МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Математичний факультет
Кафедра кібернетики і прикладної математики

Кондрук Н. Е., Маляр М.М., Смочкова Т. М.

СТИСЛИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з курсу «*Вища математика*»
для студентів I-го курсу хімічного факультету

Частина 1

АЛГЕБРА,

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Ужгород – 2012

В основу конспекту стисло покладено теоретичний матеріал розділів алгебри та аналітичної геометрії ілюстрований прикладами, з курсу «Вища математика» для студентів І-го курсу хімічного факультету.

Укладачі:
Кондрук Н.Е., к.т.н., доцент кафедри кібернетики і прикладної математики;
Маляр М.М., к.т.н., доцент, завідувач кафедри кібернетики і прикладної математики;
Смочкова Т.М., старший викладач кафедри кібернетики і прикладної математики.

Рецензенти:
Ніколенко В.В., к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри кібернетики і прикладної математики;
Лошак М.С., старший викладач кафедри кібернетики і прикладної математики, нач. навч. частини ДВНЗ «УжНУ».

Рекомендовано кафедрою кібернетики і прикладної математики протокол № 7 від 7 березня 2012 року.

Рекомендовано Вченою Радою математичного факультету протокол № 8 від 21 березня 2012 року.

Вища математика. Стислий конспект лекцій з курсу «Вища математика» для студентів 1-го курсу хімічного факультету. Частина 1. Алгебра, аналітична геометрія / Розробники: Н.Е. Кондрук, М.М. Маляр, Т.М. Смочкова – Ужгород, Вид-во , 2012. – 48 с.

Зміст

ВСТУП

Курс «Вища математика» служить теоретичним і практичним фундаментом при вивченні всіх природничих навчальних дисциплін, які викладаються у вищих навчальних закладах.

Програма даного курсу складена у відповідності до сучасних програм Міністерства науки і освіти, молоді та спорту України. Водночас слід відмітити, що порядок викладання окремих розділів такий, що враховує специфіку слухачів-студентів напрямів підготовки - 6.070301 - Хімія, 6.040106 – Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування.

Мета навчальної дисципліни «Вища математика»: засвоєння теоретичного та практичного матеріалу з курсу «Вища математика» з метою застосування одержаних знань при вивченні всіх навчальних дисциплін даних спеціальностей.

Курс «Вища математика» читається протягом трьох семестрів, з яких перший та другий семестри закінчуються екзаменом, а третій - заліком.

Вивчення дисципліни потребує використання знань студентів з математики, набутих в загальноосвітній середній школі.

Основними завданнями, що мають бути вирішені у процесі викладання дисципліни, є надання студентам знань з основних розділів вищої математики; вивчення означень, теорем, методів та алгоритмів; доведення основних теорем; формування умінь самостійного опрацювання математичної літератури; розвиток логічного і алгоритмічного мислення.

Конспект лекцій з курсу «Вища математика» спрямований на полегшення само-підготовки студентів 1-го курсу хімічного факультету напрямів підготовки 6.040101 – Хімія, 6.040106 – Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування до виконання модульних контрольних робіт та складання екзамену.

Структура курсу включає 6 змістових модулів. До даного конспекту лекцій включено основний теоретичний матеріал 1-го модуля 1-го семестру викладання: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія на площині, який проілюстровано прикладами:.

ЗМІСТ НАВЧАЛЬНОГО КУРСУ

Модуль 1. Змістовий модуль №1.

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА, ВЕКТОРНА АЛГЕБРА. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

Лекція 1 (2 год.)

Визначники 2-го, 3-го, 4-го порядків, їх властивості. Обчислення визначників 2-го, 3-го порядків та визначників вищих порядків. Системи лінійних рівнянь. Правило Крамера.

Лекція 2 (2 год.)

Розв’язування систем лінійних рівнянь методом Гауса. Матриці, дії над ними.

Лекція 3 (2 год.)

Обернена матриця. Матричні рівняння. Системи лінійних рівнянь. Матричний спосіб розв’язання систем лінійних рівнянь. n-мірний векторний простір. Лінійно незалежні та лінійно залежні вектори. Базис. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі

Лекція 4 (2 год.)

Геометричні вектори. Дії над ними. Проекція вектора на вісь. Властивості проекцій. Скалярний добуток двох векторів. Його властивості. Кут між векторами. Умова колінеарності та перпендикулярності двох векторів.

Лекція 5 (2 год.)

Векторний добуток двох векторів. Властивості. Змішаний добуток трьох векторів. Його геометричний зміст. Умова компланарності трьох векторів.

Лекція 6 (2 год.)

Прямокутна система координат на площині. Віддаль між точками, поділ відрізка в даному відношенні. Площа трикутника. Рівняння лінії на площині. Загальне рівняння прямої. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Кут між двома прямими, умова паралельності та перпендикулярності двох прямих. Рівняння жмутка прямих. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Нормальне рівняння прямої. Віддаль від точки до прямої.

Лекція 7 (2 год.)

Криві другого порядку. Коло, еліпс. Гіпербола. Парабола.

1. АЛГЕБРА

1.1. Визначники другого і третього порядку та їх властивості. Методи обчислення.

Визначники другого і третього порядку. Метод трикутників

Визначником другого порядку називається число Δ, що дорівнює

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

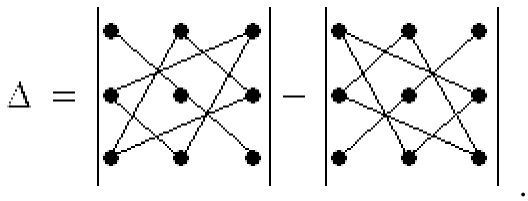
Визначником третього порядку називається число Δ, яке дорівнює

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}. \quad (*)$$

Числа або букви, записані у таблиці називаються елементами визначника.

Діагональ, проведена з верхнього лівого кута у нижній правий кут називається *головною діагоналлю*, а діагональ, проведена з нижнього лівого в правий верхній кут – побічною.

Обчислення визначника третього порядку, записаного вище, зобразимо схематично таким чином:



Приклади

Обчислити визначники:

1. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-5)(-3) = -7.$

2.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot 3 - (-1) \cdot (-2) \cdot 3 - (-1) \cdot (-2) \cdot 2 =$$

$$= 24 + 3 + 12 - 36 - 6 - 4 = -7.$$

Властивості визначників

1. Якщо у визначнику поміняти місцями рядки зі стовпцями, його величина не зміниться.
2. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (стовпці), знак визначника зміниться на протилежний.
3. Якщо у визначнику всі елементи рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то визначник дорівнює 0.
4. Якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) рівні, то цей визначник дорівнює нулю.
5. Спільний множник всіх елементів рядка, (стовпця) можна винести за знак визначника.

Наслідок: Якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то цей визначник дорівнює нулю.

6. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}.$

Наслідок: Якщо до елементів рядка (стовпця) додати відповідні елементи другого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число, то величина визначника не зміниться:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Другий метод обчислення визначників третього порядку

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} деякого визначника називається визначник, одержаний із вказаного визначника в результаті викреслення *i*-го рядка та *j*-го стовпця.

Наприклад для визначника (*): $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$

Алгебраїчним доповненням до елемента a_{ij} називається мінор M_{ij}, взятий зі знаком "+", якщо сума номерів рядка і стовпця, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}, є парною, і зі знаком "–" – в протилежному випадку. Позначається: $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Наприклад, $A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$

Визначник $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}$

обчислено шляхом розкладу по елементах *i*-го рядка та *j* -го стовпчика.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(12-2) + 1\cdot(-6+3) + 3\cdot(4-12) = 20-3-24 = -7.$$

Третій спосіб обчислення визначників

Метод зведення визначника вищого порядку до визначника нижчого порядку базується на властивостях визначників.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \overset{(4),(-2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 11 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 11 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -18+11 = -7.$$

Тут другий визначник отримано із першого шляхом винесення із другого стовпця знака «-» та перестановки першого і другого стовпців.

Обчислення визначників вищих порядків

При обчисленні визначників вищих порядків доцільно користуватись третім способом.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & -3 & 4 \\ -2 & -4 & 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix}(2)(3)(2)\\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 11 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 11 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-1\right)^{3+2} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} = -5 \cdot (21-44) = 115.$$

Обчислимо даний визначник іншим способом:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 11 & 0 & 7 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \left(-1\right)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 11 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-1\right)^{3+2} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} = -5 \cdot (21-44) = 115.$$

1.2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система виду:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_{1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_{m,} \end{cases} \qquad (*)$$

називається *системою лінійних алгебраїчних рівнянь*.

Це є система m рівнянь з n невідомими, де $x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n$ – невідомі; $a_{ij}, \ i = 1,2,\ldots,m, \ j = 1,2,\ldots,n$ – коефіцієнти системи; $b_1, \ b_2, \ \ldots, \ b_m$ – вільні члени.

Якщо всі вільні члени дорівнюють 0, то система називається *однорідною*.

Будь-яка сукупність $x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n$, що задовольняє цю систему, називається *розв'язком системи*.

Якщо система має розв'язок, то вона називається *сумісною*. Причому, якщо система має один розв'язок, то вона називається *сумісною визначеною*, якщо має безліч розв'язків, то *сумісною невизначеною*. Якщо система не має розв'язків, то вона називається *несумісною*.

Правило Крамера

Розглянемо систему n рівнянь із n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_{1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Визначник, складений з коефіцієнтів системи, називається *визначником системи*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Припустимо, що $\Delta \neq 0$, тоді має місце теорема (правило) Крамера.

Теорема Крамера.

Якщо головний визначник системи відмінний від 0, то дана система є сумісною визначеною і розв'язки її дорівнюють:

$x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, ..., $x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$, *де* $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ *– визначники, одержані заміною відповідно 1-го, 2-го, ..., n-го стовпчика визначника* Δ *стовпчиком вільних членів.*

Наприклад, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Приклад

Розв'яжемо систему $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}$ методом алгебраїчного додавання.

Розв'язання:

$$\left\{\begin{array}{l|l} 2x + 3y = 6 & (5)\cdot(3) \\ 3x - 5y = 10 & (3)\cdot(-2) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} 10x + 15y = 30 \\ 9x - 15y = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 9y = 18 \\ -6x + 10y = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 19x = 60 \\ x = \dfrac{60}{19} \end{array};$$

$19y = -2$

$y = -\dfrac{2}{19}$

Відповідь: $(\frac{60}{19}; -\frac{2}{19})$.

Метод Гауса

Нехай задано систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_{1,} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (*)$$

Метод Гауса – універсальний метод розв'язання системи лінійних рівнянь.

Фактично метод Гауса—це метод зведення системи лінійних рівнянь до трикутно-ступінчатого вигляду (метод алгебраїчного додавання).

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь другого порядку. Для зведення її до трикутно-ступінчатого вигляду домножимо її перше рівняння на таке число, щоб в сумі з другим рівнянням коефіцієнт при x_1 перетворився в нуль.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \left| \cdot \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) \right., \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ \underbrace{(a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}})}_{a'_{22}} x_2 = \underbrace{b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1}_{b'_2} \end{cases},$$

Перепозначивши змінні, отримаємо наступну систему, зведену до трикутно-ступінчатого вигляду, яку розв'язати вже досить просто:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a'_{22}x_2 = b'_2 \end{cases}.$$

Узагальнемо попередні міркування для довільної системи:

$$\left.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}\right| (-\frac{a_{21}}{a_{11}}) \ldots (-\frac{a_{m1}}{a_{11}}),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}.$$

Наприклад, $(-\frac{3}{2}) \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ -\frac{19}{2} y = 1 \end{cases}.$

Нехай нам дано систему $(*)$.

Матрицею системи називають таблицю, складену з коефіцієнтів системи:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (**)$$

Матриці бувають прямокутні і квадратні, навіть такі, які складаються з одного стовпчика або рядка.

Розширеною матрицею системи називається матриця, одержана з головної матриці (**), до якої приєднано стовпчик вільних членів:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Метод Гауса можна схематично записати у вигляді розширеної матриці.

Після перетворення матриці може бути одержано 3 випадки:

1) $\left(\begin{array}{c|c} \diagdown A & B \\ 0 & \end{array}\right)$ – єдиний розв’язок

2) $\left(\begin{array}{cc|c} \diagdown & A & B \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ – безліч розв’язків

3) $\left(\begin{array}{cc|c} \diagdown & A & B \\ 0 & 0 & \end{array}\right)$ – не має розв’язків (якщо останній елемент у матриці-стовпці *B* відмінний від нуля).

