (9), де $x'(t) = 2(1 - \cos(t)),\ t_1 = 0,\ t_2 = 2\pi$.

Лістинг розв'язання задачі має вигляд

$$x(t) := 2(t - \sin(t)) \qquad y(t) := 2(1 - \cos(t))$$

$$\int_0^{2\pi} \left[2(1-\cos(t))\cdot\frac{d}{dt}2(t-\sin(t)) \right] dt = 37.699$$



або

$$\int_0^{2\pi} \left[2(1-\cos(t))\cdot\frac{d}{dt}2(t-\sin(t)) \right] dt \rightarrow 12\cdot\pi$$

4. Площа криволінійного сектора, обмеженого кривою, заданою в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\theta)$ і двома полярними кутами $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ $(\theta_1 < \theta_2)$, обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)d\theta . \tag{10}$$

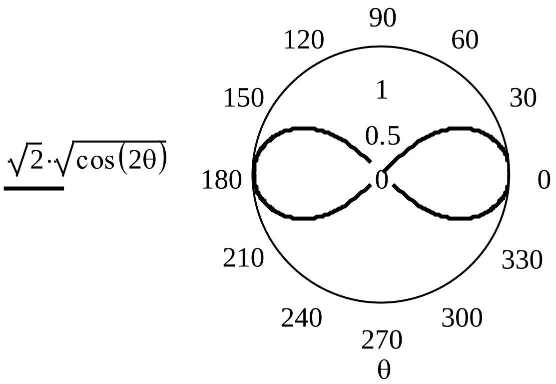
Приклад 6. Знайти площу фігури, обмежену лемніскатою $\rho^2 = 2\cos 2\theta$.

У цього випадку площу фігури можна знайти за формулою (10). Четвертій частині шуканої площі відповідає зміна θ від 0 до $\frac{\pi}{4}$. Лістинг розв'язання задачі має вигляд

$$4\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos(2\theta)\, d\theta = 2$$

або

$$S := 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos(2\theta)\, d\theta \rightarrow 2$$



8^0. Обчислення довжини дуги плоскої кривої

1. Якщо крива задана явно $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, тоді її довжина обчислюється за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx . \tag{11}$$

Приклад 7. Знайти довжину дуги кривої $y^2 = x^3$ від $x = 0$ до $x = 1$ $(y \geq 0)$.

З рівняння кривої знаходимо: $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Довжину дуги знаходимо за формулою (11). Лістинг розв'язання задачі має вигляд

$$L := \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}\cdot x}\, dx \rightarrow \frac{13}{27}\cdot\sqrt{13} - \frac{8}{27} \qquad \text{або} \qquad \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}\cdot x}\, dx = 1.44$$

2. Якщо крива задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, тоді її довжина обчислюється за формулою

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt . \tag{12}$$

Приклад 8. Знайти довжину дуги кривої $x=\cos^5 t,\ \ y=\sin^5 t$ від $t_1=0$ до $t_2=\dfrac{\pi}{2}$.

Знайдемо похідні за параметром: $x'=-5\cos^4 t\sin t$, $y'=5\sin^4 t\cos t$. Довжину дуги знаходимо за формулою (12). Якщо знайдені похідні підставити у формулу (12), то одержимо результат, наведений на наступному лістингу

$$L := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(-5\cos(t)^4\cdot\sin(t)\right)^2+\left(5\sin(t)^4\cdot\cos(t)\right)^2}\,dt \rightarrow \frac{5}{8}\cdot\sqrt{4}+\frac{5}{48}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}\cdot\mathrm{Re}\left(\mathrm{atanh}\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\right)\right)$$

або $\dfrac{5}{8}\cdot\sqrt{4}+\dfrac{5}{48}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}\cdot\mathrm{Re}\left(\mathrm{atanh}\left(\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\right)\right)=1.725$

