УДК 517.9

М. О. Перестюк, П. В. Фекета (Київський національний ун-т імені Тараса Шевченка)

ІСНУВАННЯ ІНВАРІАНТНОГО ТОРА ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

The question of existence of asymptotically stable invariant toroidal set for system of differential equation of certain class, defined on m-measurable torus is considered. Certain class of weakly perturbated nonlinear problems that satisfies the conditions of existence of asymptotically stable invariant toroidal set is investigated.

В даній роботі розглянуто питання існування асимптотично стійкої інваріантної тороїдальної множини одного класу систем диференціальних рівнянь, визначених на m-вимірному торі. Досліджено один клас нелінійних задач, що піддаються невеликому збуренню, для якого умови існування асимптотично стійкої інваріантної тороїдальної множини мають місце.

У теорії багаточастотних коливань виникає ряд питань, пов'язаних з дослідженням інваріантних торів автономних систем диференціальних рівнянь. Одним з найважливих є питання існування і збереження інваріантних торів при малих збуреннях, а також поведінка розв'язків систем на самих торах та в їх околі. Фундаментальні дослідження в цьому напрямку проведено в роботах [1] та [2]. Дану статтю присвячено дослідженню умов існування асимптотично стійкої інваріантної тороідальної множини одного класу систем диференціальних рівнянь, які піддаються малому збуренню.

Розглянемо систему рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = \Lambda(\varphi)x + f(\varphi), \tag{1}$$

в якій $\varphi \in T^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a(\varphi)$ — ліпшицева векторна функція на m-вимірному торі T^m, 2π-періодична по кожній компоненті φ_j, $(j = 1, 2, ..., m)$. $\Lambda(\varphi)$ і $f(\varphi)$ відповідно матрична і векторна 2π-періодичні по φ_j функції.

Позначимо через $\varphi_t(\varphi)$ розв'язок системи (1) такий, що $\varphi_0(\varphi) = \varphi$, Ω_φ — ω-граничну множину цього розв'язку, а $\Omega = \bigcup\limits_{\varphi \in T^m} \Omega_\varphi$.

Нас цікавитиме випадок, коли матрична функція $\Lambda(\varphi)$ на множині Ω є сталою матрицею $\Lambda(\varphi) = A$ для всіх $\varphi \in \Omega$. Це означає, що для всіх $\varphi \in T^m$

$$\lim_{t\to\infty} \Lambda(\varphi_t(\varphi)) = A. \tag{2}$$

Поряд з системою (1) розглянемо збурену систему рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = (\Lambda(\varphi) + B(\varphi))x + f(\varphi). \tag{3}$$

Наведемо спочатку дві леми [3], які встановлюють умови існування асимптотично стійких інваріантних тороідальних множин для систем (1) і (3).

Лема 1. *Якщо дійсні частини всіх власних чисел матриці A від'ємні, то для довільної неперервної 2π-періодичної по φ_j, $(j = 1, 2, ..., m)$ функції $f(\varphi)$ система (1) має інваріантну тороїдальну множину $x = u(\varphi)$ і ця множина є асимптотично стійкою.*

Лема 2. *Нехай*

$$\lim_{t\to\infty} \Lambda(\varphi_t(\varphi)) = A$$

для всіх $\varphi \in T^m$ *і* $Re\lambda_j(A) < 0$, $(j = 1, 2, ..., n)$. *Тоді існує таке* $b > 0$, *що для будь-якої неперервної* 2π*-періодичної по* φ_j, $(j = 1, 2, ..., m)$ *матриці* $B(\varphi)$ *такої, що*

$$\max_{\varphi\in\ T^m} \|B(\varphi)\| \leq b \tag{4}$$

система (3) має асимптотично стійку інваріантну тороїдальну множину.

