НАУМ НИСОНОВИЧ АЙЗЕНБЕРГ: ЧЕЛОВЕК И УЧЕНЫЙ
(до 80-летия со дня рождения)

Вступление. 2 сентября 2008 года профессору Науму Нисоновичу Айзенбергу исполнилось бы 80 лет. Время неумолимо бежит. Наум Нисонович ушел от нас 4 июня 2002 года. Вот уже седьмой год его нет с нами. Но живо его колоссальное научное наследие, продолжают развиваться его лучшие научные идеи, оказавшие огромное влияние на несколько поколений ученых, и продолжающие оказывать такое же сильное влияние и сегодня.

Для соавторов этой статьи Наум Нисонович был не просто Учителем с большой буквы, научным руководителем, коллегой и соавтором (не говоря о том, что для одного из нас он был очень любящим отцом), но и ближайшим другом, образцом Человека, опять же, именно с большой буквы.

Наум Нисонович был удивительным математиком с очень глубокими, более, чем энциклопедическими, знаниями совершенно разных ее разделов. Он был блестящим педагогом. В аудитории, где он читал лекцию, будь то небольшая группа, слушающая спецкурс, огромная аудитория первокурсников, класс в средней школе, представительная научная конференция, не могло быть равнодушных. Он не просто передавал свои глубокие знания тем, кому читал лекции, но делал это мастерски, находил способы объяснять самые сложные вещи просто и доходчиво. Нетривиальное, на первый взгляд очень сложное, доказательство любой серьезной теоремы в его изложении становилось совершенно логичным. Особенно подкупал любую аудиторию широчайший интеллект Наума Нисоновича. Его знания отнюдь не исчерпывались математикой. Он увлекался биологией, занимаясь изучением математических аспектов генетического кода, пытаясь "откопать"его математическую природу, а также занимаясь классификацией микроорганизмов. Его другим увлечением была ядерная физика, он с увлечением искал алгебраические закономерности, с помощью которых можно было бы описать поведение элементарных частиц. Занимаясь распознаванием образов, он разрабатывал методы диагностики различных заболеваний, методы диагностики неисправности авиационных двигателей, методы обнаружения подводных лодок, баллистических ракет и космических объектов, вникая во все детали соответствующих областей науки. Если добавить к этому, что Наум Нисонович перечитал практически всю мировую классическую художественную литературу, был тонким знатоком психологии и психоанализа, обладал тончайшим чувством юмора, то станет понятно, какое огромное влияние он оказывал на окружающих его людей, как интересно с ним было общаться и друзьям, и коллегам, и аспирантам, и студентам.

Будучи очень общительным и открытым человеком, Наум Нисонович очень любил устраивать импровизированные научные семинары прямо у себя дома. Едва ли не ежедневно в течение многих лет его гостями были аспиранты, сотрудники, дипломники, курсовики и коллеги, приезжавшие со всех концов бывшего Советского Союза. Эти встречи могли продолжаться часами, часто научные бдения незаметно для их участников затягивались за полночь. Так рождались, проверялись и развивались новые научные идеи.

Наум Нисонович был инициатором и организатором проведения в Ужгороде многих всесоюзных конференций и семинаров по теории информации и кодирования, по цифровой обработке сигналов, по многозначной пороговой логике. Под его руководством в 1970-е — 1980-е годы в Ужгороде работал постоянный семинар "Цифровая обработка сигналов в произвольном базисе", докладчиками на котором очень часто выступали ведущие ученые из крупнейших научных центров бывшего Советского Союза. Эти семинары и конференции во многом способствовали тому, что Ужгородский Национальный Университет был широко известен и в Советском Союзе, и за его пределами.

