Міністерство освіти і науки України

Ужгородський національний університет

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск 16

Ужгород 2008

ББК 22.1+72.4 (4УКР)
У-33
УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: П. М. Гудивок (гол. ред.) та інші. – Ужгород: УжНУ, 2008. – Вип. 16. – 193 с.

Рекомендовано до друку Вченою радою УжНУ (протокол №6 від 19.06.2008).

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88016 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): (0312) 642725.

UDC 517.927

М. Й. Ронто (Мішкольцський ун-т, Угорщина)
Н. М. Щобак, К. В. Маринець (Ужгородский нац. ун-т)

ПРО ПАРАМЕТРИЗАЦІЮ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТИПУ КОШІ-НІКОЛЕТТІ

We obtain some results concerning the investigation of the Cauchy–Nicoletti type boundary value problem. We show that it is useful to reduce the given boundary-value problem, using an appropriate substitution, to the parametrized boundary value problem containing some unknown scalar parameters in the boundary conditions. To study the transformed parametrized problem, we use a method which is based upon special types of successive approximations constructed in an analytic form.

Отримані певні результати при дослідженні крайової задачі Коші-Ніколетті. Показано доцільність перетворення вихідної крайової задачі, використовуючи відповідну заміну, до крайової задачі з невідомими скалярними параметрами у крайових умовах. Для дослідження трансформованої крайової задачі використовується метод, який ґрунтується на спеціального типу послідовних наближеннях, сконструйованих у аналітичній формі.

Вступ. Серед різноманіття методів, які використовуються сучасною наукою в теорії крайових задач [1–7], чисельно-аналітичні методи послідовних наближень пропонують конструктивні можливості для дослідження якісної теорії та побудови наближених розв'язків різних типів задач [8–18]. Згідно із основною ідеєю чисельно-аналітичних методів, вихідна крайова задача зводиться до збуреної задачі з невідомими параметрами, яка розглядається разом із певною трансцендентною системою визначальних рівнянь. Розв'язок модифікованої задачі знаходиться у аналітичній формі послідовними ітераціями.

У даній роботі показано доцільність параметризації крайових задач типу Коші–Ніколетті, яка дозволяє спростити побудову послідовних наближень в аналітичній формі.

1. Постановка задачі. Розглянемо систему нелінійних диференціальних рівнянь
$$x'(t) = f(t,x), \quad t \in [0,T], \tag{1}$$
з крайовими умовами
$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_{10}, \\ x_2(0) &= x_{20}, \\ x_3(T) &= x_{3T}, \end{aligned} \tag{2}$$
де $x = (x_1, x_2, x_3) : [0,T] \to \mathbb{R}^3$, $f : [0,T] \times D \to \mathbb{R}^3$ – неперервна, $D \subset \mathbb{R}^3$ замкнена обмежена область.

Крайові умови (2) можна записати у матричній формі
$$Ax(0) + C_1 x(T) = d, \tag{3}$$
де $A = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} x_{10}\\x_{20}\\x_{3T} \end{pmatrix}$. Очевидно, матриця C_1 вироджена.

2. Параметризація. Для того, щоб обійти виродженість матриці C_1, замінимо значення перших двох компонент розв'язку крайової задачі (1), (3) в точці T параметрами λ_1 і λ_2:

$$\begin{aligned} x_1(T) &= \lambda_1, \\ x_2(T) &= \lambda_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Використовуючи рівності (4), крайові умови (2) матимуть вигляд:

$$Ax(0) + Cx(T) = d(\lambda), \tag{5}$$

де $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $d(\lambda) = \begin{pmatrix} x_{10}+\lambda_1 \\ x_{20}+\lambda_2 \\ x_{3T} \end{pmatrix}$. Тут, на відміну від C_1 у рівності (3), матриця С невироджена.

Зауваження. Нелінійна задача з крайовими умовами типу Коші–Ніколетті (1), (2) еквівалентна крайовій задачі (1), (5) разом з умовою (4).

