ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ І СИСТЕМИ
Т.1, № 1/2 (1998) С. 100-104

INFORMATION TECHNOLOGIES AND SYSTEMS
VOL.1, № 1/2 (1998) P. 100-104

НЕЙРОННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ*

Ф.Э. Гече
Государственный научно-иследовательский институт информационной инфраструктуры, Ужгородский филиал, Ужгород
(Поступила 10 июля 1998 года)

В работе приведены критерии реализуемости функций k-значной логики на одном нейронном элементе с вектором структуры из конечного поля Галуа, а также описаны те операции над функциями k-значной логики, которые сохраняют их свойства реализуемости на одном нейронном элементе.

Практически приемлемые методы синтеза нейронных элементов над конечными полями могут быть широко использованы при построении нейронных сетей для обработки и распознавания дискретных сигналов и изображений. При некоторых ограничениях на число входов и значимость реализуемых логических функций нейронные элементы над соответствующими конечными полями являются универсальными логическими элементами, т. е. любая логическая функция от данного числа аргументов при фиксированной значности k может быть реализована на одном нейронном элементе, а это означает, что их использование приводит к существенному сокращению числа элементов в нейронных сетях.

Пусть L – конечное поле характеристики $p, d = card\ L$ – мощность поля L, ε – примитивный элемент поля L $\left(L=\left\{\varepsilon^i \mid i=0,1,2,\ldots,d-2\right\}\cup\{0\}\right)$ и k – натуральное число $(k \geq 2)$, которое делит $d-1$. Тогда L содержит циклическую группу $H_k=\left\langle\sigma \mid \sigma^k=1\right\rangle$, где $\sigma=\varepsilon^{(d-1)/k}$. Обозначим через G_n прямое произведение n циклических групп H_k, т.е. $G_n = H_k \otimes H_k \otimes \ldots \otimes H_k$.

Функцией k-значной логики от n переменных в алфавите $\left\{1,\sigma,\ldots,\sigma^{k-1}\right\}$ будем называть функцию, реализующую однозначное отображение $f{:}G_n \to H_k$.

Определим на поле L, за исключением точки 0, функцию $L\,sign\,z$ следующим образом: $\forall z \in L\setminus\{0\}$ $L\,sign\,z=\sigma^j$, если $j(d-1)/k \leq \deg z < (j+1)(d-1)/k$, где $j\in\{0,1,2,\ldots,k-1\}$, $\deg z$ – степень элемента z $\left(z=\varepsilon^{\deg z}\right)$.

Говорят, что функция k-значной логики $f{:}G_n \to H_k$ реализуется на одном нейронном элементе над полем L, если существует такой $(n+1)$-мерный вектор $w=(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n)$ $(\omega_i \in L)$, что

$$\forall a=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in G_n \quad f(a)=L\,sign\left(\omega_0 \oplus \sum_{i=1}^{n}\omega_i \otimes \alpha_i\right),$$

где $\oplus$ и $\otimes$ – соответственно, сложение и умножение в поле L.

Вектор w называется вектором структуры нейронного элемента.

Теорема 1. Функция k-значной логики $f{:}G_n \to H_k$ $(k \geq 2)$ реализуется на одном нейронном элементе с вектором структуры $w=(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n)$ над полем L в том и только в том случае, когда существует такая функция $r(x)$, определенная на G_n и принимающая ненулевые значения в L, что

$$r(x)\otimes f(x)=w(x), \tag{1}$$

$$0 \leq \deg r(x) < (d-1)/k, \tag{2}$$

---

* Настоящая статья освещает результаты, полученные автором в рамках гранта Украинского Научно-Технологического Центра по Проектному соглашению № 412 при финансовой поддержке правительства США.

где $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in G_n$, $w(x)=\omega_0\oplus\sum_{i=1}^{n}\omega_i\otimes x_i$.

