УДК 519.21
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).52-61

В. В. Стаматієва

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,
аспірант кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
stamatieva56@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2721-8985

УЗАГАЛЬНЕННЯ АСИМПТОТИЧНОГО РОЗКЛАДУ РАМАНУДЖАНА-ВАТСОНА-КНУТА

У роботі наведено асимптотичний розклад для математичного сподівання моменту $(r+1)$-го збігу в узагальненій задачі про дні народження. У випадку $r=1$ даний розклад добре відомий у літературі як асимптотичний розклад Рамануджана-Ватсона-Кнута. Ідея доведення одержаного результату полягає у застосуванні методу Лапласа до оцінки інтеграла з параметром, який виникає при обчисленні точного значення шуканого математичного сподівання.

Ключові слова: узагальнена задача про дні народження, асимптотичний розклад, метод Лапласа.

1. Вступ. Особливе місце у літературі, присвяченій комбінаторній теорії ймовірностей, посідають задача про дні народження та її подальші узагальнення. Наприклад, нещодавно у роботі [1] було одержано ряд граничних теорем для випадкових величин, пов'язаних із одним з узагальнень такої задачі.

Розглянемо n різних типів об'єктів довільної природи. Нехай представники кожного з цих типів з ймовірністю $\frac{1}{n}$ незалежно від інших один за одним у цілі послідовні моменти часу з'являються у полі зору спостерігача. Введемо випадкову величину $T_r^{(n)},\ r \geq 1$, яка описує перший момент часу, коли деякий тип об'єктів з'явився в $(r+1)$-й раз. Варто відзначити, що, покладаючи $r=1$ (перший збіг з кимось), а $n=365$ (загальна кількість днів у невисокосному році), а під представниками розуміти людей, народжених в один з можливих днів року, ми одержимо випадкові величини, що відповідають класичній постановці задачі про дні народження.

Можна навести еквівалентне формулювання даної задачі в термінах урнової схеми. В такому випадку величини $T_r^{(n)},\ r \geq 1$, означатимуть момент, коли вперше в деякій урні з'являється принаймні $(r+1)$-а кулька (див., напр., [4], [5], або [6]).

2. Огляд попередніх результатів. Вагому частину досліджень, котрі стосуються відповідної тематики, було спрямовано на обчислення числових характеристик випадкових величин $T_r^{(n)}$, їх асимптотик та наближених обчислень. Зокрема, у роботі Кламкіна та Ньюмана [2] було одержано точне значення математичного сподівання цих величин, яке у наших позначеннях матиме вигляд

$$\mathbb{E}T_r^{(n)} = \int_0^\infty e^{-t}\left[S_r\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n dt, \tag{1}$$

де $S_r(x) = \sum_{j=0}^{r} \frac{x^j}{j!}$. Більше того, ними ж було отримано наступну асимптотику:

$$\mathbb{E}T_r^{(n)} = \sqrt[r+1]{(r+1)!} \cdot \Gamma\left(\frac{r+2}{r+1}\right) \cdot n^{\frac{r}{r+1}} + o\left(n^{\frac{r}{r+1}}\right),\ n \to \infty.$$

Цікавою задачею з прикладної точки зору є узагальнення вище зазначеної формули, тобто, можливість одержати більш точне представлення відповідної числової характеристики.

Наприклад, у випадку $r = 1$ з теореми 2 у [3] випливає класичний розклад Рамануджана-Ватсона-Кнута, який в наших позначеннях набуває вигляду

$$\mathbb{E}T_1^{(n)} = \sqrt{\frac{\pi n}{2}} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12}\sqrt{\frac{\pi}{2n}} - \frac{4}{135n} + \dots\ . \tag{2}$$

В основі даної роботи лежить отримання аналогічного розкладу у випадку загального $r \geq 2$.

3. Основний результат. Нехай задані величини $T_r^{(n)}$, $r \geq 2$, які означають перший момент часу, коли деякий з n типів з'явився в $(r+1)$-й раз. Тоді справедлива наступна теорема.

