

УДК 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).82-95](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).82-95)**Ю. П. Глухов<sup>1</sup>, С. Ю. Бабич<sup>2</sup>, Ю. Ю. Млавець<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,  
старший науковий співробітник,  
кандидат фізико-математичних наук  
[gluchov.uri@gmail.com](mailto:gluchov.uri@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6328-5993>

<sup>2</sup> Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,  
провідний науковий співробітник,  
доктор технічних наук, професор  
[babich\\_sy@ukr.net](mailto:babich_sy@ukr.net)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>

<sup>3</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,  
кандидат фізико-математичних наук  
[yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua](mailto:yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1480-9017>

## РЕАКЦІЯ ШАРУВАТОГО НЕСТИСЛИВОГО ПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ НА РУХОМЕ НАВАНТАЖЕННЯ

Розглянута плоска задача про вплив рухомого навантаження на нестисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару. Досліджено вплив рухомого навантаження, початкових напружень, механічних параметрів елементів шаруватої основи на основні характеристики її напружено-деформованого стану.

**Ключові слова:** нестисливий півпростір, початкові (залишкові) напруження, рухоме навантаження.

**1. Вступ.** Специфічні інженерні проблеми і закони внутрішнього розвитку фундаментальних досліджень вимагають послідовного і більш повного врахування фізико-механічних характеристик матеріалів та інших властивостей, властивих реальним тілам. Одним із важливих факторів при розв'язанні таких задач є врахування початкових (залишкових) напружень, що є практично в усіх елементах конструкцій і зумовлені як технологічними, так і природними причинами. Все це вимагає побудови моделей деформування пружних матеріалів адекватних реальним процесам, розробки нових та розвиток відомих аналітичних і чисельних методів їх дослідження.

Дане дослідження спрямовано на вивчення закономірностей хвильових процесів в пружних тілах при врахуванні ряду ускладнюючих факторів: різних моделей шаруватого покриття, початкових напружень, різних швидкостей руху поверхневого навантаження.

В даній статті розглянута плоска задача про дію рухомого поверхневого навантаження на пружний півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару.

Шаруваті середовища з початковими напруженнями досліджувалися в роботах [1–5] та інших.

**2. Постановка задачі.** Розглядається попередньо напружений нестисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару.

Матеріал півпростору — ізотропний нелінійно-пружний в ненапруженому стані з довільною формою пружного потенціалу. У випадку ортотропних матеріалів будемо вважати, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають з напрямками осей вибраних систем координат.

Початковий напружено-деформований стан півпростору вважається однорідним і визначається компонентами вектора переміщень відповідно до формули

$$u_j^0 = \delta_{mj} (\lambda_m - 1) x_m; \quad m, j = \overline{1, 3},$$

де  $\lambda_j$  — видовження, ( $\lambda_j = const$ ,  $j = \overline{1, 3}$ ),  $\delta_{mj}$  — символ Кронекера, і наступними компонентами тензора узагальнених напружень

$$\sigma_{11}^0 \neq 0; \quad \sigma_{22}^0 \neq 0; \quad \sigma_{33}^0 \neq 0.$$

Шар і півпростір віднесені до декартової системи координат  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , які вводяться в початковому деформованому стані і пов'язані з лагранжевими координатами  $(x_1, x_2, x_3)$ , що вводяться в природному стані, співвідношеннями  $\xi_j = \lambda_j x_j$ .

Граничні поверхні елементів є плоскі і паралельні між собою. Координатна площина  $\xi_1 O \xi_3$  співпадає з вільною поверхнею захисного шару. Шар займає область  $-h \leq \xi_2 \leq 0$ , а півпростір — область  $\xi_2 + h \leq 0$ .

На вільну поверхню шару ( $\xi_2 = 0$ ) діє лінійне навантаження  $P$ , що рухається з постійною швидкістю  $v$  під кутом  $\alpha$  протягом великого проміжку часу і не залежить від координати  $\xi_3$ . Відносно систем координат, пов'язаних з цим навантаженням, існує плоский деформований усталений стан

$$u_1 = u_1(\xi_1, \xi_2, t); \quad u_2 = u_2(\xi_1, \xi_2, t); \quad u_3 \equiv 0; \quad p = p(\xi_1, \xi_2, t).$$

Скалярна функція  $p$  пов'язана з гідростатичним тиском.

Визначимо координати рухомої системи наступним чином

$$y_1 = \xi_1 - vt; \quad y_2 = \xi_2. \quad (1)$$

Передбачається, що картина деформацій інваріантна відносно часу в системі координат, що рухається разом з навантаженням.

Також передбачається, що напруження, що виникає за рахунок дії навантаження, значно менше за початкові напруження. Вказане припущення дозволяє застосовувати лінеаризовану теорію пружності для тіл з початковими напруженнями [6] для опису додаткового напруженого стану, викликаного дією навантаження.

Шар товщиною  $h$  моделюється зосередженими масами з густиною  $\rho_1$ . Таким чином, нормальна і дотична складові навантаження будуть  $(P \sin \alpha + \rho_1 h \ddot{u}_1) \delta(y_1)$  і  $(P \cos \alpha + \rho_1 h \ddot{u}_2) \delta(y_1)$ . Тут  $\delta(y_1)$  — функція Дірака.

Представлення загальних розв'язків рівнянь руху для нестисливих тіл в рухомій системі координат (1) мають вигляд [6]

$$u_1 = -\tilde{\beta}_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 \chi^{(1)}}{\partial y_1 \partial y_2} + \left( \tilde{\beta}_{11}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_{12}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(2)};$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= -\tilde{\beta}_{21}^{(2)} \frac{\partial^2 \chi^{(2)}}{\partial y_1 \partial y_2} + \left( \tilde{\beta}_{21}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_{22}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(1)}; \\
p &= \tilde{q}_{11}^{-2} \left\{ [\tilde{\kappa}_{1111} - \rho v^2 - \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212})] \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\kappa}_{2112} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right\} \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_2} + \\
&+ \tilde{q}_{22}^{-2} \left\{ (\tilde{\kappa}_{1221} - \tilde{\rho} v^2) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + [\tilde{\kappa}_{2222} - \tilde{q}_{22} \tilde{q}_{11}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212})] \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right\} \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_1}, \quad (2)
\end{aligned}$$

