УДК 519.21

О. О. Погоріляк (Ужгородський нац. ун-т)

МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ КОКСА КЕРОВАНИХ КВАДРАТИЧНО ГАУССОВИМ ВИПАДКОВИМ ПОЛЕМ

In this paper we deal with one of the possible methods of the random Cox processes simulation. The case when the Cox processes random intensity generated by a random square-gaussian field are considered. We construct models of such processes with accuracy and reliability given beforehand.

Розглядається один із можливих методів моделювання випадкових процесів Кокса. А саме, досліджується випадок, коли інтенсивність процесу Кокса породжується випадковим полем. Будуються моделі таких процесів, які наближають їх з певною точністю та надійністю, заданими наперед.

1. Вступ. В даній роботі розглядаються процеси Кокса керовані випадковою інтенсивністю, яка породжується квадратично гауссовим випадковим полем. Такі процеси, у випадку коли інтенсивність породжується логарифмічно гауссовим та ще деякими процесами, добре вивчені в роботах [1–3]. В цих роботах також описаний один із можливих методів їхнього моделювання. В даній роботі пропонується відмінний від вище згаданого методу моделювання, який дає можливість будувати моделі випадкових процесів Кокса з наперед заданою точністю та надійністю. Аналогічний підхід до моделювання вже був розглянутий в роботах [4], [5].

Нехай $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}\}$ – стандартний ймовірнісний простір, $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра борелівських множин $\mathbf{T}$, $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}^n$, $\left\{Y\left(\vec{t}\right),\ \vec{t} \in \mathbf{T}\right\}$ – центроване, гауссове, неперервне в середньому квадратичному випадкове поле.

Означення 1. *Нехай $Z\left(\vec{t}\right)$ невід'ємне випадкове поле. Якщо умовний розподіл $\{\nu(B), B \in \mathfrak{B}\}$ при будь-якій реалізації $Z\left(\vec{t}\right)$ є Пуассонівським процесом з функцією інтенсивності $\mu(B) = \int_B Z\left(\omega_0, \vec{t}\right) d\vec{t}$, то $\nu(B)$ називається випадковим процесом Кокса керованим полем $Z\left(\vec{t}\right)$.*

Якщо $Z\left(\vec{t}\right) = Y^2\left(\vec{t}\right)$, то $\nu(B)$ будемо називати процесом Кокса керованим квадратично гауссовим полем $Y^2\left(\vec{t}\right)$, або просто квадратично гауссовим процесом Кокса. Надалі в даній роботі розглядатимуться тільки квадратично гауссові процеси Кокса.

Оскільки $\{\nu(B),\ B \in \mathfrak{B}\}$ це подвійно стохастичний випадковий процес, то його модель будується в два етапи. Спочатку моделюємо гауссове випадкове поле $\left\{Y\left(\vec{t}\right),\ \vec{t} \in \mathbf{T}\right\}$, далі розглядаємо деяке розбиття $D_{\mathbf{T}}$ області $\mathbf{T}$ і на кожному елементі розбиття $D_{\mathbf{T}}$ будуємо модель пуассонівської випадкової величини з відповідним середнім.

Нехай $\mathbf{T} = [0, T] \times \ldots \times [0, T]$, $T \in \mathbf{R}_+$, виберемо розбиття $D_{\mathbf{T}}$ наступним чином:

$$B_{i_1,\ldots,i_n} = \left\{ \left[t_1^{i_1}, t_1^{i_1+1}\right) \times \ldots \times \left[t_n^{i_n}, t_n^{i_n+1}\right) \middle| t_m^{i_m} < t_m^{i_m+1}, \right.$$
$$\left. t_m^{i_m+1} - t_m^{i_m} = d = \frac{T}{k}, k \in \mathbf{N},\ m = \overline{1,n},\ i_m = \overline{0, k-1} \right\}.$$

Введемо наступні позначення: нехай $\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)$ – модель поля $Y\left(\vec{t}\right)$, $\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) = \int_{B_{i_1,\ldots,i_n}} \widetilde{Y}^2\left(\vec{t}\right) d\vec{t}$, $\widetilde{\nu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)$ – модель $\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)$, тобто модель пуассонівської випадкової величини з середнім $\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)$.