Покажемо, що параметризована крайова задача (1), (5) може бути досліджена, використовуючи чисельно–аналітичний метод послідовних наближень. Для всіх $x = \operatorname{col}(x_1, x_2, x_3) : [0,T] \to \mathbb{R}^3$ використаємо позначення $|x| = (|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ і всі нерівності між тривимірними векторами розумітимемо покомпонентно.

3. Побудова послідовних наближень. Припустимо, що для крайової задачі (1), (2) виконуються наступні умови :

A) функція $f(t,x)$ неперервна на $[0,T] \times D$ і задовольняє умову Ліпшиця для всіх $t \in [0,T]$ та $\{x, y\} \subset D$

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le K\,|x - y|\,, \tag{6}$$

де $K = (k_{ij})_{i,j=1}^{3}$ – деяка стала матриця з невід'ємними компонентами;

B) множина $D_\beta := \{z \in D : B(z, \beta(z,\lambda)) \subset D, \forall \lambda \in I\}$ непорожня, де $B(z, \beta(z,\lambda))$ куля з центром у точці z і радіусом

$$\beta(z,\lambda) := \frac{T}{2}\delta_D(f) + |d(\lambda) - (A+E)\,z|\,, \tag{7}$$

де E – одинична матриця, множина $I \subset \mathbb{R}^2$, $I := \{\lambda \in \mathbb{R}^2, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) : \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ x_{3T} \end{pmatrix} \in D\}$,

$$\delta_D(f) := \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x) - \min_{(t,x)\in[0,T]} f(t,x)\right]; \tag{8}$$

C) найбільше власне значення $\lambda_{\max}(K)$ матриці K задовольняє нерівність:

$$\lambda_{\max}(K) < \frac{10}{3T}.$$

Визначимо множину $U \subset \mathbb{R}$ наступним чином:

$$U = \{u \in \mathbb{R} : (x_{10}, x_{20}, u) \in D_\beta\}\,.$$

Розглянемо послідовність функцій $\{x_m(t,u,\lambda)\}$, задану формулою

$$x_m(t,u,\lambda) = z + \int_0^t f(s, x_{m-1}(s,u,\lambda))ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1}(s,u,\lambda))ds +$$

$$+\frac{t}{T}\left[d(\lambda) - (A+E)z\right], \tag{9}$$

де $m = 1, 2, 3, ...,$ $x_0(t, u, \lambda) = (x_{10}, x_{20}, u) = z \in D_\beta$, $u \in U$. У точках $t = 0$ і $t = T$ $x_m(\cdot, u, \lambda)$ приймає наступні значення:

$$x_m(0, u, \lambda) = z$$

і

$$x_m(T, u, \lambda) = z + d(\lambda) - (A + E)z.$$

Таким чином, всі функції послідовності (9) задовольняють крайові умови (2) для всіх $u \in U$ і $\lambda \in I$.

Теорема 1. *Припустимо, що функція $f : [0, T] \times D \to \mathbb{R}^3$ задовольняє умови A)- C). Тоді :*

1) послідовність функцій вигляду (9) рівномірно збігається до граничної функції $x^*(t, u, \lambda)$ при $m \to \infty$ для всіх $(t, u, \lambda) \in [0, T] \times U \times I$;

2) гранична функція

$$x^*(t, u, \lambda) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, u, \lambda) \tag{10}$$

є єдиним розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = z + \int_0^t f(s, x(s))ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x(s))ds + \frac{t}{T}\left[d(\lambda) - (A + E)z\right] \tag{11}$$

тобто, розв'язком збуреної крайової задачі

$$x'(t) = f(t, x) + \Delta(u, \lambda), \tag{12}$$

$$Ax(0) + Cx(T) = d(\lambda),$$

де

$$\Delta(u, \lambda) = -\frac{1}{T}\int_0^T f(s, x(s, u, \lambda))ds + \frac{1}{T}\left[d(\lambda) - (A + E)z\right], \tag{13}$$

з початковою умовою $x^*(0, u, \lambda) = z = (x_{10}, x_{20}, u)$,

3) справедлива оцінка

$$|x^*(t, u, \lambda) - x_m(t, u, \lambda)| \le \frac{20}{9}t\left(1 - \frac{t}{T}\right)Q^{m-1}(E - Q)^{-1}h, \tag{14}$$

де $Q = \frac{3TK}{10}$ і $h := Q\delta_D(f) + K\left|d(\lambda) - (A + E)z\right|$.