де

$$\tilde{\beta}_{12}^{(2)} = \tilde{\beta}_{11}^{(1)} = \tilde{q}_{11}^{-1}; \quad \tilde{\beta}_{21}^{(2)} = \tilde{\beta}_{21}^{(1)} = \tilde{q}_{22}^{-1}; \quad \tilde{\beta}_{11}^{(2)} = \tilde{\beta}_{22}^{(1)} = 0.$$

При вище зазначених припущеннях з урахуванням (2) рівняння усталеного руху нестисливого півпростору можна записати у вигляді [6]

$$\left( \eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left( \eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(j)} = 0; \quad j = 1, 2. \quad (3)$$

Функції  $\eta_j$  в рівняннях руху (3) визначаються із рівнянь

$$\eta^4 + 2A\eta^2 + A_1 = 0, \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned}
2A\tilde{q}_{22}^2 \tilde{\kappa}_{2112} &= \tilde{q}_{11}^2 \tilde{\kappa}_{2222} + \tilde{q}_{22}^2 (\tilde{\kappa}_{1111} - \rho v^2) - 2\tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{2121}); \\
A_1 \tilde{q}_{22}^2 \tilde{\kappa}_{2112} &= \tilde{q}_{11}^2 (\tilde{\kappa}_{1221} - \rho v^2). \quad (5)
\end{aligned}$$

В формулах (2) і (5)  $\rho$  — густина матеріалу півпростору в природному стані,  $\tilde{q}_{tt}$ ,  $\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta}$  — параметри, що характеризують матеріал півпростору [6].

Значення функцій  $\eta_1^2(v)$  і  $\eta_2^2(v)$  визначають вид рівнянь руху (3) і відповідно вибір форми їх розв'язку.

Вплив початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь, що відповідають рівнянням руху (3) досліджений в статті [3]. В роботі [3] дана оцінка можливих значень коренів характеристичних рівнянь. Вказані необхідні і достатні умови існування кратних коренів. Для нестисливих матеріалів із потенціалом типу Бартенева-Хазановича виконані чисельні дослідження.

Розглянемо жорсткий контакт між шаром і півпростором при  $y_2 = -h$ . В цьому випадку граничні умови можна записати

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{21} &= P\delta(y_1) \sin \alpha + \rho_1 h \ddot{u}_1; \\
\tilde{Q}_{22} &= P\delta(y_1) \cos \alpha + \rho_1 h \ddot{u}_2. \quad (6)
\end{aligned}$$

Розглянемо випадки рівних і нерівних коренів рівняння (4).

Нерівні корені. В представленні загального розв'язку (2) прийmemo

$$\chi = \tilde{\beta}_{11}^{(1)} \chi^{(1)}; \quad \chi^{(2)} = 0; \quad (7)$$

Враховуючи (7), отримаємо представлення розв'язку у вигляді

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial y_1 \partial y_2}; \quad u_2 = \left( \beta_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi,$$

$$p = \tilde{q}_{11}^{-1} \left\{ [\tilde{\kappa}_{1111} - \rho v^2 - \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212})] \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\kappa}_{2112} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right\} \frac{\partial \chi}{\partial y_2}, \quad (8)$$

де

$$\beta_1 = \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1}; \quad \beta_2 \equiv 0.$$

Функція  $\chi(y_1, y_2)$  визначається з рівняння

$$\left( \eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left( \eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi = 0. \quad (9)$$

У випадку нерівних коренів можна використовувати інше представлення розв'язку. Введемо позначення

$$\Phi = -\frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_2}; \quad \Psi = \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_1}; \quad \chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)}. \quad (10)$$

Після підстановки (10) в (2) і (3) отримаємо

$$\left( \eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \Phi = 0; \quad \left( \eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \Psi = 0; \quad (11)$$

і

$$u_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} - \frac{\partial \Psi}{\partial y_2}; \quad u_2 = \alpha_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} + \alpha_2 \frac{\partial \Psi}{\partial y_1},$$

$$p = \tilde{q}_{11}^{-1} \left\{ - [\tilde{\kappa}_{1111} - \rho v^2 - \tilde{\kappa}_{2112} \eta_1^2 - \beta_1 (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212})] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} + \right.$$

$$\left. + [\tilde{\kappa}_{1111} - \rho v^2 - \tilde{\kappa}_{2112} \eta_2^2 - \beta_1 (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212})] \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial y_1 \partial y_2} \right\}. \quad (12)$$

Тут

$$\alpha_1 = \beta_1 \eta_1^{-2}; \quad \alpha_2 = \beta_1.$$

При відсутності початкових напружень представлення розв'язків (12) тотожні представленню Ляме для нестисливих тіл.

В задачі, що розглядається, переміщення визначаються з точністю до довільної константи, тому будемо в подальшому оперувати не переміщеннями, а швидкостями переміщень. Напруження і швидкості переміщень в півпросторі через функцію  $\chi$  в координатах  $(y_1, y_2)$  можна записати

$$\tilde{Q}_{jj} = \left( \alpha_{jj}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{jj}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_2};$$

$$\tilde{Q}_{mj} = \left( \alpha_{mj}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{mj}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_1}; \quad m, j = 1, 2; \quad m \neq j;$$

$$\dot{u}_1 = v \frac{\partial^3 \chi}{\partial y_1^2 \partial y_2}; \quad \dot{u}_2 = -v \left( \beta_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_1}. \quad (13)$$

Вирази для напружень і швидкостей переміщень у півпросторі через потенціали  $\Phi$  і  $\Psi$  мають вигляд

$$\tilde{Q}_{jj} = \left( \eta_1^2 \alpha_{jj}^{(2)} - \alpha_{jj}^{(1)} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} + \left( \alpha_{jj}^{(1)} - \eta_2^2 \alpha_{jj}^{(2)} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1 \partial y_2};$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{mj} &= \left( \eta_1^{-2} \alpha_{mj}^{(1)} - \alpha_{mj}^{(2)} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1 \partial y_2} + \left( \alpha_{mj}^{(1)} - \eta_2^2 \alpha_{mj}^{(2)} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1^2}; \\ m, j &= 1, 2; \quad m \neq j; \\ \dot{u}_1 &= -v \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1 \partial y_2} \right); \quad \dot{u}_2 = -v \left( \alpha_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1 \partial y_2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1^2} \right),\end{aligned}\quad (14)$$