Увлекаясь и занимаясь в разные периоды времени научными исследованиями в разных областях, от теории представлений групп до искусственных нейросетей, Наум Нисонович получил ряд уникальных, основополагающих результатов во всех этих областях. Эти результаты получили широкое признание и положили начало развитию нескольких новых научных направлений. Это представления сплетений и прямых произведений конечных групп, полиномиальные представления функций многозначной логики, многозначная пороговая логика, теория простых тестов, теория цифровой обработки сигналов в произвольном базисе, теория универсальных и многозначных нейронов. 11 учеников Наума Нисоновича, в том числе 8 аспирантов Ужгородского Национального Университета, стали под его руководством кандидатами наук. К нему очень часто приезжали на консультации аспиранты его коллег из других городов, он часто очень тесно и плодотворно сотрудничал с коллегами из ведущих научных центров бывшего Советского Союза, а позднее, когда после того, что рухнул "железный занавес", это стало возможным, и с зарубежными коллегами. Среди его соавторов академик Российской Академии Наук Ю.И. Журавлев, академик Национальной Академии Наук Украины и член-корреспондент Российской Академии Наук А.А. Стогний, член-корреспондент Национальной Академии Наук Украины А.А. Летичевский, академик Российской Академии Естественных Наук Д.А. Поспелов, академик Финской Академии Наук Я. Астола (Финляндия), профессора С. Агаян (США), Й. Вандевалле (Бельгия), Ю.Л. Иваськив (Киев), К. Егиазарян (Финляндия), К. Морага (Германия), З.Л. Рабинович (Киев), Р. Станкович (Сербия), Ж. Тошич (Сербия), А.Г. Француз (Санкт-Петербург) и многие другие.

Наум Нисонович является автором двух монографий[1] [1, 2], более, чем 150 статей, опубликованных в ведущих советских, украинских и зарубежных научных журналах, в сборниках статей и в трудах конференций, а также восьми изобретений.

Вся его научная деятельность неразрывно связана с Ужгородом, в котором он прожил 49 лет, приехав из Киева в 1949 году молодым специалистом, и с Ужгородским Национальным Университетом, в котором он проработал с 1951 по 1998 годы.

В этой статье мы хотели бы рассказать о Науме Нисоновиче Айзенберге, Ученом и Человеке, привести краткий обзор его основных научных результатов и рассказать о том, как эти результаты отразились на дальнейшем развитии соответствующих областей науки, как актуальны многие из них сегодня.

1. Применение ЭВМ в теории представлений конечных групп. Первой любовью Наума Нисоновича в науке была алгебра, и, белее точно, теория конечных групп. Это случилось не без влияния его наставников — профессора С.Д. Бермана, который был одним из крупнейших специалистов в области представлений конечных групп и заведовал в начале 60-х годов кафедрой алгебры в Ужгородском университете, и профессора Л.А. Калужнина, который ввел понятие сплетения групп и был одним из крупнейших в мире специалистов в области конечных групп. С другой стороны, Наум Нисонович был увлечен возможностями, которые открывало применение только появлявшейся тогда вычислительной техники. Здесь не обошлось без влияния академика В.М. Глушкова (на протяжении многих лет Виктор Михайлович Глушков проявлял большой интерес к работам Наума Нисоновича, был научным консультантом его докторской диссертации, представил несколько его статей к публикации в ведущем и в советское время элитарном журнале "Доклады Академии Наук СССР") и его учеников А.А. Летичевского, Ю.Л.Иваськива и Ю.В.Капитоновой, ставшими известнейшими специалистами в области кибернетики. Исследования Наума Нисоновича в области применения вычислительных машин для вычисления сплетений конечных групп и прямых произведений конечных групп [3, 4] легли в основу его кандидатской диссертации. Важно отметить, что дальнейшие совместные исследования Наума Ниссоновича и Александра Адольфовича Летичевского в этой области [5–7] были не просто пионерскими, а, по-видимому, вообще первыми в мире попытками применить вычислительные машины как в теории групп (работы по применению ЭВМ в исследовании спорадических простых групп появились несколько позже), так и для решения не чисто вычислительной, а сложной логико-алгебраической задачи.

Как всякая первая любовь, любовь к алгебре наложила отпечаток на все будущие исследования Наума Нисоновича. Чем бы он ни занимался, он пытался увидеть “алгебраическую подоплеку”. И это желание “подогревалось” успехами в исследованиях по применению теории представлений конечных групп в алгебраической теории кодирования, проводимых в Ужгороде под руководством

[1] Здесь и далее даются ссылки только на основные работы Н.Н. Айзеберга. Несколько ссылок на другие источники дается в сносках в тексте.

С.Д. Бермана. Как это будет видно из дальнейшего, почти все новаторские идеи Наума Нисоновича были следствием нестандартного алгебраического взгляда на вещи.

2. Полиномиальные представления многозначных функций. В середине 60х годов Д.А. Поспелов поставил задачу описания всех функций многозначной логики, представимых полиномами над кольцом классов вычетов по модулю. Эта задача представляла прикладной интерес, т.к. в то время начались разработки логических элементов со многими устойчивыми состояниями.