Доведення. Доведемо, що послідовність (9) є фундаментальною послідовністю у банаховому просторі $C([0, T], \mathbb{R}^3)$ із заданою стандартною нормою. Спочатку покажемо, що $x_m(t, u, \lambda) \in D$, для всіх $(t, u, \lambda) \in [0, T] \times U \times I$, $m \in \mathbb{N}$.

Справді, використовуючи оцінку [12, лема 4]

$$\left|\int_0^t \left[f(\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds\right]d\tau\right| \le \frac{1}{2}\alpha_1(t)\left[\max_{t\in[0,T]} f(t) - \min_{t\in[0,T]} f(t)\right], \tag{15}$$

де $\alpha_1(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right), |\alpha_1(t)| \le \frac{T}{2}, \quad t \in [0, T]$, із співвідношення (9) при $m = 0$ матимемо

$$|x_1(t, u, \lambda) - z| \le \left| \int\limits_0^t \left[f(t, z) - \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(t, s) ds \right] dt \right| + |d(\lambda) - (A + E) z| \le$$

$$\le \alpha_1(t)\delta_D(f) + \beta_1(z, \lambda) \le \beta(z, \lambda), \tag{16}$$

де

$$\beta_1(z, \lambda) = |d(\lambda) - (A + E) z|. \tag{17}$$

Враховуючи (7), бачимо, що $x_1(t, u, \lambda) \in D$, коли $(t, u, \lambda) \in [0, T] \times U \times I$. За індукцією легко встановити, що всі функції, побудовані за формулою (9) також належать множині D, при $m = 1, 2, ..., t \in [0, T], u \in U, \lambda \in I$.

Розглянемо різницю функцій

$$x_{m+1}(t, u, \lambda) - x_m(t, u, \lambda) = \int\limits_0^t [f(s, x_m(s, u, \lambda)) - f(s, x_{m-1}(s, u, \lambda))] ds -$$

$$-\frac{t}{T} \int\limits_0^T [\, f(s, x_m(s, u, \lambda)) - f(s, x_{m-1}(s, u, \lambda)) \,] ds$$

і позначимо

$$d_m(t, u, \lambda) = |x_m(t, u, \lambda) - x_{m-1}(t, u, \lambda)|, \quad m = 1, 2, 3, \ldots. \tag{18}$$

Використовуючи оцінку леми 2.3 з [10] та беручи до уваги умову Ліпшиця, отримаємо

$$d_{m+1}(t, u, \lambda) \le K \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t d_m(s, u, \lambda) ds + \frac{t}{T} \int_t^T d_m(s, u, \lambda) ds \right] \tag{19}$$

для всіх $m = 0, 1, 2, \ldots$. На підставі нерівності (16), матимемо

$$d_1(t, u, \lambda) = |x_1(t, u, \lambda) - z| \le \alpha_1(t)\delta_D(f) + \beta_1(z, \lambda). \tag{20}$$

Використовуючи оцінки, отримані в [10, лема 2.4]

$$\alpha_{m+1}(t) \le \left(\frac{3}{10}T\right) \alpha_m(t) \le \left(\frac{3}{10}T\right)^m \overline{\alpha_1(t)} \tag{21}$$

для послідовності функцій

$$\alpha_{m+1}(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int\limits_0^t \alpha_m(s) ds + \frac{t}{T} \int\limits_t^T \alpha_m(s) ds, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{22}$$

де $\alpha_0(t) = 1$, $\alpha_1(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right)$, $\overline{\alpha}_1(t) = \frac{10}{9}\alpha_1(t)$, а також нерівність (20) із (19) при $m = 1$ випливає

$$d_2(t, u, \lambda) \le K\delta_D(f) \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int\limits_0^t \alpha_1(s) ds + \frac{t}{T} \int\limits_t^T \alpha_1(s) ds \right] +$$

$$+K\beta_1(z,\lambda)\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int\limits_0^t ds+\frac{t}{T}\int\limits_t^T ds\right]\leq K\left[\alpha_2\left(t\right)\delta_D(f)+\alpha_1(t)\beta_1(z,\lambda)\right].$$