Розглянемо тепер збурену нелінійну систему

$$\dot{\varphi} = a(\varphi) + a_1(\varphi, x),\ \dot{x} = F(\varphi, x) + \Lambda(\varphi)x \tag{5}$$

в якій, $\varphi\in T^m$, $a(\varphi)\in C^1(T^m)$, $a_1(\varphi,x)\in C^{(1,0)}_{Lip(x)}(\varphi\in T^m, x\in\mathbb{R}^n)$, $\Lambda(\varphi)\in C^1(T^m)$, $F(\varphi,x)\in C^{(1,2)}_{\varphi,x}(\varphi\in T^m, x\in\mathbb{R}^n)$, $\|x\| \leq h$. Запишемо цю систему у вигляді

$$\dot{\varphi} = a(\varphi) + a_1(\varphi, x),\ \dot{x} = \Lambda(\varphi)x + B(\varphi, x)x + f(\varphi), \tag{6}$$

де $f(\varphi) = F(\varphi, 0)$, $B(\varphi, x) = \int\limits_0^1 \frac{\partial F(\varphi,\tau x)}{\partial(\tau x)} d\tau$. Як і раніше,вважатимемо, що існує границя

$$\lim_{t\to\infty} \Lambda(\varphi_t(\varphi)) = A$$

для всіх $\varphi \in T^m$ і $Re\lambda_j(A) < 0$, $(j = 1, 2, ..., n)$.

Покажемо, що при певних умовах, накладених на систему (5), вона має асимптотично стійкий інваріантний тороїдальний многовид. Цей многовид шукатимемо методом, запропонованим А. М. Самойленком в роботі [2].

За початковий многовид M_0 візьмемо многовид $x \equiv 0$, за M_1 візьмемо інваріантний многовид системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi) + a_1(\varphi, 0),\ \dot{x} = \Lambda(\varphi)x + B(\varphi, 0)x + f(\varphi). \tag{7}$$

Встановимо умови існування такого многовиду і запишемо його вигляд.

Зазначимо, що для незбуреної системи

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = \Lambda(\varphi)x + f(\varphi),$$

як і при доведенні леми 1, матрицант $\Omega^t_\tau(\varphi, \Lambda)$ відповідної системи рівнянь

$$\dot{x} = \Lambda(\varphi_t(\varphi))x$$

допускає оцінку

$$\left\|\Omega^t_\tau(\varphi, \Lambda)\right\| \leq K_0 e^{-\gamma_0(t-\tau)},\ t \geq \tau.$$

А тому легко встановити, як і при доведенні леми 2, що матрицант $\Omega^t_\tau(\varphi, \Lambda + B_0)$ системи рівнянь

$$\dot{x} = (\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi), 0))x$$

допускає оцінку

$$\left\|\Omega^t_\tau(\varphi, \Lambda + B_0)\right\| \leq K_1 e^{-\gamma_1(t-\tau)},\ t \geq \tau,\ \varphi \in T^m, \tag{8}$$

де K_1 і γ_1 – деякі додатні сталі, якщо тільки

$$\max_{\varphi\in\ T^m} \|B(\varphi,0))\| \le b_0,$$

де b_0 — достатньо мале.

Позначимо через $C^{'}(T^m;a)$ підпростір $C(T^m)$, утворений всіма тими функціями $D(\varphi)$, для яких функція $D(\varphi_t(\varphi))$ неперервно диференціойвна по t при всіх $t\in\mathbb{R}$, $\varphi\in T^m$.

З оцінки (8) слідує, що існує симетрична матрична функція $S(\varphi)\in C^{'}(T^m;a)$, яка задовольняє нерівність

$$\langle(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi_i}a_i(\varphi)-S(\varphi)(\Lambda^*(\varphi)+B^*(\varphi,0))-(\Lambda(\varphi)+B(\varphi,0))S(\varphi))x,x\rangle\le-\|x\|^2.$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що однією з таких матриць $S(\varphi)$ може бути матриця вигляду

$$S(\varphi)=-\int_{-\infty}^{0}\Omega_\tau^0(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi))[\Omega_\tau^0(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi))]^*d\tau,$$

де $C(\varphi)$ – деяка матриця з простору $C^1(T^m)$.