Оскільки $\widetilde{\nu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)$ це число точок моделі, що належать області $B_{i_1,\ldots,i_n}$, а ми не знаємо їхнього справжнього розташування, то розміщуємо їх в $B_{i_1,\ldots,i_n}$ довільно. Якщо ж $\widetilde{\nu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) = 1$, то точку розміщуємо в центрі області.

Зрозуміло, що модель можна вважати допустимою, якщо умовні ймовірності $p_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) = \mathbf{P}\left\{\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) = k \,/\, Y\left(\vec{t}\right), \vec{t} \in \mathbf{T}\right\}$ та $\widetilde{p}_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) = \mathbf{P}\left\{\widetilde{\nu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) = k \,/\, \widetilde{Y}\left(\vec{t}\right), \vec{t} \in \mathbf{T}\right\}$ відрізняються мало, а також ймовірність того, що число точок $\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)$ (відповідно і $\widetilde{\nu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)$) буде більше одиниці також мала. Отже, задача моделювання квадратично гауссового процесу Кокса розбивається на дві задачі, а саме побудову моделі поля $Y\left(\vec{t}\right)$ та вибору розбиття області $\mathbf{T}$.

2. Задача побудови моделі поля $Y\left(\vec{t}\right)$. Оскільки $\left\{Y\left(\vec{t}\right),\ \vec{t} \in \mathbf{T}\right\}$, $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}^n$– центроване, гауссове, неперервне в середньому квадратичному випадкове поле, то його коваріаційна функція $B\left(\vec{t}, \vec{s}\right)$ неперервна на $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$.

Розглянемо однорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\phi\left(\vec{t}\right) = \lambda \int_{\mathbf{T}} B\left(\vec{t}, \vec{s}\right) \phi\left(\vec{s}\right) d\vec{s}. \tag{1}$$

Як відомо, множина власних значень λ_k такого рівняння для неперервного та невід'ємно визначеного ядра не більш як зліченна, власні функції $\phi_k\left(\vec{t}\right)$ неперервні, а самі власні значення λ_k невід'ємні [6]. Занумеруємо власні значення λ_k, $k = 1, 2, \ldots$ в порядку зростання: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$. Відповідні їм власні функції будемо вважати ортонормованими, тобто

$$\int_{\mathbf{T}} \phi_k(\vec{s})\phi_l(\vec{s}) ds = \begin{cases} 1, \ k = l, \\ 0, \ k \neq l. \end{cases}$$

Має місце зображення

$$B\left(\vec{t}, \vec{s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k\left(\vec{t}\right)\ \phi_k\left(\vec{s}\right)}{\lambda_k},$$

причому ряд в правій частині збігається рівномірно по $s \in \mathbf{T}$ а також ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$ є збіжним [6].

Тоді саме поле $Y\left(\vec{t}\right)$ допускає зображення

$$Y\left(\vec{t}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}} \phi_k\left(\vec{t}\right), \tag{2}$$

де $\xi_k = N(0,1)$, $\mathbf{E}\xi_k\xi_l = \delta_{kl}$, δ_{kl} – символ Кронекера, тобто ξ_k – незалежні, причому ряд збігається в середньому квадратичному (це випливає з теореми Карунена).

За модель такого поля прийматимемо суму

$$\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}} \phi_k\left(\vec{t}\right).$$

3. Задача вибору розбиття області T. Розбиття області $\mathbf{T}$ (тобто d або k) вибираємо так, щоб виконувалась нерівність

$$\mathbf{P}\left\{\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) > 1\right\} < \delta, \tag{3}$$

де δ певне наперед задане число (наприклад, $\delta = 0.01$).