Теорема 1.

$$\mathbb{E}T_r^{(n)} = n^{\frac{r}{r+1}} \cdot \sqrt[r+1]{(r+1)!} \cdot \Gamma\left(\frac{r+2}{r+1}\right) + n^{\frac{r-1}{r+1}} \cdot \frac{1}{(r+2)!} \sqrt[r+1]{(r+1)!^{r+3}} \cdot$$
$$\cdot \Gamma\left(\frac{r+3}{r+1}\right) + n^{\frac{r-2}{r+1}} \left(\frac{1}{2}\frac{(r+1)}{((r+2)!)^2} \cdot \sqrt[r+1]{(r+1)!^{2r+5}} \cdot \Gamma\left(\frac{2r+5}{r+1}\right) -\right.$$
$$\left. - \frac{\sqrt[r+1]{(r+1)!^{r+4}}}{2r!\,(r+3)\,(r+1)} \cdot \Gamma\left(\frac{r+4}{r+1}\right)\right) + o\left(n^{\frac{r-2}{r+1}}\right),\ n \to \infty.$$

Ідея доведення цього факту базується на дослідженні асимптотичної поведінки інтеграла (1). Основним методом є так званий метод Лапласа. Його сутність полягає у дослідженні асимптотики інтеграла навколо точки максимуму підінтегральної функції та доведенні того, що рештою доданків можна знехтувати. Перейдемо до реалізації.

4. Доведення. Перепишемо (1) у наступному вигляді:

$$\mathbb{E}T_r^{(n)} = \int_0^\infty e^{-t}\left[1 + \frac{t}{n} + \frac{t^2}{2n^2} + \frac{t^3}{3!n^3} + \dots + \frac{t^r}{r!n^r}\right]^n dt, \tag{3}$$

та введемо заміну змінної $x = \frac{t}{n^{\frac{r}{r+1}}}$. Тоді (3) набуває вигляду

$$\mathbb{E}T_r^{(n)} = n^{\frac{r}{r+1}} \int_0^\infty e^{-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x}\left[1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \dots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}}\right]^n dx. \tag{4}$$

Розглянемо границю підінтегрального виразу у (4):

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x}\left[1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \dots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}}\right]^n =$$
$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x + n \cdot \ln\left[1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \dots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}}\right]\right)}.$$

Зауважимо, що розклад функції $f(y) := \ln\left(1 + y + \frac{y^2}{2} + \dots + \frac{y^r}{r!}\right)$, $r \geq 2$, в ряд Тейлора в околі нуля має наступний вигляд:

$$f(y) = y - \frac{1}{(r+1)!} \cdot y^{r+1} + \frac{r+1}{(r+2)!} \cdot y^{r+2} - \frac{(r+1)(r+2)}{2(r+3)!} \cdot y^{r+3} + o\left(y^{r+3}\right). \quad (5)$$

Покажемо це. Перезапишемо $f(y)$ у наступному вигляді:

$$f(y) = \ln\left[e^y - \left(\frac{y^{r+1}}{(r+1)!} + \frac{y^{r+2}}{(r+2)!} + \frac{y^{r+3}}{(r+3)!} + o\left(y^{r+3}\right)\right)\right].$$

Оскільки $\ln(a+h) = \ln a + \frac{h}{a} + O\left(h^2\right)$, то

$$\begin{aligned}
f(y) &= \ln e^y + \frac{1}{e^y}\left(-\frac{y^{r+1}}{(r+1)!} - \frac{y^{r+2}}{(r+2)!} - \frac{y^{r+3}}{(r+3)!} + o\left(y^{r+3}\right)\right) + \\
&\quad + O\left(-\frac{y^{r+1}}{(r+1)!} - \frac{y^{r+2}}{(r+2)!} - \frac{y^{r+3}}{(r+3)!} + o\left(y^{r+3}\right)\right)^2 = \\
&= y + \left(1 - y + \frac{y^2}{2} + o\left(y^2\right)\right) \cdot \left(-\frac{y^{r+1}}{(r+1)!} - \frac{y^{r+2}}{(r+2)!} - \frac{y^{r+3}}{(r+3)!} + o\left(y^{r+3}\right)\right) + \\
&\quad + O\left(-\frac{y^{r+1}}{(r+1)!} - \frac{y^{r+2}}{(r+2)!} - \frac{y^{r+3}}{(r+3)!} + o\left(y^{r+3}\right)\right)^2 = \\
&= y - \frac{1}{(r+1)!} \cdot y^{r+1} + \frac{r+1}{(r+2)!} \cdot y^{r+2} - \frac{(r+1)(r+2)}{2(r+3)!} \cdot y^{r+3} + o\left(y^{r+3}\right).
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
& e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x + n \cdot \ln\left[1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \dots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}}\right]\right)} = \\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x + n \cdot \left[\frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} - \frac{1}{(r+1)!} \cdot \frac{x^{r+1}}{n} + \frac{r+1}{(r+2)!} \cdot \frac{x^{r+2}}{n^{\frac{r+2}{r+1}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{r+2}{r+1}}}\right)\right]\right)} = \\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x + n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x - \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} + \frac{r+1}{(r+2)!} \cdot \frac{x^{r+2}}{n^{\frac{1}{r+1}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{r+1}}}\right)\right)} = e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}}, \ x \geq 0.
\end{aligned}$$

