

УДК 519.21, 519.718

В. К. Ясинський, Т. О. Лукашів (Чернівецький нац. ун-т)

ПРО СТОХАСТИЧНУ СТІЙКІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ
ІТО-СКОРОХОДА З ЗАГАЮВАННЯМИ

We obtain the sufficient conditions of the asymptotic uniformly stochastic stability of a trivial solution of the Cauchy problem for the stochastic differential-difference Ito-Skorokhod equation with many constant delays.

Одержано достатні умови асимптотичної рівномірно стохастичної стійкості тривіального розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціально-різницевого рівняння Іто-Скоророда з багатьма сталими загалюваннями.

1. Вступ. Питання вивчення асимптотичної рівномірно стохастичної стійкості вивчено у монографії Скорохода А.В., Гіхмана Й.І. [1]. Для стохастичних диференціаль-но-функціональних рівнянь це питання вивчалось Царковим Є.Ф. [2]. У даній роботі розглянуто більш широкий клас стохастичних систем Іто-Скоророда.

2. Постановка задачі. Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{F} := \{\mathfrak{F}_t, t \geq t_0\}, \mathbf{P})$ задано випадковий процес $x(t) \in \mathbf{R}^n$ для $t \geq t_0 \geq 0$, як розв'язок системи стохастичних диференціально-різницевих рівнянь з пуассоновими перемикуваннями і з багатьма сталими загалюваннями [1]

$$dx(t) = \sum_{i=1}^k a_i(t, x(t), x(t - \Delta_i))dt + \sum_{j=1}^l \left[b_j(t, x(t), x(t - \Delta_j))dw_j(t) + \int_U c_j(t, x(t), x(t - \Delta_j), u) \tilde{\nu}_j(du, dt) \right], \forall t \geq t_0, \quad (1)$$

з початковими умовами

$$x(t)|_{t \in [-\Delta, 0]} = \varphi(t, \omega) \in \mathbf{D}, \quad (2)$$

де $\Delta \equiv \sup_{i,j} (\Delta_i, \Delta_j)$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, l}$; коефіцієнти $a_i : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, $b_j : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow M_n(\mathbf{R}^n)$ – $n \times n$ – матриця, $c_j : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times U \rightarrow \mathbf{R}^n$ неперервні за всіма аргументами; $w_j(t) \equiv w_j(t, \omega) \in \mathbf{R}^n$ – попарно-незалежні вінерові процеси; $\tilde{\nu}_j(du, dt) \equiv \nu_j(du, dt) - dt\Pi(du)$ – скалярні попарно-незалежні центровані пуассонові міри, $t\Pi(A) = \int_A \frac{du dt}{|u|^{n+1}} < \infty$ [3], [4], причому w_i та $\tilde{\nu}_j$ – попарно-незалежні; $\mathbf{D} \equiv \mathbf{D}([-\Delta, 0], \mathbf{R}^n)$ – простір Скорохода неперервних справа функцій, які мають лівосторонні границі [3].

Лема 1. [4] *Нехай:*

1) *коефіцієнти системи (1) неперервні за всіма аргументами;*

2) виконуються умови Ліпшиця за другим і третім аргументом:

$$\sum_{i=1}^k |a_i(t, x^1, y^1) - a_i(t, x^2, y^2)| + \sum_{j=1}^l \|b_j(t, x^1, y^1) - b_j(t, x^2, y^2)\| + \int_U |c_j(t, x^1, y^1, u) - c_j(t, x^2, y^2, u)| \Pi(du) \leq L (|x^1 - y^1| + |x^2 - y^2|),$$

де $L > 0$ – дійсна стала, $\forall x^1, x^2, y^1, y^2 \in \mathbf{D}$;

3) виконується умова рівномірної обмеженості за t .

Тоді:

1) задача Коші (1), (2) має єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язок $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $\forall t \in [0, T]$ в просторі Скорохода \mathbf{D} ;

2) виконується оцінка

$$\mathbf{E} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |x(t)|^2 \right\} \leq N \mathbf{E} \left\{ \sup_{-\Delta + t_0 \leq t \leq t_0} |\varphi(t)|^2 \right\},$$

стала N не залежить від сталої Ліпшиця L і $T > 0$.

Надалі вважатимемо, що $t_0 = 0$ і для існування тривіального розв'язку системи (1), (2)

$$a_i(t, 0, 0) \equiv 0; b_j(t, 0, 0) \equiv 0_{n \times n}; c_j(t, 0, 0, u) \equiv 0.$$

Вірно наступне твердження [4].