Приклади

Розв’язати системи рівнянь методом Гауса:

1) $\begin{cases} 3x-3y+2z=2 \\ 4x-5y+2z=1 \\ 5x-6y+4z=3 \end{cases}.$

Розв’язання:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} z & x & y & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -5 & 1 \\ 4 & 5 & -6 & 3 \end{array}\right) \end{array} (-1)(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} z & y & x & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

Далі запишемо систему. Одержимо

$$\begin{cases} 2z-3y+3x=2 \\ -2y+x=-1 \\ x=1 \end{cases} \sim \begin{cases} x=1 \\ -2y+1=-1 \\ 2z-3y+3=2 \end{cases} \sim \begin{cases} x=1 \\ y=1. \\ z=1 \end{cases}$$

2) $\begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ x+2y+3z=-1. \\ x-3y-2z=3 \end{cases}$

Розв’язання:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) (-2)(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ :(-5) \\ :(-1) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -4 \end{array}\right) \cdot(-5) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Отримано вид: $\left(\begin{array}{cc|c} \diagdown & A & B \\ 0 & 0 & \end{array}\right)$, отже система не має розв’язків.

3) $\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x+y+z=1 \\ 3x-2y+2z=3 \end{cases}.$

Розв’язання:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right)(-2)(-3) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отримано вид: $\left(\begin{array}{cc|c} \diagdown & A & B \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, отже система має безліч розв’язків:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 5y + z = 0 \end{cases}$$

Отримана система має безліч розв’язків. За вільну невідому візьмемо y, тоді $\begin{cases} z = -5y \\ x + y - 5y = 1 \\ x = 4y + 1 \end{cases}$. Отже загальний розв’язок запишемо у вигляді вектора

$\bar{x}_{\text{заг.}} = (4y + 1, y, -5y)$.

Надаючи y будь-яких значень, одержують частинні розв’язки системи.

Наприклад, $y = 0$, то частинним розв’язком буде розв’язок *(1;0;0)*, а якщо $y = 1$, то *(5;1;-5)*.

1.3. Матриці. Дії над ними

Матрицею називають таблицю $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, де a_{ij} – елементи матриці. Говорять, що матриця має розмірність (вимір) m на n і позначають $A_{m\times n}$. Число m означає кількість рядків, а число n – кількість стовпців.

Матриці позначаються великими буквами: ($A,B,\dots$) або $A=\{a_{ij}\}$, де $\begin{pmatrix} i = 1,\dots,m \\ j = 1,\dots,n \end{pmatrix}$.

Дії над матрицями

I. Множення матриць на число:

$$kA=\{ka_{ij}\}.$$

Тобто, при множенні матриці на число кожен елемент матриці множимо на це число. Крім того, $kA=Ak$.

II. Додавання матриць:

$$A+B=\{a_{ij}\}+\{b_{ij}\}=\{a_{ij}+b_{ij}\}.$$

Тобто, при додаванні матриць їх відповідні елементи додаються.

Властивості:

1) $A+B=B+A$

2) $k(A+B)=kA+kB$

3) $(k+\alpha)A=kA+\alpha A$

Зауважимо, що додавати матриці можна тільки одного виміру.

III. Множення матриць.

Множення матриць виконується за правилом: «рядок на стовпчик»

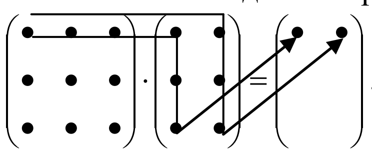
Відмітимо, що не завжди можна перемножити дві матриці.

Множення матриць не завжди має комутативну властивість.

Першу матрицю можна помножити на другу тоді і тільки тоді, коли кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої.

Наприклад, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$.

Схема множення двох матриць:



.

Квадратні матриці

Квадратною матрицею називають матрицю виду: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, тобто таку кількість стовпців у якій рівна кількості рядків.

Одиничною матрицею називається квадратна матриця виду: $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, тобто така, в якій всі елементи головної діагоналі одиниці, а решта – нулі.

Для будь-якої квадратної матриці A справджується рівність: $AE=EA$.

Оберненою матрицею до матриці A називають матрицю A^{-1}, для якої виконується $AA^{-1}=A^{-1}A=E$

З іншого боку обернена матриця визначається наступним чином:

$A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, якщо $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, і $\det A \neq 0$,

де $\underset{\text{визначник}}{\det A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, а $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,.

Матричні рівняння

Матричні рівняння містять невідому матрицю X, яку потрібно знайти. Наприклад, $AX = B$, *або* $XA = B$.

Розв’яжемо рівняння:

1. $AX=B$

Якщо матриця А має обернену матрицю, то домножимо ліву і праву частини рівняння на матрицю A^{-1} зліва.

$A^{-1}\cdot AX=A^{-1}\cdot B$,

$EX= A^{-1}\cdot B$, звідки $X= A^{-1}\cdot B$.

2. $XA=B$,

Домноживши дане матричне рівняння на матрицю A^{-1} зправа отримаємо:

$X\cdot A\cdot A^{-1}=BA^{-1}$, тоді $X=B\cdot A^{-1}$.

Приклади

1. Знайти $f(A)$, якщо $f(x)=x^2-3x+4$, $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв’язання:

$$f(A)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Помножити:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ бо}$$

4 + 3 + 12 = 19,
2 + 6 + 4 = 12,
6 - 6 - 4 = - 4.

3. Розв’язати матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання:

Позначимо $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, тоді перепишемо рівняння у виді:

$AX=B$

Якщо $detA\neq 0$, то

$A^{-1}\cdot AX=A^{-1}\cdot B$;

$EX= A^{-1}\cdot B$;

$X= A^{-1}\cdot B$;

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=8+3=11;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$A_{11}=4$; $A_{21}=-(-1)=1$;

$A_{12}=-3$; $A_{22}=2$.

Випишемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$A^{-1}\cdot A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E .$$

Отже, $X = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-5}{11} \\ 1 & \frac{12}{11} \end{pmatrix}.$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-5}{11} \\ 1 & \frac{12}{11} \end{pmatrix}.$

Матричний спосіб розв'язання систем лінійних рівнянь

Нехай дано систему лінійних рівнянь (кількість невідомих якої і кількість рівнянь однакова):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Позначимо матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, стовпчик невідомих $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; стовпчик вільних членів $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, тоді одержимо систему рівнянь, записану матричним способом : $AX=B$.

Якщо $\det A \neq 0$, то система має єдиний розв'язок: $X= A^{-1}\cdot B$, тому що $A\cdot A^{-1}=E$, $A\cdot A^{-1}X=A^{-1}\cdot B$, тоді $X= A^{-1}\cdot B$.

Приклад

Розв'язати матричним способом систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -x+3y+5z=1 \\ 3x+y+3z=2 \\ 5x+3y-z=-3 \end{cases}.$$

Розв'язання:

Введемо позначення:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ 3 & 1 & 3\\ 5 & 3 & -1\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -3\end{pmatrix}.$$

Для розв'язання системи матричним способом скористаємось приведеною вище формулою $X=A^{-1}\cdot B$. Для цього знаходимо обернену матрицю A^{-1} :

$$\det A=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 5\\ 3 & 1 & 3\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}(3)(5)\\ \\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 5\\ 0 & 10 & 18\\ 0 & 18 & 24\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}10 & 18\\ 18 & 24\end{vmatrix}=-(6)\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}5 & 9\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-12(20-27)=$$

$$=12\cdot 7=84\neq 0.$$

Знаходимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-10;\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & 5\\ 3 & -1\end{vmatrix}=18;\qquad A_{31}=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix}=4;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 3\\ 5 & -1\end{vmatrix}=18;\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 5 & -1\end{vmatrix}=-24;\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 3 & 3\end{vmatrix}=18;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 3\end{vmatrix}=4;\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 5 & 3\end{vmatrix}=18;\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-10.$$

Запишемо обернену матрицю:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{84}\begin{pmatrix}-10 & 18 & 4\\ 18 & -24 & 18\\ 4 & 18 & -10\end{pmatrix}.$$

Знаходимо розв'язок X :

$$X=\frac{1}{84}\begin{pmatrix}-10 & 18 & 4\\ 18 & -24 & 18\\ 4 & 18 & -10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -3\end{pmatrix}=\frac{1}{84}\begin{pmatrix}14\\ -84\\ 70\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/6\\ -1\\ 5/6\end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ 3 & 1 & 3\\ 5 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/6\\ -1\\ 5/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/6-3+25/6\\ 1/2-1+5/2\\ 5/6-3-5/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -3\end{pmatrix}$$

Відповідь: $X=\begin{pmatrix}1/6\\ -1\\ 5/6\end{pmatrix}.$

2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

2.1. n-вимірний векторний простір. Базис.

Сукупність усіх *n*-мірних векторів $\overline{a}(x_1, x_2, ..x_n)$, де $x_1, x_2, \dots x_n$ – компоненти вектора утворюють *n-мірний векторний простір*, якщо: $\overline{0}(0,0,...0)$, $\overline{e_1}(1,0,...0)$, $\overline{e_2}(0,1,...0)$, $\overline{e_n}(0,0,...1)$.

Дії над векторами

1)Множення вектора на число.

$k\overline{a}$ – вектор $(kx_1; kx_2; \dots; kx_n)$

$k\overline{a} = \overline{a}k$;

$\lambda k\overline{a} = k\lambda\overline{a} = \overline{a}k\lambda = \overline{a}\lambda k = k\overline{a}\lambda$.

2) Додавання векторів.

$\overline{a}(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\overline{b}(y_1, y_2, ..., y_n)$

$(\overline{a} + \overline{b} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$

Система *n*-мірних векторів називається *лінійно незалежною* якщо її лінійна комбінація $f = \alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + ... + \alpha_n\overline{a_n}$ дорівнює нулю тільки при умові, якщо усі $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ – дійсні числа, перетворюються в нуль, тобто $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, і називається *лінійно залежною*, якщо принаймні одне із $\alpha_i \neq 0$.

Зауважимо, що максимальна система лінійно незалежних *n*-мірних векторів складається з *n* векторів. Якщо до системи з *n* векторів приєднати принаймні один вектор, то ця система буде лінійно залежною.

Максимальна система лінійно незалежних векторів називається *базисом*.

Наприклад, одиничні вектори (довжина яких дорівнює одиниці) $\overline{e_1}(1,0,0)$, $\overline{e_2}(0,1,0)$, $\overline{e_3}(0,0,1)$ утворюють базис в просторі R^3. Будь-які вектори простору можна однозначно розкласти по базису. Коефіцієнти розкладу будуть визначати координати вектора в даному базисі.

Приклад

Довести, що вектори $\overline{a_1}(-1;3;5)$, $\overline{a_2}(3;1;3)$, $\overline{a_3}(5;3;1)$ утворюють базис та розкласти вектор $\overline{b}(1,2,-3)$ по цьому базису.

Розв'язання:

Складемо лінійну комбінацію векторів і прирівняємо її до нуля: $\alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + \alpha_3\overline{a_3} = 0$.

$$\begin{array}{rl} & \alpha_1\overline{a_1}(-\alpha_1; 3\alpha_1; 5\alpha_1) \\ + & \alpha_2\overline{a_2}(3\alpha_2; 1\alpha_2; 3\alpha_2) \\ & \underline{\alpha_3\overline{a_3}(5\alpha_3; 3\alpha_3; -\alpha_3)} \\ & \overline{0}\ (\ 0;\ \ 0;\ \ 0). \end{array}$$

Отримаємо систему: $\begin{cases} -\overline{a_1}+3\overline{a_2}+5\overline{a_3}=0 \\ 3\overline{a_1}+\overline{a_2}+3\overline{a_3}=0 \\ 5\overline{a_1}+3\overline{a_2}-\overline{a_3}=0 \end{cases}$.

Так як $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 84 \neq 0$, то за правилом Крамера система має один нульовий розв'язок (бо є однорідною) $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. А отже, система векторів $\overline{a_1};\overline{a_2};\overline{a_3}$ – лінійно-незалежна і утворює базис.

Розкладаємо вектор $\overline{b}$ у цьом базисі, тобто запишемо його у виді:
$\overline{b}=x_1\overline{a_1}+x_2\overline{a_2}+x_3\overline{a_3}$

$$
\begin{array}{l}
x_1\overline{a_1}(-x_1;3x_1;5x_1)\,; \\
+\; x_2\overline{a_2}(3x_2;1x_2;3x_2)\,; \\
\underline{x_3\overline{a_3}(5x_3;3x_3;-x_3)\,;} \\
\overline{b}\;(1;2;-3).
\end{array}
$$

Одержимо систему: $\begin{cases} -x_1+3x_2+5x_3=1 \\ 3x_1+x_2+3x_3=2 \\ 5x_1+3x_2-x_3=-3 \end{cases}$, розв'язавши яку за правилом Крамера ($\Delta=84; \Delta_1=14, \Delta_2=-84, \Delta_3=70$), отримаємо розв'язок: $x_1=\frac{1}{6}; \quad x_2=-1; \quad x_3=\frac{5}{7}$.