Виконаємо перетворення підкореневого виразу

$$\left(-5\cdot\cos(t)^4\cdot\sin(t)\right)^2+\left(5\cdot\sin(t)^4\cdot\cos(t)\right)^2 = 25\cdot\sin(t)^2\cdot\cos(t)^8+25\cdot\cos(t)^2\cdot\sin(t)^8 =$$

$$25\cdot\frac{1}{4}\cdot\sin(2\cdot t)^2\cdot\left(\cos(t)^6+\sin(t)^6\right) = 25\cdot\frac{1}{4}\cdot\sin(2\cdot t)^2\cdot\left(\cos(t)^4-\cos(t)^2\cdot\sin(t)^2+\sin(t)^4\right) =$$

$$25\cdot\frac{1}{4}\cdot\sin(2\cdot t)^2\cdot\left[\left(\cos(t)^4+2\cdot\cos(t)^2\cdot\sin(t)^2+\sin(t)^4\right)-3\cos(t)^2\sin(t)^2\right] =$$

$$25\cdot\frac{1}{4}\cdot\sin(2\cdot t)^2\cdot\left(1-3\cdot\cos(t)^2\cdot\sin(t)^2\right) = 25\cdot\frac{1}{4}\cdot\sin(2\cdot t)^2\cdot\left(1-\frac{3}{4}\cdot\sin(2t)^2\right)$$

Тоді одержимо результат, наведений на наступному лістингу

$$L := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5}{2}\cdot\sin(2\cdot t)\cdot\sqrt{\left(1-\frac{3}{4}\cdot\sin(2\cdot t)^2\right)}\,dt \rightarrow \frac{5}{4}+\frac{5}{96}\cdot\sqrt{3}\cdot\ln(3)-\frac{5}{48}\cdot\sqrt{3}\cdot\ln\left(7\cdot\sqrt{3}-12\right)$$

або $\dfrac{5}{4}+\dfrac{5}{96}\cdot\sqrt{3}\cdot\ln(3)-\dfrac{5}{48}\cdot\sqrt{3}\cdot\ln\left(7\cdot\sqrt{3}-12\right)=1.725$

Чисельне обчислення інтеграла від спрощеного виразу дає той самий результат

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5}{2}\cdot\sin(2t)\cdot\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin(2t)^2}\,dt = 1.725$$

3. Нехай гладка крива задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ у полярних координатах, $\alpha \le t \le \beta$, тоді її довжина обчислюється за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi. \tag{13}$$

Приклад 9. Знайти довжину дуги кривої $\rho = \sin^3\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$, від $\theta_1 = 0$ до $\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

Знайдемо похідну $\rho = \sin^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$. Довжину дуги знаходимо за формулою (13). Результат обчислень наведено на наступному лістингу

$$L := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)^6 + \left(\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)^2}\, d\theta \to \frac{1}{32} \cdot \frac{\left(-36 - 14\cdot\pi + 21\cdot\sqrt{3} + 8\cdot\pi\cdot\sqrt{3}\right)}{\left(-7 + 4\cdot\sqrt{3}\right)} \cdot \sqrt{16} \qquad L = 0.136$$

Якщо виконаємо перетворення підінтегрального виразу, то одержимо результат:

$$L := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{3}\right)^2 d\theta \to \frac{-3}{8} \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{4} \cdot \pi \qquad L = 0.136$$

9[0]. Об’єм тіла обертання

Об’єм тіла, що утворене обертанням навколо осі *Ox* криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, прямими $x = a$ і $x = b$ та віссю *Ox* ($y = 0$), обчислюється за формулою

$$V == \pi \int_a^b f^2(x) dx. \tag{14}$$

Якщо фігура, обмежена кривими $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$ $(0 \le f_1(x) \le f_2(x))$ і прямими $x = a$ і $x = b$, обертається навколо осі *Ox*, то об’єм тіла обертання обчислюється за формулою

$$V == \pi \int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right) dx. \tag{15}$$

Приклад 10. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лінією $y = \sqrt{(x-1)^3}$ і прямою $x = 2$.