Лема 2. *Нехай:*

1) задано невід'ємний випадковий процес $\xi(t) \equiv \xi(t, \omega) \in \mathbf{R}^n$ з простору Скорохода \mathbf{D} ;

2) для довільного розбиття

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$$

та умовного математичного сподівання виконано нерівність

$$\mathbf{E} \{ \xi(t_n) | \sigma(\xi(t_0), \xi(t_1), \dots, \xi(t_{n-1})) \} \leq \xi(t_{n-1}).$$

Тоді для $\forall C > 0$ має місце нерівність

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \xi(t) > C \right\} \leq \frac{1}{C} \mathbf{E} \xi(0).$$

3. Достатні умови асимптотичної рівномірно-стохастичної стійкості. Будемо розглядати задачу стійкості тривіального розв'язку $x(t) \equiv 0$ системи (1), (2) у наступному сенсі [5] – [7].

Означення 1. *Тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (1), (2) назвемо рівномірно стохастично стійким, якщо для $\forall \varepsilon_i > 0, i = 1, 2$ існує таке $\delta > 0$, що для*

$$\mathbf{E} \left\{ \sup_{-\Delta \leq t \leq 0} |\varphi(t)| \right\} \leq \delta, \quad (3)$$

виконується нерівність $\mathbf{P} \{ |x(t)| \leq \varepsilon_2 \} \geq 1 - \varepsilon_1, \forall t \in [0; T]$.

Означення 2. *Тривіальний розв'язок задачі (1), (2) $x(t) \equiv 0$ асимптотично рівномірно стохастично стійкий, якщо він стохастично рівномірно стійкий (означення 1) та*

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0 \right\} = 1.$$

Теорема 1. *При виконанні умов лема 1 достатньою умовою асимптотичної рівномірно стохастичної стійкості тривіального розв'язку задачі Коші (1), (2) є виконання на розв'язках системи нерівності*

$$\begin{aligned} F(t, x(t), k, l) := & 2 \sum_{i=1}^k x'(t) a_i(t, x(t), x(t - \Delta_i)) + \\ & + \sum_{j=1}^l \left[\text{Sp} b_j(t, x(t), x(t - \Delta_j)) b_j'(t, x(t), x(t - \Delta_j)) + \right. \\ & \left. + \int_U |c_j(t, x(t), x(t - \Delta_j), u)|^2 \Pi(du) \right] \leq -f_{\Delta}(x_t), \end{aligned} \quad (4)$$

де $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^1$ – додатно визначений неперервний та обмежений функціонал на відрізках траєкторії $x_t \equiv x(t + \theta), -\Delta \leq \theta \leq 0, \Delta \equiv \sup_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l} \{\Delta_i, \Delta_j\}$, такий, що з $f(\varphi) \equiv 0$ випливає $\varphi(\theta) \equiv 0$; "штрих" – операція транспонування.

Доведення. Розглянемо новий випадковий процес як квадрат модуля розв'язку задачі (1), (2):

$$z(t) = |x(t)|^2 \equiv \sum_{i=1}^n x_i^2(t).$$

Диференціал $dz(t)$ за загальною заміною Іто [1], [4] буде мати вигляд

$$\begin{aligned} dz(t) = & 2 \sum_{i=1}^k x'(t) a_i(t, x(t), x(t - \Delta_i)) x(t) + \\ & + \sum_{j=1}^l \text{Sp} b_j(t, x(t), x(t - \Delta_j)) b_j'(t, x(t), x(t - \Delta_j)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_U \left[|x(t) + c_j(t, x(t), x(t - \Delta_j), u)|^2 - \right. \\
& \left. - |x(t)|^2 - 2(x(t) + c_j(t, x(t), x(t - \Delta_j), u)) \right] \Pi(du) + \\
& \quad + 2x'(t)b(t, x(t), x(t - \Delta_j))dw_j(t) + \\
& + \int_U \{ |x(t) + c_j(t, x(t), x(t - \Delta_j), u)|^2 - |x(t)|^2 \} \tilde{\nu}(du, dt) = \\
& \quad = 2 \sum_{i=1}^k x'(t)a_i(t, x(t), x(t - \Delta_j)) + \\
& \quad + \sum_{j=1}^l \left[Spb_j(t, x(t), x(t - \Delta_j))b'_j(t, x(t), x(t - \Delta_j)) + \right. \\
& \quad \left. + \int_U |c_j(t, x(t), x(t - \Delta_j), u)|^2 \Pi(du) \right].
\end{aligned}$$