Более точно, требовалось описать все такие функции

$$f : R_n \to R_n,$$

где R_n — кольцо классов вычетов по модулю n, что

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + kx^k.$$

В случае, когда n — простое число и, соответственно, R_n является полем, каждая функция, как показал Наум Нисонович, представима полиномом [8].

После рассмотрения первых примеров, у Наума Нисоновича появилась гипотеза, что группа полиномиально представимых функций изоморфна сплетению некоторых подгрупп симметрической группы S_n.

Задача обозрения всех полиномиально представимых функций многозначной логики была посталена Наумом Нисоновичем и решена в [9]. Для решения этой задачи было решено использовать следующий базис в кольце полиномов над R_n:

$$f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x(x-1),\ \ldots,\ f_i(x) = x(x-1)\cdots(x-i+1).$$

Преимущество использования этого базиса заключалось в том, что вопрос о полиномиальной представимости функции в этом базисе сводится к вопросу о разрешимости треугольной системы сравнений над кольцом классов вычетов. Это обстоятельство позволило не только обозреть все полиномиально представимые функции, но и подсчитать их количество [10]: в случае, когда $n = p^k$, количество полиномиально представимых функций равно

$$p\sum\nolimits_{i=0}^{k-1}(m(p^{i+1}) - m(p^i)(k-i)),$$

где функция $m(n) = s(n) - 1$, а $s(n)$ — это наименьшее целое такое, что $s(n)! \equiv 0(\operatorname{mod} n)$.

Поскольку кольцо полиномов над R_n, где $n = p^{\alpha_1}...p^{\alpha_t}$, изоморфно прямому произведению колец полиномов над R_{p^α}, переход от модуля вида p^α к произвольному модулю, — просто дело техники. Как только появилась возможность подсчитать количество полиномиально представимых функций, стало ясно, что красивая гипотеза о связи со сплетениями, к сожалению, не верна. Отметим, что критерии полиномиальной представимости многозначных функций подробно были рассмотрены в [11].

3. Тестовые методы распознавания образов. В конце 60-х годов под влиянием вышедшей тогда книги М.М. Бонгарда[2] и общения с профессором А.Г.

[2]Бонгард М.М. *Проблема узнавания* М.: Физматгиз, 1967.

Французом, Наум Нисонович увлекся проблемой распознавания образов (следует отметить его первую работу в этой области [12]), точнее говоря, тестовыми методами распознавания образов (первоначально использовался термин "тестор").

В работе [13] Наумом Нисоновичем было введено понятие простого теста (тестора) и намечены основные пути применения простых тестов для решения прикладных задач. Пусть $E = E_{k_1} \times E_{k_2} \times ... \times E_{k_n}$ — декартово произведение множеств $E_{k_i} = \{0, 1, ..., k_i - 1\}$, где $i = 1, ..., n$. Пусть $[A_1, ..., A_s]$ — набор попарно непересекающихся подмножеств множества E. Набор $L = [A'_1, ..., A'_s]$, где $A'_i \subseteq A_i$ $(i = 1, ..., s)$, называется обучающей выборкой. Задача распознавания состоит в построении решающего правила - алгоритма, относящего на основе обучающей выборки вектор из $\cup A_i$ к одному из классов $A_1, ..., A_s$, когда набор $[A_1, ..., A_s]$ неизвестен.

Признаками на E назовём функции $\pi_1, ..., \pi_n$ такие, что $\pi_i((\alpha_1, ..., \alpha_n)) = \alpha_i$ для всех $i = 1, ..., n$.

Набор признаков $\langle \pi_{i_1}, \ldots, \pi_{i_r} \rangle$ называется *тестовым* (для обучающей выборки L), если для любых A'_i и A'_j любые два вектора $a_i \in A'_i$ и $a_j \in A'_j$ различаются на этом наборе признаков, т. е. $(\pi_{i_1}(a_i),...,\pi_{\mathrm{i}_r}(a_i)) \neq (\pi_{i_1}(a_j),...,\pi_{\mathrm{i}_r}(a_j))$. Если вектор c на тестовом наборе признаков совпадает с одним из векторов из A'_i, то c на этом наборе признаков не может совпадать ни с одним вектором из всех остальных классов и его естественно отнести к классу A_i. Различные тестовые алгоритмы распознавания основаны на применении тестовых наборов с различными весами [14].