де

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{jj}^{(1)} &= \tilde{\kappa}_{jj22} \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} - \tilde{\kappa}_{jj11} + \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{11}^{-1} \left[ \tilde{\kappa}_{1111} - \rho v^2 - \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}) \right]; \\ \tilde{\alpha}_{mj}^{(2)} &= \tilde{\kappa}_{2112} \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{11}^{-1}; \quad \tilde{\alpha}_{mj}^{(1)} = \tilde{\kappa}_{mj21} \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1}; \quad \tilde{\alpha}_{mj}^{(2)} = -\tilde{\kappa}_{mj12}; \quad j, m = 1, 2.\end{aligned}$$

Отже, задача про усталений рух двошарового нестисливого півпростору з початковими напруженнями при дії навантаження, що рухається з постійною швидкістю, при нерівних коренях зводиться до визначення функцій  $\chi$  або  $\Phi$  і  $\Psi$  із граничних умов (6). Компоненти напружено-деформованого стану нестисливого півпростору визначаються за формулами (13) або (14).

*Рівні корені.* Розглянемо випадок, коли  $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ . Скористаємося загальним представленням розв'язку (2). Напруження і швидкості переміщень в шаруватому півпросторі у випадку рівних коренів через функції  $\chi^{(j)}$  визначаються за формулами

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{jj} &= \left( \tilde{\alpha}_{jj}^{(12)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\alpha}_{jj}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_1} + \left( \tilde{\alpha}_{jj}^{(11)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\alpha}_{jj}^{(21)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_2}; \\ \tilde{Q}_{mj} &= \left( \tilde{\alpha}_{mj}^{(12)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\alpha}_{mj}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_2} + \left( \tilde{\alpha}_{mj}^{(11)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\alpha}_{mj}^{(21)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_1}; \\ m, j &= 1, 2; \quad m \neq j; \\ \dot{u}_1 &= v \left[ \tilde{\beta}_{11}^{(1)} \frac{\partial^3 \chi^{(1)}}{\partial y_1^2 \partial y_2} - \left( \tilde{\beta}_{11}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_{12}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{d\chi^{(2)}}{dy_1} \right]; \\ \dot{u}_2 &= v \left[ \tilde{\beta}_{21}^{(2)} \frac{\partial^3 \chi^{(2)}}{\partial y_1^2 \partial y_2} - \left( \tilde{\beta}_{21}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_{22}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{d\chi^{(1)}}{dy_1} \right],\end{aligned}\quad (15)$$

де

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{jj}^{(11)} &= (\tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{jj22} - \tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{jj11}) + \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{11}^{-2} \left[ \tilde{\kappa}_{1111} - \rho v^2 - \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}) \right]; \\ \tilde{\alpha}_{jj}^{(22)} &= \tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{jj11} - \tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{jj22} + \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{22}^{-2} \left[ \tilde{\kappa}_{2222} - \tilde{q}_{22} \tilde{q}_{11}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}) \right]; \\ \tilde{\alpha}_{jj}^{(21)} &= \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{11}^{-2} \tilde{\kappa}_{2112}; \quad \tilde{\alpha}_{jj}^{(12)} = \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{22}^{-2} (\tilde{\kappa}_{1221} - \rho v^2); \\ \tilde{\alpha}_{mj}^{(11)} &= \tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{mj21}; \quad \tilde{\alpha}_{mj}^{(21)} = -\tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{mj12}; \\ \tilde{\alpha}_{mj}^{(12)} &= -\tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{mj21}; \quad \tilde{\alpha}_{mj}^{(22)} = \tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{mj12}; \quad m, j = 1, 2; \quad m \neq j.\end{aligned}\quad (16)$$

Таким чином, у випадку рівних коренів задача, що розглядається, зводиться до визначення функцій  $\chi^{(j)}$  із граничних умов (6). При цьому потрібно використовувати формули (15) при позначеннях (16).

**3. Розв'язок задачі в області зображень Фур'є.** Розв'язок задачі знайдемо з допомогою інтегрального перетворення Фур'є по змінній  $y_1$

$$f^F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1) e^{-iky_1} dy_1; \quad (17)$$

і відповідної формули оберненого перетворення

$$f(y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} f^F(k) e^{iky_1} dk; \quad \gamma > 0. \quad (18)$$

Застосовуючи перетворення Фур'є (17) до рівнянь (2), отримаємо

$$\left( \frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_1^2 \right) \left( \frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_2^2 \right) \chi^{(j)F} = 0; \quad j = 1, 2. \quad (19)$$

Визначимо розв'язок задачі для випадків нерівних і рівних коренів характеристичного рівняння. Розв'язок запишемо в загальному вигляді для будь-якої швидкості руху навантаження.

Нерівні корені. Рівняння руху (9) і (11) з урахуванням (17) в просторі зображень можна відповідно записати

$$\left( \frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_1^2 \right) \left( \frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_2^2 \right) \chi^F = 0; \quad (20)$$

і

$$\left( \frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_1^2 \right) \Phi^F = 0; \quad \left( \frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_2^2 \right) \Psi^F = 0. \quad (21)$$

Розв'язок трансформованих рівнянь (20) з урахуванням загасання на нескінченності будемо шукати у вигляді

$$\chi^F = \sum_{m=1}^2 C_m e^{k_m k \eta_m (y_2 + h)}, \quad (22)$$

де  $C_m$ ,  $m = 1, 2$  — константи інтегрування. Тут  $k_j \equiv \sigma = \frac{|k|}{k}$ , якщо  $\eta_j^2 > 0$ , і  $k_j = i$ , якщо  $\eta_j^2 < 0$ . У випадку, якщо  $\eta_j$  мають комплексні значення, то в представленні розв'язку (22) необхідно покласти  $k_j = 1$ ;  $\eta_j = \sigma \operatorname{Re} \eta_j - (-1)^j i \operatorname{Im} \eta_j$ ;  $j = 1, 2$ .