Відповідь: $\overline{b}=\frac{1}{6}\overline{a_1}-\overline{a_2}+\frac{5}{7}\overline{a_3}$.

2.2. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі

Нехай нам дано матрицю A: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Рядки і стовпці матриці можна розглядати як вектори.

Число лінійно незалежних рядків або стовпців матриці називається *рангом матриці* (r_A).

Інше означення: максимальний порядок відмінного від нуля мінора матриці A називається *рангом* цієї *матриці*.

Правила обчислення рангу матриці

1) Максимальний порядок так званого „облямовуючого" мінору матриці дорівнює рангу цієї матриці.

Нехай $a_{11}\neq 0$, тоді, якщо $M_1=a_{11}\neq 0$ і $M_2\neq 0,..., M_k\neq 0$, а $M_{k+1}=0$, то ранг $r_A=k$.

2) Зведення до трикутного виду матриці A. Тоді число ненульових рядків матриці дорівнює її рангу.

Теорема Кронекера-Капеллі.

> *Якщо ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці, то така система є сумісною; якщо ж ранг матриці не дорівнює рангу розширеної матриці, то така система є несумісною.*

Тобто, якщо ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює числу невідомих, то система сумісна і визначена, якщо ж ранг менше числа невідомих, то система сумісна невизначена (має безліч розв'язків).

Приклад

Довести, або спростувати сумісність системи:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3 \end{cases}.$$

Розв'язання:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ -2 & 3 & 7 & -5 & 8 & 3 \end{array}\right)^{(-3)\cdot 2} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & -8 & 4 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right)$$

$\sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 9 & 3 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & 6 & 5 \end{array}\right)_{2\cdot(3)} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

$r_A = 3$.

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{– розширена матриця.}$$

$r_{\overline{A}} = 4$.

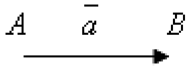
Порівнюючи ранги, робимо висновок, що система рівнянь несумісна.

Відповідь: система не має розв'язку.

2.3. Геометричні вектори. Дії над ними

Вектором називається напрямлений відрізок.

Вектори визначаються своїм напрямом і довжиною.



$|\bar{a}| = |\overline{AB}|$ – довжина вектора, $\bar{a} = \overline{AB}$

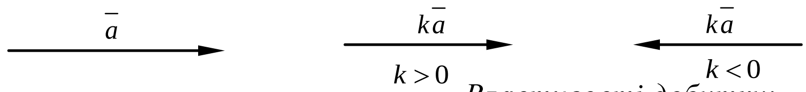
$\bar{0}$ – *вектор* – це вектор, довжина якого дорівнює нулю.

Два ненульові вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих (позначаються: $\bar{a} \parallel \bar{b}$).

Дії над векторами

1) Множення вектора на число.

Добутком ненульового вектора на число називається вектор, довжина якого збільшена в k раз; напрям якого залишається тим же, якщо k додатнє і протилежним за напрямком, якщо k – від'ємне.



Властивості добутку:

- $k\bar{a} = \bar{a}k$;
- $k\lambda\bar{a} = \lambda k\bar{a} = k\bar{a}\lambda = \lambda\bar{a}k$.

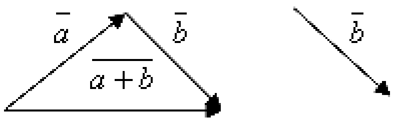
Кутом між ненульовими векторами називається менший кут між ними, якщо вони зведені до спільного початку. Кут між векторами позначають $(\widehat{\bar{a}\,;\bar{b}}) = \varphi$.

Якщо $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $\bar{b} = k\bar{a}$.

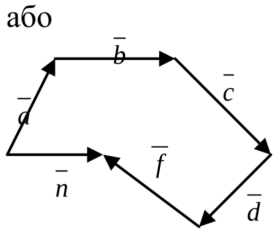
2) Додавання векторів.

Сумою двох векторів називається результуючий вектор, початок якого співпадає з початком першого, а кінець з кінцем останнього, якщо вони побудовані послідовно.

Наприклад,

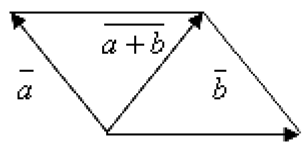


або



причому $\bar{n} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} + \bar{f}$.

Для знаходження суми двох векторів можна скористатися правилом паралелограма:

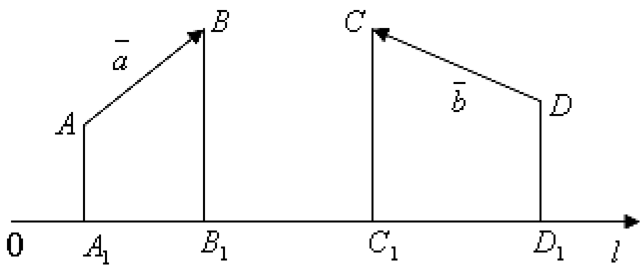


Сумою двох векторів є вектор, початок якого міститься в початку двох векторів і співпадає з діагоналлю паралелограма, побудованою на цих векторах як на сторонах.

Властивості суми:

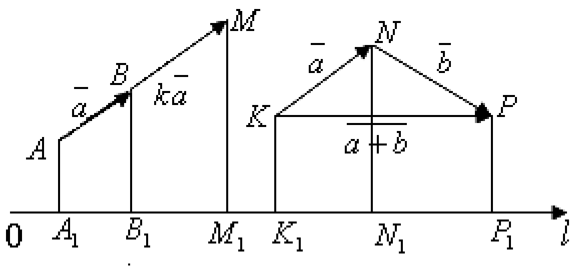
1) $\overline{a+b} = \overline{b+a}$,
2) $k(\overline{a} + \overline{b}) = k\overline{a} + k\overline{b}$,
3) $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$.

Проекція вектора на вісь. Властивості проекцій



$$np_{Ol}\overline{a} = |A_1B_1|$$
$$np_{Ol}\overline{b} = -|C_1D_1|$$

Проекцією вектора на вісь називають довжину відрізка, що сполучає проекції початку і кінця цього вектора на вісь, взяту зі знаком “+”, якщо вектор $\overline{A_1B_1}$ і вісь напрямлені в одну сторону і зі знаком “–”, якщо вектор $\overline{A_1B_1}$ і вісь напрямлені в різні сторони.

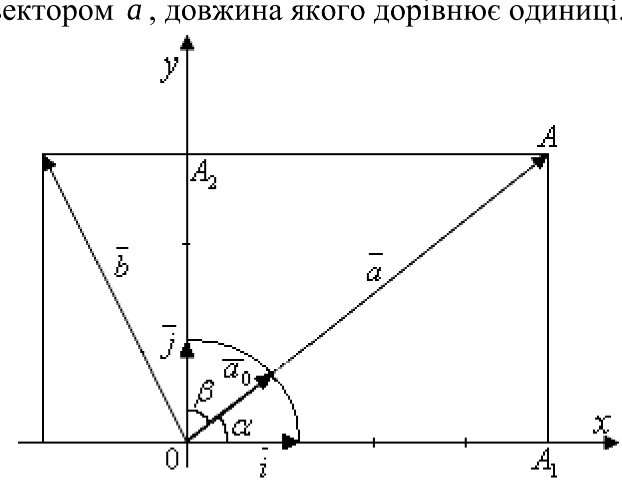


Властивості проекції:

1) $np_{Ol}k\overline{a} = k \cdot np_{Ol}\overline{a}$;
2) $np_{Ol}(\overline{a} + \overline{b}) = np_{Ol}\overline{a} + np_{Ol}\overline{b}$.

Дії, які виконуються з векторами, виконуються з їх проекціями.

Одиничним вектором ненульового вектора $\overline{a}$ називається вектор, співнапрямлений з вектором $\overline{a}$, довжина якого дорівнює одиниці.



Одиничні вектори позначають: $\overline{a_0}$ – одиничний вектор вектора $\overline{a}$, $\overline{a_0}$; $\overline{e}$, $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$,…. Їх називають ще *ортами*.

Розглянемо одиничні вектори, співнапрямлені з координатними осями *Ox* та *Oy* і позначимо їх $\overline{i}$ та $\overline{j}$, і вектор $\overline{a}$, відкладений від початку координат.

Позначимо вектори на осях координат відповідно $\bar{i}(1;0)$ і $\bar{j}(0;1)$.

Так як $пр_{Ox}\bar{a} = x$, $пр_{Oy}\bar{a} = y$, то

$\overline{OA_1} = x \cdot \bar{i}$ і $\overline{OA_2} = y \cdot \bar{j}$, $\overline{OA} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j}$.

$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – *довжина вектора*, або *модуль вектора* $\bar{a}$.

Проекції вектора на координатні осі, тобто x і y називають *координатами вектора*.

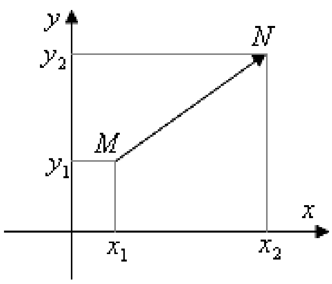
Тоді $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j}$. Вживаються ще й такі записи: $\bar{a} = \{x; y\}$, $\bar{a}(x; y)$.

Знайдемо координати одиничного вектора $\overline{a_0}$, вектора $\bar{a}$,:

$$\overline{a_0} = \frac{1}{\left|\bar{a}\right|} \cdot \bar{a} = \frac{x_i + y_j}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\bar{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\bar{j},$$

$$\overline{a_0}\left(\frac{x}{\left|\bar{a}\right|}; \frac{y}{\left|\bar{b}\right|}\right).$$

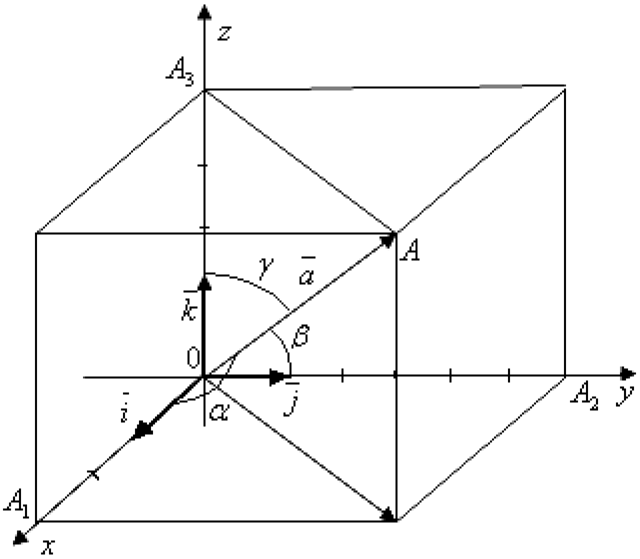
З іншого боку $\overline{a_0}(\cos\alpha; \cos\beta)$, де $\cos\alpha$ і $\cos\beta$ називаються *напрямними косинусами вектора* $\bar{a}$, причому $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$.



Нехай нам дано точки $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$, тоді координати вектора $\overline{MN}$ будуть $\overline{MN}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, а його довжина знаходиться за формулою:

$$\left|\overline{MN}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Розглянемо вектор $\bar{a}$, початок, якого співпадає з початком просторової системи координат. $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – одиничні вектори, співнапрямлені з осями координат.



Позначимо координати вектора $\bar{a}$ $\bar{a}(x; y; z) = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

За аналогією з двомірними векторами, одержимо:

$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – довжина вектора;

$$\overline{a_0}\left(\frac{x}{\left|\bar{a}\right|}; \frac{y}{\left|\bar{a}\right|}; \frac{z}{\left|\bar{a}\right|}\right) \text{ або}$$

$\overline{a_0}(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ – орт вектора $\bar{a}$.

Причому, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ і $\left|\overline{a_0}\right| = 1$.

Якщо $M(x_1; y_1; z_1)$, $N(x_2; y_2; z_2)$, то вектор $\overline{MN}$ визначається, як $\overline{MN}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

А його довжина, як
$\left|\overline{MN}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Нехай нам дано два колінеарні вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$: $\bar{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\bar{b}(x_2; y_2; z_2)$. Тоді умовою колінеарності цих векторів є пропорційність їх координат.