Теорема 1. *Нехай* $\{\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right), B_{i_1,\ldots,i_n} \subset \mathfrak{B}\}$ *процес Кокса, породжений квадратично гауссовим неоднорідним полем* $Y^2\left(\vec{t}\right)$, *власні функції інтегрального рівняння* (1) *обмежені,*

$$\left|\phi_k\left(\vec{t}\right)\right| \le L, \quad \forall \vec{t} \in \mathbf{T}, \forall k \in \mathbf{N}.$$

Для того, щоб виконувалась нерівність (3) *досить вибрати* $d = \frac{T}{k}$ *так, щоб виконувалась нерівність*

$$d \le \left(\frac{\delta \exp\{2\}}{8\sqrt{2}\left(L^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2n}}.$$

Доведення. Оскільки

$$\mathbf{P}\{\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)>1\}=\mathbf{E}\left(1-\exp\{-\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\} -\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\exp\{-\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\}\right),$$

та при $x > 0$ $\; 1 - \exp\{-x\}(1+x) \le \frac{x^2}{2}$, то для виконання (3) досить щоб виконувалась нерівність

$$\mathbf{E}\frac{\mu^2\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)}{2} < \delta. \tag{4}$$

$$\mathbf{E}\mu^2\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) = \mathbf{E}\left[\int\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}} Y^2\left(\vec{t}\right) d\vec{t}\right]^2 = \mathbf{E}\int\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}} Y^2\left(\vec{t}\right) d\vec{t} \int\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}} Y^2\left(\vec{s}\right) d\vec{s} =$$
$$= \mathbf{E}\iint\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}\times B_{i_1,\ldots,i_n}} Y^2\left(\vec{t}\right) Y^2\left(\vec{s}\right) d\vec{t}d\vec{s} = \iint\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}\times B_{i_1,\ldots,i_n}} \mathbf{E}Y^2\left(\vec{t}\right) Y^2\left(\vec{s}\right) d\vec{t}d\vec{s}. \tag{5}$$

Використовуючи (4), (5), маємо

$$\mathbf{P}\left\{\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) > 1\right\} \le \iint\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}\times B_{i_1,\ldots,i_n}} \frac{\mathbf{E}Y^2\left(\vec{t}\right) Y^2\left(\vec{s}\right)}{2} d\vec{t}d\vec{s}.$$

Внаслідок нерівності Гельдера для u_1, u_2 таких, що $\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}=1$

$$\mathbf{P}\left\{\nu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)>1\right\}\leq\iint\limits_{B_{i_1,\dots,i_n}\times B_{i_1,\dots,i_n}}\frac{\left(\mathbf{E}Y^{2u_1}\left(\vec{t}\right)\right)^{\frac{1}{u_1}}\left(\mathbf{E}Y^{2u_2}\left(\vec{s}\right)\right)^{\frac{1}{u_2}}}{2}d\vec{t}d\vec{s}. \tag{6}$$

Для гауссової випадкової величини ξ з параметрами 0 і σ^2 справедливе наступне співвідношення:

$$\mathbf{E}|\xi|^p=c_p\left(\sigma^2\right)^{\frac{p}{2}}, \tag{7}$$

причому

$$c_p\leq\sqrt{2}p^{\frac{p}{2}}\exp\left\{-\frac{p}{2}\right\}. \tag{8}$$

Оскільки, скориставшись зображенням (2),

$$\mathbf{E}Y^2\left(\vec{t}\right)=\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k\left(\vec{t}\right)\right)^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\phi_k^2\left(\vec{t}\right)}{\lambda_k}\leq L^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k},$$

то в силу (7),

$$\mathbf{E}Y^{2u_1}\left(\vec{t}\right)=c_{2u_1}\left(L^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)^{u_1}.$$

Аналогічно й $\mathbf{E}Y^{2u_2}\left(\vec{s}\right)=c_{2u_2}\left(L^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)^{u_2}$. Розписавши c_{2u_1} та c_{2u_2} за допомогою співвідношення (8), та поклавши $u_1=u_2=2$, твердження теореми випливає з (6).