Застосуємо теорему Лебега про мажоровану збіжність. Для цього спочатку покажемо, що

$$\psi_n(x) := e^{-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x}\left[1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \dots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}}\right]^n,$$

обмежені зверху деякою інтегровною функцією на $[0; +\infty)$. Оберемо в якості цієї функції $\psi_1(x) = e^{-x} \cdot \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^r}{r!}\right]$, $x \geq 0$. Перевіримо, що

$$\begin{aligned}
& e^{-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x}\left[1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \dots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}}\right]^n \leq \\
& \leq e^{-x} \cdot \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^r}{r!}\right], \ x \geq 0.
\end{aligned}$$

Ця нерівність еквівалентна такій:

$$n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x - n \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \cdots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}}\right) \geq$$
$$\geq x - \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!}\right).$$

Оскільки обидві частини дорівнюють 0, при $x = 0$, достатньо довести нерівність для похідних:

$$n^{\frac{r}{r+1}} - n \cdot \frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x}{n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^2}{2!n^{\frac{3}{r+1}}} + \cdots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!n^{\frac{r}{r+1}}}}{1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \cdots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}}} \geq 1 - \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!}}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!}},$$

або

$$\frac{\frac{x^r}{r!}}{1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \cdots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}}} \geq \frac{\frac{x^r}{r!}}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!}}.$$

Остання нерівність є очевидною. Оскільки:

1) Виконується

$$\psi_n(x) = e^{-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x}\left[1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \cdots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}}\right]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}};$$

$$\forall x \geq 0;$$

2) $\psi_n(x) \leq \psi_1(x)$, $\forall x \geq 0$,

а функція $\psi_1(x) = e^{-x} \cdot \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!}\right]$ — інтегровна на $[0; +\infty)$, то за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\int_0^\infty e^{-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x}\left[1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \cdots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}}\right]^n dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^\infty e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} dx. \quad (6)$$

Обчислимо інтеграл в (6):

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} dx = \left| \begin{array}{c} \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} = t \\ x = \sqrt[r+1]{(r+1)!} \cdot \sqrt[r+1]{t} \\ dx = \sqrt[r+1]{(r+1)!} \cdot \frac{1}{r+1} t^{-\frac{r}{r+1}} dt \end{array} \right| = \frac{\sqrt[r+1]{(r+1)!}}{r+1} \int_0^\infty t^{-\frac{r}{r+1}} \cdot e^{-t} dt =$$
$$= \sqrt[r+1]{(r+1)!} \cdot \frac{1}{r+1} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{r+1}\right) = |z \cdot \Gamma(z) = \Gamma(z+1)| = \sqrt[r+1]{(r+1)!} \cdot \Gamma\left(\frac{r+2}{r+1}\right).$$

Таким чином,

$$\frac{\mathbb{E}T_r^{(n)}}{n^{\frac{r}{r+1}}} = \int_0^\infty e^{-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x}\left[1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}}\right]^n dx \xrightarrow[n\to\infty]{}$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt[r+1]{(r+1)!} \cdot \Gamma\left(\frac{r+2}{r+1}\right),$$

тобто,

$$\mathbb{E}T_r^{(n)} = n^{\frac{r}{r+1}} \cdot \sqrt[r+1]{(r+1)!} \cdot \Gamma\left(\frac{r+2}{r+1}\right) + o\left(n^{\frac{r}{r+1}}\right), \ n \to \infty.$$

Для подальшого доведення нам знадобиться наступна лема.

Лема 1. $\forall\ k \geq 0,\ m \geq 1,\ c > 0: \int\limits_u^{+\infty} x^k e^{-c\cdot x^m} dx = O\left(u^k \cdot e^{-c\cdot u^m}\right),\ u \to \infty.$

Розглянемо

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\int\limits_u^{+\infty} x^k e^{-c\cdot x^m} dx}{u^k \cdot e^{-c\cdot u^m}} = \lim_{u\to\infty} \frac{-u^k \cdot e^{-c\cdot u^m}}{ku^{k-1} \cdot e^{-c\cdot u^m} - cmu^{m+k-1} \cdot e^{-c\cdot u^m}} = 0,$$

що і доводить цей факт (для обчислення границі скористались правилом Лопіталя).