Тобто, $\bar{a} \parallel \bar{b}$ тоді і тільки тоді, коли $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$.

Скалярний добуток двох векторів

Скалярний добуток двох ненульових векторів – це число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними, тобто:

$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\left(\bar{a} \hat{;} \bar{b}\right)$; якщо $\left(\bar{a} \hat{;} \bar{b}\right) = \varphi$, або $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi$.

Властивості скалярного добутку:

1) $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$,
2) $(k\bar{a})\bar{b} = \bar{a} \cdot k \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot k$,
3) $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$,
4) $\bar{a}\bar{b} = 0$, якщо $\bar{a} \perp \bar{b}$.

Нехай дано, що $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ і $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$.

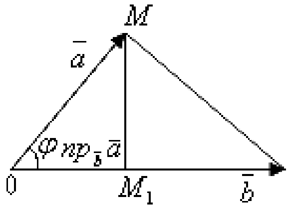
Доведемо, що $\bar{a}\bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, тобто, що *скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків однойменних координат.*

$\bar{a}\bar{b} = (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k})(x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}) = x_1x_2\bar{i}^2 + y_1y_2\bar{j}\bar{i} + z_1x_2\bar{k}\bar{i} + x_1y_2\bar{i}\bar{j} + y_1y\ \bar{j}^2 + z_1y_2\bar{k}\bar{j} +$
$+ x_1z_2\bar{i}\bar{k} + y_1z_2\bar{j}\bar{k} + z_1z_2\bar{k}^2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$

так як $\bar{i} \perp \bar{j}$, $\bar{i} \perp \bar{k}$ і $\bar{k} \perp \bar{j}$ і $\bar{i}\bar{j} = 0$, $\bar{k}\bar{j} = 0$, $\bar{i}\bar{k} = 0$, $\bar{i}^2 = |\bar{i}|^2 = 1$, $\bar{j}^2 = |\bar{j}|^2 = 1$, $\bar{k}^2 = |\bar{k}|^2 = 1$.

Таким чином доведено, що $\bar{a}\bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Нехай нам дано вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$.



Запишемо $np_{\bar{b}}\bar{a}$ та $np_{\bar{a}}\bar{b}$.

$np_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi$; $np_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\cos\varphi$.

Тоді $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|np_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|np_{\bar{b}}\bar{a}$.

Приклади

1) Нехай дано, що $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$ і $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Знайти:

a) $\bar{a}\bar{b}$;
b) $(2\bar{a} + \bar{b})(\bar{b} - 3\bar{a})$;
c) $|2\bar{a} + \bar{b}|$.

Розв'язання:

a) $\bar{a}\bar{b} = 2\cdot 3\cos\dfrac{2\pi}{3} = 6\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -3$;

b) $\begin{array}{l}(2\bar{a}+\bar{b})(\bar{b}-3\bar{a}) = 2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2-6\bar{a}^2-3\bar{b}\bar{a} = \\ = -\bar{a}\bar{b}+|\bar{b}|^2-6|\bar{a}|^2 = 3+3^2-6-4 = 3+9-24 = -12\end{array}$;

c) $\begin{array}{l}|2\bar{a}+\bar{b}| = \left(2\bar{a}+\bar{b}\right)^2 = 4\bar{a}^2+4\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2 = 4|\bar{a}|^2+4|\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi+|\bar{b}|^2 = \\ = 4\cdot 4+4\cdot 2\cdot 3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+3 = 13\end{array}$.

2. Дано вектори $\bar{a}(2;-3;4)$, $\bar{b}(-3;4;5)$. Знайти:

a) $\bar{a}\bar{b}$;

b) $(2\bar{a}+\bar{b})(\bar{b}-3\bar{a})$;

c) $\left|\left(2\bar{a}+\bar{b}\right)\right|$.

Розв'язання:

a) $\bar{a}\bar{b} = -6-12+20 = 2$;

b) $(2\bar{a}+\bar{b}) = \bar{m}$, $(\bar{b}-3\bar{a}) = \bar{n}$

$$+\begin{array}{l}2\cdot\bar{a}(4;-6;8)\\ \bar{b}(-3;4;5)\\ \hline \bar{m}(1;-2;13)\end{array}; \qquad -\begin{array}{l}\bar{b}(-3;4;5)\\ 3\cdot\bar{a}(6;-9;12)\\ \hline \bar{n}(-9;13;-7)\end{array};$$

Отже, $\bar{m}\bar{n} = -9-26-91 = -126$.

c) $|\bar{m}| = \sqrt{1+4+169} = \sqrt{174}$.

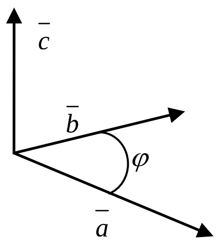
3) Дано $\bar{a}(2;-3;4)$. Знайти одиничний вектор вектора $\bar{a}$ (орт $\bar{a}$).

Розв'язання:

Позначимо одиничний вектор вектора $\bar{a}$, як $\overline{a_0}$.

$\overline{a_0} = \dfrac{1}{|\bar{a}|}\bar{a} = \dfrac{x}{|\bar{a}|}\bar{i}+\dfrac{y}{|\bar{a}|}\bar{j}+\dfrac{z}{|\bar{a}|}\bar{k}$, тоді $|\bar{a}| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$, а $\overline{a_0}\left(\dfrac{2}{\sqrt{29}};\dfrac{-3}{\sqrt{29}};\dfrac{4}{\sqrt{29}}\right)$.

Векторний добуток двох векторів



Вектор $\bar{c}$ називається *векторним добутком* двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо він задовольняє умови:

1) $\bar{c}\perp\bar{a}$; $\bar{c}\perp\bar{b}$;

2) $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi = S$, де $\varphi = \left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$;

3) З кінця $\bar{c}$ має бути видно найближчий поворот від $\bar{a}$ до $\bar{b}$ проти ходу годинникової стрілки.

Властивості векторного добутку:

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$.

2. Якщо $\bar{a} \times \bar{b} = 0$, то $\bar{a} \parallel \bar{b}$ (бо $\sin 0^\circ = 0$) і навпаки, якщо $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $\bar{a} \times \bar{b} = 0$.

3. $\alpha \bar{a} \times \bar{b} = \alpha\left(\bar{a} \times \bar{b}\right)$.

4. $\bar{a} \times \left(\bar{b} \times \bar{c}\right) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$.

Множення ортів

$\bar{i} \times \bar{i} = 0$, $\bar{j} \times \bar{j} = 0$, $\bar{k} \times \bar{k} = 0$, $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$, $\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}$, $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$, $\bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}$, $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$, $\bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}$.

Доведемо, що векторний добуток $\bar{a} \times \bar{b}$, можна обчислити за формулою:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \bar{k},$$ де $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$,

$\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$.

Для цього перемножимо $\bar{a} \times \bar{b} = (x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k}) \times (x_2 \bar{i} + y_2 \bar{j} + z_2 \bar{k}) =$

$$= x_1 x_2\, \bar{i} \times \bar{i} + y_1 x_2\, \bar{j} \times \bar{i} + z_1 x_2\, \bar{k} \times \bar{i} + x_1 y_2\, \bar{i} \times \bar{j} + y_1 y_2\, \bar{j} \times \bar{j} + z_1 y_2\, \bar{k} \times \bar{j} + x_1 z_2\, \bar{i} \times \bar{k} +$$

$$+ y_1 z_2\, \bar{j} \times \bar{k} + z_1 z_2\, \bar{k} \times \bar{k} = -x_2 y_1 \bar{k} + z_1 x_2 \bar{j} + x_1 y_2 \bar{k} - z_1 y_2 \bar{i} - x_1 z_2 \bar{j} + y_1 z_2 \bar{i} =$$

$$= (y_1 z_2 - z_1 y_2)\, \bar{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\, \bar{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\, \bar{k} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \bar{k}.$$

Приклади

1) Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо $\bar{a} = 2\bar{p} + 3\bar{r}$, $\bar{b} = 3\bar{p} - \bar{r}$, де $\left|\bar{p}\right| = 3$, $\left|\bar{r}\right| = 4$, кут між векторами $\bar{p}$ і $\bar{r}$ дорівнює π/3.

Розв'язання:

Як відомо, площа паралелограма S= $\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right| \sin\varphi$, це φ- кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Знаходимо: $\bar{a} \times \bar{b} = (2\bar{p} + 3\bar{r}) \times (3\bar{p} - \bar{r}) = 2\bar{p} \times 3\bar{p} + 3\bar{r} \times 3\bar{p} - 2\bar{p} \times \bar{r} - 3\bar{r} \times \bar{r} =$

$= 0 + 9\bar{r} \times \bar{p} + 2\bar{r} \times \bar{p} - 0 = 11\bar{r} \times \bar{p}$;

$$\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = 11\left|\bar{r} \times \bar{p}\right| = 11\left|\bar{r}\right|\left|\bar{p}\right| \sin\left(\widehat{\bar{p}, \bar{r}}\right) = 11 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 66\sqrt{3}.$$

2) Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо $\bar{a} = 2\bar{p} + 3\bar{r}$, $\bar{b} = 3\bar{p} - \bar{r}$, де $\bar{p} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{r} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$.

Розв’язання:

Площа паралелограма S= $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$.

$$\begin{array}{ll} + \begin{array}{l} 2\bar{p} = (4, -6, 2) \\ \underline{3\bar{r} = (9, 6, -9)} \\ \bar{a} = (13, 0, -7); \end{array} & - \begin{array}{l} 3\bar{p} = (6, -9, 3) \\ \underline{\bar{r} = (3, 2, -3)} \\ \bar{b} = (3, -11, 6); \end{array} \end{array}$$

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 13 & 0 & -7 \\ 3 & -11 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -7 \\ -11 & 6 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 13 & -7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 13 & 0 \\ 3 & -11 \end{vmatrix}\bar{k} = 77\bar{i} - 99\bar{j} - 143\bar{k} =$$

$=11(7\bar{i} - 9\bar{j} - 13\bar{k});$

S= $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = 11\sqrt{49+81+169} = 11\sqrt{299}$.

3) Знайти орт $\bar{a}_0$ вектора $\bar{a}$, перпендикулярного до векторів $\bar{b}$ = (2, –3,4) і $\bar{c}$ = (3, –1, 2), якщо $\left|\bar{a}\right| = 12$.

Розв’язання:

I спосіб.

Якщо $\bar{a} \perp \bar{b}$; $\bar{a} \perp \bar{c}$ то $\begin{cases} \bar{a}\,\bar{b} = 0 \\ \bar{a}\,\bar{c} = 0 \\ \left|\bar{a}\right| = 12 \end{cases}$.

Нехай $\bar{a} = (x, y, z)$. Тоді $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 144 \end{cases}$.

Розв’язавши дану систему, отримаємо: $x = \mp\dfrac{24}{\sqrt{117}}$, $y = \pm\dfrac{96}{\sqrt{117}}$, $z = \pm\dfrac{84}{\sqrt{117}}$.

Отже $\bar{a} = (\mp\dfrac{24}{\sqrt{117}}, \pm\dfrac{96}{\sqrt{117}}, \pm\dfrac{84}{\sqrt{117}});$

Так як $\bar{a}_0 = \dfrac{\bar{a}}{\left|\bar{a}\right|}$, то $\bar{a}_0 = (\mp\dfrac{2}{\sqrt{117}}, \pm\dfrac{8}{\sqrt{117}}, \pm\dfrac{7}{\sqrt{117}})$.

II спосіб.

Знайдемо векторний добуток $\bar{b}\times\bar{c}$:

$$\bar{b}\times\bar{c}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=-2\,\bar{i}+8\,\bar{j}+7\,\bar{k}.$$

Позначимо $\bar{a}_1=(-2,8,7)$, $\bar{a}=(x,y,z)$. З того, що $\bar{a}_1\|\bar{a}$ випливає: $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{8}=\dfrac{z}{7}=k$.

З останньої рівності: $x=-2k$, $y=8k$, $z=7k$.

Оскільки $\left|\bar{a}\right|=12$, то $4k^2+64k^2+49k^2=144$. Звідси $k=\pm\dfrac{12}{\sqrt{117}}$.

$\bar{a}=(\mp\dfrac{24}{\sqrt{117}},\pm\dfrac{96}{\sqrt{117}},\pm\dfrac{84}{\sqrt{117}})$. Отже, $\bar{a}_0=(\mp\dfrac{2}{\sqrt{117}},\pm\dfrac{8}{\sqrt{117}},\pm\dfrac{7}{\sqrt{117}})$.