Тестовый набор признаков называется *тупиковым*, если из него нельзя выкинуть ни одного признака так, что полученный набор является тоже тестовым. Именно тупиковые тесты играют основную роль при построении различных алгоритмов распознавания.

Как отмечалось ранее, Наум Нисонович на всё смотрел алгебраическими глазами. Он предложил задать на множествах $E_{k_1}, E_{k_2}, ..., E_{k_n}$ операцию сложения по соответствующему модулю, превратив, таким образом, эти множества в абелевы группы. При этом нетрудно заметить, что если тесту сопоставить подгруппу всех элементов из E, равных нулю на всех признаках тестового набора, то тестовому алгоритму соответствует покрытие множеств $A'_1, ..., A'_s$ смежными классами по этой подгруппе [15]. Групповые свойства тестов и их значение для решения задач технической диагностики рассматривались также в [16]. Позднее [17] удалось доказать, что тестовые подгруппы — это подгруппы, определяемые некоторыми безгранично делимыми распределениями, что объяснило вероятностную природу тестовых методов распознавания.

Определим на E двуместные предикаты схожести следующим образом:

$$P_i(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{если } \pi_i(a) = \pi_i(b), \\ 0, & \text{если } \pi_i(a) \neq \pi_i(b), \end{cases} \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Если $\langle \pi_{i_1}, ..., \pi_{i_r} \rangle$ — тестовый набор признаков, то

$$(\forall i \neq j)(\forall a_i \in A'_i)(\forall a_j \in A'_J) P_{i_1}(a_i, a_j) \& ... \& P_{i_r}(a_i, a_j) = 0.$$

Такой переход от наборов признаков к набору предикатов существенен, т.к. это позволяет рассматривать тесты как импликанты соответствующих булевых функций и применять известные методы минимизации булевых функций для поиска тупиковых тестов. Но с другой стороны, как известно, задача минимизации булевых функций является сложной переборной задачей.

Пусть $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – булева функция, такая, что $f(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$ тогда и только тогда, когда найдутся два вектора a_i и a_j из различных классов обучающей выборки таких, что $a_1 = P_1(a_i, a_j), ..., P_n(a_i, a_j)$, т.е. f — функция, принимающая нулевые значения в случаях, когда имеется сходство между элементами двух различных классов обучающей выборки и, соответственно, эта функция равна единице, когда сходства нет, т.е. классы различаются. Обобщим понятие тестового набора следующим образом:
набор предикатов $\tilde{P}_{i_1}, ..., \tilde{P}_{i_\tau}$ назовем тестовым, если

$$(\forall i \neq j)(\forall a_i \in A'_i)(\forall a_j \in A'_J)\tilde{P}_{i_1}(a_i, a_j)\&...\&\tilde{P}_{i_r}(a_i, a_j),$$

где волна означает, что предикаты могут входить в набор с отрицанием или без. Обобщением понятия тупикового теста является понятия простого теста, т.е. теста (содержащего предикаты возможно с отрицанием), никакой поднабор которого уже не является тестовым. Снятие ограничения на использования отрицания означает, что при распознавании принимаются во внимание не только те признаки, на которых различаются объекты из разных классов выборки, но и признаки, на которых объекты схожи. В случае, когда E – множество булевых векторов, E можно рассматривать как линейное пространство над $GF(2)$, и в этом случае удаётся доказать, что алгоритмы распознавания, основанные на простых тестах, инвариантны относительно кодирования – замены базиса в линейном пространстве [14, 15, 18]. Важно отметить, что разработанная в работах [13–18] теория простых тестов явилась не просто красивой математической теорией, но и основой для решения практических задач распознавания образов в самых разных областях, например, в микробиологии для классификации микроорганизмов [19], в медицине для диагностики заболеваний со множеством сходных симптомов [20]. Следует также отметить ряд существенных приложений теории простых тестов, разработанных под руководством Наума Нисоновича, в то время (1970-е годы) "закрытых"и в силу этого не публиковавшихся: диагностика неисправностей авиационных двигателей в реальном времени, распознавание подводных лодок ("свой"/"чужой"), распознавание космических объектов, находящихся на баллистической траектории. Отметим также, что позднее, Наум Нисонович предложил очень эффективный быстрый алгоритм поиска тупиковых тестов с использованием конъюнктивного преобразования (мы вернемся к этому алгоритму ниже, рассматривая цифровую обработку сигналов в произвольном базисе).