Перейдемо до інтегральної форми запису одержаного стохастичного диференціалу $dz(t)$ і використаємо умову (4), в результаті одержимо нерівність для $t \rightarrow \Delta$

$$\begin{aligned}
z(t) & \leq |\varphi(0)|^2 + 2 \sum_{i=1}^k \int_{\Delta}^t x'(\tau)a_i(\tau, x(\tau), x(\tau - \Delta_i))d\tau + \\
& + \sum_{j=1}^l \left[\int_{\Delta}^t Spb_j(\tau, x(\tau), x(\tau - \Delta_j))b'_j(\tau, x(\tau), x(\tau - \Delta_j))d\tau + \right. \\
& \quad \left. + \int_{\Delta}^t \int_U |c_j(\tau, x(\tau), x(\tau - \Delta_j), u)|^2 \Pi(du)d\tau \right] + \\
& \quad + 2 \sum_{j=1}^l \left[\int_{\Delta}^t x'(\tau)b_j(\tau, x(\tau), x(\tau - \Delta_j))dw_j + \right. \\
& \quad + \int_{\Delta}^t \int_U x'(\tau)c_j(\tau, x(\tau), x(\tau - \Delta_j), u)\tilde{\nu}_j(du, d\tau) + \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\Delta}^t \int_U |c_j(\tau, x(\tau), x(\tau - \Delta_j), u)|^2 \tilde{\nu}_j(du, d\tau) \right] \leq \\
& \leq |\varphi(0)|^2 - \int_{\Delta}^t f_{\Delta}(x_{\tau})d\tau + \beta(t) + \gamma,
\end{aligned}$$

де відповідно позначено

$$\begin{aligned} \gamma &\equiv 2 \sum_{i=1}^k \left[\int_0^\Delta x'(\tau) a_i(\tau, x(\tau), x(\tau - \Delta_i)) d\tau \right] + \\ &+ \sum_{j=1}^l \left[\int_0^\Delta Spb_j(\tau, x(\tau), x(\tau - \Delta_j)) b'_j(\tau, x(\tau), x(\tau - \Delta_j)) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_\Delta^t \int_U |c_j(\tau, x(\tau), x(\tau - \Delta_j), u)|^2 \Pi(du) \right]; \\ \beta(t) &\equiv \sum_{j=1}^l \left[2 \int_0^t x'(\tau) b_j(\tau, x(\tau), x(\tau - \Delta_j)) dw_j(\tau) + \right. \\ &\quad + 2 \int_0^t \int_U x'(\tau) c_j(\tau, x(\tau), x(\tau - \Delta_j), u) \tilde{\nu}_j(du, d\tau) + \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_U |c_j(\tau, x(\tau), x(\tau - \Delta_j), u)|^2 \tilde{\nu}_j(du, d\tau) \right]. \end{aligned}$$

1) Доведемо спочатку рівномірно стохастичну стійкість тривіального розв'язку системи (1), (2). На інтервалі $[0, T]$ можна провести оцінку [2] для γ :

$$|\gamma| \leq C_1 \sup_{0 \leq t \leq \Delta} \{ K_0 |x(\tau)|^2 + L_0 |x(\tau)| |\varphi(\tau - \Delta)| + L_0 |\varphi(\tau - \Delta)|^2 \};$$

$$\mathbf{E} \{ |\gamma|^2 \} \leq C_2 \sup_{0 \leq \tau \leq \Delta} |\varphi(\tau)|;$$

де C_1 залежить від сталої Ліпшиця L , а C_2 – від сталої Ліпшиця L та K .

Отже, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 \equiv \delta_1 \left(\sup_{0 \leq \tau \leq \Delta} |\varphi(\tau)|^2 \right) > 0$ таке, що $\mathbf{P} \{ |\gamma| \leq \frac{\varepsilon}{2} \} \geq 1 - \frac{2\delta_1}{\varepsilon}$.

Оскільки $\beta(t)$ є мартингалом [1] на розв'язку, що задовольняє нерівність $|\beta(t)| > |\varphi(0)|^2$, то $\forall t \in [0, T]$ за лемою 2 має місце нерівність

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, T]} (|\beta(t)| + |\varphi(0)|^2) < \varepsilon \right\} \leq \frac{2|\varphi(0)|^2}{\varepsilon}.$$

Враховуючи вище одержані оцінки, матимемо

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \omega : \sup_{t \in [0, T]} |x(t)|^2 \leq \varepsilon \right\} &\leq \mathbf{P} \left\{ |\gamma(t)|^2 > \frac{\varepsilon}{2} \right\} + \\ &+ \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, T]} (|\beta(t)|^2 + |\varphi(0)|^2) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \leq \frac{\delta_1}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{5}$$

Це означає, що розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (1), (2) стохастично рівномірно стійкий за означенням 1.