За індукцією легко показати, що

$$d_{m+1}(t,u,\lambda)\leq K^m\left[\alpha_{m+1}(t)\delta_D(f)+\alpha_m(t)\beta_1(z,\lambda)\right],\quad m=0,1,2,\ldots,\tag{23}$$

де $\alpha_{m+1}(t),\alpha_m(t)$ обчислюються за формулою (22), а $\delta_D(f)$, $\beta_1(z,\lambda)$ визначені згідно (8) і (17).

Використовуючи нерівність (21), із співвідношення (23) отримаємо

$$d_{m+1}(t,u,\lambda)\leq\overline{\alpha}_1(t)\left[\left(\frac{3}{10}TK\right)^m\delta_D(f)+K\left(\frac{3}{10}TK\right)^{m-1}\beta_1(z,\lambda)\right]=$$

$$=\overline{\alpha}_1(t)\left[Q^m\delta_D(f)+KQ^{m-1}\beta_1(z,\lambda)\right],\tag{24}$$

для всіх $m=1,2,...,$ де матриця $Q=\frac{3TK}{10}$. Тоді, враховуючи нерівність (24), оцінимо наступну різницю

$$|x_{m+j}(t,u,\lambda)-x_m(t,u,\lambda)|\leq|x_{m+j}(t,u,\lambda)-x_{m+j-1}(t,u,\lambda)|+$$

$$+|x_{m+j-1}(t,u,\lambda)-x_{m+j-2}(t,u,\lambda)|+\cdots+|x_{m+1}(t,u,\lambda)-x_m(t,u,\lambda)|=$$

$$=\sum_{i=1}^{j}d_{m+i}(t,u,\lambda)\leq\overline{\alpha}_1(t)\left[\sum_{i=0}^{j-1}\left(Q^{m+i}\delta_D(f)+KQ^{m+i-1}\beta_1(z,\lambda)\right)\right]=$$

$$=\overline{\alpha}_1(t)\left[Q^m\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\delta_D(f)+KQ^{m-1}\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\beta_1(z,\lambda)\right].\tag{25}$$

На підставі умови C), максимальне власне значення матриці Q не перевищує 1. Тоді маємо $\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\leq(E-Q)^{-1}$ і $\lim_{m\to\infty}Q^m=0$. Тому, із нерівності (25) можемо зробити висновок, що, згідно із критерієм Коші, послідовність $\{x_m(t,u,\lambda)\}$, що задається формулою (9), рівномірно збігається в області $(t,u,\lambda)\in[0,T]\times U\times I$ до деякої граничної функції $x^*(t,u,\lambda)$. Оскільки всі функції $x_m(t,u,\lambda)$ послідовності (9) задовольняють крайові умови (5), то гранична функція $x^*(t,u,\lambda)$ також задовольняє ці умови. Переходячи у формулі (9) до границі при $m\to\infty$, отримуємо, що гранична функція задовольняє інтегральне рівняння (11), а отже, інтегро-диференціальне рівняння (12). Оцінка (14) є безпосереднім наслідком нерівності (25).

Розглянемо задачу Коші

$$x'(t)=f(t,x(t))+\mu,\qquad t\in[0,T],\tag{26}$$

$$x(0)=z=(x_{10},x_{20},u),\tag{27}$$

де $z\in D_\beta$ і $\mu\in\mathbb{R}^3$ – контрольний параметр.