Скориставшись формулою (14), дістанемо

$$V := \pi \cdot \int_1^2 (x-1)^3\, dx \to \frac{1}{4} \cdot \pi$$

10^0. Обчислення площі поверхні обертання

Нехай крива задана неперервною функцією $y = f(x) \ge 0$, $a \le x \le b$, обертається навколо осі *Ox*. Тоді площа поверхні, яка утворюється при обертанні графіка функції $y = f(x)$ навколо осі *Ox*, обчислюється за формулою

$$S = 2\pi \int f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \qquad (16)$$

Приклад 11. Обчислити поверхню тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* дуги синусоїди $y = \sin 2x$ від $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

► Знаходимо $f'(x) = 2\cos 2x$. Тоді, скориставшись формулою (16), одержимо

$$S := 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\cdot\sqrt{1 + 4\cos(2x)^2}\,dx \to 2\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5} + \frac{1}{4}\cdot\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right) \qquad S = 9.292$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити інтеграли:

1) $\int_1^3 x^3\sqrt{x^2 - 1}dx$, 2) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{1 + x^4}$, 3) $\int_1^2 x^3 e^{2x}dx$, 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$, 5) $\int_1^{\ln 2} xe^x dx$.

2. Обчислити невласні інтеграли першого роду:

1) $\int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x}dx$, 2) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$, 3) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$, 4) $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$, 5) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

3. Обчислити невласні інтеграли другого роду:

1) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$, 2) $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$, 3) $\int_{0.5}^2 \frac{xdx}{\sqrt{2x-1}}$, 4) $\int_2^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$.

4. Обчислити площу фігури, обмежену лініями:

1) $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4$, 2) $y = -x^2,\ x + y + 2 = 0$,

3) $y^2 = 4x^3,\ y = 2x^2$, 4) $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ y = \frac{1}{x^2}$,

5) $x = 12\cos t + 5\sin t,\ y = 5\cos t - 12\sin t$, 6) $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t$,

7) $\rho = \cos\theta,\ \theta = 0,\ \theta = \pi$.

5. Знайти площу фігури, обмежену трипелюстковою трояндою $\rho = \sin 3\theta$.

Вказівка. Межі інтегрування взяти від $\theta = 0$ до $\theta = \frac{\pi}{6}$, а одержану площу помножити на шість. Побудувати рисунок .

6. Обчислити площу фігури, яка обмежена параболою $y=-x^2+4x-3$ і дотичними до неї в точках $(0;-3)$ і $(3;0)$. Побудувати рисунок.

7. Обчислити довжини дуг кривих:

1) $y=\dfrac{x^2}{2}$ від $x=0$ до $x=1$, 2) $y=1-\ln\cos x$ від $x=0$ до $x=\dfrac{\pi}{6}$,

3) $x=\dfrac{t^3}{3}-t,\ y=t^2+2$ від $t=0$ до $t=3$, 4) $\rho=\theta^2$ від $\theta=0$ до $\theta=\pi$.

8. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями:

1) $y=\dfrac{x}{2}$, $x=4$, $x=6$, 2) $y=\sin x$, $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$, 3) $y=\dfrac{\ln x}{x}$, $x=1$, $x=e$,

4) $y=e^x+6,\ y=e^{2x}$, $x=0$.

9. Обчислити площу поверхні тіла, яке утворюється при обертанні навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями:

1) $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$, , 2) $y=\sin x,\ x\in[0;\pi]$, 3) $y=2ch\left(\dfrac{x}{2}\right)$ від $x=0$ до $x=2$.

Лабораторна робота №10

Тема: ОБЧИСЛЕННЯ КРАТНИХ ТА КРИВОЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ.

Мета роботи: Вивчення можливостей програми MathCad для обчислення подвійних, потрійних та криволінійних інтегралів 1-го та 2-го роду.

Зміст роботи: За допомогою програми MathCad:

1. Обчислити повторний інтеграл.
2. Для зазначених областей D записати подвійний інтеграл від функції $f(x,y)$ у вигляді повторних, взятих у різних напрямах.
3. Обчислити площу області, яка обмежена заданими лініями.
4. Обчислити потрійний інтеграл.
5. Обчислити криволінійний інтеграл.

Зміст звіту: Постановка завдань та їх результати отримані, їх виконання за допомогою програми MathCad та вручну.

Теоретичні відомості

1^0 Подвійний інтеграл

Нехай функція $z = f(x,y)$ визначення в обмеженій області $D \subset R_2$. Розіб'ємо область на n частин D_i, які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких $\Delta S_i, i = 1..n$. У кожній області D_i візьмемо точку P_i, і запишемо інтегральну суму:

$$I = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta S_i \qquad (1)$$

Нехай λ – найбільший з діаметрів області D_i.