З того, що $a(\varphi)\in C^1(T^m)$ та $\Lambda(\varphi)+B(\varphi,0)\in C^1(T^m)$ випливає, що $\varphi_t(\varphi)$ і $\Omega_\tau^t(\varphi)$ є неперервно диференціовними по φ на торі T^m функціями. Так як неперервна диференційовність матричної функції $S(\varphi)$ безпосередньо залежить від гладкісних властивостей матриканта $\Omega_\tau^0(\varphi)\in C^1(T^m)$ та розв'язку $\varphi_t(\varphi)\in C^1(T^m)$, то $\frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi_j}$ є неперервними функціями для всіх $\varphi\in T^m$, $j=1,..,m$, тобто $S(\varphi)\in C^1(T^m)$.

Додаючи до координат $a_i(\varphi)$, $i=1,..,m$ вектор-функції $a(\varphi)$ координати $a_i^{(1)}(\varphi,0)$ вектор-функції $a_1(\varphi,0)$ отримаємо

$$\begin{gathered}\langle(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi_i}(a_i(\varphi)+a_i^{(1)}(\varphi,0))-S(\varphi)(\Lambda^*(\varphi)+B^*(\varphi,0))-\\ -(\Lambda(\varphi)+B(\varphi,0))S(\varphi))x,x\rangle\le-\|x\|^2+\left\|\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi_i}a_i^{(1)}(\varphi)\right\|\|x\|^2\le \qquad (9)\\ \le-(1-\|a_1(\varphi)\|\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|\frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi_i}\right\|^2\right)^{\frac12})\|x\|^2.\end{gathered}$$

З (9) видно, що вибір числа $\varepsilon_0>0$, яке задовольняє нерівність $\beta=1-\varepsilon_0P>0$, де

$$P=\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|\frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi_i}\right\|^2\right)^{\frac12},$$

гарантує від'ємну визначеність похідної квадратичної форми $V(\varphi,x)=\langle S(\varphi)x,x\rangle$, обчисленої вздовж розв'язків збуреної системи $\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi)+a_1(\varphi,0)$, $\frac{dx}{dt}=-(\Lambda^*(\varphi)+B^*(\varphi,0))x$ при умові $\|a_1(\varphi,0)\|\le\varepsilon_0$.

Таким чином, матрицант системи рівнянь

$$\dot{x} = (\Lambda(\varphi_t^{(0)}(\varphi)) + B(\varphi_t^{(0)}(\varphi), 0))x,$$

де $\varphi_t^{(0)}(\varphi)$ - розв'язок системи (7) такий, що $\varphi_0^{(0)}(\varphi) = \varphi$, допускає оцінку

$$\left\|\tilde{\Omega}_\tau^t(\varphi, \Lambda + B_0)\right\| \leq K_1(\varepsilon_0)e^{-\gamma_1(\varepsilon_0)(t-\tau)},\ t \geq \tau,\ \varphi \in T^m, \tag{10}$$

якщо тільки існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що $\|a_1(\varphi, 0)\| \leq \varepsilon_0$. Враховуючи, що додатні сталі $K_1(\varepsilon_0)$ і $\gamma_1(\varepsilon_0)$ представляються безпосередньо через $S(\varphi)$, матричну функцію $\Lambda(\varphi) + B(\varphi, 0)$ та β [1, §2.10], то вони залежать лише від ε_0.

Тоді на основі леми 2 робимо висновок, що тороїдальний многовид $x = u^{(1)}(\varphi)$ системи (7) існує і допускає представлення

$$x = u^{(1)}(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{0} \tilde{\Omega}_s^0(\varphi, \Lambda + B_0)f(\varphi_s^{(0)}(\varphi))ds. \tag{11}$$

За многовид M_2 візьмемо інваріантний тороїдальний многовид системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi) + a_1(\varphi, u^{(1)}(\varphi)),\ \dot{x} = \Lambda(\varphi)x + B(\varphi, u^{(1)}(\varphi))x + f(\varphi), \tag{12}$$

а саме

$$x = u^{(2)}(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{0} \tilde{\Omega}_s^0(\varphi, \Lambda + B_1)f(\varphi_s^{(1)}(\varphi))ds, \tag{13}$$

де $\varphi_t^{(1)}(\varphi)$ - розв'язок системи (12) такий, що $\varphi_0^{(1)}(\varphi) = \varphi$.