Розв'язок рівнянь (21) для потенціалів  $\Phi^F$  і  $\Psi^F$  будемо шукати у вигляді

$$\Phi^F = C_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2 + h)}; \quad \Psi^F = C_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2 + h)}, \quad (23)$$

де  $C_m$ ,  $m = 1, 2$  — константи інтегрування.

Зауважимо, що для скінченності значень функцій  $\chi^F$ ,  $\Phi^F$  и  $\Psi^F$  необхідно, щоб  $\operatorname{Re} \eta_j > 0$ .

Трансформовані вирази для напружень, переміщень і швидкостей переміщень з урахуванням представлення розв'язків (22) мають вигляд

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{jj}^F &= -k^3 \sum_{m=1}^2 C_m k_m \tilde{\gamma}_{jj}^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \\ \tilde{Q}_{pj}^F &= -ik^3 \sum_{m=1}^2 C_m \tilde{\gamma}_{pj}^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \quad j, p = 1, 2; \quad j \neq p; \\ u_1^F &= -ik^2 \sum_{m=1}^2 C_m k_m \tilde{\gamma}_1^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \quad u_2^F = -k^2 \sum_{m=1}^2 C_m \tilde{\gamma}_2^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \\ \dot{u}_1^F &= -k^3 v \sum_{m=1}^2 C_m k_m \tilde{\gamma}_1^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \quad \dot{u}_2^F = ik^3 v \sum_{m=1}^2 C_m \tilde{\gamma}_2^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}, \quad (24)\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} &= \eta_1 \left( \tilde{\alpha}_{jj}^{(1)} - \tilde{\alpha}_{jj}^{(2)} \eta_1^2 \right); \quad \tilde{\gamma}_{jj}^{(2)} = \eta_2 \left( \tilde{\alpha}_{jj}^{(1)} - \tilde{\alpha}_{jj}^{(2)} \eta_2^2 \right); \\ \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} &= \tilde{\alpha}_{mj}^{(1)} - \tilde{\alpha}_{mj}^{(2)} \eta_1^2; \quad \tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} = \tilde{\alpha}_{mj}^{(1)} - \tilde{\alpha}_{mj}^{(2)} \eta_2^2; \quad j, m = 1, 2; \quad j \neq m; \\ \tilde{\gamma}_1^{(1)} &= \eta_1; \quad \tilde{\gamma}_1^{(2)} = \eta_2; \quad \tilde{\gamma}_2^{(1)} = \tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2 \eta_1^2; \quad \tilde{\gamma}_2^{(2)} = \tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2 \eta_2^2.\end{aligned}$$

Використовуючи представлення розв'язків (23), в просторі зображень Фур'є параметри, що характеризують напружено-деформований стан півпростору, можна записати

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{jj}^F &= k^2 \sum_{m=1}^2 i^{m-1} \gamma_{jj}^{(m)} C_m e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \\ \tilde{Q}_{pj}^F &= -ik^2 \sum_{m=1}^2 (-i)^{m-1} C_m \gamma_{pj}^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \quad j, p = 1, 2; \quad j \neq p; \\ u_1^F &= ik \sum_{m=1}^2 i^{m-1} C_m \gamma_1^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \quad u_2^F = k \sum_{m=1}^2 i^{m-1} C_m \gamma_2^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \\ \dot{u}_1^F &= vk^2 \sum_{m=1}^2 i^{m-1} C_m \gamma_1^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \\ \dot{u}_2^F &= -ivk^2 \sum_{m=1}^2 i^{m-1} \gamma_2^{(m)} C_m e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}, \quad (25)\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}\gamma_{jj}^{(1)} &= \alpha_{jj}^{(1)} - \eta_1^2 \alpha_{jj}^{(2)}; \quad \gamma_{jj}^{(2)} = k_2 \eta_2 \left( \alpha_{jj}^{(1)} - \eta_2^2 \alpha_{jj}^{(2)} \right); \\ \gamma_{mj}^{(1)} &= k_1 \eta_1 \left( \alpha_{mj}^{(2)} \eta_1^{-2} - \alpha_{mj}^{(1)} \right); \quad \gamma_{mj}^{(2)} = \alpha_{mj}^{(1)} - \eta_2^2 \alpha_{mj}^{(2)}; \quad j, m = 1, 2; \quad j \neq m; \\ \gamma_1^{(1)} &= 1; \quad \gamma_1^{(2)} = k_2 \eta_2; \quad \gamma_2^{(1)} = \alpha_1 k_1 \eta_1; \quad \gamma_2^{(2)} = \alpha_2.\end{aligned}$$

Підставляючи вирази (24) в трансформовані граничні умови (6) маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих  $C_m$ ,  $m = 1, 2$  (представлення розв'язку через функцію  $\chi$ ):

$$\begin{aligned} & \left( \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} + \rho_1 h k \tilde{v}^2 k_1 \tilde{\gamma}_1^{(1)} \right) C_1 + \left( \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} + \rho_1 h k \tilde{v}^2 k_2 \tilde{\gamma}_1^{(2)} \right) C_2 = i k^{-3} P \sin \alpha; \\ & \left( k_1 \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(1)} \right) C_1 + \left( k_2 \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(2)} \right) C_2 = -k^{-3} P \cos \alpha. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогічну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих  $C_m$  ( $m = 1, 2$ ) отримуємо, використовуючи граничні умови (6) і вирази (25) (представлення розв'язку через функції  $\Phi$  і  $\Psi$ )

$$\begin{aligned} & \left( \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_1^{(1)} \right) C_1 + i \left( \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_1^{(2)} \right) C_2 = -i k^{-2} P \sin \alpha; \\ & \left( \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(1)} \right) C_1 + i \left( \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(2)} \right) C_2 = k^{-2} P \cos \alpha. \end{aligned} \quad (27)$$