Такий порядок збіжності до нуля, як у правій частині леми 1, надалі будемо називати експоненціальним.

Оберемо довільне число $\alpha \in \left(\frac{r}{r+1}; \frac{r+1}{r+2}\right)$. Тоді (3) можна переписати наступним чином:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T_r^{(n)} = \int\limits_0^{n^\alpha} e^{-t}\left[1 + \frac{t}{n} + \frac{t^2}{2n^2} + \frac{t^3}{3!n^3} + \cdots + \frac{t^r}{r!n^r}\right]^n dt + \\ + \int\limits_{n^\alpha}^{\infty} e^{-t}\left[1 + \frac{t}{n} + \frac{t^2}{2n^2} + \frac{t^3}{3!n^3} + \cdots + \frac{t^r}{r!n^r}\right]^n dt. \end{aligned} \tag{7}$$

Функція $e^{-t}\left[1 + \frac{t}{n} + \frac{t^2}{2n^2} + \frac{t^3}{3!n^3} + \cdots + \frac{t^r}{r!n^r}\right]^n$, як не складно пересвідчитися логарифмічним диференціюванням, є монотонно спадною на $[0; +\infty)$.

Покажемо, що другий інтеграл у (7) є нехтовно малим. Введемо заміну змінної $x = \frac{t}{n^{\frac{r}{r+1}}}$, тоді

$$\begin{aligned} &\int\limits_{n^\alpha}^{\infty} e^{-t}\left[1 + \frac{t}{n} + \frac{t^2}{2n^2} + \frac{t^3}{3!n^3} + \cdots + \frac{t^r}{r!n^r}\right]^n dt = \\ &= n^{\frac{r}{r+1}} \int\limits_{n^{\alpha - \frac{r}{r+1}}}^{\infty} e^{-n^{\frac{r}{r+1}}\cdot x}\left[1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \cdots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}}\right]^n dx \leq \\ &\leq n^{\frac{r}{r+1}} \int\limits_{n^{\alpha - \frac{r}{r+1}}}^{\infty} e^{-x} \cdot \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!}\right] dx. \end{aligned}$$

Оскільки $\alpha > \frac{r}{r+1}$, то за лемою 1 порядок збіжності даного інтеграла є експоненціальним. Отже, другим інтегралом у (7) можна знехтувати.

Таким чином, вся асимптотика визначається виключно першим доданком. Перейдемо до його дослідження.

Позначимо

$$I_n = \int\limits_0^{n^\alpha} e^{-t}\left[1+\frac{t}{n}+\frac{t^2}{2n^2}+\frac{t^3}{3!n^3}+\dots+\frac{t^r}{r!n^r}\right]^n dt =$$
$$= \int\limits_0^{n^\alpha} e^{-t+n\cdot\ln\left(1+\frac{t}{n}+\frac{t^2}{2n^2}+\frac{t^3}{3!n^3}+\dots+\frac{t^r}{r!n^r}\right)}\, dt.$$

Скористаємось (5), перезаписавши дану рівність у наступному вигляді:

$$\ln\left(1+y+\frac{y^2}{2}+\dots+\frac{y^r}{r!}\right) =$$
$$= y - \frac{1}{(r+1)!}\cdot y^{r+1} + \frac{r+1}{(r+2)!}\cdot y^{r+2} - \frac{(r+1)(r+2)}{2(r+3)!}\cdot y^{r+3} + o\left(y^{r+3}\right) =$$
$$= y - \frac{1}{(r+1)!}\cdot y^{r+1} + \frac{r+1}{(r+2)!}\cdot y^{r+2}\underbrace{\left(1-\frac{r+2}{2(r+3)}\cdot y + o(y)\right)}_{\beta(y)}.$$