Якщо інтегральна сума (1) при $\lambda \to 0$ має скінчену границю, яка не залежить від способу розбиття області D і не залежить від вибору точок P_i в них, то ця границя називається *подвійним інтегралом*.

Подвійний інтеграл позначається

$$\iint_D f(x,y)dxdy, \qquad (2)$$

функція $f(x,y)$ називається інтегрованою в області *D*. Область *D* – область інтегрування.

При обчисленні подвійного інтегралу переходять до обчислення повторного:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1}^{\psi_2} f(x,y)dx \qquad (3)$$

В деяких випадках обчислення подвійних інтегралів значно спрощується, якщо перейти від декартової системи координат до полярної системи координат заміною змінних $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$. Це доцільно робити тоді, коли область D є частиною деякого круга. В цьому випадку справедлива формула:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \sum_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \cdot \rho \cdot d\varphi, \qquad (4)$$

Застосування

1. Площа плоскої фігури обмеженої областю *D:*

$$S = \iint_D dxdy$$

2. Об'єм тіла, яке обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y)$, знизу – областю *D* площини *XOY:*

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy$$

3. Площа поверхні тіла, яке обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y)$, знизу – областю *D* площини *XOY:*

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^{'2} + f_y^{'2}}dxdy$$

4. Маса плоскої пластинки, густина якої $\gamma(x, y)$:

$$m = \iint_D \gamma(x, y)dxdy$$

5. Координати центра маси пластинки. Статичні моменти:

$$x_C = \frac{M_y}{m}, y_c = \frac{M_x}{m}, M_x = \iint_D y \cdot \gamma(x, y)dxdy, M_y = \iint_D x \cdot \gamma(x, y)dxdy$$

6. Момент інерції пластинки:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y)dxdy$$

2^0 Потрійний інтеграл

Нехай функція $f(x, y, z)$ визначена в деякій області $G \subset R_3$. Розіб'ємо область G сіткою поверхонь на n частин G_i, які не мають спільних внутрішніх точок, об'єм яких $V_i, i = 1..n$. У кожній області G_i виберемо точку P_i і утворимо інтегральну суму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i \qquad (5)$$

Нехай λ – найбільший з діаметрів області G_i.

Якщо інтегральна сума (5) при $\lambda \to 0$ має скінчену границю, яка не залежить ні від способу розбиття області, ні від вибору точки P_i, то ця границя називається потрійним інтегралом.

Потрійний інтеграл позначається

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz, \qquad (6)$$

функція $f(x, y, z)$ називається інтегрованою в області *V*. Область *V* – область інтегрування.

При обчисленні потрійного інтегралу переходять до обчислення повторного

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iint_D dxdy\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)dz = \int_a^b dx\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dy\int_{\psi_1}^{\psi_2} f(x, y, z)dz \qquad (7)$$

Часто зручно використовувати обчислення потрійного інтегралу в циліндричній або сферичній системі координат:

1) Циліндрична система координат $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$, то для обчислення потрійного інтегралу отримаємо формулу:

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{G^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\cdot\rho\cdot d\varphi d\rho dz \qquad (8)$$

2) Сферична система координат $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$, то для обчислення потрійного інтегралу отримаємо формулу:

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{G^*} f(\rho\cos\varphi\sin\varphi, \rho\sin\varphi\sin\varphi, \rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi\cdot d\varphi d\rho dz \qquad (9)$$

Застосування

1. Об’єм тіла, яке обмежене замкнутою поверхнею *V*:

$$V = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

2. Маса тіла, яке обмежене замкнутою поверхнею *V*, густина якого $\gamma(x,y,z)$:

$$m = \iiint_V \gamma(x,y,z)dxdydz$$

3. Центр маси пластинки. Статичні моменти:

$$x_C = \frac{M_{yz}}{m}, y_c = \frac{M_{zx}}{m}, z_c = \frac{M_{xy}}{m},$$

$$M_{xy} = \iiint_V z\cdot\gamma(x,y,z)dxdy, M_{xz} = \iiint_V y\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz, M_{yz} = \iiint_V x\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz$$

4. Момент інерції відносно початку координат:

$$I_0 = \int\iint_D (x^2+y^2+z^2)\cdot\gamma(x,y,z)dxdydz$$

3^0 Криволінійний інтеграл 1-го роду

Нехай у площині O_{xy} задано криву AB. На цій кривій визначено обмежену функцію $f(x,y)$. Розіб’ємо криву AB на n частин. На *i-й* дузі $A_{i-1}A_i$ виберемо точку M_i. Складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i, \qquad (10)$$

де Δl_i – довжина дуги $A_{i-1}A_i$, а λ – максимальна довжина дуги.