Теорема 2. *Нехай виконуються всі умови теореми 1. Тоді розв'язок $x=x\,(t,u,\lambda)$ задачі (26), (27) задовольняє крайові умови (5) тоді і тільки тоді, коли*

$$\mu=\Delta(u,\lambda),\tag{28}$$

де $\Delta : U \times I \to \mathbb{R}^3$ *відображення, визначене формулою (13).*

Доведення. Згідно із теоремою Пікара–Ліндельофа (Picard–Lindelöf) легко переконатися, що оскільки має місце умова Ліпшиця (6), то початкова задача (26), (27) має єдиний розв'язок для всіх $(\mu, u) \in \mathbb{R}^3 \times U$. З доведення теореми 1 бачимо, що для всіх $(u, \lambda) \in U \times I$, гранична функція $x^*(t, u, \lambda) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, u, \lambda)$ послідовності (9) задовольняє інтегральне рівняння (11), а також крайові умови (5). Тобто $x = x^*(t, u, \lambda)$ вигляду (10) є єдиним розв'язком початкової задачі

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) + \Delta(u, \lambda), \qquad t \in [0, T], \tag{29}$$

$$x(0) = z, \tag{30}$$

де $\Delta(u, \lambda)$ задається формулою (13). Отже, (29), (30) співпадає з (26), (27) при умові, що

$$\mu = \Delta(u, \lambda) = -\frac{1}{T}\int_0^T f(s, x(s))ds + \frac{1}{T}[d(\lambda) - (A + E)z]. \tag{31}$$

Те, що функція (10) не є розв'язком (26), (27) ні при яких інших значеннях μ, не рівних (31), випливає з рівності (28).

Наступне твердження показує зв'язок граничної функції $x = x^*(t, u, \lambda)$ з розв'язком параметризованої крайової задачі (1), (5).

Теорема 3. *Нехай для крайової задачі (1), (2) виконуються умови A)–C). Тоді пара* $(x^*(\cdot, u^*, \lambda^*), \lambda^*)$ *є розв'язком крайової задачі (1), (5) з параметром* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ *тоді і тільки тоді, коли пара* (u^*, λ^*) *задовольнятиме систему визначальних рівнянь*

$$\Delta(u, \lambda) = -\frac{1}{T}\int_0^T f(s, x^*(s, u, \lambda))ds + \frac{1}{T}\left[d(\lambda) - (A + E)\, z\right] = 0. \tag{32}$$

Доведення. Достатньо застосувати теорему 2 і зауважити, що диференціальне рівняння (29) співпадає з (1) тоді і тільки тоді, коли пара (u^*, λ^*) задовольняє рівняння

$$\Delta(u^*, \lambda^*) = 0,$$

тобто, коли виконується рівність (32).

Зауваження. На практиці, фіксуємо деяке натуральне m і замість системи (32) розглядаємо наближену визначальну систему

$$\Delta_m(u, \lambda) = -\frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(s, u, \lambda))ds + \frac{1}{T}\left[d(\lambda) - (A + E)\, z\right] = 0,$$

звідки, беручи до уваги (4), отримуємо значення невідомих параметрів $(u, \lambda) \in U \times I$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$.

4. Приклад крайової задачі типу Коші–Ніколетті. Розглянемо нелінійну систему

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t); \\ x_2'(t) = x_3(t); \\ x_3'(t) = \frac{t^2}{16} - \frac{1}{2}x_3^2(t) - \frac{1}{2}x_1(t), \end{cases} \tag{33}$$

де $t \in [0,1]$, з розділеними крайовими умовами типу Коші–Ніколетті

$$\begin{aligned} x_1(0) &= -\tfrac{1}{16}, \\ x_2(0) &= 0, \\ x_3(1) &= \tfrac{1}{4}. \end{aligned} \tag{34}$$

Легко показати, що точний розв'язок даної системи має вигляд

$$\begin{cases} x_1^*(t) = \frac{t^2}{8} - \frac{1}{16}, \\ x_2^*(t) = \frac{t}{4}, \\ x_3^*(t) = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Припустимо, що задана крайова задача розглядається в області

$$D = \left\{(x_1, x_2, x_3) : |x_1| \le \tfrac{1}{2}, |x_2| \le \tfrac{1}{2}, |x_3| \le \tfrac{1}{3}\right\}. \tag{35}$$

Крайові умови (34) можна переписати як

$$Ax(0) + C_1 x(T) = d, \tag{36}$$

де $A = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Очевидно, тут матриця C_1 вироджена.