4. Наближення квадратично гауссового процесу Кокса з певною точністю та надійністю. Оскільки модель квадратично гауссового процесу Кокса $\left\{\nu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right),B_{i_1,\dots,i_n}\subset\mathfrak{B}\right\}$ потрібно будувати так, щоб умовні ймовірності $p_{kY}(B_{i_1,\dots,i_n})$ та $\widetilde{p}_{kY}(B_{i_1,\dots,i_n})$ з ймовірністю близькою до одиниці відрізнялись мало, то природнім є наступне означення.

Означення 2. *Скажемо, що модель квадратично гауссового процесу Кокса* $\left\{\nu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right),B_{i_1,\dots,i_n}\subset\mathfrak{B}\right\}$ *наближає його з точністю* α, $0<\alpha<1$ *та надійністю* $1-\gamma$, $0<\gamma<1$, *якщо виконується нерівність*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\dots,i_n}\in\mathfrak{B}}\left|\,p_{kY}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)-\widetilde{p}_{kY}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}<\gamma.$$

Лема 1. *Нехай* $Y\left(\vec{t}\right)$ *– центроване, неперервне в середньому квадратичному випадкове поле, власні функції інтегрального рівняння* (1) *обмежені,*

$$\left|\phi_k\left(\vec{t}\right)\right|\leq L,\quad\forall\vec{t}\in\mathbf{T},\forall k\in\mathbf{N}.$$

тоді $\forall p>1$ *має місце оцінка*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\dots,i_n}\in\mathfrak{B}}\left|\mu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}$$

$$\leq\frac{\sqrt{2}k^nd^{np}(v_1v_2)^{\frac{p}{2}}\left(2L^2\sqrt{\left(\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)}\right)^pp^p\exp\left\{-p\right\}}{\alpha^p},$$

де v_1, v_2 *– такі числа, що* $\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}=1$.

Доведення.

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\dots,i_n}\in\mathfrak{B}}\left|\mu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}$$
$$\leq\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{k}\mathbf{P}\left\{\left|\mu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}$$
$$\leq k^n\max_{B_{i_1,\dots,i_n}\in\mathfrak{B}}\mathbf{P}\left\{\left|\mu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}.$$

Використовуючи нерівність Чебишева,

$$\mathbf{P}\left\{\left|\mu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}\leq\frac{\mathbf{E}\left|\mu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)\right|^p}{\alpha^p}.$$

В силу узагальненої нерівності Мінковського

$$\mathbf{E}\left|\mu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)\right|^p\leq\mathbf{E}\left(\int\limits_{B_{i_1,\dots,i_n}}\left|Y^2\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}^2\left(\vec{t}\right)\right|d\vec{t}\right)^p$$
$$\leq\left(\int\limits_{B_{i_1,\dots,i_n}}\left(\mathbf{E}\left|Y^2\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}^2\left(\vec{t}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}d\vec{t}\right)^p$$

Таким чином, із останніх трьох нерівностей випливає наступна

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\dots,i_n}\in\mathfrak{B}}\left|\mu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}$$
$$\leq\frac{k^n\left(\int\limits_{B_{i_1,\dots,i_n}}\left(\mathbf{E}\left|Y^2\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}^2\left(\vec{t}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}d\vec{t}\right)^p}{\alpha^p}.\tag{9}$$

Для v_1, v_2 таких, що $\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}=1$, в силу нерівності Гельдера, матимемо:

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\dots,i_n}\in\mathfrak{B}}\left|\mu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}$$
$$\leq\frac{k^n\left(\int\limits_{B_{i_1,\dots,i_n}}\left(\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_1}\right)^{\frac{1}{pv_1}}\left(\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)+\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_2}\right)^{\frac{1}{pv_2}}d\vec{t}\right)^p}{\alpha^p}.\tag{10}$$

Беручи до уваги співвідношення (7),

$$\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_1}=c_{pv_1}\left(\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^2\right)^{\frac{pv_1}{2}}.$$