Розв'язок системи алгебраїчних рівнянь (26) можна записати

$$C_m = k^{-3} \Delta^{-1} U_m; \quad m = 1, 2, \quad (28)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta &= \rho_1^2 h^2 k^2 \tilde{v}^4 \left( k_2 \tilde{\gamma}_1^{(2)} \tilde{\gamma}_2^{(1)} - k_1 \tilde{\gamma}_2^{(2)} \tilde{\gamma}_1^{(1)} \right) + \\ &+ \rho_1 h k v^2 \left[ k_2 k_1 \left( \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} \tilde{\gamma}_1^{(2)} - \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} \tilde{\gamma}_1^{(1)} \right) + \left( \tilde{\gamma}_2^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} - \tilde{\gamma}_2^{(2)} \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} \right) \right] + \\ &+ \left( k_1 \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} - k_2 \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} \right); \\ U_m &= (-1)^m P \left[ i \left( k_j \tilde{\gamma}_{22}^{(j)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(j)} \right) \sin \alpha + \left( \tilde{\gamma}_{21}^{(j)} + \rho_1 h k v^2 k_j \tilde{\gamma}_1^{(j)} \right) \cos \alpha \right]; \\ & \quad j, m = 1, 2; \quad j \neq m. \end{aligned}$$

Оригінали напружень і швидкостей переміщень отримуємо, скориставшись формулами (24), (28) і оберненим перетворенням Фур'є (18):

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{jj} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left( k_1 \tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + k_2 \tilde{\gamma}_{jj}^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk; \\ \tilde{Q}_{mj} &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left( \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + \tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk; \\ & \quad m, j = 1, 2; \quad j \neq m; \\ \dot{u}_1 &= -\frac{v}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left( k_1 \tilde{\gamma}_1^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + k_2 \tilde{\gamma}_1^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk; \\ \dot{u}_2 &= \frac{i v}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \tilde{\Delta}^{-1} \left( \tilde{\gamma}_2^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + \tilde{\gamma}_2^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk. \end{aligned} \quad (29)$$



Розв'язок системи алгебраїчних рівнянь (27) має вигляд

$$C_m = k^{-2} \Delta^{-1} U_m; \quad m = 1, 2. \quad (30)$$

Тут

$$\begin{aligned} \Delta = & \rho_1^2 h^2 k^2 v^4 \left( \tilde{\gamma}_1^{(1)} \tilde{\gamma}_2^{(2)} - \tilde{\gamma}_1^{(2)} \tilde{\gamma}_2^{(1)} \right) + \\ & + \rho_1 h k v^2 \left[ \left( \tilde{\gamma}_2^{(2)} \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} - \tilde{\gamma}_2^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} \right) + \left( \tilde{\gamma}_1^{(1)} \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} - \tilde{\gamma}_1^{(2)} \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} \right) \right] + \\ & + \left( \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} - \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} \right); \\ U_m = & -i^{m-1} P \left[ i \left( \tilde{\gamma}_{22}^{(j)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(j)} \right) \sin \alpha + \left( \tilde{\gamma}_{21}^{(j)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_1^{(j)} \right) \cos \alpha \right]; \\ & j, m = 1, 2; \quad j \neq m. \end{aligned}$$

В цьому випадку розв'язок задачі через параметри, що характеризують напружено-деформований стан, можна записати, використовуючи формули (25), (30) і (18):

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{jj} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left( \tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + i \tilde{\gamma}_{jj}^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk; \\ \tilde{Q}_{mj} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left( i \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} - \tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk; \\ \dot{u}_m &= (-i)^{m-1} \frac{v}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left( \tilde{\gamma}_m^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + i \tilde{\gamma}_m^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk; \\ & j, m = 1, 2; \quad j \neq m. \end{aligned} \quad (31)$$

Рівні корені. Розв'язок трансформованих рівнянь (19) у випадку рівних коренів рівнянь (3) ( $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ ) з урахуванням загасання на нескінченності будемо шукати у вигляді

$$\chi^{(j)F} = \left[ C_1^{(j)} + |k| \eta (y_2 + h) C_2^{(j)} \right] e^{|k| \eta (y_2+h)}; \quad j = 1, 2, \quad (32)$$

де  $C_m^{(j)}$ ,  $m = 1, 2$  — константи інтегрування.

Введемо постійні інтегрування

$$i C_m^{(2)} = C_m; \quad C_m^{(1)} = C_m; \quad m = \overline{1, 4}. \quad (33)$$

Трансформовані вирази для напружень, переміщень і швидкостей переміщень з урахуванням (15) і (16) мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{mj}^F &= -i^{1-\delta_{mj}} k^3 \left\{ \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} [C_1 + |k| \eta (y_2 + h) C_2] + \tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} C_2 \right\} e^{|k| \eta (y_2+h)}; \\ u_j^F &= -i^{\delta_{1j}} k^2 \left\{ \tilde{\gamma}_j^{(1)} [C_1 + |k| \eta (y_2 + h) C_2] + \tilde{\gamma}_j^{(2)} C_2 \right\} e^{|k| \eta (y_2+h)}; \end{aligned}$$

$$\dot{u}_j^F = i^{2-\delta_{2j}} \nu k^3 \left\{ \tilde{\gamma}_j^{(1)} [C_1 + |k| \eta (y_2 + h) C_2] + \tilde{\gamma}_j^{(2)} C_2 \right\} e^{|k| \eta (y_2 + h)}; \quad j, m = 1, 2, \quad (34)$$

де

$$\tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} = \tilde{z}_{jj}^{(2)} + \sigma \eta \tilde{z}_{jj}^{(1)}; \quad \tilde{\gamma}_{jj}^{(3)} = \tilde{z}_{jj}^{(2)} - \sigma \eta \tilde{z}_{jj}^{(1)}; \quad \tilde{\gamma}_{jj}^{(2)} = \sigma \eta \left( \tilde{z}_{jj}^{(1)} - \tilde{\zeta}_{jj}^{(1)} \right) - \tilde{\zeta}_{jj}^{(2)};$$

$$\tilde{\gamma}_{jj}^{(4)} = \sigma \eta \left( \tilde{z}_{jj}^{(1)} - \tilde{\zeta}_{jj}^{(1)} \right) + \tilde{\zeta}_{jj}^{(2)}; \quad \tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} = \tilde{z}_{jj}^{(1)} - \sigma \eta \tilde{z}_{jj}^{(2)}; \quad \tilde{\gamma}_{jj}^{(3)} = \tilde{z}_{jj}^{(1)} + \sigma \eta \tilde{z}_{jj}^{(2)};$$