Якщо при $\lambda \to 0$ інтегральна сума (10) має скінчену границю, яка не залежить від розбиття кривої і вибору точки M_i, то цю границю називають криволінійним інтегралом 1-го роду від функції $f(x,y)$ по кривій AB.

Криволінійний інтеграл 1-го роду позначається:

$$\int_{AB} f(x,y)dl. \qquad (11)$$

При обчисленні криволінійного інтегралу використовуються наступні формули, що залежать від виду представлення кривої AB:

1) Нехай задана крива параметрично: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t),\ t\in(\alpha,\beta) \end{cases}$, тоді

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

2) Нехай задана крива параметрично: $y = f(x), x \in [a,b]$, тоді

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,y(x)) \cdot \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx .$$

3) Нехай задана крива параметрично: $x = x(y), x \in [c,d]$, тоді

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_c^d f(x(y),y) \cdot \sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy .$$

4^0 Обчислення кратних інтегралів за допомогою MathCad.

Для того, щоб обчислити кратні інтеграли, виконайте наступну послідовність дій:

1. Введіть командою панелі Calculus (Вычисления) потрібний оператор інтегрування.
2. Поставте курсор в маркер підінтегральної функції і введіть другий оператор інтегрування. Для обчислення потрійного інтегралу повторіть цю операцію.
3. В маркері останнього пропишіть підінтегральну функцію.
4. Заповніть маркери диференціалів в тому порядку.
5. Для обчислення визначеного інтегралу заповніть відповідно маркери границь інтегрування.

Приклад 1. Символьне і чисельне обчислення кратних інтегралів.

$$\int_a^b \int_{1-7\cdot x}^{1-x} \frac{y}{x}\,dy\,dx \rightarrow -12\cdot b^2 + 6\cdot b + 12\cdot a^2 - 6\cdot a$$

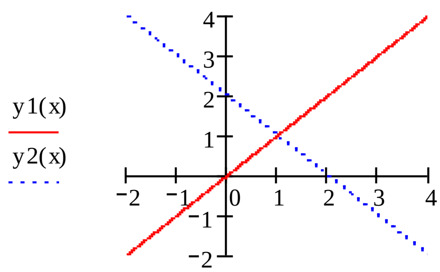
$$\int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 1\,dz\,dy\,dx \rightarrow \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$$

$$\int_1^2 \int_2^3 \int_3^4 x\,dx\,dy\,dz = 3.5 \qquad \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x-y}\,dx\,dy = 0$$

Приклад 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy, D: y = x, x+y = 2, x = 0$.

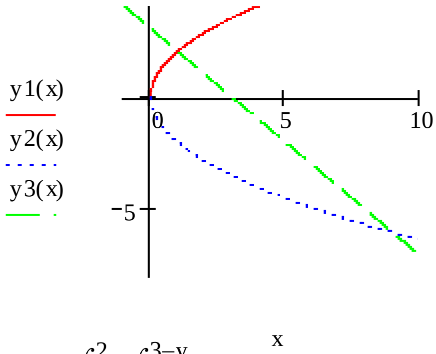
Лістинг знаходження подвійного інтегралу має вигляд:

$y1(x) := x \qquad y2(x) := 2 - x$



$$\int_0^1 \int_0^x \left(x^2 + y^2\right) dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} \left(x^2 + y^2\right) dy\,dx \rightarrow \frac{4}{3}$$