4) Відомі координати вершин трикутника *ABC*: *A= (–2, 3, 4), B= (1, –3, 1), C= (2, –1, 0)*. Знайти площу трикутника і довжину висоти h_B, опущеної з вершини *B*.

Розв’язання:

Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$.

$\overline{AB}=(3,-6,-3)$; $\overline{AC}=(4,-4,-4)$.

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & -6 & -3\\ 4 & -4 & -4\end{vmatrix}=12(\bar{i}+0\,\bar{j}+\bar{k});$$

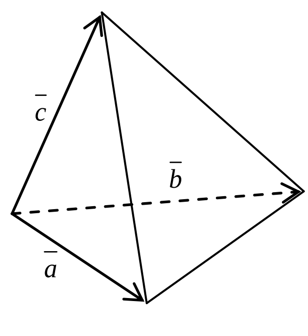
$$S_{ABC}=\frac{1}{2}12\sqrt{2}=6\sqrt{2}.$$

З іншого боку $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overline{AC}\right|h_B$

$\left|\overline{AC}\right|=4\sqrt{3}$, тоді $h_B=\dfrac{2S_{ABC}}{\left|\overline{AC}\right|}=\dfrac{12\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}=\sqrt{6}$.

Мішаний (змішаний) добуток векторів

Мішаним добутком трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ називається число, яке визначається як скалярний добуток вектора $\bar{a}$ на векторний добуток $\bar{b}\times\bar{c}$, і позначається $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})=(\bar{a}\times\bar{b})\,\bar{c}$.



Три вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині.

Модуль мішаного добутку $\overline{abc}$ дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, зведених до спільного початку: $V=\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right|$, а об’єм тетраедра, побудованого на некомпланарних векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, визначається формулою: $V=\frac{1}{6}\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right|$.

Доведемо, що $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$, де елементи рядків є координатами відповідно векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$.

Знайдемо $\bar{b}\times\bar{c}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\bar{k}$;

$$\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})=x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}-y_1\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}+z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Умова компланарності трьох векторів: три вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ компланарні, якщо їх мішаний добуток рівний нулю, тобто $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=0$.

Приклади

1) Знайти об’єм тетраедра $A_1A_2A_3A_4$ і висоту, опущену з вершини A_4, якщо $A_1=(1,-2,3)$, $A_2=(3,4,5)$, $A_3=(0,-1,2)$, $A_4=(5,2,1)$.

Розв’язання:

Побудуємо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ наступним чином:
$\bar{a}=\overline{A_1A_2}=(2,6,2)$; $\bar{b}=\overline{A_1A_3}=(-1,1,-1)$; $\bar{c}=\overline{A_1A_4}=(4,4,-2)$.
Використовуючи геометричний зміст змішаного добутку, отримаємо:

$$V_{A_1A_2A_3A_4}=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}=\pm\frac{2}{3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -3 \end{vmatrix}=\pm\frac{8}{3}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}=8 \text{ (куб. одиниць).}$$

З іншого боку: $V_{A_1A_2A_3A_4}=\frac{1}{3}S_{A_1A_2A_3}h_{A_4}$.

$S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$;

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=8(-\bar{i}+\bar{k});$$

Отже $S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}8\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

Звідси $h_{A_4} = \dfrac{3V_{A_1A_2A_3A_4}}{S_{A_1A_2A_3}} = \dfrac{3\cdot 8}{4\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$.

6) Довести або спростувати, що чотирикутник *ABCD* є плоским, якщо *A(2,4,–5), B(–6,–12,3), C(1,2,5), D(–4,–8,9).*

Доведення:

Якщо чотири точки лежать в одній площині, то вектори $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ мають бути компланарними, тобто $\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD} = 0$.

$\overline{AB} = (-8,-16,8)$, $\overline{AC} = (-1,-2,10)$, $\overline{AD} = (-6,-12,14)$. Знаходимо:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD} = \begin{vmatrix} -8 & -16 & 8 \\ -1 & -2 & 10 \\ -6 & -12 & 14 \end{vmatrix} = 16\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 10 \\ -3 & -6 & 7 \end{vmatrix} = 16\begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, чотирикутник плоский.

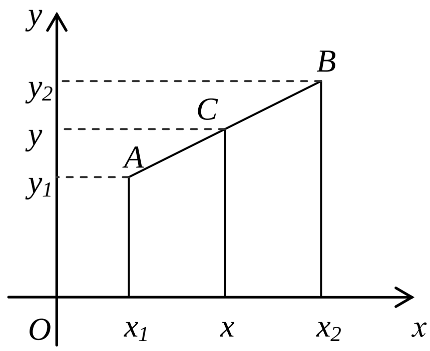
3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

3.1. Прямокутна декартова система координат на площині. Відстань між точками. Поділ відрізка у даному відношенні. Площа трикутника

Нехай задано дві точки на площині $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$. Знайдемо довжину відрізка AB (модуль вектора $\overline{AB}$).

Розглянемо вектор $\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Тоді $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Розглянемо точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ і $C(x, y)$. Знайти координати точки С, якщо $\dfrac{AC}{CB} = \lambda$.



$$\frac{AC}{CB} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda;$$

$$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x;$$

$$x + \lambda x = \lambda x_2 + x_1;$$

$$x(1+\lambda) = x_1 + \lambda x_2;$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}.$$

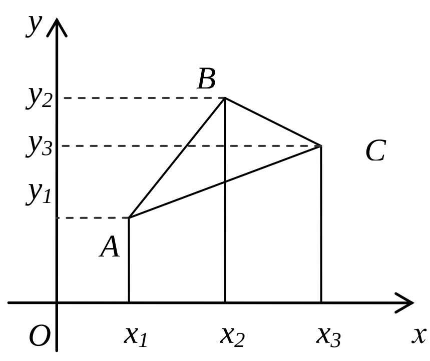
Аналогічно $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$.

Отже, $\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}$

Якщо відрізок AB ділиться точкою С навпіл, то $\dfrac{AC}{CB} = 1$. Тоді *координати середини відрізка* визначаються наступними формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Нехай трикутник ABC заданий координатами своїх вершин $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ і $C(x_3, y_3)$. Знайдемо площу S трикутника.



Розглянемо координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, вважаючи, що вони задані у просторі. Тоді маємо $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; 0)$, $\overline{AC} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; 0)$.

Відомо, що $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|$.

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\bar{k}=$$

$$=\bar{k}((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1));$$

Тоді одержимо:

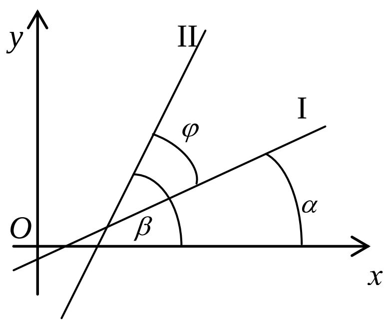
$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\bar{k}((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))\right|, \text{ або}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|, \text{ або } S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}.$$

3.2. Пряма на площині.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Кут між двома прямими. Умова паралельності та перпендикулярності прямих

Рівняння *прямої з кутовим коефіцієнтом* має вигляд: $y=kx+b$, де k - кутовий коефіцієнт прямої, $k=tg\alpha$. α -це кут, який утворює пряма з додатнім напрямом осі Ox, а b – це відрізок, який відтинає пряма на осі Oy.



Якщо $b=0$, то пряма проходить через початок координат ($y=kx$).

Знайдемо кут між двома прямими, які задані своїми рівняннями $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$, де $k_1=tg\alpha$, $k_2=tg\beta$.

Позначимо через φ *кут між прямими* y_1 і y_2.

Тоді $tg\varphi=tg(\beta-\alpha)=\dfrac{tg\beta-tg\alpha}{1+tg\alpha tg\beta}$ або $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

Якщо $k_1=k_2$, то прямі паралельні.

Якщо $1+k_1k_2$=0, то прямі перпендикулярні.

Загальне рівняння прямої

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(A,B)$. Позначимо через $M(x,y)$ довільну точку прямої.

Вектор $\overline{M_0M}$ матиме координати: $\overline{M_0M}=(x-x_0,y-y_0)$. Вектор $\overline{N}=(A,B)$ перпендикулярний вектору $\overline{M_0M}=(x-x_0,y-y_0)$, отже скалярний добуток $\overline{N}\cdot\overline{M_0M}$ =0. З останньої рівності отримаємо:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0;$$

$$Ax+By-Ax_0-By_0=0.$$

Позначивши $C=-Ax_0-By_0$, *отримаємо загальне рівняння прямої:* $Ax+By+C=0$.

Причому $k=-\dfrac{A}{B}$.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки.
Рівняння жмутка (пучка) прямих

Нехай маємо точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Запишемо рівняння прямої, що проходить через ці точки.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка шуканої прямої.

Розглянемо вектори $\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$ і $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Дані вектори колінеарні. З ознаки колінеарності отримаємо *рівняння прямої, що проходить через дві точки*:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

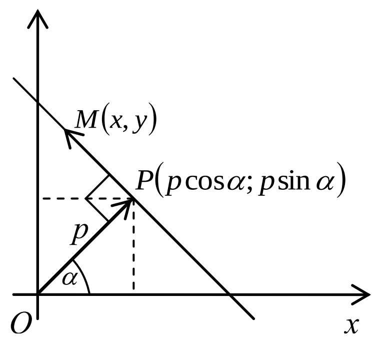
Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом $\bar{k}$. Використаємо попереднє рівняння $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Врахувавши, що $k = -\frac{A}{B}$ одержимо:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Останнє рівняння є рівнянням *жмутка прямих*.

Нормальне рівняння прямої.
Відстань від точки до прямої

Знайдемо рівняння прямої, якщо відомо довжину перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю пряму, і величину кута α, який утворює цей перпендикуляр з додатнім напрямом осі *Ox*.



Нехай p – довжина перпендикуляра *OP*, $M(x, y)$ – довільна (біжуча) точка шуканої прямої, P($p\cos\alpha, p\sin\alpha$)- основа перпендикуляра.

Розглянемо вектори $\overline{OP} = (p\cos\alpha, p\sin\alpha)$ і $\overline{PM} = (x - p\cos\alpha, y - p\sin\alpha)$. Ці вектори перпендикулярні, отже $\overline{OP} \cdot \overline{PM} = 0$. Звідси отримаємо:

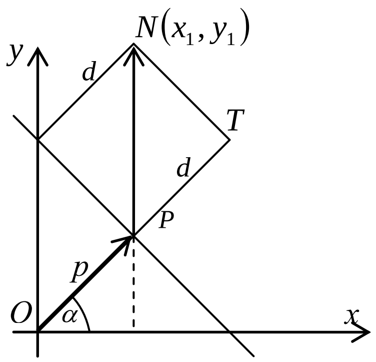
$$p\cos\alpha(x - p\cos\alpha) + p\sin\alpha(y - p\sin\alpha) = 0;$$

$$x\cos\alpha - p\cos^2\alpha + y\sin\alpha - p\sin^2\alpha = 0;$$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 0;$$

$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ – *нормальне рівняння прямої*.

Нехай нам потрібно знайти відстань від точки $N(x_1, y_1)$ до прямої, заданої своїм рівнянням.



З рисунка видно, що відстань від $N(x_1, y_1)$ до прямої рівна $d = |PT|$, де $PT = \left| np_{\overline{op}}\, \overline{PN} \right|$. $\overline{OP} = (p\cos\alpha, p\sin\alpha)$, $\overline{PN} = (x_1 - p\cos\alpha, y_1 - p\sin\alpha)$.

$$np_{\overline{op}}\, \overline{PN} = \frac{\overline{OP} \cdot \overline{PN}}{\left|\overline{OP}\right|}.$$

Знайдемо скалярний добуток:

$$\overline{OP}\cdot\overline{PN} = p\cos\alpha(x_1 - p\cos\alpha) + p\sin\alpha(y_1 - p\sin\alpha) =$$

$$= p(x_1\cos\alpha - p\cos^2\alpha + y_1\sin\alpha - p\sin^2\alpha) =$$

$$= p(x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p).$$

Тоді $d = |x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p|$ - відстань від точки до прямої.

Якщо відомо загальне рівняння прямої Ax+By+C=0, то нормальне рівняння прямої має вигляд: $\dfrac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$.