Врахувавши, що в зображенні (2) поля $Y\left(\vec{t}\right)$ $\mathbf{E}\xi_k\xi_l = \delta_{kl}$, де δ_{kl} – символ Кронекера, матимемо

$$\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^2 = \mathbf{E}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k\left(\vec{t}\right)-\sum_{k=1}^{N}\frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k\left(\vec{t}\right)\right|^2$$
$$= \mathbf{E}\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k\left(\vec{t}\right)\right|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\phi_k^2\left(\vec{t}\right)}{\lambda_k} \le L^2\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}.$$

Отже,

$$\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_1} \le c_{pv_1}L^{pv_1}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)^{\frac{pv_1}{2}}. \tag{11}$$

Повністю аналогічно, використовуючи зображення (2) і (16) поля та його моделі,

$$\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)+\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^2 = \mathbf{E}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k\left(\vec{t}\right)+\sum_{k=1}^{N}\frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k\left(\vec{t}\right)\right|^2$$
$$= \mathbf{E}\left|2\sum_{k=1}^{N}\frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k\left(\vec{t}\right)+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k\left(\vec{t}\right)\right|^2$$
$$= 4\sum_{k=1}^{N}\frac{\phi_k^2\left(\vec{t}\right)}{\lambda_k}+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\phi_k^2\left(\vec{t}\right)}{\lambda_k} \le 4L^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}.$$

Беручи до уваги останню нерівність,

$$\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)+\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_2} = c_{pv_2}\left(\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)+\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^2\right)^{\frac{pv_2}{2}}$$
$$\le c_{pv_2}(2L)^{pv_2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)^{\frac{pv_2}{2}}. \tag{12}$$

Враховуючи (11) та (12) а також оцінку (8) для c_{pv_1} і c_{pv_2}, після елементарних перетворень твердження леми випливає із (10).

Лема 2. *Нехай $Y\left(\vec{t}\right)$ – центроване, неперервне в середньому квадратичному випадкове поле, власні функції інтегрального рівняння* (1) *обмежені*

$$\left|\phi_k\left(\vec{t}\right)\right| \le L \quad \forall\vec{t}\in\mathbf{T},\ k\in\mathbf{N}.$$

Якщо $\alpha > 4d^nL^2\sqrt{\left(\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)}$, *тоді*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n}\in\mathfrak{B}}\left|p_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)-\widetilde{p}_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}$$
$$\le\sqrt{2}k^n\exp\left\{-\frac{\alpha}{4d^nL^2\sqrt{\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)}}\right\}.$$

Доведення. Оцінимо різницю $|\, p_{kY}(B) - \widetilde{p}_{kY}(B)\,|$, $B \in \mathfrak{B}$, застосувавши формулу Лагранжа скінченних приростів. Нехай $k \neq 0$,

$$|\, p_{kY}(B) - \widetilde{p}_{kY}(B)\,| = \left| \frac{\exp\{-\mu(B)\}\,(\mu(B))^k}{k!} - \frac{\exp\{-\widetilde{\mu}(B)\}\,(\widetilde{\mu}(B))^k}{k!} \right| =$$

$$= |\mu(B) - \widetilde{\mu}(B)|\,\frac{1}{k!}\exp\{-\hat{\mu}\,(B)\}\,(\hat{\mu}\,(B))^{k-1}\,|k - \hat{\mu}\,(B)| =$$

$$= \begin{cases} |\mu(B) - \widetilde{\mu}(B)| \dfrac{1}{(k-1)!}\exp\{-\hat{\mu}(B)\}\,(\hat{\mu}(B))^{k-1} \leq |\mu(B) - \widetilde{\mu}(B)|\,, k \geq \hat{\mu}(B)\,; \\ |\mu(B) - \widetilde{\mu}(B)|\,\dfrac{1}{k!}\exp\{-\hat{\mu}(B)\}\,(\hat{\mu}\,(B))^k \leq |\mu(B) - \widetilde{\mu}(B)|\,,\ \ k < \hat{\mu}\,(B)\,. \end{cases}$$