Якщо таким чином ми побудували многовиди $M_1, M_2, ..., M_k$, то за многовид M_{k+1} беремо інваріантний тороїдальний многовид системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi) + a_1(\varphi, u^{(k)}(\varphi)),\ \dot{x} = \Lambda(\varphi)x + B(\varphi, u^{(k)}(\varphi))x + f(\varphi), \tag{14}$$

тобто многовид

$$x = u^{(k+1)}(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{0} \tilde{\Omega}_s^0(\varphi, \Lambda + B_k)f(\varphi_s^{(k)}(\varphi))ds, \tag{15}$$

де $\varphi_t^{(k)}(\varphi)$ - розв'язок системи (14) такий, що $\varphi_0^{(k)}(\varphi) = \varphi$.

Враховуючи оцінки для матрицантів $\tilde{\Omega}_\tau^t(\varphi, \Lambda + B_k)$ на кожному кроці, можна вказати таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якого k:

$$\left\|\tilde{\Omega}_\tau^t(\varphi, \Lambda + B_k)\right\| \leq K_1(\varepsilon)e^{-\gamma_1(\varepsilon)(t-\tau)}, t \geq \tau, \varphi \in T^m. \tag{16}$$

Покажемо, що таким методом можна побудувати інваріантний многовид початкової системи (5). Для цього треба переконатись в тому, що можна побудувати функцію $u^{(k)}(\varphi)$ для будь-якого $k = 1, 2, ...$, довести рівномірну збіжність

$$u^{(k)}(\varphi) \rightrightarrows u(\varphi),\ \varphi \in T^m$$

і показати, що $x = u(\varphi)$ задає інваріантний тороїдальний многовид вихідної системи (5).

Нехай
$$\max_{\varphi\in\ T^m} \|f(\varphi))\| = m, \tag{17}$$
а
$$\max_{\varphi\in\ T^m,\ \|x\|\leq h} \|B(\varphi, x))\| = b_0.$$

З представлення (11) маємо
$$\left\|u^{(1)}(\varphi)\right\| \leq \int\limits_{-\infty}^{0} \left\|\tilde{\Omega}_s^0(\varphi, \Lambda + B_0)\right\| \left\|f(\varphi_s^{(0)}(\varphi))\right\| ds$$

або, враховуючи оцінку (16),
$$\max_{\varphi\in\ T^m} \left\|u^{(1)}(\varphi))\right\| \leq \frac{K_1(\varepsilon)}{\gamma_1(\varepsilon)} \max_{\varphi\in\ T^m} \|f(\varphi))\|. \tag{18}$$

Вважаємо, що $\gamma_1(\varepsilon)h > K_1(\varepsilon)m$, тому
$$\max_{\varphi\in\ T^m} \left\|u^{(1)}(\varphi)\right\| < h. \tag{19}$$

Припустимо, що для $j = 1, 2, ..., k-1$ нерівність (19) виконується. Тоді для $j = k$ маємо:
$$\left\|u^{(k)}(\varphi)\right\| = \int\limits_{-\infty}^{0} \left\|\tilde{\Omega}_s^0(\varphi, \Lambda + B_{k-1})\right\| \left\|f(\varphi_s^{(k-1)}(\varphi))\right\| ds \leq \frac{K_1(\varepsilon)}{\gamma_1(\varepsilon)} \max_{\varphi\in\ T^m} \|f(\varphi)\|. \tag{20}$$

За індукцією робимо висновок: якщо $\gamma_1(\varepsilon)h > K_1(\varepsilon)m$, то для кожного $k = 1, 2, ...$ функцію $u^{(k+1)}(\varphi)$ можна побудувати, а, отже, можна побудувати і множину M_{k+1}, що є інваріантною тороїдальною множиною системи (14).