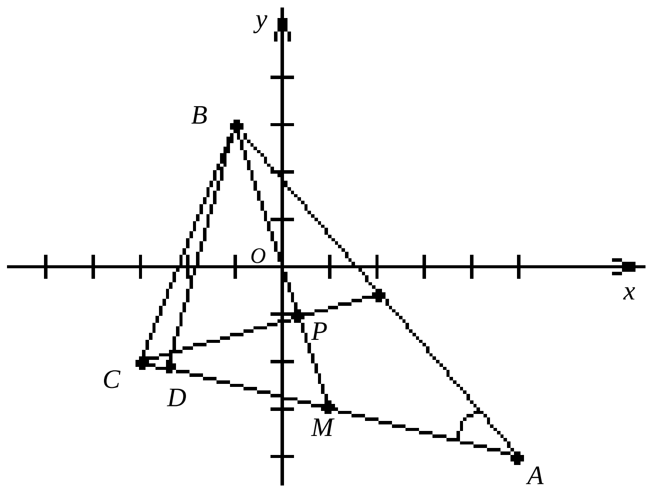
Знак перед коренем протилежний знаку С, а *відстань від точки* $N(x_1, y_1)$ *до прямої* обчислюється за формулою

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Задача на трикутник

Відомі вершини трикутника *A(5;–4), B(–1;3), C(–3;–2).* Знайти довжину сторони *AB*, рівняння сторони *AB*, довжину медіани ВМ та її рівняння, величину кута *BAC*, довжину висоти *BD* та її рівняння, координати точки *P* перетину медіан трикутника, площу трикутника *ABC*.

Розв'язання:



Довжина сторони *AB* обчислюється за формулою:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Підставивши задані в умові задачі значення, отримаємо:

$$|AB| = \sqrt{(-1-5)^2 + (3+4)^2} = \sqrt{85}.$$

Для знаходження рівняння прямої *AB* скористаємось рівнянням прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Отримаємо: $\dfrac{x-5}{-1-5} = \dfrac{y+4}{3+4}$ або

AB: $7x + 6y - 11 = 0$.

Позначимо середину сторони *AC* через $M(x_M; y_M)$.

Знайдемо координати точки *M*:

$$x_M = \frac{x_C + x_A}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1;$$

$$y_M = \frac{y_C + y_A}{2} = \frac{-2-4}{2} = -3.$$

Тоді, $|BM| = \sqrt{(-3+1)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{40}$ – довжина медіани *BM*.

Рівняння медіани *BM* знайдиться аналогічно. Одержимо *BM:* $y = -3x$.

Для того, щоб знайти кут $\angle BAC$, знайдемо кутові коефіцієнти k_{AB} і k_{AC}. З рівняння прямої *AB*, отримаємо $k_{AB} = -\dfrac{A}{B} = -\dfrac{7}{6}$.

Аналогічно як і рівняння прямої *AB*, знайдемо рівняння прямої *AC*: $x + 4y + 11 = 0$. З даного рівняння $k_{AC} = -\dfrac{A}{B} = -\dfrac{1}{4}$.

$$tg\angle BAC = \frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AC} \cdot k_{AB}} = \frac{-1/4 + 7/6}{1 + \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{22}{34}.$$

Знайдемо висоту BD за формулою віддалі від точки *B* до прямої *AC*:

$$d = |BD| = \frac{|x_B + 4y_B + 11|}{\sqrt{1 + 4^2}} = \frac{22}{\sqrt{17}}.$$

Для того щоб написати рівняння висоти *BD*, використаємо рівняння жмутка (рівняння прямої, що проходить через точку *B* перпендикулярно прямій *AC*):

$$y - y_B = k_{BD}(x - x_B).$$

З умови перпендикулярності двох прямих: $k_{BD} = -\dfrac{1}{k_{AC}}$, отже $k_{AC} = -\dfrac{1}{4}$, $k_{BD} = 4$.

Використавши рівняння прямої із відомими кутовим коефіцієнтом та однією точкою, отримаємо *BD* : $y - 3 = 4(x + 1)$.

Отже, *BD*: $y = 4x + 7$.

Для того щоб знайти координати точки P, використаємо формули поділу відрізка у відношенні λ. Відомо, що *BP:PM=2:1*, тобто $\lambda = 2$. Тоді використавши, що $x_P = \dfrac{x_B + \lambda x_M}{1 + \lambda}$, $y_P = \dfrac{y_B + \lambda y_M}{1 + \lambda}$, отримаємо: $x_P = \dfrac{-1 + 2 \cdot 1}{1 + 2} = \dfrac{1}{3}$, $y_P = \dfrac{3 + 2 \cdot (-1)}{1 + 2} = -1$.

Отже, т. $P\left(\dfrac{1}{3}; -1\right)$.

Площа ΔABC:

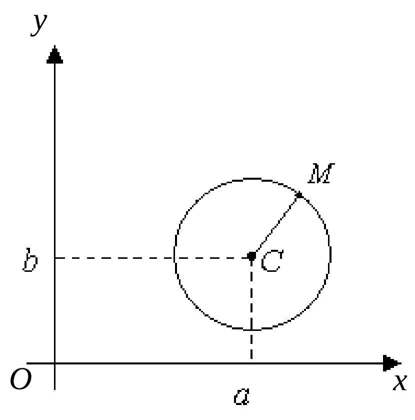
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(-1 - 5)(-2 + 4) - (-3 - 5)(3 + 4)\right| = \frac{1}{2}|-12 + 56| = 22.$$

3.3. Криві другого порядку

До кривих другого порядку належать коло, еліпс, гіпербола, парабола.

Коло – геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки, що називається центром кола.



Відстань від центра до будь-якої точки кола називається *радіусом.*

Позначимо центр кола $C(a, b)$, радіус – R, довільну точку кола – $M(x, y)$.

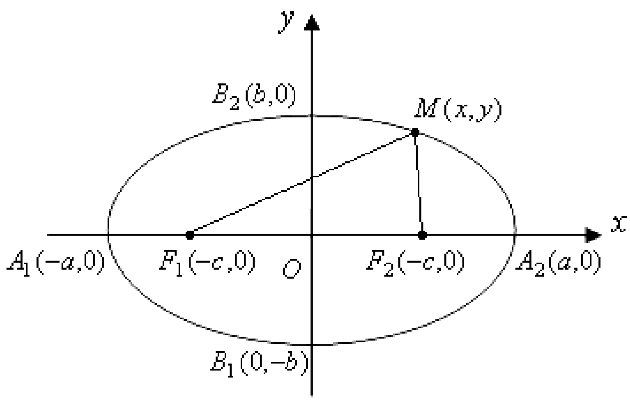
Тоді $|MC| = R$.

$|MC| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$.

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ *– рівняння кола з центром в точці* $C(a,b)$.

$x^2 + y^2 = R^2$ *– рівняння кола з центром в точці* $C(0,0)$.

Еліпс – геометричне місце точок, сума віддалей яких до двох даних точок (фокусів) є величина стала і дорівнює $2a$. Розташуємо фокуси F_1, F_2 на осі *ох* симетрично точці $O(0,0)$.



$|A_1A_2| = 2a$ – велика вісь, $|B_1B_2| = 2b$ – мала вісь.

$M(x,y)$ – довільна точка. За означенням еліпса $|MF_1| + |MF_2| = 2a$.

$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$;

$|MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$;

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$;

$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$

$a^2\left((x-c)^2 + y^2\right) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$;

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

Позначимо $a^2 - c^2 = b^2$, тоді

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \,\big|\, (:a^2b^2)$.

Таким чином отримано *рівняння еліпса*: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

.

Точки $A_1(-a;0)$; $A_2(a;0)$; $B_1(0;-b)$; $B_2(0;b)$ називають *вершинами еліпса*.

Ексцентриситетом еліпса називається відношення віддалі між фокусами до великої осі $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$.

Приклад

Знайти вершини і фокус еліпса, який описується рівнянням $9x^2 + 16y^2 = 144$.

Розв'язання:

$9x^2 + 16y^2 = 144 \,\big|\, (:144)$

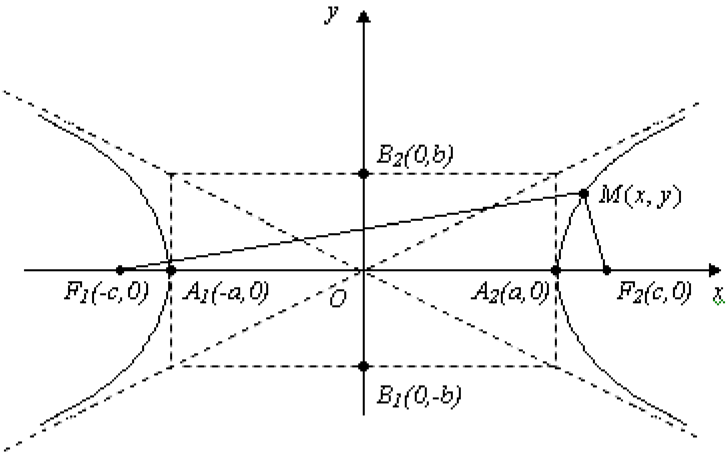
$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

a=4, b=3, $a^2 - c^2 = b^2$, $c^2 = 16 - 9 = 7$, $c = \sqrt{7}$.

$A_1(-4;0)$, $A_2(4;0)$, $B_1(0;-3)$, $B_2(0;3)$ – вершини еліпса.

$F_1(-\sqrt{7};0)$, $F_2(\sqrt{7};0)$ – фокуси еліпса.

Гіпербола – геометричне місце точок, різниця віддалей яких до двох даних точок, які називаються фокусами, є величина стала і дорівнює $2a$.



Нехай фокуси гіперболи розміщені на осі *Ox* симетрично початку координат.

$F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – *фокуси гіперболи.*

$|A_1A_2| = 2a$.

Точки $A_1(-a;0)$; $A_2(a;0)$; $B_1(0;-b)$; $B_2(0;b)$ – *вершини гіперболи*.

Рівняння асимптот: $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Асимптотою кривої називають таку пряму, що при віддаленні точок у нескінченність відстань між точками кривої та прямої прямує до нуля.

$M(x,y)$ – довільна точка. За означенням гіперболи $|MF_1| - |MF_2| = 2a$.

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\ ;\ |MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ ;$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a;$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2.$$

Позначивши $c^2 - a^2 = b^2$ отримаємо рівняння кривої $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Поділивши попереднє рівняння на a^2b^2 отримаємо канонічне рівняння гіперболи: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

A_1, A_2 – дійсні вершини гіперболи; $2a$ *– дійсна вісь*; *B_1, B_2 – уявні вершини гіперболи*, $2b$ *– уявна вісь*.

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$.

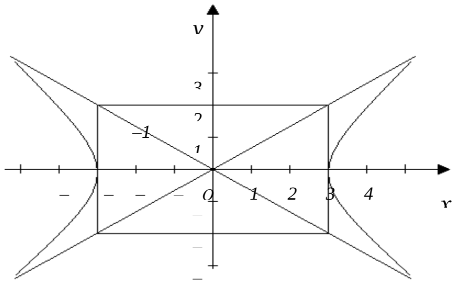
Гіпербола, задана рівнянням $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ є *спряженою* до даної гіперболи.

Приклад

Побудувати гіперболу, яка задана рівнянням $4x^2 - 9y^2 = 36$. Знайти її вершини і фокуси.

Розв’язання:

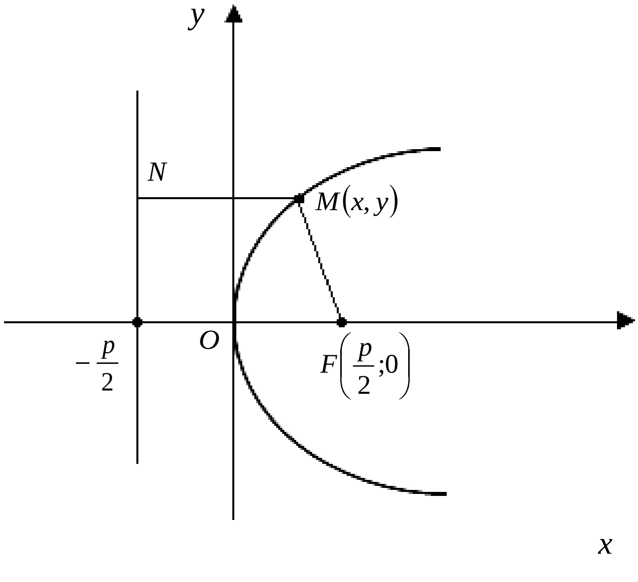
Розділимо рівняння $4x^2-9y^2=36$ на 36 і отримаємо канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$



Звідки a=3, b=2, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13}$.
$F_1=\left(-\sqrt{13},0\right)$, $F_2=\left(\sqrt{13},0\right)$ – фокуси гіперболи.
$A_1(-3;0)$; $A_2(3;0)$ – вершини гіперболи.
Ексцентриситет $\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{3}>1$.