Приклад 3. Обчислити площу плоскої фігури обмеженої лініями $y^2 = 4x, x + y = 3$.
Лістинг знаходження площі фігури має вигляд:



given

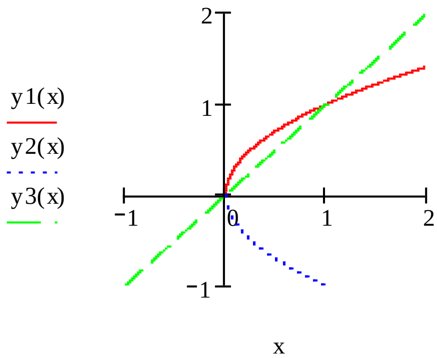
$$y^2 = 4x$$

$$x + y = 3$$

$$\mathrm{Find}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S := \int_{-6}^{2} \int_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} 1 \, dx \, dy \rightarrow \frac{64}{3}$$

Приклад 4. Знайти координати центра маси однорідної фігури, обмеженої лініями $y^2 = x, x = y$.
Лістинг знаходження центра маси фігури має вигляд:



Given

$$y^2 = x$$

$$x = y$$

$$\mathrm{Find}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m := \int_{0}^{1} \int_{y^2}^{y} 1 \, dx \, dy \rightarrow \frac{1}{6} \qquad M_1 := \int_{0}^{1} \int_{y^2}^{y} y \, dx \, dy \rightarrow \frac{1}{12} \qquad M_2 := \int_{0}^{1} \int_{y^2}^{y} x \, dx \, dy \rightarrow \frac{1}{15}$$

$$x := \frac{M_2}{m} \qquad y := \frac{M_1}{m} \qquad x = 0.4 \qquad y = 0.5$$

Приклад 5. Обчислити потрійний інтеграл
$$\iiint_V (x + y + z) dxdydz, V : x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$
Лістинг обчислення інтегралу має вигляд:

$$z(x, y) := 1 - x - y \qquad z1(x, y) := 0 \qquad y(x, z) := 0 \qquad x(y, z) := 0$$

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x} \int_{0}^{1-x-y} (x + y + z) \, dz \, dy \, dx \rightarrow \frac{1}{8}$$

Індивідуальні завдання

Завдання 1. Обчислити повторні інтеграли:

1. $\int_0^1 dx\int_1^2 (x-y)dy$.
2. $\int_0^2 dy\int_0^1 (x^2+2y)dx$.
3. $\int_0^1 dy\int_0^1 \sqrt{xy}\,dx$.
4. $\int_0^1 dy\int_{-1}^0 ye^{xy}dx$.
5. $\int_2^3 dx\int_1^2 \sqrt{x-y}\,dy$.
6. $\int_3^4 dx\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$.
7. $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x^2dy}{1+y^2}$.
8. $\int_{-4}^1 dx\int_{3x}^{4-x^2} (y-x)dy$.
9. $\int_0^2 dx\int_{x/2}^{x} \frac{xdy}{x^2+y^2}$.
10. $\int_0^{2\pi} dx\int_0^{2+\sin y} \frac{x}{2}dx$.
11. $\int_{-2}^2 dx\int_{2x}^3 (yx)dy$.
12. $\int_1^2 dx\int_0^{2x} \frac{x}{y+1}dy$.
13. $\int_0^1 dx\int_0^{5-x} 2xydy$.
14. $\int_0^4 dy\int_{-2}^0 xe^{xy}dx$.
15. $\int_3^4 dy\int_{5y}^{4-y} x^2ydy$

Завдання 2. Для зазначених областей *D* записати подвійні інтеграли від функції $f(x,y)=xy$ у вигляді повторних, взятих у різних напрямах:

1. *D* – прямокутник з вершинами $A(1;\,1), B(1;\,3), C(4;\,3), E(4;\,1)$.
2. *D* – прямокутник з вершинами $O(0;\,0), A(3,\,0), B(3;\,1), C(0;\,1)$.
3. *D* – трикутник з вершинами $O(0;\,0), A(1;\,0), B(1;\,1)$.
4. *D* – трапеція з вершинами $O(0;\,0), A(2,\,0), B(1;\,1), C(0;\,1)$.
5. *D* – паралелограм з вершинами $A(1;\,2), B(2;\,4), C(2;\,7), E(1;\,5)$.
6. *D* – фігура, яка обмежена лініями $y=0,\ y=x,\ x=5$.
7. *D* – фігура, обмежена лініями $x=0,\ y=0,\ x+y=5$.
8. *D* – фігура, обмежена лініями $y=x,\ y=x-4,\ y=0,\ y=2$.
9. *D* – фігура, обмежена кривою $x^2+y^2-8x=0$.
10. *D* – фігура, що міститься в першому квадранті і обмежена лініями $y=x,\ x^2+y^2=2,\ y=0$.
11. *D* – фігура, обмежена лініями $y=x,\ y=x-3,\ y=0,\ y=3$.
12. *D* – паралелограм з вершинами $A(1;1), B(4;1), C(2;3), E(5;3)$.
13. *D* – трикутник з вершинами $O(0;\,0), A(4;\,0), B(4;\,4)$.
14. *D* – фігура, обмежена лініями $x=0,\ y=2,\ x+y=3$.
15. *D* – фігура, обмежена лініями $y=x,\ y=x-4,\ y=0,\ y=-2$.
16. *D* – фігура, обмежена лініями $x=1,\ y=0,\ x+y=5$.

Завдання 3. Обчислити площі областей, обмежених заданими лініями:

1. $4y=x^2-4x,\ x-y-3=0$.
2. $y^2=10x+25,\ y^2=-6x+9$.
3. $y^2=4x+4,\ x+y=2$.
4. $xy=9,\ xy=4,\ y=2,\ y=1$.
5. $xy=4,\ x+y=5$.
6. $2xy=4,\ xy=8,\ 2y=x,\ y=2x$.
7. $xy=1,\ xy=8,\ y^2=x,\ y^2=8x$.
8. $y^2=4x+4,\ y^2=-6x+9$.
9. $y=x^2-4x,\ x-y-3=0$.
10. $xy=4,\ xy=6,\ y=x,\ y=2x$.

11. $y=\ln x,\ x-y=1,\ y=-1$.
12. $xy=4,\ xy=9,\ y=4,\ x=4$.
13. $y=x^2-2x,\ y=x$.
14. $xy=4,\ y=x, x=4$.
15. $y^2=4+x,\ x+3y=0$.
16. $y=2^x, y=2, x=-1$.

Завдання 4. Обчислити потрійні інтеграли:

$\iiint\limits_G (x+y+z)\,dxdydz,\ G$ – область, обмежена площинами $x+y+z=a,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

$\iiint\limits_G y\cos(x+z)\,dxdydz,\ G$ – область, обмежена циліндром $y=\sqrt{x}$ і площинами $y=0,\ z=0,\ x+z=\dfrac{\pi}{2}$.

$\iiint\limits_G xdxdydz,\ G$ – область, обмежена циліндром $x^2+y^2=1$ і площинами $z=0,\ z=3$.

$\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,dxdydz,\ G$ – куб, $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$.

$\iiint\limits_G (x+yz)\,dxdydz,\ G$ – прямокутний паралелепіпед $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 2$.

$\iiint\limits_G (x-y)\,dxdydz,\ G$ – піраміда, утворена площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\quad x+y+z=1$.

$\iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz,\ G$ – прямокутний паралелепіпед $0\le x\le a,\quad 0\le y\le b,\ 0\le z\le c$.

$\iiint\limits_G (1-y)\,dxdydz,\ G$ – область, обмежена площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\quad z=1-x-y$.

$\iiint\limits_G xyzdxdydz,\ G$ – область, обмежена поверхнями $x=0,\ y=0,\ z=0,\quad x^2+y^2+z^2=1$.

10. $\iiint\limits_G xdxdydz,\ G$ – область, обмежена поверхнями $z=1, z=x^2+y^2$.

11. $\iiint\limits_G \dfrac{1}{1-x-y}\,dxdydz,\ G$ – область, обмежена площинами $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$.

12. $\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,dxdydz,\ G$ – область, обмежена площинами $x=0,\ y=0,\ z=-1,$ $x=4, y=5, z=2$.

13. $\iiint\limits_G \dfrac{1}{1-x-y}\,dxdydz,\ G$ – область, обмежена площинами $x=0, x=1, y=2,$ $y=5, z=2, z=4$.