З виконання оцінки (16) та з того, що $a(\varphi) + a_1(\varphi, u^{k-1}(\varphi)) \in C^1(T^m)$, $\Lambda(\varphi) + B(\varphi, u^{k-1}(\varphi)) \in C^1(T^m)$ та $f(\varphi) \in C^1(T^m)$ випливає, що функції $u^{(k)}(\varphi)$ задовольняють умови теореми про гладкість інваріантного тора [2, §3.12], а тому для кожного $k = 1, 2, ...$
$$u^{(k)}(\varphi) \in C^1(T^m). \tag{21}$$

Встановимо умови збіжності послідовності $u^{(k)}(\varphi)$. Для цього розглянемо різницю $w^{(k+1)}(\varphi) = u^{(k+1)}(\varphi) - u^{(k)}(\varphi)$.

Так як функції $u^{(k)}(\varphi)$ гладкі, то вони задовольняють рівність
$$\frac{\partial u^{(k)}(\varphi)}{\partial \varphi}(a(\varphi) + a_1(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi))) = (\Lambda(\varphi) + B(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi)))u^{(k)}(\varphi) + f(\varphi)$$

для кожного $\varphi \in T^m$ та $i = 1, 2, ...$ Звідси слідує, що функція $w^{(k+1)}(\varphi)$ задовольняє рівність
$$\frac{\partial w^{(k+1)}(\varphi)}{\partial \varphi}(a(\varphi) + a_1(\varphi, u^{(k)}(\varphi))) = (\Lambda(\varphi) + B(\varphi, u^{(k)}(\varphi)))w^{(k+1)}(\varphi) + f^{(k)}(\varphi),$$

де

$$f^{(k)}(\varphi) = (B(\varphi, u^{(k)}(\varphi)) - B(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi)))u^{(k)}(\varphi) - \\ - \frac{\partial u^{(k)}(\varphi)}{\partial \varphi}(a_1(\varphi, u^{(k)}(\varphi)) - a_1(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi))). \tag{22}$$

Тому тор $x = w^{(k+1)}(\varphi)$, $\varphi \in T^m$ є інваріантним тором системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(\varphi) + a_1(\varphi, u^{(k)}(\varphi)), \\ \frac{dx}{dt} &= (\Lambda(\varphi) + B(\varphi, u^{(k)}(\varphi)))x + f^{(k)}(\varphi). \end{aligned} \tag{23}$$

Так як функції $\frac{\partial u^{(k)}(\varphi)}{\partial \varphi}$ неперервні на компактній множині, то для довільного k існує $M > 0$ таке, що $\left\| \frac{\partial u^{(k)}(\varphi)}{\partial \varphi} \right\| \leq M$. Припускаючи, що функція $B(\varphi, x)$ – ліпшицева по x зі сталою Ліпшиця L і враховуючи, що функції $\frac{\partial u^{(k)}(\varphi)}{\partial \varphi}$ обмежені, а функція $a_1(\varphi, x)$ – ліпшицева по x зі сталою Ліпшиця $\tilde{L}$, справедлива оцінка

$$\left\| w^{(k+1)}(\varphi) \right\| \leq \frac{K_1(\varepsilon)}{\gamma_1(\varepsilon)} \max_{\varphi \in T^m} \left\| f^{(k)}(\varphi) \right\| \leq \frac{K_1(\varepsilon)}{\gamma_1(\varepsilon)} (\frac{K_1(\varepsilon)}{\gamma_1(\varepsilon)} mL + M\tilde{L}) \left\| w^{(k)}(\varphi) \right\| \leq \\ \leq \frac{K_1(\varepsilon)}{\gamma_1(\varepsilon)} (hL + M\tilde{L}) \left\| w^{(k)}(\varphi) \right\|. \tag{24}$$

Вважаючи, що константи Ліпшиця L і $\tilde{L}$ настільки малі, що

$$\frac{K_1(\varepsilon)}{\gamma_1(\varepsilon)} (hL + M\tilde{L}) < 1$$

робимо висновок про рівномірну збіжність послідовності функцій $\{u^{(k)}(\varphi)\}$. Покладемо

$$\lim_{k \to \infty} u^{(k)}(\varphi) = u(\varphi). \tag{25}$$

Переконаємося, що многовид $u(\varphi)$ є інваріантним многовидом вихідної системи. Позначимо через $\varphi_t^*(\varphi)$ - розв'язок системи

$$\dot{\varphi} = a(\varphi) + a_1(\varphi, u(\varphi)) \tag{26}$$

такий, що $\varphi_0^*(\varphi) = \varphi$. Перейшовши до границі, коли $k \to \infty$ в рівності (15), бачимо, що функція $u(\varphi)$ допускає представлення