Замінимо значення перших двох компонент розв'язку крайової задачі (33), (34) у точці T параметрами λ_1 і λ_2:

$$x_1(T) = \lambda_1, \quad x_2(T) = \lambda_2, \tag{37}$$

де $|\lambda_1| \le \frac{1}{2}, |\lambda_2| \le \frac{1}{2}$.

Використовуючи рівності (37), крайові умови (36) матимуть вигляд

$$Ax(0) + Cx(T) = d(\lambda), \tag{38}$$

де $A = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = (\lambda_1, \lambda_2)$, $d(\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16}+\lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Тут $C = E$ – невироджена матриця.

Безпосередніми обчисленнями переконуємося, що для задачі (33), (34) виконуються умови A)–C) в області (35). При цьому

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \lambda_{\max}(K) \le 0.93,$$

а вектори $\delta_D(f)$ і $\beta(z,\lambda)$ у (8), (7) мають вигляд

$$\delta_D(f) \le \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{89}{288} \end{pmatrix}, \quad \beta(z,\lambda) \le \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{89}{576} \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{16} + \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ u - \frac{1}{4} \end{vmatrix}, \quad z = \left(-\tfrac{1}{16}, 0, u\right).$$

Таким чином, до даної крайової задачі можна застосувати чисельно-аналітичний алгоритм, розглянутий вище і сконструювати послідовність наближених розв'язків. Використовуючи пакет символьної математики Maple, отримуємо результат першої ітерації:

$$x_{11}(t,u,\lambda) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}t + t\lambda_1,$$

$$x_{12}(t,u,\lambda) = t\lambda_2,$$

$$x_{13}(t,u,\lambda) = u + \frac{1}{48}t^3 + \frac{11}{48}t - ut,$$

для всіх $t \in [0,1]$, $u \in U$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Обчислення показують, що наближеними розв'язками першої ітерації є

$$\lambda_1 = -0.06250000000, \quad \lambda_2 = 0.2227184123, \quad u = 0.2227184123.$$

Отже, компоненти першого наближення мають вигляд:

$$x_{11}(t) = -0.06250000000,$$

$$x_{12}(t) = 0.2227184123t,$$

$$x_{13}(t) = 0.2227184123 + \frac{1}{48}t^3 + 0.0064482544t.$$

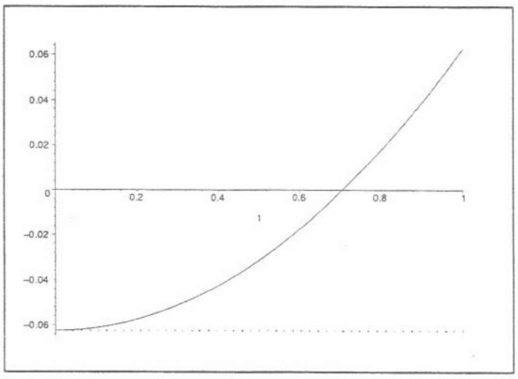

Рис. 1. Перша компонента точного розв'язку (лінія) та її перше наближення (пунктир).

Результат другої ітерації:

$$x_{21}(t,u,\lambda) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\lambda_2 t^2 - \frac{1}{2}t\lambda_2 + \frac{1}{16}t + t\lambda_1,$$

$$x_{22}(t,u,\lambda) = \frac{1}{192}t^4 + \frac{11}{96}t^2 - \frac{1}{2}t^2 u + \frac{1}{2}ut - \frac{23}{192}t + t\lambda_2,$$

$$x_{23}(t,u,\lambda) = u - \frac{1}{32256}t^7 - \frac{11}{11520}t^5 + \frac{1}{240}ut^5 - \frac{1}{192}ut^4 + \frac{167}{13824}t^3 + \frac{11}{144}t^3 u - \frac{1}{6}t^3 u^2 -$$

$$-\frac{1}{64}t^2 - \frac{11}{96}t^2 u + \frac{1}{2}t^2 u^2 - \frac{1}{4}t^2\lambda_1 - \frac{1}{3}u^2 t + \frac{7697}{30240}t - \frac{2767}{2880}ut + \frac{1}{4}t\lambda_1,$$