Парабола – це геометричне місце точок рівновіддалених від даної точки (фокуса) та від даної прямої (директриси).

Знайдемо рівняння параболи, провівши вісь абсцис через фокус перпендикулярно до директриси і напрямленою від директриси до фокуса, а початок ординат помістимо посередині між фокусом та директрисою. Позначимо віддаль від фокуса до директриси буквою p.



Тоді координати фокуса $F\left(\frac{p}{2},0\right)$; а рівняння директриси: $x=-\frac{p}{2}$. Позначимо $N\left(-\frac{p}{2};y\right)$ довільну точку директриси. За означенням:

$$|MF|=|MN|,$$

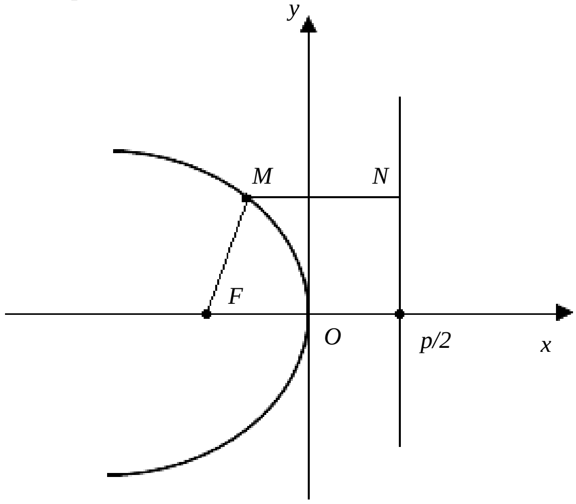
$$\left|\overline{MF}\right|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},$$

$$\left|\overline{MN}\right|=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+y^2},$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+y^2},\ x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}+y^2,$$

1. $y^2=2px$ – *канонічне рівняння параболи* розташованої в правій півплощині симетрично осі *Ox*.

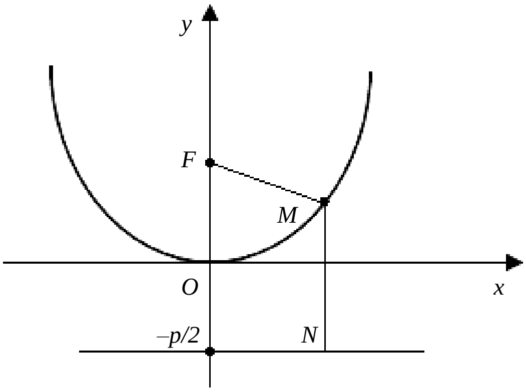
2. $y^2 = -2px$



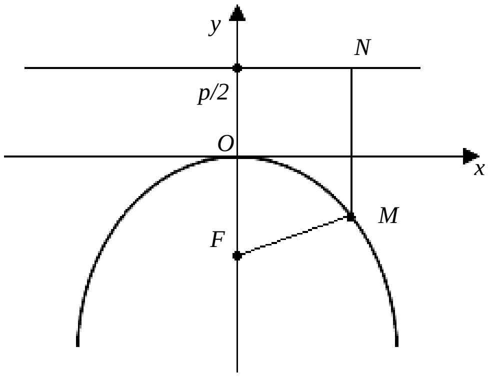
Фокус: $F\left(-\frac{p}{2},0\right)$.

Рівняння директриси: $x = \frac{p}{2}$.

3. $x^2 = 2py$



4. $x^2 = -2py$



Фокус: $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$;

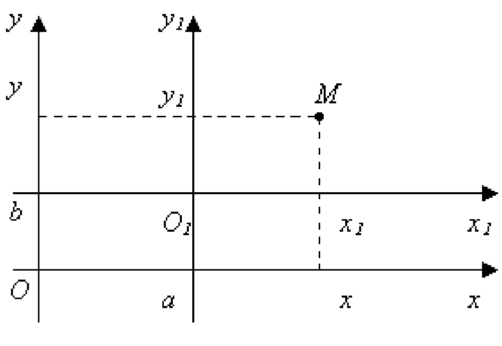
рівняння директриси: $y = -\frac{p}{2}$.

Фокус: $F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$;

рівняння директриси: $y = \frac{p}{2}$.

Перетворення координат

Рівняння виду $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ називають *загальним рівнянням кривої другого порядку*, якщо серед чисел A, B, C є відмінні від нуля.



Побудувати криву за таким рівнянням практично неможливо.

Зауважимо, що інколи таке рівняння задає дві прямі або так званий уявний еліпс. Щоб позбутися від першого степеня x і y потрібно зробити перенос координат, а щоб позбутися добутку $x \cdot y$ потрібно зробити поворот осей координат на певний кут.

Розглянемо паралельний перенос координат.

Нехай дано систему координат яку назвемо старою системою і точку $M(x,y)$. Перенесемо цю систему, не змінюючи напряму осей координат. Нехай $O_1(a,b)$ – новий початок, $X_1O_1Y_1$ – нова система координат, а (x_1,y_1) – координати точки M у новій системі координат. Тоді

$$\begin{cases} x = a + x_1 \\ y = b + y_1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = x_1 + a \\ y = y_1 + b \end{cases}$$

Звідси випливає, що

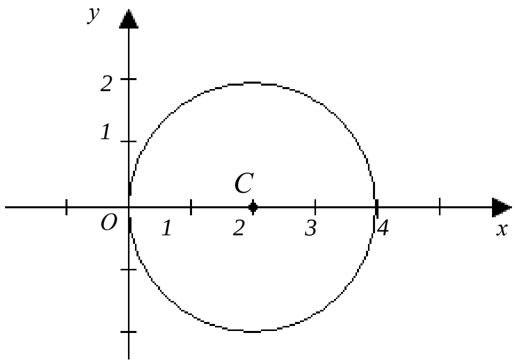
$$\begin{cases} x_1 = x - a \\ y_1 = y - b \end{cases}$$, де (a,b) – координати нового початку.

Приклади

Побудувати криві.

1) $x^2 + y^2 = 4x$;

Розв'язання:



$x^2 - 4x + y^2 = 0$.

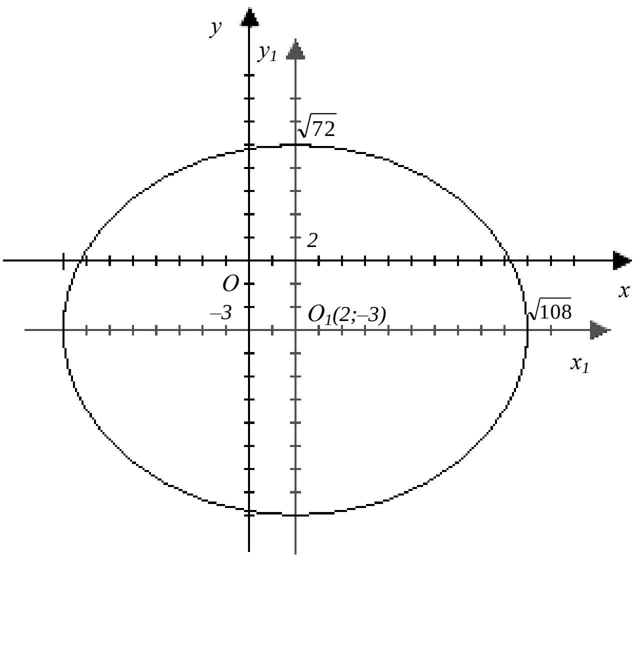
Виділимо повний квадрат:

$\left(x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2\right) - 4 + y^2 = 0$;

$(x-2)^2 + y^2 = 4$ – коло із центром в точці $C(2,0)$ і радіусом $R = 2$.

2) $2x^2 + 3y^2 - 8x + 18y - 181 = 0$,

Розв'язання:



$2\left(x^2 - 4x\right) + 3\left(y^2 + 6y\right) - 181 = 0$.

Виділяємо повні квадрати:

$$2\left((x-2)^2 - 4\right) + 3\left((y+3)^2 - 9\right) - 181 = 0,$$

$2(x-2)^2 + 3(y+3)^2 = 216$.

Отже дане рівняння є рівнянням зміщеного еліпса із центром в точці $O_1(2,-3)$.

Знайдемо його канонічне рівняння, для чого перейдемо до нової системи координат:

$$\begin{cases} x_1 = x - 2 \\ y_1 = y + 3 \end{cases}$$ із початком

в точці $O_1(2,-3)$.

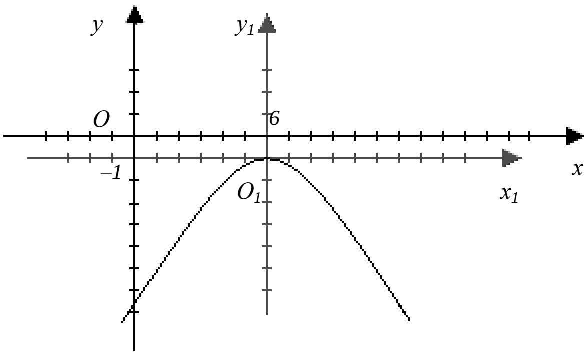
Отримаємо: $2x_1^{\ 2} + 3y_1^{\ 2} = 216$ або

$\frac{x_1^{\ 2}}{108} + \frac{y_1^{\ 2}}{72} = 1$ – канонічне рівняння еліпса в новій системі координат $x_1O_1y_1$. Причому, $a = \sqrt{108} \approx 10$, $b = \sqrt{72} \approx 8$.

3) $x^2 + 6y - 12x + 42 = 0$.

Розв'язання:

Виділяємо повний квадрат: $\left(x^2 - 2x \cdot 6 + 36\right) - 36 + 6y + 42 = 0$,



$(x-6)^2 + 6y + 6 = 0$,

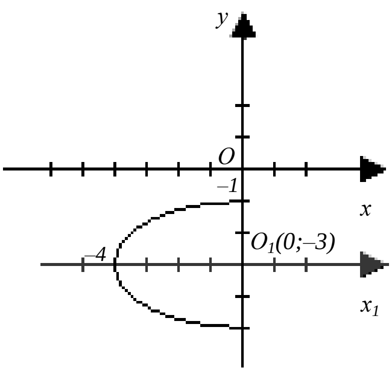
$(x-6)^2 = 6(y+1)$ – рівняння визначає параболу.

Перейшовши до нової системи координат $x_1O_1y_1$:

$\begin{cases} x_1 = x - 6 \\ y_1 = y + 1 \end{cases}$ із початком координат в точці $O_1(6,-1)$, отримаємо: $x_1^{\ 2} = -6y$.

4) $x = -2\sqrt{-5 - 6y - y^2}$.

Розв'язання:



$x^2 = 4\left(-5 - 6y - y^2\right)$;

$x^2 = -20 - 24y - 4y^2$;

$4y^2 + 24y + x^2 = -20$;

$x^2 + 4\left(y^2 + 6y\right) = -20$.

Виділяємо повний квадрат:

$x^2 + 4\left((y+3)^2 - 9\right) = -20$;

$x^2 + 4(y+3)^2 = 16$. Задане рівняння визначає ліву половину зміщеного еліпса.

Для побудови перейдемо до нової системи координат $x_1O_1y_1$:

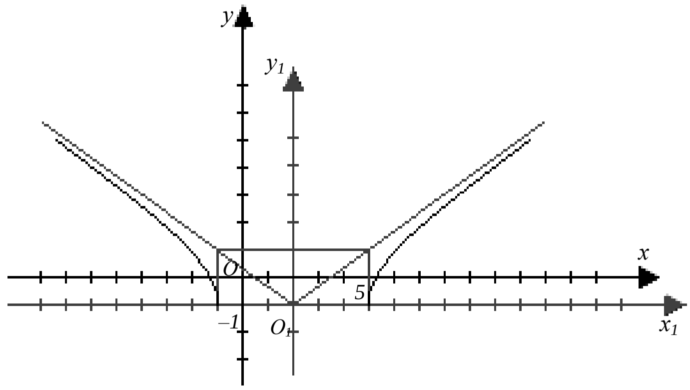
$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y + 3 \end{cases}$, а початок координат визначається точкою $O_1(0,-3)$.

Отримаємо: $x_1^{\ 2} + 4y_1^{\ 2} = 16$.

$\frac{x_1^{\ 2}}{16} + \frac{y_1^{\ 2}}{4} = 1$ – канонічне рівняння еліпса, причому *a=4, b=2*.