Доказательство. **Необходимость**. Пусть функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ реализуется на одном нейронном элементе с вектором структуры $w=(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n)(\omega_i\in L)$. Построим функцию $r(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ следующим образом: $\forall a\in G_n$ положим, что

$$\deg r(a)=\deg w(a)-\deg f(a). \qquad (3)$$

Тогда

$$\deg w(a)=\deg r(a)+\deg f(a)$$

и

$$w(x)=f(x)\otimes r(x)\quad (x\in G_n).$$

Предположим, что функция $f(x)$ на элементе $a\in G_n$ принимает значение σ^j. Тогда

$$j(d-1)/k\le\deg w(a)<(j+1)(d-1)/k$$

и

$$j(d-1)/k-\deg\sigma^j\le\deg w(x)-\deg\sigma^j<$$
$$<(j+1)(d-1)/k-\deg\sigma^j.$$

Учитывая, что $\deg f(a)=\deg\sigma^j=j(d-1)/k$ из последнего неравенства и (3) в силу произвольности $a\in G_n$ имеем

$$\forall x\in G_n\quad 0\le\deg r(x)<j(d-1)/k.$$

Достаточность. Пусть для функции k-значной логики $f(x)$ существует такая функция $r(x)\ (r:G_n\to L\setminus\{0\})$, которая удовлетворяет условиям (1) и (2). Покажем, что тогда функция $f(x)$ реализуется на одном нейронном элементе с вектором структуры $w=(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n)$. Из условий (1) и (2) следует $\forall x\in G_n\quad \deg r(x)=\deg w(x)-\deg f(x)$ и

$$0\le\deg w(x)-\deg f(x)<(d-1)/k. \qquad (4)$$

Пусть x принимает значение $a\in G_n$ и $f(a)=\sigma^j$. Так как $\deg\sigma^j=j(d-1)/k$, то из (4) следует

$$j(d-1)/k-\deg\sigma^j\le\deg w(a)-\deg f(a)<$$
$$<(j+1)(d-1)/k-\deg\sigma^j.$$

Отсюда,

$$\forall a\in G_n\ j(d-1)/k\le\deg w(a)<(j+1)(d-1)/k.$$

Значит, функция $f(x)$ реализуется на одном нейронном элементе с вектором структуры $w=(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n)$ над L.

Эта теорема устанавливает критерий реализуемости функции k-значной логики на одном НЭ, но не дает возможность отыскать вектор структуры $w=(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n)$ нейронного элемента. Для нахождения w можно использовать теорему, которую приведем ниже.

Пусть $V_L^n=\{\varphi\mid\varphi:G_n\to L\}$. Рассмотрим V_L^n как k^n- мерное векторное пространство над L и определим в нем скалярное произведение так:

$$a=(\alpha_1,\ldots,\alpha_t),\quad b=(\beta_1,\ldots,\beta_t)\in V_L^n\ (t=k^n)$$

$$(a,b)=\alpha_1\otimes\beta_1^{-1}\otimes\ldots\otimes\alpha_t\otimes\beta_t^{-1}. \qquad (5)$$

По предположению число k делит $d-1$. Если $L=GF(p^m)$ – поле Галуа из p^m элементов, то $d=p^m$ и $p^m-1=qk$, где q натуральное число. Значит, $1=p^m-qk$, а это означает, что p и k взаимно простые числа. При таких ограничениях на p и k скалярный квадрат любого ненулевого вектора $a\in V_L^n$, определенного согласно (5), всегда отличный от нуля.