для всіх $t \in [0,1]$, $u \in U$, $\lambda \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Наближеними розв'язками відповідної визначальної системи у другій ітерації є

$$\lambda_1 = 0.06250286543, \quad \lambda_2 = 0.2500057309, \quad u = 0.2604281283.$$

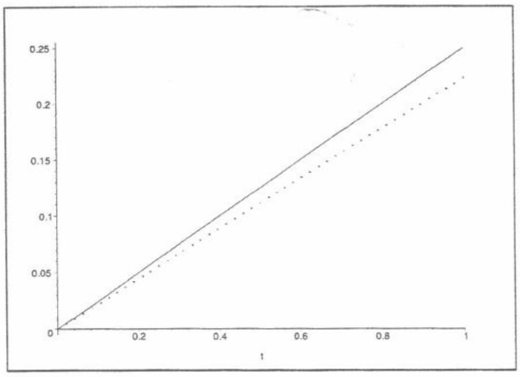

Рис. 2. Друга компонента точного розв'язку (лінія) та її перше наближення (пунктир).

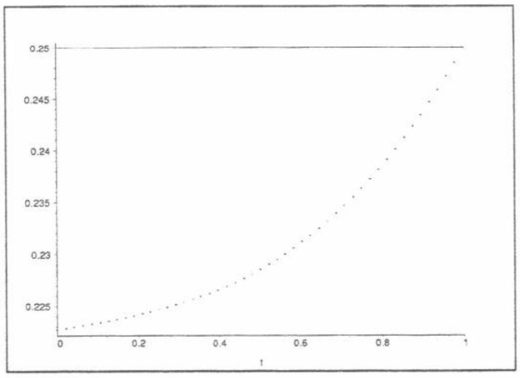

Рис. 3. Третя компонента точного розв'язку (лінія) та її перше наближення (пунктир).

Таким чином, компоненти другого наближення

$$x_{21}(t) = -0.06250000000 + 0.1250028654t^2 + 0,3 \cdot 10^{-10}t,$$

$$x_{22}(t) = \frac{1}{192}t^4 - 0.0156307309t^2 + 0.2604281284t,$$

$$x_{23}(t) = 0.260481283 - \frac{1}{32256}t^7 + 0.000130250899t^5 - 0.001356396502t^4 + 0.0206704350t^3 -$$
$$-0.02718003439t^2 - 0.0026614050t.$$

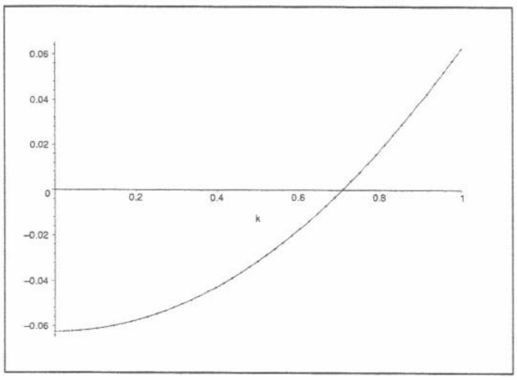

Рис. 4. Перша компонента точного розв'язку (лінія) та її друге наближення (пунктир).

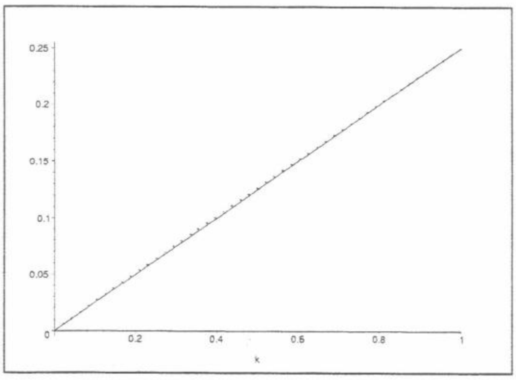

Рис. 5. Друга компонента точного розв'язку (лінія) та її друге наближення (пунктир).

