УДК 519.21

К. Й. Вереш (Київський національний ун-т імені Тараса Шевченка)

РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ВИПАДКОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ З ПРОСТОРІВ ОРЛІЧА $L_p(\Omega)$

The condition of application of the Fourie method to heat equation with strictly Orlicz random initial conditions from $L_p(\Omega)$ spaces is investigated.

Робота містить умову застосування методу Фур'є до рівнянь теплопровідності коли початкові умови є строго Орлічеві випадкові процеси з $L_p(\Omega)$.

Вступ. В роботі знайдено умову застосування методу Фур'є до рівнянь теплопровідності з випадковими початковими умовами. Робота є продовженням роботи [4], результати якої використовуються для отриманням умов застосування методу Фур'є для тієї ж задачі, коли початкові умови є строго Орлічеві випадкові процеси з $L_p(\Omega)$. Наведено приклади.

1.Випадкові процеси з простору Орліча

Означення 1. *[1] Парна неперервна опукла функція $U(x)$ така, що $U(0) = 0$, $U(x) \neq 0$ при $x \neq 0$ називається С-функцією.*

Нехай $\{\Omega, \Im, P\}$ стандартний імовірнісний простір.

Означення 2. *[2] Простором Орліча $L_U(\Omega)$ випадкових величин, породженим С-функцією $U(x)$, називається такий простір випадкових величин $\xi(\omega) = \xi$, $\omega \in \Omega$, що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа r_ξ, що $EU(\frac{\xi}{r_\xi}) < \infty$.*

Простір Орліча $L_U(\Omega)$ є Банаховим простором відносно норми

$$\| \xi \|_{L_U} = inf\{r > 0 : EU(\frac{\xi}{r}) \leq 1\}. \tag{1}$$

Означення 3. *Процес $X(t) = \{X(t), t \in T\}$ належить простору Орліча $L_U(\Omega)$, якщо для всіх $t \in T$ випадкова величина $X(t)$ належить $L_U(\Omega)$.*

Означення 4. *С-функція U підпорядкована С-функції V, $U \prec V$, якщо існують $x_0 \geq 0$ та C>0, що при $|x| > x_0$ має місце нерівність $U(x) \leq V(cx)$. С-функції $U(x)$ та $V(x)$ еквівалентні, якщо $U(x) \prec V(x)$ та $V(x) \prec U(x)$.*

Означення 5. *[3] Нехай $U(x)$ С-функція така, шо $V(x) = x^2$ підпорядкована функції $U(x)$. Сім'я випадкових величин ξ з простору Орліча ($E\xi = 0$) називається строго Орлічевою, якщо існує стала C_Δ, що для скінченного числа $\xi_i \in \Delta, i \in I$ і для будь-якого $\lambda_i \in \boldsymbol{R}^1$, виконується нерівність*

$$\| \sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i \|_{L_U} \leq C_\Delta (E(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i)^2)^{1/2}.$$

Означення 6. *Випадковий процес $x = \{x(t), t \in T\}, (x \in L_U(\Omega))$ називається строго Орлічевим, якщо сім'я випадкових величин $x = \{x(t), t \in T\}$ – є строго Орлічевою. Випадкові процеси $x = \{x(t), t \in T\}$ та $y = \{y(t), t \in T\}$ називаються сумісно строго Орлічевими, якщо сім'я випадкових величин $x = \{x(t), y(t), t \in T\}$ являється строго Орлічевою.*

Означення 7. *[1] Для C-функції U виконується умова g якщо існують такі константи $z_0 \geq 0$, $k > 0$, та $A > 0$, що для всіх $x \geq z_0$ та $y > z_0$ виконується нерівність*

$$U(x)U(y) \leq AU(kxy).$$

Зауваження 1. *Якщо $U(x) = |x|^p$, $p \geq 2$, то для $U(x)$ виконується умова g ($z_0 = 0$, $A = 1$, $K = 1$), крім того, функція $U(x) = |x|^2$ при $p \geq 2$ підпорядкована функції $|x|^p$.*

2.Постановка задачі та основні результати

Розглянемо крайову задачу для параболічного рівняння з двома незалежними змінними: $0 \leq x \leq \pi$, $t > 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial V}{\partial x}\right) - qV - \rho\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

$$V(0,t) = 0, V(\pi,t) = 0, \tag{3}$$

$$V(x,0) = \xi(x), \tag{4}$$

де $\xi(x)$ - випадковий процес з простору Орліча $L_U(\Omega)$.