Пусть $L=GF(p^m)$, ε – примитивный элемент поля L, $\sigma=\varepsilon^{(d-1)/k}$, $g=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ $(\gamma_i\in\{0,1,2,\ldots,k-1\})$ и $\gamma=\gamma_1k^{n-1}+\gamma_2k^{n-2}+\ldots+\gamma_n$. Определим характер χ_γ [1] группы G_n над полем L таким образом:

$$\forall a=(\sigma^{\alpha_1},\ldots,\sigma^{\alpha_n})\in G_n\qquad \chi_\gamma(a)=\sigma^{\alpha_1\gamma_1+\ldots+\alpha_n\gamma_n}.$$

В [2] показано, что если k делит $d-1$ $(d=card\ L)$, то число разных характеров группы G_n над полем L равно $|G_n|$, где $|G_n|$, – порядок группы G_n. Значит, группа характеров $\chi(G_n)$ группы G_n над полем L образует ортогональный базис векторного пространства V_L^n.

Теорема 2. Функция $f(x)$ k-значной логики $(k\ge 2)$ тогда и только тогда реализуется на одном нейронном элементе с вектором структуры $w=(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n)$ над L, когда существует такая функция $r(x)$ $(r\colon G_n\to L\setminus\{0\})$, что

$$0\le \deg r(x)<(d-1)/k,$$

$$\left(r(x)\otimes f(x),\chi_j(x)\right)=0,$$

для всех $\chi_j\in\chi(G_n)$, кроме $j=0,1,k,k^2,\ldots,k^{n-1}$.

Необходимость. Пусть функция k-значной логики $f(x_1,\ldots,x_n)$ реализуется на одном нейронном элементе с вектором структуры $w=(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n)$ над L. Тогда, согласно теореме 1, существует такая функция $r(x)$: $r\colon G_n\to L\setminus\{0\}$, что $0\le \deg r(x)<(d-1)/k$ и

$$r(x)\otimes f(x)=\omega_0\oplus\omega_1\otimes x_1\oplus\ldots\oplus\omega_n\otimes x_n$$

или, что тоже самое,

$$0\le \deg r(x)<(d-1)/k,$$

$$r(x)\otimes f(x)=\omega_0\otimes\chi_0(x)\oplus\omega_1\otimes\chi_k^{n-1}(x)\oplus$$
$$\oplus\ldots\oplus\omega_n\otimes\chi_1(x), \qquad (6)$$

где $\chi_0,\chi_{k^{n-1}},\ldots,\chi_1\in\chi(G_n)$.

Функцию $r(x)\otimes f(x)\in V_L^n$ разложим по базису из характеров группы $\chi(G_n)$

$$r(x)\otimes f(x)=\oplus\sum_{i=0}^{t}s_i\otimes\chi_i(x), \qquad (7)$$

где $s_i=k^{-n}\otimes\left[\oplus\sum_{a\in G_n}r(a)\otimes f(a)\otimes\chi_i^{-1}(a)\right]$, причем

$\oplus\sum$ – символ суммирования в поле L, $t=k^n-1, i=0,1,2,\ldots,k^n-1$. Из (6) и (7) следует, что $s_i=0$, если $i\ne 0,1,k,k^2,\ldots,k^{n-1}$. Учитывая, что $k^n\otimes s_i=\left(r(x)\otimes f(x),\chi_i(x)\right)$, получим

$$\left(r(x)\otimes f(x),\chi_i(x)\right)=0$$

если $i\ne 0,1,k,k^2,\ldots,k^{n-1}$.

Достаточность очевидна.

Если функция k-значной логики $f(x_1,\ldots,x_n)$ удовлетворяет условию теоремы 2, то координаты вектора структуры нейронного элемента, реализующего $f(x_1,\ldots,x_n)$ находятся по следующим формулам:

$$\omega_0=k^{-n}\otimes\left(r(x)\otimes f(x),\chi_0(x)\right),$$

$$\omega_i=k^{-n}\otimes\left(r(x)\otimes f(x),\chi_{k^{n-i}}(x)\right),$$

$i=1,2,\ldots,n$.

Проиллюстрируем синтез нейронного элемента над конечным полем L на таком примере.