$$\tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} = -\sigma \eta \left( \tilde{z}_{mj}^{(2)} - \tilde{\zeta}_{mj}^{(2)} \right) - \tilde{\zeta}_{mj}^{(1)}; \quad \gamma_{mj}^{(4)} = -\sigma \eta \left( \tilde{z}_{mj}^{(2)} - \tilde{\zeta}_{mj}^{(2)} \right) + \tilde{\zeta}_{mj}^{(1)};$$

$$\tilde{z}_{mj}^{(p)} = \tilde{\alpha}_{mj}^{(1p)} - \tilde{\alpha}_{mj}^{(2p)} \eta^2; \quad \tilde{\zeta}_{mj}^{(p)} = 2\tilde{\alpha}_{mj}^{(2p)} \eta^2; \quad j, m, p = 1, 2;$$

$$\gamma_1^{(1)} = -\tau_1^{(1)} + \tau_1^{(2)}; \quad \gamma_1^{(2)} = \tau_1^{(2)} + \tau_1^{(3)}; \quad \gamma_1^{(3)} = -\tau_1^{(1)} - \tau_1^{(2)};$$

$$\gamma_1^{(4)} = \tau_1^{(2)} - \tau_1^{(3)}; \quad \gamma_2^{(1)} = \tau_2^{(1)} + \tau_2^{(2)}; \quad \gamma_2^{(2)} = \tau_2^{(2)} - \tau_2^{(3)};$$

$$\gamma_2^{(3)} = \tau_2^{(1)} - \tau_2^{(2)}; \quad \gamma_2^{(4)} = \tau_2^{(2)} + \tau_2^{(3)};$$

$$\tau_m^{(1)} = \tilde{\beta}_{m1}^{(1)} - \tilde{\beta}_{m2}^{(1)} \eta^2; \quad \tau_m^{(2)} = \sigma \eta \tilde{\beta}_{m1}^{(m)}; \quad \tau_m^{(3)} = 2\tilde{\beta}_{m2}^{(j)} \eta^2; \quad m, j = 1, 2; \quad m \neq j.$$

Підставляючи вирази (34) в трансформовані граничні умови (6) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих  $C_m$ ,  $m = 1, 2$

$$\left( \sigma \eta \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} + \rho_1 h k \nu^2 \tilde{\gamma}_1^{(1)} \right) C_1 + \left( \sigma \eta \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} + \rho_1 h k \nu^2 \tilde{\gamma}_1^{(2)} \right) C_2 = i k^{-3} P \sin \alpha;$$

$$\left( \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} - \rho_1 h k \sigma \eta \nu^2 \tilde{\gamma}_2^{(1)} \right) C_1 - \left( \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} - \rho_1 h k \sigma \eta \nu^2 \tilde{\gamma}_2^{(2)} \right) C_2 = k^{-3} P \cos \alpha. \quad (35)$$

Розв'язок системи алгебраїчних рівнянь (35) можна представити у вигляді (28), де

$$\begin{aligned} \Delta = & \sigma \eta \left( \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} \right) - \\ & - \rho_1 h k \nu^2 \left[ \eta^2 \left( \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} \tilde{\gamma}_2^{(2)} - \tilde{\gamma}_2^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} \right) - \left( \tilde{\gamma}_1^{(2)} \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \tilde{\gamma}_1^{(1)} \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} \right) \right] - \\ & - \rho_1^2 h^2 k^2 \nu^4 \sigma \eta \left( \tilde{\gamma}_1^{(2)} \tilde{\gamma}_2^{(1)} + \tilde{\gamma}_1^{(1)} \tilde{\gamma}_2^{(2)} \right); \\ U_m = & P \left[ i \left( \tilde{\gamma}_{22}^{(j)} - \rho_1 h k \sigma \eta \nu^2 \tilde{\gamma}_2^{(j)} \right) \sin \alpha + (-1)^m \left( \sigma \eta \tilde{\gamma}_{21}^{(j)} + \rho_1 h k \nu^2 \tilde{\gamma}_1^{(j)} \right) \cos \alpha \right]; \\ & j, m = 1, 2; \quad j \neq m. \end{aligned}$$

Відповідно оригінали напружень і швидкостей переміщень, використовуючи формули (34), (28) і (18), можна записати:

$$\tilde{Q}_{jj} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left\{ \tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} U_1 - \left[ \tilde{\gamma}_{jj}^{(2)} - \tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} |k| \eta (y_2 + h) \right] U_2 \right\} e^{|k| \eta (y_2 + h)} e^{i k y_1} dk;$$

$$\tilde{Q}_{mj} = -\frac{i\eta}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \sigma \Delta^{-1} \left\{ \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} U_1 + \left[ \tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} + \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} \eta |k| (y_2 + h) \right] U_2 \right\} e^{|k| \eta (y_2 + h)} e^{i k y_1} dk;$$

$$m, j = 1, 2; \quad j \neq m;$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -\frac{v}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left\{ \tilde{\gamma}_1^{(1)} U_1 + \left[ \tilde{\gamma}_1^{(2)} + \tilde{\gamma}_1^{(1)} |k| \eta(y_2 + h) \right] U_2 \right\} e^{|k|\eta(y_2+h)} e^{iky_1} dk; \\ \dot{u}_2 &= \frac{iv}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \sigma \eta \Delta^{-1} \left\{ \tilde{\gamma}_2^{(1)} U_1 - \left[ \tilde{\gamma}_2^{(2)} - \tilde{\gamma}_2^{(1)} |k| \eta(y_2 + h) \right] U_2 \right\} e^{|k|\eta(y_2+h)} e^{iky_1} dk. \end{aligned} \quad (36)$$

З вище викладеного слідує, що напружено-деформований стан поперечно напруженого нестисливого півпростору з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару визначається із виразів (29), (31) і (36) в залежності від механічних параметрів поверхневого шару і півпростору, швидкості руху навантаження, початкових напружень і координат точки, що досліджується.

**4. Чисельні дослідження.** З отриманих результатів випливає, що розрахунок інтегралів оберненого перетворення істотно залежить від швидкості руху навантаження. Методика обчислення таких інтегралів приведена в роботі [7].