Функції $p = (p(x), x \in [0,\pi])$, $q = q(x), x \in [0,\pi], \rho = (\rho(x), x \in [0,\pi])$ задовольняють умови:

1) $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $\rho(x) > 0$, $x \in [0,\pi]$;

2) $\rho(x)$, $p(x)$ двічі неперервно диференційовані функції на $x \in [0,\pi]$;

3) $q(x)$ неперервно диференційована на $x \in [0,\pi]$.

Наступна теорема доведена в роботі [4].

Теорема 1. *Нехай випадковий процес $\xi = \{\xi(x), x \in [0,\pi]\}$ з 4 є строго Орлічевим випадковим процесом з простору Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$, де $U(x)$ така C-функція, що функція $V(x) = x^2$ підпорядкована $U(x)$ та для $U(x)$ виконується умова g. ξ - сепарабельний, неперервний в середньому квадратичному, $E\xi(x) = 0$, $E\xi(x)\xi(y) = B(x,y)$. Нехай*

$$V(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e^{-\lambda_k t} X_k(x), \tag{5}$$

де $X_k(x)$ - власні функції, а λ_k - власні значення задачі Штурма-Ліувілля

$$L(v) = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dx}\right) - qv + \lambda\rho v = 0, \tag{6}$$

$$v(0) = 0, \qquad v(\pi) = 0, \tag{7}$$

$$\xi(k) = \int_0^{\pi} X_k(x)\xi(x)\,dx.$$

Нехай існує функція $\varphi = \{\varphi(\lambda), \lambda > 0\}$ *така, що* φ *- неперервна,* $\varphi(\lambda) > 0$, $\lambda > 0$, *монотонно зростає та функція* $\Psi(\lambda) = \frac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$, $\lambda > 0$ *монотонно зростає при* $\lambda \geq v_0$, *де* v_0 *деяка константа та*

$$\sup_{|x-y|\leq h} (E(\xi(x) - \xi(y))^2)^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\varphi\left(\frac{1}{h} + v_0\right)\right)^{-1}. \tag{8}$$

Крім того, для будь-яких $\varepsilon > 0$ *та* $C > 0$ *виконується умова*

$$\int_0^\varepsilon U^{(-1)}\left(\frac{\pi}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{c}{v}\right) - v_0\right) + 1\right) dv < \infty. \tag{9}$$

Якщо збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} |E\xi_k\xi_l| \varphi(\lambda_k + v_0)\varphi(\lambda_l + v_0) < \infty, \tag{10}$$

тоді для будь-якого $\sigma > 0$ *рівномірно по* $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq \sigma$ *з імовірністю одиниця збігаються ряди*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e^{-\lambda_k t} \lambda_k^m X_k^{(s)}(x) = S_{ms}(x,t),$$

де $m = 0, 1$, *при* $m = 0$, $s = 0, 1, 2$, *при* $m = 1$, $s = 0$, *(тобто ряд (5) та ряди отримані з (5) почленним диференціюванням* $V(x,t)$ *два рази по* x *та один раз по* t*). В області* $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq \sigma$ *функція* $V(x,t)$ *з імовірністю одиниця задовольняє рівняння (2). Крім того, рівномірно за ймовірністю в області* $x \in [0, \pi]$ $V(x,t) \to \xi(x)$ *при* $t \to 0$.

Якщо ж функція φ *така, що для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *та* $c > 0$ *виконується умова*

$$\int_0^\varepsilon U^{(-1)}\left(\left(\frac{\pi}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{c}{v}\right) - v_0\right) + 1\right)^2\right) dv < \infty \tag{11}$$

та збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} |E\xi_k\xi_l| \varphi(\lambda_k + v_0)\varphi(\lambda_l + v_0) < \infty, \tag{12}$$

тоді $V(x,t) \to \xi(x)$ *рівномірно по* $x \in [0, \pi]$ *при* $t \to 0$ *з імовірністю одиниця.*

Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай випадковий процес* $\xi = \{\xi(x), x \in [0;\pi]\}$ *з (4) є строго Орлічевим випадковим процесом з простору* $L_U(\Omega)$, *де* $U(x) = |x|^p$, $p \geq 2$ *(тобто простору* $L_p(\Omega)$*). Та* ξ*- сепарабельний неперервний в середньому квадратичному* $E\xi(x) = 0$, $E\xi(x)\xi(y) = B(x,y)$. *Нехай*

$$V(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e^{-\lambda_k t} X_k(x),$$

де $X_k(x)$*- власні функції, а* λ_k *- власні значення задачі Штурма-Ліувулля (6), (7) та*

$$\xi_k = \int_0^T X_k(x)\xi(x)dx.$$

Нехай виконується умова

$$\sup_{|x-y|\le h} (E(\xi(x)-\xi(y))^2)^{\frac{1}{2}} \le C|h|^{\beta} \tag{13}$$