Пусть $k=3$, $n=1$, $f(1)=f(\sigma)=1$, $f(\sigma^2)=\sigma^2$ и $L=GF(13)$. Число 2 является примитивным элементом поля L, т.е. $L\setminus\{0\}=\left\{2^j\,\middle|\,j=0,1,\ldots,11\right\}$. Число $k=3$ делит 12. Значит, поле L содержит первообразный корень $\sigma=3$ 3-й степени из 1. Значение функции $r(x)$ на элементе $a=(\sigma^{\alpha_1},\ldots,\sigma^{\alpha_n})$ обозначим через $r_\alpha=r_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$, где $\alpha=\alpha_1k^{n-1}+\ldots+\alpha_n$.

На основании теоремы 2 имеем

$$\begin{cases}(r(x)\otimes f(x),\chi_2(x))=0,\\ 0\le \deg r(x)<4.\end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases}r_0\oplus r_1\otimes\sigma\oplus r_2\otimes\sigma=0,\\ r_0,r_1,r_2,\in\{1,2,2^2,2^4,\}.\end{cases}$$

Последняя система имеет несколько решений, одним из них является $r_0=1$, $r_1=r_2=2$. Относительно этого решения находим ω_0,ω_1:

$$\omega_0=3^{-1}\otimes\left(r(x_n)\otimes f(x),\chi_0(x)\right)=9\otimes 7=7,$$

$$\omega_1=3^{-1}\otimes\left(r(x)\otimes f(x),\chi_1(x)\right)=7.$$

Итак, $f(x)=Lsign(7\oplus 7\otimes x)$.

Класс функций k-значной логики, реализуемых на одном нейронном элементе зависит от выбранного поля Галуа. С увеличением мощности поля L не уменьшается мощность класса функций, реализуемых на одном нейронном элементе. Для подтверждения этого факта приведем следующие примеры:

Пусть $L=GF(3)$, $k=2$ и $n=2$. Число $card\,L-1$ делится на k, следовательно, имеет место теорема 2. Примитивным элементом поля L является $\varepsilon=2$. Ниже приведем зависимости всех булевых функций от двух переменных в алфавите $\{1,\sigma\}\left(\sigma=2^{(3-1)/2}=2\right)$, которые реализуются на одном нейронном элементе над $GF(3)$.

x_1	x_2	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
1	1	1	1	1	2	2	2
1	2	1	1	2	2	2	1
2	1	1	2	1	2	1	2
2	2	1	2	2	2	1	1

Векторами структуры нейронных элементов на каждом из которых реализуется одна из приведенных више функций, соответственно, будут:

$w_{g_0} = (1,0,0)$, $w_{g_1} = (0,1,0)$, $w_{g_2} = (0,0,1)$, $w_{g_3} = (2,0,0)$, $w_{g_4} = (0,2,0)$, $w_{g_5} = (0,0,2)$.

Итак, класс булевых функций от двух переменных, реализуемых на одном нейронном элементе над $GF(3)$ состоит из шести элементов: $g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$.

Теперь рассмотрим поле $L = GF(5)$. В качестве примитивного элемента поля L может быть выбран элемент $\varepsilon = 2$. Тогда $\sigma = \varepsilon^{(5-1)/2} = 2^2 = 4$. Над $GF(5)$ все булевы функции от двух переменных реализуются на одном нейронном элементе, векторами структуры которых соответственно будут:

$w_{f_0} = (1,0,0)$, $w_{f_4} = (2,3,2)$, $w_{f_8} = (2,3,3)$, $w_{f_{12}} = (0,4,0)$;

$w_{f_1} = (2,2,2)$, $w_{f_5} = (0,0,1)$, $w_{f_9} = (1,4,4)$, $w_{f_{13}} = (3,3,2)$;

$w_{f_2} = (2,2,3)$, $w_{f_6} = (4,1,1)$, $w_{f_{10}} = (0,0,4)$, $w_{f_{14}} = (3,3,3)$;

$w_{f_3} = (0,1,0)$, $w_{f_7} = (3,2,2)$, $w_{f_{11}} = (3,2,2)$, $w_{f_{15}} = (4,0,0)$.