II) Доведення асимптотичної рівномірно стохастичної стійкості розв'язку $x(t) \equiv 0$ системи (1), (2).

Це рівносильне доведенню $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ на ω -множині, ймовірнісна міра якої рівна 1, якщо $\sup_{-\Delta \leq \tau \leq 0} |\varphi(\tau)|$ як завгодно близький до 0. Дійсно, ω -множина з (5) задовольняє цю умову, а саме:

$$|x(t)|^2 \leq |\varphi(0)|^2 + \gamma - \int_0^t f_{\Delta}(x_{\tau}) d\tau + \beta(t) \leq \varepsilon - \int_0^t f_{\Delta}(x_{\tau}) d\tau. \quad (6)$$

Ліва частина нерівності (6) додатна, тому інтеграл правої частини (6) повинен збігатися за умовою 1) теореми 1. Отже, в силу неперервності функціонала $f_{\Delta}(x_{\tau}) \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, бо $\lim_{\tau \rightarrow \infty} f_{\Delta}(x_{\tau}) = 0$, що завершує доведення теореми 1.

Теорема 2. *Нехай умова (4) теореми 1 виконується на розв'язках $x(t)$ системи (1), (2) і при цьому виконується нерівність*

$$|x(t - \tau)|^2 < \alpha |x(t)|^2, \quad (7)$$

де $0 \leq \tau \leq \Delta$, $\alpha > 1$. Тоді розв'язок $x(t) \equiv 0$ задачі Коші (1), (2) асимптотично рівномірно стохастично стійкий.

Доведення. I) Доведення рівномірно стохастичної стійкості тривіального розв'язку $x(t) \equiv 0$ системи (1), (2).

Виберемо $\forall \varepsilon > 0$ і розглянемо ω -множину

$$B_{\varepsilon} \equiv \left\{ \omega : |\gamma(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \cap \left\{ \omega : \sup_{t \in [0, T]} |\beta(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Доведемо еквівалентний означенню 1 факт: якщо $x(t)$ для $\omega \in B_{\varepsilon}$ потрапив до смуги $|x(t)| < \delta$, то $x(t)$ її ніколи не залишить.

Дійсно, нехай $\forall \eta > 0$ існує $\delta > 0$, що з нерівності $\sup_{\tau \in [-\Delta, 0]} |\varphi(\tau)| < \delta$ випливає $\mathbf{P}\{B_{\varepsilon}\} \geq 1 - \eta(\delta)$. Тоді за умовою (4) матимемо $\sup_{t \in [0, T]} |x(t)|^2 < \varepsilon$ на траєкторії, яка задовольняє нерівність $|x(t - \tau)|^2 < \alpha |x(t)|^2$, причому $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \eta(\delta) = 0$.

Нехай знайдеться хоча б одна траєкторія $y(t)$ системи (1), (2) для якої $\sup_{t \geq 0} |y(t)| > \varepsilon$ на ω -множині B_{ε} . Тоді в перший момент виходу з ε -смуги матимемо нерівність $|y(t^* - \tau)|^2 < |y(t^*)|^2, \forall \tau \in [0, t^*]$. Що означатиме, що в момент часу t^* знаходимося на кривій за умови (7). Одержали протиріччя, тобто тривіальний розв'язок системи (1) рівномірно стохастично стійкий.

II) Доведення асимптотичної рівномірно асимптотичної стійкості розв'язку $x(t) \equiv 0$ задачі (1), (2). Позначимо через $\delta_0 > 0$ максимальний рівень над яким деяка траєкторія знаходиться для $t \geq 0$ та $\omega \in B_{\varepsilon}$.