14. $\iiint\limits_G \dfrac{1}{(x+y+z=1)^3}\,dxdydz,\ G$ – область, обмежена площинами $x+z=3, y=3,\ x=0, y=0, z=0$.

15. $\iiint\limits_G dxdydz,\ G$ – область, обмежена площинами $x+y=1, x+y=2$, $y=0, y=1, z=0, z=3$.

16. $\iiint\limits_G (x+yz)\,dxdydz,\ G$ – прямокутний паралелепіпед $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 2$.

Завдання 5. Обчислити криволінійні інтеграли:

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (xy-1)dx + x^2 ydy$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$ по прямій $2x + y = 2$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (xy-1)dx + x^2 ydy$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$ по прямій $4x + y^2 = 4$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (xy-1)dx + x^2 ydy$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$ по дузі еліпса $x = \cos t, y = 2\sin t$.

4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y})dl$ між точками $E(-1;0)$ і $H(0;1)$ по прямій *EH*.

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y})dl$ між точками $E(-1;0)$ і $H(0;1)$ по дузі астроїди $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$.

6. Дано точки $A(3;-6;0),\ B(-2;4;5),\ O(0;0;0)$. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_C xy^2dx + yz^2dy - zx^2dz$ по прямолінійному відрізку *OB*.

7. Дано точки $A(3;-6;0)$ і $B(-2;4;5)$. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_C xy^2dx + yz^2dy - zx^2dz$ по дузі *AB*, що задана рівняннями $x^2 + y^2 + z^2 = 45, 2x + y = 0$.

8. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_{-l} 2xdx - (x + 2y)dy$ вздовж периметра трикутника з вершинами $A(-1;0), B(0;2)$ і $C(2;0)$.

9. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_{+l} y\cos xdx + \sin xdy$ вздовж периметра трикутника з вершинами $A(-1;0), B(0;2)$ і $C(2;0)$.

10. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_{OA} y(x-y)xdx + xdy$ по лінії $y = 2x^2$, де $A(1;2), O(0;0)$.

11. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_{OA} y(x-y)xdx + xdy$ по лінії $y^2 = 4x$, де $A(1;2), O(0;0)$.

12. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_{+l} (x^2 - y)dx$ вздовж периметра прямокутника, що утворений прямими $x = 0; y = 0; x = 1; y = 2$.

13. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_{AB} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ по відрізку прямої $x - 2y = 4$, де $A(0;-2), B(4;0)$.

14. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_{+l} 2x(y-1)dx + x^2dy$ по контуру фігури, яка обмежена лініями $y = x^2; y = 9$.

15. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{OC} ydx + zdy + xdz$ по відрізку прямої *OC*, де $O(0;0;0), C(1;1;1)$.

16. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_{OA} y(x-y)xdx + xdy$ по лінії $y = 2x^2$, де $A(1;2), O(0;0)$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика: Підручник: У 2 кн. – К.: Либідь, 2003. – Кн.. 1. Основні розділи / Г.Й. Призва і ін. – 400 с.

2. Вища математика: Підручник: У 2 кн. – К.: Либідь, 2003. – Кн. 2. Спеціальні розділи / Г.Л. Кулініч і ін. – 400 с.

3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник.– Київ: Вища шк., 1993- 648 с.

4. Вища математика: Збірник задач: Навч. Посібник /Дубовик В.П., Юрик І.І. та ін..– Київ: Вища шк., 1999. - 480 с.

5. Овчинников П.П. Вища математика: Підручник: У 2 чт. – К.: Техніка, 2000. – Ч.1. – 792 с.

6. Овчинников П.П. Вища математика: Підручник: У 2 чт. – К.: Техніка, 2000. – Ч.2. – 792 с.

7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов, т.1.-М.: Наука, 1978. – 456 с.

8. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики, т.1.- М.: Высш. школа, 1978. – 384 с.

9. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. –М.: Наука, 1972.- 240 с.

10. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1977.- 416 с.

11. Довганич М.І., Берча І.В. Кратні і криволінійні інтеграли та їх застосування. – Ужгород, Ужгородський ун-т, 1994. – 37 с.

12. Довганич М.І., Славік В.М. Операційне числення та його застосування. – Ужгород, Ужгородський ун-т, 1997. – 129 с.

ЗМІСТ