при $\beta > \frac{1}{p}$*. Якщо при* $\beta > \frac{1}{p}$ *збігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Big|E\xi_k\xi_l\Big|\lambda_k^{\beta}\lambda_l^{\beta} < \infty, \tag{14}$$

тоді для будь-якого $\sigma > 0$ *рівномірно по* $0 \le x \le \pi$, $t \ge \sigma$ *з імовірністю одиниця збігаються ряди*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e^{-\lambda_k t}\lambda_k^m X_k^{(s)}(x) = S_{ms}(x,t),$$

де $m = 0, 1$, *при* $m = 0$, $s = 0, 1, 2$, *при* $m = 1$, $s = 0$, *(тобто ряд (5) та ряди отримані з (5) почленним диференціюванням* $V(t,s)$ *два рази по* x *та один раз по* t*). В області* $0 \le x \le \pi$, $t \ge \sigma$ *функція* $V(x,t)$ *з імовірністю одиниця задовольняє рівняння (2). Крім того рівномірно за ймовірністю в області* $x \in [0,\pi]$ $V(x,t) \to \xi(x)$ *при* $t \to 0$.

Якщо умова (13) виконується при $\beta > \frac{2}{p}$ *то якщо при цих* β *збігається ряд (14), тоді* $V(x,t) \to \xi(x)$ *рівномірно по* $x \in [0,\pi]$ *при* $t \to 0$ *з імовірністю одиниця.*

Доведення. Теореми випливає з теореми 1. Дійсно, в нашому випадку $U(x) = |x|^p$ та функції $U(x)$ задовольняє всім умовам теореми 1. Покладимо $\varphi(x) = |x|^{\beta}$, $\beta > \frac{1}{p}$. Перевіримо, що для цієї функції виконується умова (9). Дійсно,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{\pi}{2}\Big(\frac{C}{v}\Big)^{\frac{1}{\beta}}+1\right)^{\frac{1}{p}}dv \\
\le\ &\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{\pi}{2}\Big(\frac{C}{v}\Big)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\frac{1}{p}}dv + \int_0^{\varepsilon}dv \\
=\ &\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{\frac{1}{p}} C^{\frac{1}{p\beta}}\frac{\beta p}{\beta p-1}e^{1-\frac{1}{\beta p}} + \varepsilon < \infty,
\end{aligned}$$

Тобто, якщо $\beta > \frac{1}{p}$, то перше твердження теореми випливає з збіжності ряду (14). Аналогічно, друге твердження теореми випливає з збіжності ряду (14) при $\beta > \frac{2}{p}$.

□

3.Приклад

Розглянемо частинний випадок задачі 2-4, а саме таку задачу ($p = 1,\ \rho = 1,\ q = 0$): $0 \le x \le \pi,\ t > 0,$

$$\frac{\partial^2 V}{x^2} - \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \tag{15}$$

$$V(0,t) = 0, V(\pi,t) = 0, \tag{16}$$

$$V(x,0) = \xi(x), \tag{17}$$

де $\xi(x)$- строго Орлічевий випадковий процес з простору $L_p(\Omega)$, де $p > 2$.

Теорема 3. *Нехай $\xi(x)$ сепарабельний випадковий процес, $E\xi(x) = 0$, $E\xi(x)\xi(y) = B(x,y)$,*

$$V(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi e^{-k^2 t}\sqrt{\frac{2}{\pi}} sinkx, \qquad \xi_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi} \xi(x) sinkxdx.$$

Нехай в області $0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi$ існує неперервна похідна

$$\frac{\partial^4 B(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2},$$

тоді для будь-якого $\sigma > 0$ рівномірно по $0 \le x \le \pi,\ t \ge \sigma$ з імовірністю одиниця збігаються ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e^{-k^2 t}(k^2)^m \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} sinkx\right)^{(s)} = S_{ms}(x,t),$$

де $m = 0,1$, при $m = 0$, $s = 0,1,2$, при $m = 1$, $s = 0$, (тобто ряд (5) та ряди отримані з (5) почленним диференціюванням $V(x,t)$ два рази по x та один раз по t). В області $0 \le x \le \pi,\ t \ge \sigma$ функція $V(x,t)$ з імовірністю одиниця задовольняє рівняння (2). Крім того рівномірно за ймовірністю в області $x \in [0,\pi]$ $V(x,t) \to \xi(x)$ при $t \to 0$.

Доведення. Досить перевірити виконання умов (13) та (14) теореми (2). В нашому випадку (див. [5]) $\lambda_n = n^2$, $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} sinnx$.