Тоді

$$I_n = \int\limits_0^{n^\alpha} e^{-t+n\cdot\left(\frac{t}{n}-\frac{t^{r+1}}{(r+1)!\cdot n^{r+1}}+\frac{r+1}{(r+2)!}\cdot\frac{t^{r+2}}{n^{r+2}}\underbrace{\left(1-\frac{r+2}{2(r+3)}\cdot\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)\right)}_{\beta\left(\frac{t}{n}\right)}\right)} dt =$$
$$= \int\limits_0^{n^\alpha} e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)!\cdot n^r}+\frac{r+1}{(r+2)!}\cdot\frac{t^{r+2}}{n^{r+1}}\cdot\beta\left(\frac{t}{n}\right)} dt.$$

Оскільки за формулою Тейлора $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+o\left(x^2\right) = 1+x+\frac{x^2}{2!}+x^2\gamma(x)$, де $\gamma(x)\to 0,\ x\to 0$, то

$$e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)!\cdot n^r}+\frac{r+1}{(r+2)!}\cdot\frac{t^{r+2}}{n^{r+1}}\cdot\beta\left(\frac{t}{n}\right)} = e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)!\cdot n^r}}\cdot e^{\frac{r+1}{(r+2)!}\cdot\frac{t^{r+2}}{n^{r+1}}\cdot\beta\left(\frac{t}{n}\right)} =$$
$$= \left[1+\frac{r+1}{(r+2)!}\cdot\frac{t^{r+2}}{n^{r+1}}\cdot\beta\left(\frac{t}{n}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2}\cdot\frac{t^{2r+4}}{n^{2r+2}}\cdot\beta^2\left(\frac{t}{n}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2}\cdot\frac{t^{2r+4}}{n^{2r+2}}\cdot\beta^2\left(\frac{t}{n}\right)\cdot\gamma\left(\frac{r+1}{(r+2)!}\cdot\frac{t^{r+2}}{n^{r+1}}\cdot\beta\left(\frac{t}{n}\right)\right)\right] e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)!\cdot n^r}}.$$

Тоді

$$I_n = \int_0^{n^\alpha} e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)!\cdot n^r}} dt + \frac{r+1}{(r+2)!} \int_0^{n^\alpha} \frac{t^{r+2}}{n^{r+1}} \cdot \beta\left(\frac{t}{n}\right) \cdot e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)!\cdot n^r}} dt +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2} \int_0^{n^\alpha} \frac{t^{2r+4}}{n^{2r+2}} \cdot \beta^2\left(\frac{t}{n}\right) \cdot e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)!\cdot n^r}} dt +$$

$$+\frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2} \int_0^{n^\alpha} \frac{t^{2r+4}}{n^{2r+2}} \cdot \beta^2\left(\frac{t}{n}\right) \cdot \gamma\left(\frac{r+1}{(r+2)!} \cdot \frac{t^{r+2}}{n^{r+1}} \cdot \beta\left(\frac{t}{n}\right)\right) e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)!\cdot n^r}} dt =$$

$$= I_n^{(1)} + I_n^{(2)} + I_n^{(3)} + I_n^{(4)}.$$

Дослідимо кожний з цих доданків.

1) $$I_n^{(1)} = \int_0^{n^\alpha} e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)!\cdot n^r}} dt = \left| \begin{array}{c} t = n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x \\ dt = n^{\frac{r}{r+1}} \cdot dx \\ x \in \left(0; n^{\alpha - \frac{r}{r+1}}\right) \end{array} \right| = n^{\frac{r}{r+1}} \int_0^{n^{\alpha-\frac{r}{r+1}}} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} dx =$$

$$= n^{\frac{r}{r+1}} \left(\int_0^\infty e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} dx - \int_{n^{\alpha-\frac{r}{r+1}}}^\infty e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} dx \right) = n^{\frac{r}{r+1}} \left(\sqrt[r+1]{(r+1)!} \cdot \Gamma\left(\tfrac{r+2}{r+1}\right) - \varepsilon_n \right),$$

ε_n — експоненціально мала величина.

2) $$I_n^{(2)} = \tfrac{r+1}{(r+2)!} \int_0^{n^\alpha} \tfrac{t^{r+2}}{n^{r+1}} \cdot e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)!\cdot n^r}} \cdot \left(1 - \tfrac{r+2}{2(r+3)} \cdot \tfrac{t}{n} + o\left(\tfrac{t}{n}\right)\right) dt =$$

$$= \tfrac{r+1}{(r+2)!} \cdot n^{\frac{r}{r+1}} \int_0^{n^{\alpha-\frac{r}{r+1}}} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} \cdot \tfrac{x^{r+2}}{n^{\frac{1}{r+1}}} \cdot \left(1 - \tfrac{r+2}{2(r+3)} \cdot \tfrac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + o\left(\tfrac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}}\right)\right) dx =$$