Як приклад розглянемо півпростір з пружним потенціалом типу Бартенева-Хазановича [6]. Припустимо, що початковий деформований стан плоский і поверхневе навантаження відсутнє. Проаналізуємо, як початкові напруження в основі впливають на характеристики напружено-деформованого стану при різних швидкостях навантаження. Розрахунки проводилися при наступних значеннях основних параметрів:  $\rho/\rho_1 = 0,5$ ;  $\alpha = \pi/2$ .

Для компонентів тензора  $\tilde{\kappa}$  мають місце наступні вирази [2]

$$\tilde{\kappa}_{1111} = \tilde{\kappa}_{2222} = 2\mu\lambda_1^{-1}; \quad \tilde{\kappa}_{2112} = 2\mu\lambda_1^{-1}(\lambda_1^2 + 1)^{-1};$$

$$\tilde{\kappa}_{1221} = 2\mu\lambda_1^3(\lambda_1^2 + 1)^{-1}; \quad \tilde{\kappa}_{1212} = \tilde{\kappa}_{2121} = 2\mu\lambda_1^{-1}(\lambda_1^2 + 1)^{-1}; \quad \tilde{\kappa}_{1122} = \tilde{\kappa}_{2211} = 0.$$

Для розрахунку складових напружень і швидкостей переміщень у півпросторі скористаємося формулами (29) і (36).

Визначимо, як основні характеристики напружено-деформованого стану залежать від початкових напружень при різних швидкостях навантаження (дозвукових і надзвукових).

Досліджувались швидкості навантаження в діапазонах  $v < c_1$  і  $v > c_1$ . Тут  $c_1$  — швидкість поширення поперечних хвиль у напрямку осі  $Oy_1$  в необмеженому нестисливому тілі з початковими напруженнями ( $\rho c_1^2 = \tilde{\kappa}_{1221}$ ).

У випадку, коли  $v < c_1$  розглянуті тільки докритичні швидкості навантаження [2].

На рис. 1 показаний розподіл деяких складових напружень і швидкостей переміщень в півпросторі при  $y_2 = -2h/\lambda_2$  для  $v^2 = 0,1c_0^2$ . Тут  $c_0^2 = \mu/\rho$ .

Для таких швидкостей навантаження графіки величин, що характеризують напружено-деформований стан, симетричні по відношенню до точки прикладання навантаження.

На рис. 2 показаний розподіл узагальненого напруження  $\tilde{Q}_{22}$  в півпросторі при  $y_2 = -2h/\lambda_2$  для  $v^2 = 0,1c_0^2$  та різних співвідношеннях густини півпростору та поверхневого шару.

Криві 1, 2, 3, 4 і 5 на рис. 1 і 2 відповідають значенням  $\lambda_1 = 0,8$ ,  $\lambda_1 = 0,9$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_1 = 1,1$  і  $\lambda_1 = 1,2$ .

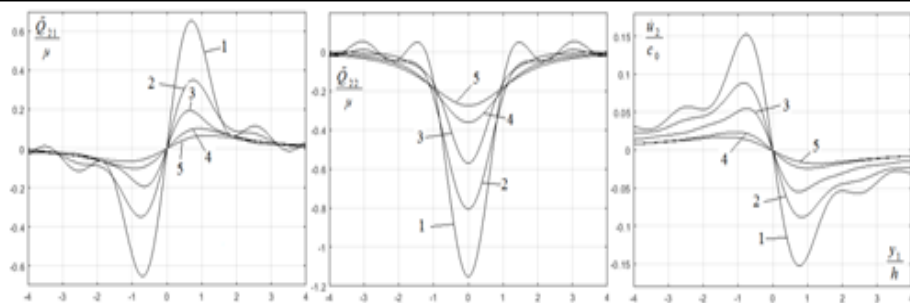


Рис. 1. Узагальнені напруження  $\tilde{Q}_{12}$  і  $\tilde{Q}_{22}$  та швидкість переміщення  $\dot{u}_2$  в півпросторі при дозвуковій швидкості  $v^2 = 0.1c^2$ .

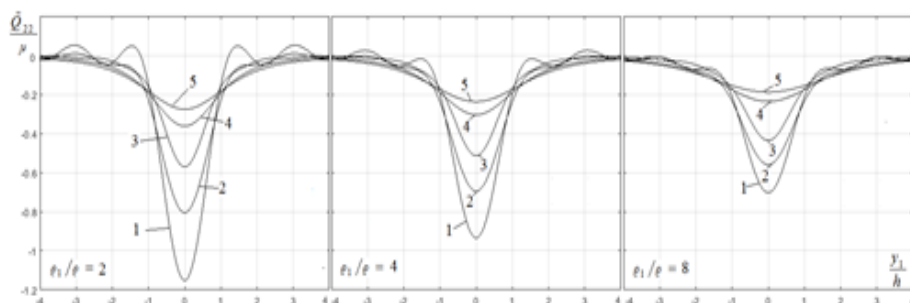


Рис. 2. Узагальнене напруження  $\tilde{Q}_{22}$  в півпросторі при різних співвідношеннях густини матеріалів півпростору та поверхневого шару.

Аналіз отриманих числових результатів для докритичних швидкостей руху навантаження дозволяє зробити наступні висновки. При заданих  $\lambda_1$  швидкість зростання значень величин, що досліджується, при стискуванні більше, ніж при розтягуванні. Загасання на відстані від точки прикладання навантаження відбувається повільніше при стискуванні, ніж при розтягуванні. Значення параметрів, що характеризують напружено-деформований стан основи і їх залежність від початкових напружень, визначаються координатами даної точки. Існують області півпростору, в яких значення напружень і швидкостей переміщень мало залежать від початкових деформацій.

Зі збільшенням швидкості руху навантаження вплив початкових напружень значно посилюється. Особливо це має місце для матеріалу, що попередньо стиснений.

Для більш жорсткого шару вплив швидкості поверхневого навантаження і початкових напружень зменшується.

Розглянемо випадок, коли  $v > c_1$ . Зміна складових напружень і швидкостей переміщень в півпросторі в залежності від відстані до точки прикладання навантаження показана на рис. 3.

Розрахунки в цьому випадку проводилися при  $y_2 = -2h/\lambda_2$ . Швидкість навантаження становила  $v^2 = 2c_0^2$ . Умовні позначення на рис. 3 такі ж, як і на рис. 1 і 2.