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} \tilde{\Omega}_s^0(\varphi, \Lambda + B) f(\varphi_s^*(\varphi)) ds, \tag{27}$$

в якому $\tilde{\Omega}_s^0(\varphi, \Lambda + B)$ — матрицант системи

$$\dot{x} = [\Lambda(\varphi_t^*(\varphi)) + B(\varphi_t^*(\varphi), u(\varphi_t^*(\varphi)))]x.$$

Отже $u(\varphi_t^*(\varphi))$ для будь-якого $\varphi \in T^m$ задовольняє рівність

$$\dot{u}(\varphi_t^*(\varphi)) = [\Lambda(\varphi_t^*(\varphi)) + B(\varphi_t^*(\varphi), u(\varphi_t^*(\varphi)))]u(\varphi_t^*(\varphi)) + f(\varphi_t^*(\varphi)),$$

а тому многовид $u(\varphi)$ є інваріантним многовидом вихідної системи.

Покажемо, що отриманий інваріантний тороїдальний многовид є асимптотично стійким. Нехай $x = x(t,\varphi)$ – довільний розв'язок системи (5), $x^*(t) = u(\varphi_t^*(\varphi))$ – розв'язок цієї ж системи, який лежить на інваріантній множині. Різниця цих розв'язків допускає представлення

$$x(t,\varphi) - u(\varphi_t^*(\varphi)) = \tilde{\Omega}_0^t(\varphi, \Lambda + B)(x(0,\varphi) - u(\varphi))$$

і в силу оцінки (16) робимо висновок, що

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t,\varphi) - u(\varphi_t^*(\varphi))\| = 0.$$

Це і означає, що інваріантна множина $x = u(\varphi)$ є асимптотично стійкою.

Таким чином справедлива теорема.

Теорема 1. *Нехай система (5) така, що існує границя*

$$\lim_{t\to\infty} \Lambda(\varphi_t(\varphi)) = A$$

для всіх $\varphi \in T^m$, $Re\lambda_j(A) < 0$, $(j = 1, 2, ..., n)$. *Тоді існують такі сталі* $b_0 > 0$, $m > 0$, $\varepsilon > 0$ *і достатньо малі сталі Ліпшиця* L *і* $\tilde{L}$, *що для будь-якої матриці* $F(\varphi, x) \in C^{(1,2)}_{\varphi,x}(\varphi \in T^m, x \in \mathbb{R}^n)$, $\|x\| \le h$ *такої, що*

$$\max_{\varphi\in\ T^m} \|F(\varphi, 0))\| = m,$$

$$\max_{\varphi\in\ T^m,\ \|x\|\le h} \|B(\varphi, x))\| = b_0$$

і

$$\left\|B(\varphi, x') - B(\varphi, x'')\right\| \le L \left\|x' - x''\right\|,$$

де $B(\varphi, x) = \int\limits_0^1 \frac{\partial F(\varphi,\ \tau x)}{\partial(\tau x)} d\tau$, *для будь-якої функції* $a(\varphi) \in C^1(T^m)$ *і для будь-якої функції* $a_1(\varphi, x) \in C^{(1,0)}_{Lip(x)}(\varphi \in T^m, x \in \mathbb{R}^n)$ *такої, що*

$$\max_{\varphi\in T^m, \|x\|\le h} \|a_1(\varphi, x)\| \le \varepsilon,$$

$$\left\|a_1(\varphi, x') - a_1(\varphi, x'')\right\| \le \tilde{L} \left\|x' - x''\right\|,$$

система (5) має асимптотично стійкий інваріантний тороїдальний многовид.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова. — К.: Наук. думка, 1990. — 272 с.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
3. *Перестюк М. О., Балога С. І.* Існування інваріантного тора одного клау систем диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2008. – 11, №4. – С. 520-529.

Одержано 04.06.2009