5) $y = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x - 5}$.

Розв’язання:



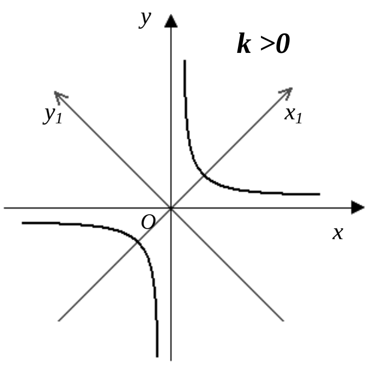
$(y+1)^2 = \frac{4}{9}\left(x^2 - 4x - 5\right);$

$9(y+1)^2 = 4\left((x-2)^2 - 9\right);$

$4(x-2)^2 - 9(y+1)^2 = 36$. Задане рівняння визначає верхню половину зміщеної гіперболи. Перейшовши до нової системи координат $x_1O_1y_1$:

$\begin{cases} x_1 = x-2 \\ y_1 = y+1 \end{cases}$, точка $O_1(2,-1)$,

отримаємо: $4{x_1}^2 - 9{y_1}^2 = 36$; $\frac{{x_1}^2}{9} - \frac{{y_1}^2}{4} = 1$ – канонічне рівняння гіперболи.



Поворот осей координат

Поворот осей координат на кут α здійснюється за формулами:

$\begin{cases} x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha \\ y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha \end{cases}$ – перехід від старих до нових координат.

Доведемо, що $xy = k$ є гіпербола, розташована у I і III чверті при k – додатному і в II і IV чверті при k - від’ємному.

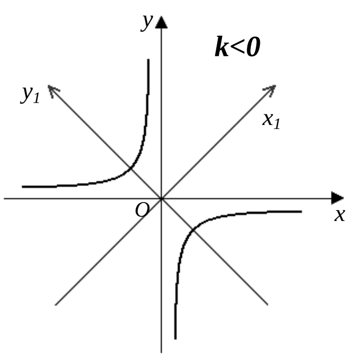
Розглянемо рівняння $xy = \pm k^2$.

Зробимо поворот осей координат $\begin{cases} x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha \\ y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha \end{cases}$.

$(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha)(x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha) = \pm k^2,$

${x_1}^2\cos\alpha\sin\alpha + \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)x_1y_1 - {y_1}^2\sin\alpha\cos\alpha = \pm k^2,$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0,$



$tg^2\alpha - 1 = 0,$

$tg\alpha = \pm 1.$

Прийнявши, що $\alpha = \frac{\pi}{4}$, отримаємо

${x_1}^2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - {y_1}^2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \pm k^2,$

${x_1}^2 - {y_1}^2 = \pm 2k^2,$

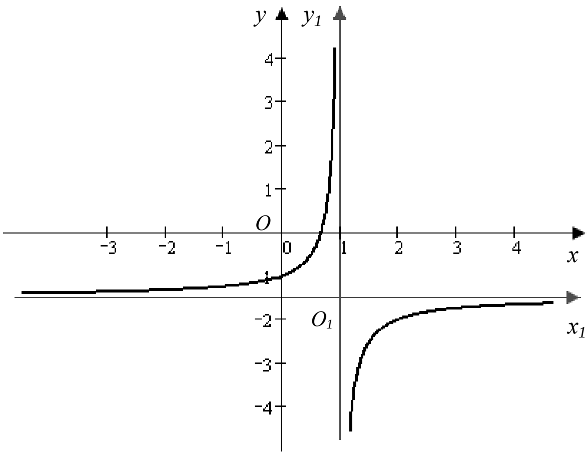
$\frac{{x_1}^2}{2k^2} - \frac{{y_1}^2}{2k^2} = \pm 1$ – рівняння гіпербол.

Приклади

Побудувати криві:

1) $y = \frac{3x-2}{2-2x}$.

Розв'язання:



Поділимо $3x-2$ на $2-2x$:

$$\begin{array}{r|l} 3x-2 & 2-2x \\ \hline -\ 3x-3 & -3/2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Тоді дану функцію можна записати у

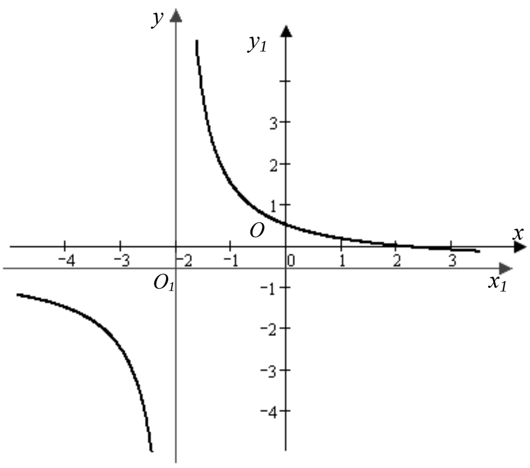
$y=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{-2x+2}$, або

$y+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2(x-1)}$,

Перейшовши до нової системи координат $x_1O_1y_1$ – $\begin{cases} x_1 = x-1 \\ y_1 = y+\dfrac{3}{2} \end{cases}$ із початком в точці $O_1\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$, отримаємо рівняння гіперболи: $y_1=-\dfrac{1}{2x_1}$, або $x_1y_1=-\dfrac{1}{2}$.

2) $y=\dfrac{2-x}{2x+4}$.

Розв'язання:



Зробивши наступні перетворення заданої функції:

$y=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{2x+4}$,

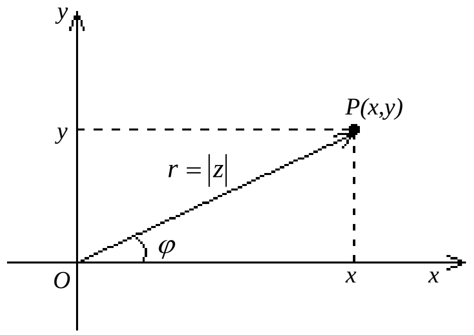
$y+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{2x+4}$,

$y+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{x+2}$, перейдемо до нової системи координат $x_1O_1y_1$, де $\begin{cases} x_1 = x+2 \\ y_1 = y+\dfrac{1}{2} \end{cases}$, а $O_1\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)$.

Отримаємо рівняння гіперболи: $x_1y_1=2$.

4. Комплексні числа

Число $z = x + iy$ називається комплексним числом , де x, y – дійсні числа, i – уявна одиниця ($i = \sqrt{-1}$).



$x = \operatorname{Re} z$ – дійсна частина комплексного числа;

$y = \operatorname{Im} z$ – уявна частина комплексного числа.

Два комплексні числа називаються рівними, якщо у них рівні і дійсні, і уявні частини.

Число $\overline{z} = x - iy$ називається спряженим до числа $z = x + iy$.

Комплексні числа зображаються у комплексній площині xOy точками або радіус векторами з координатами $P(x,y)$. Вісь Ox – дійсна, Oy – уявна.

Якщо $z = x + iy$, то можна записати, що $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, де r довжина вектора $\overline{OP}$, φ - кут, який утворює цей вектор з додатнім напрямом осі Ox.

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$\varphi = Arg\, z$,

$tg\varphi = \dfrac{y}{x}$. Через те, що $Arg\, z$ має безліч значень, кратних $k\pi$, на практиці розглядають тільки головні значення $-\pi < Arg\, z \le \pi$.

Будь-яке комплексне число можна розглядати в тригонометричній формі: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Використовуючи формулу Ейлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, запишемо показникові форму комплексного числа: $x + iy = re^{i\varphi}$.

Відомо, що $i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1.$

Дії з комплексними числами

1. Додавання (віднімання) комплексних чисел аналогічне додаванню (відніманню) многочленів.

2. Для того щоб поділити комплексне число на комплексне число необхідно чисельник і знаменник дробу помножити на комплексне число, спряжене до знаменника. (Провести спрощення).

3. Піднесення комплексного числа до степеня

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

4. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, де $k = 0; 1; 2; \ldots; n-1$.

Приклади

Обчислити:

1) $2+3i-(4-5i) = -2+8i$;

2) $(3-2i)(1+4i) = 3-2i+12i-8i^2 = 11+10i$;

3) $\dfrac{i-3}{2+3i} = \dfrac{(i-3)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{2i-6-3i^2+9i}{4-9i^2} = \dfrac{-3+11i}{13}$.

Розв'язання квадратних рівнянь із комплексними коренями.

Очевидно, що введення поняття комплексних чисел дало можливість знаходити корені квадратного рівняння із від'ємним дискримінантом.

Нехай задане квадратне рівняння виду: $ax^2 + bx + c = 0$, де a, b, c – дійсні числа і $a \neq 0$. Припустимо, що дискримінант $D = b^2 - 4ac < 0$, тоді дане рівняння буде мати два різні (спряжені) комплексні корені: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{|D|} \cdot i}{2a} = \dfrac{-b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{|D|}}{2a} i$.

Приклади

Розв'язати рівняння:

1. $x^2 + 1 = 0$**.**

Розв'язання:

$x^2 = -1;\ x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$;

$x_{1,2} = \pm i$.

2. $x^2 - 4x + 13 = 0$**.**

Розв'язання:

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 16 - 52 = -36 < 0$;

$\sqrt{D} = \sqrt{-36} = \sqrt{36 \cdot (-1)} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6i$

$x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 6i}{2} = \dfrac{4}{2} \pm \dfrac{6}{2} i = 2 \pm 3i$

Рівняння вищих степенів та деякі методи їх розв'язання

Рівнянням вищих степенів називається рівняння виду:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_0 = 0, \qquad (*)$$

де $a_0 \neq 0$, $n \geq 2$, a_i – дійсні числа.

Основні теореми про розв'язання рівнянь вищих степенів.

1. Будь-яке рівняння n-го степеня в множині комплексних чисел має n коренів.
2. Число x_1 є коренем рівняння (*) тоді і тільки тоді, коли многочлен $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_0$ ділиться на многочлен $x - x_1$ без остачі (*теорема Безу*).
3. Якщо рівняння (*) має комплексний корінь $a + bi$, то воно має і спряжений корінь $a - bi$.
4. Якщо n – непарне, то рівняння (*) має хоча б один дійсний корінь.
5. Рівняння (*) має парну кількість комплексних коренів.
6. Якщо $a_0 = 1$ і всі a_i є цілими числами і якщо рівняння (*) має цілий корінь, то він є дільником вільного члена a_n.
7. Якщо рівнянні (*) має корені $x_1, x_2, \ldots, x_n$, тоді $(-1)^k a_k \cdot a_0$ рівне сумі всіх можливих добутків із k коренів, де $k = \overline{1, n}$ (*узагальнена теорема Вієта*).

Приклад

Розв’язати рівняння: $x^3+6x^2+11x+6=0$.

Розв’язання:

Дільниками вільного члена будуть: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6.

Підставляючи кожний із дільників в задане рівняння отримаємо, що коренем його буде $x_1=-2$. Отже, многочлен, що відповідає даному рівнянню буде ділитись на $x+2$ без остачі.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^3+6x^2+11x+6 & x+2 \\ \cline{2-2}
x^3+2x^2 \qquad\qquad & x^2+4x+3 \\
-\,4x^2+11x+6 & \\
4x^2+8x \quad\; & \\
-\,3x+6 & \\
3x+6 & \\
0 \;\; &
\end{array}
$$

Отже, $x^3+6x^2+11x+6=(x+2)(x^2+4x+3)$.

Тоді для знаходження двох інших коренів досить розв’язати квадратне рівняння: x^2+4x+3.

Отримаємо $x_2=-1$, $x_3=-3$.

Відповідь: $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=-3$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик ВП. Юрик І.І. Вища математика: Навч. посіб. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
2. Литвин І.І., Конопчук О.М., Желізняк Г.О. Вища математика. Навч. посіб. – К.: Центр навчальної літератури, – 2004. – 368 с.
3. Вища математика. / за ред.. Шинкарика М.І./ Підручник. – Тернопіль, 2003. – 480 с.
4. Архіпова О.С., Протопопова В.П., Пахомова Є.С. Посібник для розв’язання типових задач з курсу вищої математики. – Харків: ХНАМГ. – 2008. – 210 с.
5. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. -М.: Наука, 1986.
6. А.Г. Курош. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965. - 431 с.
7. Кулініч Г.Л., Максименко Л.О., Плахотник В.В., Призва Г.Й. Вища математика. Основні означення, приклади і задачі. – К.: Либідь, 1994. – 312 с.

ДЛЯ НОТАТОК