Для того щоб виконувалась умова (14) досить, щоб для деякого $\beta > \frac{1}{p}$ збігався ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \left|E\xi_k\xi_l\right| n^{2\beta} l^{2\beta} < \infty.$$

Для цього досить, щоб для всіх $k \ge 1$, $l \ge 1$ виконувалась нерівність

$$\left|E\xi_k\xi_l\right| \le \frac{C}{nln^{2\beta+\varepsilon}} l^{2\beta+\varepsilon},$$

де $\varepsilon > 0$, $\beta > \frac{1}{p}$. Легко бачити, що існує таке $\beta > \frac{1}{p}$ (p>2) та $\varepsilon > 0$, що $2\beta + \varepsilon \le 1$ $\left(\frac{1}{p} < \beta < \frac{1-\varepsilon}{2}\right)$.

Тому досить перевірити, що

$$|E\xi_k\xi_l| \leq \frac{C}{k^2 l^2}.$$

Остання нерівність випливає з таких співвідношень:

$$B(x,0) = B(x,\pi) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 B(x,0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B(x,\pi)}{\partial x^2} = 0,$$

$$E\xi_k\xi_l \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi sinkxsinlyB(x,y)dxdy = \frac{1}{l}\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \frac{\partial B(x,y)}{\partial y} cosly \cdot sinkxdydx$$
$$= -\frac{1}{l^2}\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \frac{\partial^2 B(x,y)}{\partial y^2} sinly \cdot sinkxdydx = \frac{1}{l^2 k}\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \frac{\partial^3 B(x,y)}{\partial y^2 \partial x} sinly \cdot coskxdydx$$
$$= \frac{1}{l^2 k^2}\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \frac{\partial^4 B(x,y)}{\partial y^2 \partial x^2} sinly \cdot sinkxdydx,$$

тобто

$$\Big|E\xi_k\xi_l\Big| \leq \frac{1}{k^2 l^2}\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \left|\frac{\partial^4 B(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}\right| dxdy.$$

Легко бачити, що 13 також виконується. Дійсно

$$E(\xi(x)-\xi(y))^2 = E\xi(x)^2 + E\xi(y)^2 - 2E\xi(x)\xi(y)$$
$$= B(x,x) + B(y,y) - 2B(x,y) = \int\limits_x^y \int\limits_x^y \frac{\partial^2 B(x,y)}{\partial x \partial y} dxdy.$$

Отже, $E(\xi(x)-\xi(y))^2 \leq C|x-y|^2$, де $C = \sup\limits_{\substack{0\leq x\leq\pi \\ 0\leq y\leq \pi}} \frac{\partial^2 B(x,y)}{\partial x \partial y}$. Тобто

$$\sup_{|x-y|\leq h} \left(E(\xi(x)-\xi(y))^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C^{\frac{1}{2}} \cdot h.$$

□

Наведемо приклад випадково процесу для якого виконуються умови теореми 2. Нехай $\xi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)\xi_k$, $0 \leq x \leq \pi$, де ξ_k $(E\xi k = 0)$ незалежні однаково розподіленні випадкові величини з простору $L_p(\Omega)$, $p > 2$, $R = \frac{E|\xi_k|^p}{E\xi_k^2}$ та ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(x)\xi_k$ збігається в середньому тобто $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(x) < \infty$, $0 \leq x \leq \pi$. Тоді згідно з прикладом 2 роботи [3] $x(t)$ є строго Орлічевим процесом з простору $L_p(\Omega)$ з $C_\triangle = R\sqrt{D}$, де D – певна константа.

$$B(x,y) = E\xi(x)\xi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)\varphi_k(y),$$

тому $\frac{\partial^4 B(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k''(x)\varphi_k''(y)$. Остання рівність має місце коли ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k''(x)\varphi_k''(y)$ збігається рівномірно в області $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$. Тоді ж $\frac{\partial^4 B(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}$ є неперевною функцією.

Попередні умови виконуються коли, наприклад, $\varphi_k(x) = \frac{1}{k^4} sinkx$.

1. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric characterization of random variables and random processes. Amer.Math.Soc., Providence,RI, –2000. –257p.
2. *Довгай Б. В., Козаченко Ю. В. Сливка-Тилищак Г. І.* Крайові задачі математичної фізики з випадковими факторами. – ВПЦ Київський університет, –Київ, –2008. –173с.
3. *Barrasa de la Krus E., Kozachenko Yu. V.* Boundary-value problems for equations of mathemetical physics with strictly Orlicz Random initial conditions //Random Oper.And Stoch.Eq. –1995. –3,№3, – pp.201–220.
4. *Козаченко Ю. В. Вереш К. Й.* Рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами із просторів Орліча //Теорія ймов. та матем. статист.Вип. 80, – 2009. –С. 56–69.
5. *Положий И. Г.* Уравнения математической физики.– М.:Высшая школа, – 1964 – 559с.

Одержано 25.06.2009