При $k = 0$

$$\begin{aligned} |p_{0Y}(B) - \widetilde{p}_{0Y}(B)| &= |\exp\{-\mu(B)\} - \exp\{-\widetilde{\mu}(B)\}| = \\ &= |\mu(B) - \widetilde{\mu}(B)|\exp\{-\hat{\mu}\,(B)\} \leq |\mu(B) - \widetilde{\mu}(B)|\,. \end{aligned}$$

Таким чином оцінка $|\, p_{kY}(B) - \widetilde{p}_{kY}(B)\,|$ зводиться до оцінки $|\mu(B) - \widetilde{\mu}(B)|$ і виконується нерівність

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\dots,i_n}\in\mathfrak{B}} |p_{kY}(B_{i_1,\dots,i_n}) - \widetilde{p}_{kY}(B_{i_1,\dots,i_n})| > \alpha\right\} \leq \mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\dots,i_n}\in\mathfrak{B}} |\mu(B_{i_1,\dots,i_n}) - \widetilde{\mu}(B_{i_1,\dots,i_n})| > \alpha\right\}.$$

Мінімізуючи $\frac{\sqrt{2}k^n d^{np}(v_1 v_2)^{\frac{p}{2}}\left(2L^2\sqrt{\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)}\right)^p p^p \exp\{-p\}}{\alpha^p}$ по змінній p та поклавши $v_1 = v_2 = 2$, легко бачити, що дана лема є наслідком останнього співвідношення та леми 1.

Теорема 2. *Нехай* $Y(\vec{t})$ *– центроване, неперервне в середньому квадратичному гауссове поле, власні функції інтегрального рівняння* (1) *обмежені*

$$\left|\phi_k(\vec{t})\right| \leq L \quad \forall \vec{t} \in \mathbf{T},\, k \in \mathbf{N},$$

тоді модель процесу Кокса $\{\widetilde{\nu}(B_{i_1,\dots,i_n}), B_{i_1,\dots,i_n} \subset \mathfrak{B}\}$, *керованого квадратично гауссовим неоднорідним полем* $\widetilde{Y}^2(\vec{t})$, *наближає його з точністю* α *та надійністю* $1-\gamma$, *якщо виконуються умови:*

$$\alpha > 4d^n L^2 \sqrt{\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)},$$

$$\sqrt{2}k^n \exp\left\{-\frac{\alpha}{4d^n L^2\sqrt{\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)}}\right\} < \gamma.$$

Доведення. Твердження теореми є наслідком леми 2 та означення 2.

5. Висновки. В даній роботі описано один із методів моделювання квадратично гауссових випадкових процесів Кокса з наперед заданою точністю та надійністю. Розглянуто випадок, коли інтенсивність породжується випадковим полем. Основний результат статті – теорема 2, дає достатні умови наближення квадратично гауссових процесів Кокса їх моделями.

1. *Moller J.* Spatial statistics and computational methods. – New York: Springer, 2003. – 203p.
2. *Moller J., Syversveen A. R., Waagepetersen R. P.* Log gaussian Cox Processes // Scandinavian Journal of Statistics. – 1998. – **25**, №4. – P. 451–482.
3. *Moller J., Waagepetersen R. P.* Statistical inference and simulation for spatial point processes. – Boca Raton London New York Washington: Chapman & Hall/CRC, 2004. – 300p.
4. *Козачеко Ю. В., Погоріляк О. О.* Моделювання логарифмічно гауссових процесів Кокса з заданою надійністю та точністю // ТВіМС. – 2007. – №76. – С. 58-71.
5. *Козаченко Ю. В., Погоріляк О. О.* Моделювання процесів Кокса керованих випадковим полем // Доповіді НАН України. – 2006. – №10. – С. 20-23.
6. *Владимиров В.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1967. – 436с.

Одержано 04.06.2009