$$= \tfrac{r+1}{(r+2)!} \cdot n^{\frac{r-1}{r+1}} \cdot \int_0^{n^{\alpha-\frac{r}{r+1}}} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} \cdot x^{r+2} dx - \tfrac{1}{2r!(r+3)} n^{\frac{r-2}{r+1}} \int_0^{n^{\alpha-\frac{r}{r+1}}} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} \cdot x^{r+3} dx +$$

$$+ \tfrac{r+1}{(r+2)!} \int_0^{n^{\alpha-\frac{r}{r+1}}} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} \cdot x^{r+2} \cdot o\left(n^{\frac{r-2}{r+1}} \cdot x\right) dx =$$

$$= \tfrac{r+1}{(r+2)!} \cdot n^{\frac{r-1}{r+1}} \cdot \int_0^{n^{\alpha-\frac{r}{r+1}}} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} \cdot x^{r+2} dx - \tfrac{1}{2r!(r+3)} n^{\frac{r-2}{r+1}} \int_0^{n^{\alpha-\frac{r}{r+1}}} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} \cdot x^{r+3} dx +$$

$$+ o(n^{\frac{r-2}{r+1}} \cdot \tfrac{r+1}{(r+2)!} \int_0^{n^{\alpha-\frac{r}{r+1}}} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} \cdot x^{r+3} dx).$$

Зауважимо, що:

$$\frac{r+1}{(r+2)!} \cdot n^{\frac{r-1}{r+1}} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} \cdot x^{r+2} dx = \left| \begin{array}{c} \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} = t \\ x = \sqrt[r+1]{(r+1)!} \cdot \sqrt[r+1]{t} \\ dx = \sqrt[r+1]{(r+1)!} \cdot \frac{1}{r+1} t^{-\frac{r}{r+1}} dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{r+1}{(r+2)!} \cdot n^{\frac{r-1}{r+1}} \cdot \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{\frac{r+2}{r+1}} \cdot (r+1)!^{\frac{r+2}{r+1}} \cdot \sqrt[r+1]{(r+1)!} \cdot \frac{1}{r+1} t^{-\frac{r}{r+1}} dt =$$

$$= n^{\frac{r-1}{r+1}} \cdot \frac{1}{(r+2)!} (r+1)!^{\frac{r+3}{r+1}} \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{\frac{2}{r+1}} dt = n^{\frac{r-1}{r+1}} \cdot \frac{1}{(r+2)!} (r+1)!^{\frac{r+3}{r+1}} \cdot \Gamma\left(\frac{r+3}{r+1}\right).$$

$$\frac{1}{2r!\,(r+3)} n^{\frac{r-2}{r+1}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} \cdot x^{r+3} dx =$$

$$= \frac{1}{2r!\,(r+3)} n^{\frac{r-2}{r+1}} \int\limits_0^\infty e^{-t} \cdot t^{\frac{r+3}{r+1}} \cdot (r+1)!^{\frac{r+3}{r+1}} \cdot \sqrt[r+1]{(r+1)!} \cdot \frac{1}{r+1} t^{-\frac{r}{r+1}} dt =$$

$$= n^{\frac{r-2}{r+1}} \cdot \frac{(r+1)!^{\frac{r+4}{r+1}}}{2r!\,(r+3)\,(r+1)} \cdot \int\limits_0^\infty e^{-t} \cdot t^{\frac{3}{r+1}} dt = n^{\frac{r-2}{r+1}} \cdot \frac{(r+1)!^{\frac{r+4}{r+1}}}{2r!\,(r+3)\,(r+1)} \cdot \Gamma\left(\frac{r+4}{r+1}\right).$$

Отже, з точністю до експоненціально малих доданків маємо, що

$$I_n^{(2)} = n^{\frac{r-1}{r+1}} \cdot \frac{1}{(r+2)!} (r+1)!^{\frac{r+3}{r+1}} \cdot \Gamma\left(\frac{r+3}{r+1}\right) - n^{\frac{r-2}{r+1}} \cdot \frac{(r+1)!^{\frac{r+4}{r+1}}}{2r!\,(r+3)\,(r+1)} \cdot \Gamma\left(\frac{r+4}{r+1}\right) + o\left(n^{\frac{r-2}{r+1}}\right),\ n \to \infty.$$