Поле $GF(5)$ является минимальным полем, на котором все булевы функции от двух переменных реализуются на одном нейронном элементе.

Гипотеза. Для любого k и для любого n можно указать такое минимальное поле Галуа (поле с минимальным количеством элементов) на котором все функции k-значной логики от n переменных реализуются на одном нейронном элементе.

При синтезе нейронных элементов важно знать те операции, относительно которых класс функций k-значной логики, реализуемых на одном нейронном элементе над L, является замкнутым. Операции, сохраняющие свойства реализуемости функций k-значной логики на одном нейронном элементе над L приводятся в следующей теореме.

Теорема 3. Если функция k-значной логики $f(x_1,\dots,x_n)$ реализуется на одном нейронном элементе с вектором структуры $w = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$ над L, то функции

1) $f_1(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,\sigma \otimes x_i,\dots,x_n), \sigma \in H_k$;

2) $f_2(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n)$;

3) $f_3(x_1,\dots,x_n) = \sigma \otimes f(\sigma^{-1} \otimes x_1,\dots,\sigma^{-1} \otimes x_n), \sigma \in H_k$;

4) $f_4(x_1,\dots,x_n) = x_j \otimes$

$$\otimes f(x_1 \otimes x_j^{-1},\dots,x_{j-1} \otimes x_j^{-1}, x_j^{-1}, x_{j+1} \otimes x_j^{-1},\dots,x_n \otimes x_j^{-1})$$

также реализуются на одном нейронном элементе с соответствующими векторами структуры:

1) $w_1 = (\omega_0, \omega_1, \dots, \sigma \otimes \omega_i, \dots, \omega_n)$;

2) $w_2 = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n)$;

3) $w_3 = (\sigma \otimes \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$;

4) $w_4 = (\omega_j, \omega_1, \dots, \omega_{j-1}, \omega_0, \omega_{j+1}, \dots, \omega_n)$.

Доказательство теоремы основывается на теореме 2 и на мультипликативном свойстве характеров.

Полученные результаты могут быть обобщены на частично определенные функции k-значной логики.

Автор выражает благодарность профессору Н.Н.Айзенбергу за полезные дискуссии.

Литература

1. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра.- 2-ое изд.- М.: Наука, 1979.- 623 с.
2. Лабунец В.Г., Ситников О.П. Гармонический анализ булевых функций и функций k-значной логики над конечными полями// Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.- 1975.- № 1.- С.141-148.

Гече Федор Элимирович. Родился в 1951 году. В 1973 году закончил математический факультет Ужгородского госуниверситета. Кандидат физ.-мат. наук с 1982г. Доцент кафедры кибернетики и прикладной математики Ужгородского госуниверситета, старший научный сотрудник Государственного научно-исследовательского института информационной инфраструктуры. Область научных интересов: пороговая логика, методы представления, передачи и распознования дискретных сигналов и изображений, методы оптимизации и математическое моделирование. Автор более 40 научных работ.

НЕЙРОННІ ЕЛЕМЕНТИ НАД СКІНЧЕННИМИ ПОЛЯМИ

Ф.Е. Гече
Державний науково-дослідний інститут інформаційної інфраструктури,
Ужгородська філія, Ужгород

В роботі наводяться критерії реалізованості функцій k-значної логіки на одному нейронному елементі з вектором структури із скінченного поля Галуа, а також описані ті операції над функціями k-значної логіки, які зберігають їх властивості реалізованості на одному нейронному елементі.

NEURON ELEMENTS OVER COMPLETE FIELDS

F.E. Gechee
State Scientific and Research Institute of Information Infrastructure,
Uzhgorod branch, Uzhgorod

In the paper criteria of realizability of functions k-valued logic on one neuron element with vector of structure from complete Galoi's field are given as well as its operations over the functions of k-valued logic which keep its property of realizability on one neuron element are described.