Якщо такий рівень існує для довільного розв'язку $x(t)$ задачі (1), (2), то $x(t) \equiv 0$ асимптотично стійкий. Далі міркування від супротивного. Існує $\delta_0 > 0$,

але $\forall \eta > 0$ існує $T > 0$ таке, що даний розв'язок (1), (2) задовольняє нерівність $|x(T + \tau)|^2 < \delta_0^2 + \eta, \forall \omega \in B_\varepsilon$ і $\tau > 0$. Вибираємо $\eta = \delta_0^2(\alpha - 1)$ таким, щоби $\frac{\delta_0^2 + \eta}{\delta_0^2} |x(T + \tau)|^2 > \delta_0^2 + \eta > |x(T + \tau - \tau_1)|^2$, де $0 \leq \tau_1 \leq \Delta$.

Тоді для $\forall \omega \in B_\varepsilon$ матимемо $|x(T + \tau)|^2 \leq \delta_0^2 - \int_T^t f_\Delta(x_\tau) d\tau$.

Звідки $\lim_{\tau \rightarrow \infty} f_\Delta(x_\tau) = 0$, тобто $|x(T + t)| < \delta_0$ для $\forall t > 0$, що суперечить припущенню. Теорема 2 доведена.

Теорема 3. При виконанні умов лемми 1 достатньою умовою асимптотичної рівномірно стохастичної стійкості розв'язку $x(t) \equiv 0$ задачі Коші (1), (2) є виконання на розв'язках нерівності

$$F(t, x(t), k, l) \leq -f_\Delta(x_t) + \beta [|x(t)|^2 - |x(t - \Delta)|^2], \quad (8)$$

де праву частину (8) при $\beta > 0$ слід розглядати як додатно визначений неперервно-обмежений функціонал.

Доведення. Повторює міркування теореми 1, якщо вибрати функціонал вигляду

$$z(t) = |x(t)|^2 + \beta \int_{t-\Delta}^t |x(\tau)|^2 d\tau, \beta > 0.$$

Зауважимо, що умова (8) для практичного застосування більш придатна, бо права частина, як правило, одержується як квадратична форма відносно фазових змінних $x(t), x(t - \Delta_i), x(t - \Delta_j)$.

4. Модельні задачі

Модельна задача 1. Нехай $x(t) \in \mathbf{R}^1$ визначено як сильний розв'язок рівняння Іто-Скорохода для $\forall t \geq 0, \Delta > 0, a_1 > 0$:

$$dx(t) = [-a_1 x(t) + a_2 x(t - \Delta)] dt + b_1 x(t) dw(t) + c_1 x(t) \int_U g(u) \tilde{\nu}(du, dt). \quad (9)$$

Розв'язання. Для доведення асимптотичної рівномірно-стохастичної стійкості розв'язку $x(t)$ системи (9) слід розглянути функціонал

$$z(t) = \frac{x^2(t)}{2} + \alpha \int_{t-\Delta}^t x^2(\tau) d\tau, \alpha > 0.$$

Тоді вираз $F(t, x(t), k, l)$, визначений (4), набуде вигляду

$$F(t, x(t), x(t - \Delta)) = -a_1 x^2(t) - a_2 x(t)x(t - \Delta) + \left(\frac{b_1^2}{2} + c_1 \int_U \frac{g^2(u)}{u^2} du \right) x^2(t) + \\ + \alpha x^2(t) - \alpha x^2(t - \Delta) = \left(-a_1 + \alpha + \frac{b_1^2}{2} + c_1^2 \int_U \frac{g^2(u)}{u^2} du \right) x^2(t) -$$

$$-a_2x(t)x(t - \Delta) - \alpha x^2(t - \Delta).$$

Зліва маємо квадратичну форму відносно фазових змінних $x(t), x(t - \Delta)$, яка буде від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли її матриця

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 + \alpha + \frac{b_1}{2} + c_1^2 \int_U \frac{g^2(u)}{u^2} du & -\frac{a_2}{2} \\ \frac{a_2}{2} & -\alpha \end{pmatrix}$$

від'ємно визначена, що еквівалентно виконанню нерівностей

$$-a_1 + \alpha + \frac{b_1}{2} + c_1^2 \int_U \frac{g^2(u)}{u^2} du < 0;$$

$$-\alpha \left(-a_1 + \alpha + \frac{b_1}{2} + c_1^2 \int_U \frac{g^2(u)}{u^2} du \right) - \frac{a_2^2}{4} > 0.$$

Отже, достатньою умовою асимптотичної рівномірно стохастичної стійкості розв'язку $x(t) \equiv 0$ рівняння Іто-Скорохода (9) є виконання в просторі параметрів $a_1, a_2, b_1, c_1, \alpha$ нерівності

$$\alpha \left(a_1 - \alpha - \frac{b_1}{2} - c_1^2 \int_U \frac{g^2(u)}{u^2} du \right) > \frac{a_2^2}{4}. \quad \blacksquare$$