Для надзвукової швидкості навантаження епюри величин, що досліджуються, асиметричні по відношенню до точки прикладання навантаження. При цьому пряма хвиля загасає набагато швидше, ніж зворотна, але не зникає пов-

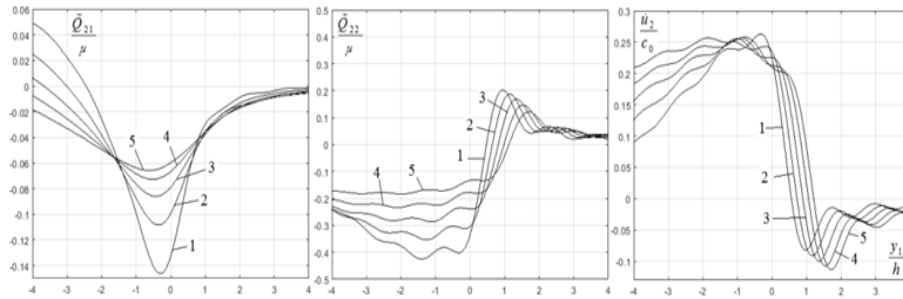


Рис. 3. Узагальнені напруження  $\tilde{Q}_{12}$  і  $\tilde{Q}_{22}$  та швидкість переміщення  $\dot{u}_2$  в півпросторі при надзвуковій швидкості  $\tilde{Q}_{22}$ .

ністю через наявність поверхневого шару. З рис. 3 випливає, що значення напружень і швидкостей переміщень в півпросторі при  $v > c_1$  суттєво залежать від початкових напружень в півпросторі. Конкретний тип таких залежностей визначається положенням точки шаруватого середовища щодо точки прикладання навантаження. Так само, як і в випадку, коли  $v < c_1$ , існують області півпростору, в яких значення напружень і швидкостей переміщень не залежать від початкових деформацій.

**5. Висновок.** Таким чином, в даній статті в рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями приведений розв'язок плоскої динамічної задачі про вплив рухомого навантаження на попередньо напружений півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару. Для розв'язку задачі використаний інтегральний метод Фур'є. Для матеріалу з потенціалом типу Бартенева-Хазановича виконані чисельні дослідження. Вивчений вплив тонкого поверхневого шару, початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на розподіл швидкостей переміщень і напружень в нестисливій основі з початковими напруженнями. Отримані оцінки можуть бути використані для аналізу результатів розрахунків більш складних моделей шаруватих середовищ, що піддаються впливу рухомих навантажень в процесі експлуатації.

**РЕЗЮМЕ.** Розглянута плоска задача про вплив рухомого навантаження на нестисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару. Досліджено вплив рухомого навантаження, початкових напружень, механічних параметрів елементів шаруватої основи на основні характеристики її напружено-деформованого стану.

### Список використаної літератури

1. Багно О. М. Вплив шару ідеальної рідини на поверхневу нестійкість нестисливого пружного півпростору, підданого скінченним початковим деформаціям. *Прикл. механіка*. 2022. Т. 58, № 6. С. 29–38.
2. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Германия : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
3. Babich S. Yu., Gluchov Yu. P. On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses. *Int. Appl. Mech.* 2021. Vol. 57, No. 1. P. 43–52..
4. Bagnо O. M. Effect of Finite Initial Strains on the Wave Process in the System of an Incompressible Half-Space and an Ideal Liquid Layer. *Int. Appl. Mech.* 2021. Vol. 57, No. 6. P. 644–654.
5. Guz O. M., Bagnо O. M. Effect of the Initial Stresses on Waves in the System Consisting of

- a Viscous Fluid Layer and a Compressible Elastic Half-Space. *Int. Appl. Mech.* 2021. Vol. 57, No. 1. P. 1–10.
6. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Киев : «А.С.К», 2004. 672 с.
  7. Wright J. P., Baron M. L. Exponentially decaying pressure pulse moving with contact velocity on the surface of a layered elastic material (superseismic half space). *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1970. Vol. 37, No. 1. P. 148–159.

**Gluchov Yu. P., Babich S. Yu., Mlavets Yu. Yu.** Reaction of layered incompressible half-space with initial stresses to moving load.

A prestressed incompressible half-space with inhomogeneity in the form of a thin surface layer is considered. The concentrated force moves along the free surface of the protective layer at a constant speed at a certain angle to the surface of the half-space. The solution of the problem was obtained using the method of integral Fourier transformations. The material with the Bartenev-Khazanovich potential was considered for numerical analysis. The calculations were carried out within the framework of the theory of finite initial deformations. The impact of the moving load, initial stresses and mechanical parameters of the elements of the layered base on the main characteristics of its stress-strain state was studied.

**Keywords:** incompressible half-plane, initial (residual) stresses, moving load.

### References

1. Bagno, O. M. (2022). Effect of a layer of an ideal liquid on surface instability incompressible elastic half-space subjected to skin initial deformations *Appl. Mechanics*, 58(6), 29–38.
2. Guz, A. N., Babych, S. Yu., & Glukhov, Yu. P. (2015). *Mixed problems for elastic base with initial stresses*. Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing.
3. Babich, S. Yu., & Gluchov, Yu. P. (2021). On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses. *Int. Appl. Mech.*, 57(1), 43 – 52.
4. Bagno, O. M. (2021). Effect of Finite Initial Strains on the Wave Process in the System of an Incompressible Half-Space and an Ideal Liquid Layer. *Int. Appl. Mech.*, 57(6), 644–654.
5. Guz, O. M., & Bagno, O. M. (2021). Effect of the Initial Stresses on Waves in the System Consisting of a Viscous Fluid Layer and a Compressible Elastic Half-Space. *Int. Appl. Mech.*, 57(1), 1–10.
6. Guz A. N. (2004). *Elastic waves in bodies with initial (final) stresses*. Kyiv: «A.S.K».
7. Wright, J. P., & Baron, M. L. (1970). Exponentially decaying pressure pulse moving with contact velocity on the surface of a layered elastic material (superseismic half space). *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 37(1), 148–159.

Одержано 17.07.2023