3) $I_n^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2} \int\limits_0^{n^\alpha} \frac{t^{2r+4}}{n^{2r+2}} \cdot \beta^2\left(\frac{t}{n}\right) \cdot e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)! \cdot n^r}} dt = \frac{1}{2} \frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2} \int\limits_0^{n^\alpha} \frac{t^{2r+4}}{n^{2r+2}} \cdot e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)! \cdot n^r}} dt +$ $+ o\,(\text{від першого доданку})\,.$

$$\frac{1}{2} \frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2} \int\limits_0^{n^{\alpha - \frac{r}{r+1}}} \frac{t^{2r+4}}{n^{2r+2}} \cdot e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)! \cdot n^r}} dt = \left| \begin{array}{c} t = n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x \\ dt = n^{\frac{r}{r+1}} \cdot dx \\ x \in \left(0; n^{\alpha - \frac{r}{r+1}}\right) \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2} \int\limits_0^{n^{\alpha - \frac{r}{r+1}}} \frac{x^{2r+4}}{n^{\frac{2}{r+1}}} \cdot e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} \cdot n^{\frac{r}{r+1}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2} \cdot n^{\frac{r-2}{r+1}} \int\limits_0^{n^{\alpha - \frac{r}{r+1}}} x^{2r+4} \cdot e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} dx.$$

Оскільки

$$\frac{1}{2} \frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2} n^{\frac{r-2}{r+1}} \int\limits_0^\infty x^{2r+4} \cdot e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} dx = \left| \begin{array}{c} \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} = t \\ x = \sqrt[r+1]{(r+1)!} \cdot \sqrt[r+1]{t} \\ dx = \sqrt[r+1]{(r+1)!} \cdot \frac{1}{r+1} t^{-\frac{r}{r+1}} dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2} n^{\frac{r-2}{r+1}} \int\limits_0^\infty e^{-t} \cdot (r+1)!^{\frac{2r+4}{r+1}} \cdot t^{\frac{2r+4}{r+1}} \cdot \sqrt[r+1]{(r+1)!} \frac{1}{r+1} t^{-\frac{r}{r+1}} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(r+1)}{((r+2)!)^2} \cdot n^{\frac{r-2}{r+1}} \cdot (r+1)!^{\frac{2r+5}{r+1}} \int\limits_0^\infty e^{-t} \cdot t^{\frac{r+4}{r+1}} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(r+1)}{((r+2)!)^2} \cdot n^{\frac{r-2}{r+1}} \cdot (r+1)!^{\frac{2r+5}{r+1}} \cdot \Gamma\left(\frac{2r+5}{r+1}\right),$$

то

$$I_n^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{(r+1)}{((r+2)!)^2} \cdot n^{\frac{r-2}{r+1}} \cdot (r+1)!^{\frac{2r+5}{r+1}} \cdot \Gamma\left(\frac{2r+5}{r+1}\right) + o\left(n^{\frac{r-2}{r+1}}\right).$$

4) $I_n^{(4)}$ відрізняється від $I_n^{(3)}$ лише множником $\gamma\left(\frac{r+1}{(r+2)!}\cdot\frac{t^{r+2}}{n^{r+1}}\cdot\beta\left(\frac{t}{n}\right)\right)$, причому $\gamma(x)\to 0,\ x\to 0.$
β — обмежена в околі нуля

$$\frac{t^{r+2}}{n^{r+1}}\leq\frac{(n^{\alpha})^{r+2}}{n^{r+1}}=n^{(r+2)\alpha-r-1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

оскільки $\alpha<\frac{r+1}{r+2}$. Таким чином, $I_n^{(4)}$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $I_n^{(3)}$.

Отже,

$$\mathbb{E}T_r^{(n)}=n^{\frac{r}{r+1}}\cdot\sqrt[r+1]{(r+1)!}\cdot\Gamma\left(\frac{r+2}{r+1}\right)+n^{\frac{r-1}{r+1}}\cdot\frac{1}{(r+2)!}(r+1)!^{\frac{r+3}{r+1}}\cdot\Gamma\left(\frac{r+3}{r+1}\right)-$$
$$-n^{\frac{r-2}{r+1}}\cdot\frac{(r+1)!^{\frac{r+4}{r+1}}}{2r!\,(r+3)\,(r+1)}\cdot\Gamma\left(\frac{r+4}{r+1}\right)+\frac{1}{2}\frac{(r+1)}{((r+2)!)^2}\cdot n^{\frac{r-2}{r+1}}\cdot$$
$$\cdot(r+1)!^{\frac{2r+5}{r+1}}\cdot\Gamma\left(\frac{2r+5}{r+1}\right)+o\left(n^{\frac{r-2}{r+1}}\right),$$

що і потрібно було довести.