Як видно з наведених вище рисунків 1–5 та представленого нижче рисунку 6 графіки точного розв'язку вже на другій апроксимації майже співпадають з відповідними наближеннями. Наприклад, відхилення наближеного розв'язку від точного у першій ітерації складає 0.12, 0.025, 0.026 відповідно для першої,

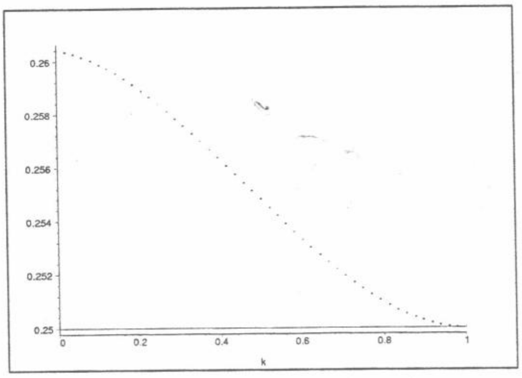

Рис. 6. Третя компонента точного розв'язку (лінія) та її друге наближення (пунктир).

другої та третьої компонент, у другій ітерації $0.25 \cdot 10^{-5}$, $0.18 \cdot 10^{-2}$, 0.01, у четвертій ітерації $0.16 \cdot 10^{-5}$, $0.17 \cdot 10^{-4}$, $0.8 \cdot 10^{-4}$.

1. I. A. Goma, "Method of successive approximations in a two-point boundary problem with parameter," *Ukrain. Math. J.*, vol. 29, no. 6, pp. 594–599, 1977.
2. N. S. Kurpel and A. G. Marusjak, "A multipoint boundary value problem for differential equations with parameters," *Ukrain. Math. J.*, vol. 32, no. 2, pp. 223–226, 285, 1980.
3. A. Yu. Luchka, *The method of averaging functional corrections. Theory and applications.* Translated from the Russian by Scripta Technica, Inc, New York: Academic Press, 1965.
4. A. Yu. Luchka, *Projection-iteration methods. (Proektsionno-iterativnye metody).* Kiev: Naukova Dumka, 1993.
5. R. E. Gaines and J. L. Mawhin, *Coincidence degree, and nonlinear differential equations.* Lecture Notes in Mathematics 568, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1977.
6. H. B. Keller, *Numerical methods for two-point boundary-value problems.* N. Y.: Dover Publications, Inc., 1992.
7. A. M. Samoilenko and N. I. Ronto, *Numerical-analytic methods in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations.* Kiev: Naukova Dumka, 1992. — 297 c.
8. M. Rontó, "On numerical-analytic method for BVPs with parameters," *Publ. Univ. Miskolc Ser. D Nat. Sci. Math.*, vol. 36, no. 2, pp. 125–132, 1996.
9. M. Rontó, "On some existence results for parametrized boundary value problems," *Publ. Univ. Miskolc Ser. D Nat. Sci. Math.*, vol. 37, pp. 95–103, 1997.
10. M. Ronto and A. M. Samoilenko, *Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems.* River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co. Inc., 2000. With a preface by Yu. A. Mitropolsky and an appendix by the authors and S. I. Trofimchuk.
11. A. Ronto and M. Rontó, "On the investigation of some boundary value problems with nonlinear conditions," *Math. Notes (Miskolc)*, vol. 1, no. 1, pp. 43–55, 2000.
12. A. Ronto and M. Rontó, "A note on the numerical-analytic method for nonlinear two-point boundary-value problems," *Nonlinear Oscillations*, vol. 4, no. 1, pp. 112–128, 2001.
13. M. Rontó, "On non-linear boundary value problems containing parameters," *Arch. Math. (Brno)*, vol. 36, pp. 585–593, 2000.
14. M. Rontó, "On the investigation of parametrized non-linear boundary value problems," *Nonlinear Analysis*, vol. 47, pp. 4409–4420, 2001.
15. M. Rontó and N. Shchobak, "On the numerical-analytic investigation of parametrized problems with nonlinear boundary conditions," *Nonlinear Oscillations*, vol. 6, no. 4, pp. 482–510, 2003.
16. A. N. Ronto, M. Ronto, and N. M. Shchobak, "On the parametrization of three-point nonlinear boundary value problems," *Nonlinear Oscillations*, vol. 7, no. 3, pp. 384–402, 2004.

Одержано 15.05.2008