Модельна задача 2. Ймовірнісною моделлю регулювання об'єкта за звуком є стохастичне диференціально-різницеve рівняння (СДРР) Іто-Скорохода

$$dx(t) = [ax(t) + bx(t - 1)] dt + \sigma x(t) dw(t) + x(t - 1) \int_{\mathbf{R}^1} c(u) \tilde{\nu}(du, dt). \quad (10)$$

Розв'язання. Умова (4) набуде вигляду

$$\begin{aligned} & 2[ax(t) + bx(t - 1)]x(t) + \sigma^2 x^2(t) + x^2(t - 1) \int_U c^2(u) \Pi(du) = \\ & = (2a + \sigma^2) x^2 + 2bx(t)x(t - 1) + \int_U c^2(u) \Pi(du) \cdot x^2(t - 1) < 0. \end{aligned}$$

За умовою Сільвестра квадратична форма відносно $x(t), x(t - 1)$ від'ємно визначена тоді і тільки тоді, коли виконуються нерівності

$$\sigma^2 < -2a; (\sigma^2 + 2a) \int_{\mathbf{R}^1} c^2(u) du > b^2. \quad \blacksquare$$

Модельна задача 3. Розглянемо стохастичне скалярне рівняння, яке є стохастичною моделлю процесів, що містять транспортне, технологічне або інформаційне загаювання:

$$dx(t) = -[ax(t) - bx(t - h)] dt + \sigma x(t - h) dw(t) +$$

$$+\gamma \int_{\mathbf{R}^1} x(t)c(u)\tilde{\nu}(du, dt), \quad h > 0. \quad (11)$$

Розв'язання. Перевіримо виконання умови (4) для СДРР (11). Умовою асимптотичної рівномірно стохастичної стійкості тривіального розв'язку (11) є виконання нерівностей

$$-(ax(t) - bx(t-h))x(t) + \frac{\sigma^2}{2}x^2(t-h) + \gamma^2 \int_{\mathbf{R}^1} c(u)\Pi(du) \cdot x^2(t) =$$

$$\left(-a + \gamma^2 \int_{\mathbf{R}^1} c(u)\Pi(du) \right) x^2(t) - bx(t)x(t-h) + \frac{\sigma^2}{2}x^2(t-h) < 0,$$

Звідси, за умовою Сільвестра, достатніми умовами асимптотичної рівномірно стохастичної стійкості тривіального розв'язку СДРР (11) є виконання нерівностей

$$-a + \gamma^2 \int_{\mathbf{R}^1} c(u)\Pi(du) < 0,$$

$$\left(-a + \gamma^2 \int_{\mathbf{R}^1} c(u)\Pi(du) \right) \cdot \frac{\sigma^2}{2} > -b^2. \quad \blacksquare \quad (12)$$

Зауважимо, що умова (12) не містить загаювання h , що є підтвердженням слабкості одержаних умов наведених теорем 1 і 2.

Зауважимо, що як показали модельні задачі 1 і 2, для дослідження стохастичних диференціально-різницевих рівнянь Іто-Скорохода із запізненням слід розглядати функціонали Ляпунова-Красовського [5] – [7].

Список використаної літератури

1. Гизман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наукова думка, 1968. – 354 с.
2. Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем. – Снятин: Вид-во "Над Прутом", 1996. – 448 с.
3. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.
4. Гизман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения. – К.: Наукова думка, 1982. – 612 с.
5. Ясинський В.К., Ясинський И.В. Устойчивость и оптимальное управление стохастическими динамическими системами со всей предисторией. – К.: ТВіМС, 2004. – 363 с.
6. Ясинський В.К., Ясинський Є.В. Задачі стійкості і стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією. – К.: ТВіМС, 2005. – 580 с.
7. Ясинський В.К., Ясинський Є.В., Юрченко І.В. Стабілізація у динамічних системах випадкової структури. – Чернівці: Вид-во "Золоті литаври", 2011. – 738 с.
8. Королюк В.С., Ясинський В.К. Курс теорії ймовірностей, випадкових процесів і математичної статистики. – Чернівці: Вид-во "Золоті литаври", 2005. – 525 с.
9. Королюк В.С., Ясинський В.К. Теорія ймовірностей. Комп'ютерний практикум. – Чернівці: Вид-во "Золоті литаври", 2011. – 487 с.

Одержано 08.04.2015