5. Приклад застосування. Оцінимо похибку Δ між істинним значенням інтеграла (1) та його наближеною оцінкою згідно з теоремою 1, попередньо зафіксувавши значення r та n. Порівняємо їх також з раніше одержаною асимптотикою у роботі Кламкіна та Ньюмана [2].

Таблиця 1.

Порівняння істинного значення математичного сподівання та його асимптотики

	$r=2,\ n=25$	$r=2,\ n=100$	$r=2,\ n=1000$
Точне значення, $\mathbb{E}T_2^{(r)}$:	16,6129	38,9647	170,252
Наближене значення:	16,577	38,9429	170,2421
Похибка, Δ:	0,0359	0,0218	0,0099
Наближення за Кламкіним та Ньюманом:	13,87	34,959	162,265

Нескладно помітити, що зі зростанням n похибка між істинним значенням інтеграла та його асимптотикою зменшується.

6. Висновки. У даній роботі було виведено декілька перших доданків асимптотичного розкладу математичного сподівання випадкових величин $T_r^{(n)}$, $r\geq 2$, які описують моменти $(r+1)$-х надходжень об'єктів серед n різних типів за допомогою методу Лапласа. Одержана асимптотика дає змогу з високою точністю оцінювати відповідні числові характеристики у випадку довільного фіксованого $r\geq 2$.

Список використаної літератури

1. Ільєнко А. Б., Стаматієва В. В. Гранична теорема для точкових процесів, пов'язаних з узагальненою задачею про дні народження. *Науковий вісник Ужгородського університету: Серія «Математика і інформатика».* 2021. Вип. 39, № 2. С. 38–46. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).38-46

2. Klamkin M. S., Newman D. J. Extensions of the birthday surprise. *J. Comb. Theory.* 1967. Vol. 3, P. 279–282.
3. Flajolet Ph., Grabner P. J., Kirschenhofer P., Prodinger H. On Ramanujan's Q-function. *J. Comput. Appl. Math.* 1995. Vol. 58, P. 103–116.
4. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. Москва : Наука, 1976. 224 с.
5. Holst L. On birthday, collectors', occupancy and other classical urn problems. *Int. Stat. Rev.* 1986. Vol. 54, No. 1, P. 15–27.
6. Johnson N. L., Kotz S. Urn models and their application. An approach to modern discrete probability theory : John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 1977.

Stamatiieva V. V. Generalization of the asymptotic expansion of Ramanujan-Watson-Knuth.

The paper presents an asymptotic expansion for the mathematical expectation of the moment of the $(r+1)$-th coincidence in the generalized birthday problem. In the case where $r = 1$, this expansion is well known in the literature as the Ramanujan-Watson-Knuth asymptotic expansion. The idea of proving the obtained result is to apply the Laplace method to estimate the integral with a parameter that arises when calculating the exact value of the sought mathematical expectation.

Keywords: generalized birthday problem, asymptotic expansion, Laplace's method.

References

1. Ilienko, A. B., & Stamatiieva, V. V. (2021). A limit theorem for point processes associated with the generalized birthday problem. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University: Series of mathematics and informatics,* 39(2), 38–46. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).38-46 [in Ukranian].
2. Klamkin, M. S., & Newman, D. J. (1967). Extensions of the birthday surprise. *J. Comb. Theory,* 3, 279–282.
3. Flajolet, Ph., Grabner, P. J., Kirschenhofer, P., & Prodinger, H. (1995). On Ramanujan's Q-function. *J. Comput. Appl. Math.,* 58, 103–116.
4. Kolchin, V. F., Sevastianov, B. A., & Chistyakov, V. P. (1976). *Sluchaynyye razmeshcheniya* [Random allocations]. Moscow: Nauka [in Russian].
5. Holst, L. (1986). On birthday, collectors', occupancy and other classical urn problems. *Int. Stat. Rev.,* 54(1), 15–27.
6. Johnson, N. L., & Kotz, S. (1977). *Urn models and their application.* An approach to modern discrete probability theory : John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.

Одержано 14.10.2023