4. Многозначная пороговая логика. Еще в начале 1960-х годов Наум Нисонович увлекся многозначной логикой и исследовал возможности применения алгебраических подходов для представления многозначных функций. Выше мы уже рассматривали полиномиальные представления многозначных функций. Отдельно следует отметить исследование функционально полных систем операций и канонических форм представления функций многозначной логики [21] (в десятках ссылок на эту статью в последующих публикациях различных авторов рассмотренная в ней система операций неизменно называлась системой Айзенберга – Рабиновича), представление суммы по mod m в m-значной логике [22]. 60-е годы прошлого века были также пиком популярности пороговой логики, изучавшей реализацию булевых функций при помощи пороговых элементов (прообразов искусственных нейронов). Увлечение пороговыми элементами было обусловлено двумя факторами: возможностью реализации всех булевых функций, являющихся пороговыми, на одном элементе, а также способностью пороговых элементов к обучению и, соответственно, возможностью их применения для решения задач распознавания образов и классификации в том случае, если распознаются (классифицируются) объекты, принадлежащие двум классам и описываемые бинарными признаками. В то же время, для функций многозначной логики представления, аналогичного представлению булевых функций в пороговой логике, не существовало. Если бы его удалось найти, это стало бы огромным шагом вперед, поскольку с одной стороны позволило бы создать многозначный пороговый элемент, который мог бы решать задачи многоклассовой классификации объектов, описываемых многозначными признаками, а с другой стороны, унифицировало бы представление большого класса многозначных функций. Традиционно многозначная (k-значная) логика рассматривалась над кольцом классов вычетов $Z_k = \{0, 1, ..., k-1\}$. При этом возникал философский вопрос: как трактовать значности логики, являющиеся целыми числами? Наум Нисонович рассмотрел данную проблему с совершенно оригинальной алгебраической точки зрения. Вряд ли он сам изначально предполагал, сколь огромный пласт замечательных новых результатов и приложений лежит за тем новым подходом к многозначной логике, который он сформулировал в конце 1960-х годов и который продолжает оставаться очень актуальным и сегодня, являясь основой теории многозначных нейронов (см. ниже). Этот новый подход был предложен в [23].

Пусть M – аддитивная абелева группа с мощностью не меньше k. Пусть $A_k = \{a_0, a_1, ..., a_{k-1}\}, A_k \in M$ — структурный алфавит.

Функция $f(x_1, ..., x_n) \,|f : A_k^n \to A_k$ от n переменных (где $A_k^n - n$-я декартова степень A_k) называется *функцией k-значной логики над группой M*. Отметим, что уже этого обобщения достаточно для того, чтобы рассматривать многозначные функции не только над кольцом классов вычетов, но над любой аддитивной абелевой группой. В частности, если в качестве группы M взять аддитивную группу поля комплексных чисел C, а в качестве множества A_k взять множество всех корней k–ой степени из единицы $E_k = \left\{\varepsilon^0, \varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{k-1}\right\}$, где $\varepsilon = exp(i2\pi/k)$ (i – мнимая единица) – первообразный корень k–ой степени из единицы, то любая функция от n переменных $f(x_1, ..., x_n) \,|f : \mathrm{E}_k^n \to \mathrm{E}_k$ является функций k-значной логики над полем комплексных чисел согласно только что рассмотренному определению. Очевидно, и сама функция, и ее аргументы принимают в этом случае значения, являющиеся корнями k–ой степени из единицы: $\varepsilon^j = exp(i2\pi j/k)$, $j = 0, ..., k-1$. Любопытно, что при таком подходе к многозначной логике значности логики, в отличие от классического случая над кольцом Z_k, "арифметически"равноправны, нормализованы, их модули равны единице, и, являясь корнями k–ой степени из единицы, они отличаются только своими аргументами.

В поисках обобщения понятия булевой пороговой функции на многозначный случай Наум Нисонович искал, каким образом можно обобщить ключевой элемент в определении булевой пороговой функции, функцию знака $sign$, на многозначный случай. Напомним определение булевой пороговой функции. Функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется *пороговой*, если найдется такой вещественнозначный набор из $n+1$ чисел (вектор структуры, или весовой вектор) $W = (w_0, w_1, ..., w_n)$, что на всех наборах значений переменных, на которых задана функция, $f(x_1, ..., x_n) = \mathrm{sign}(w_0 + w_1x_1 + ... + w_nx_n)$. Логический элемент, реализующий булевы пороговые функции, называется пороговым элементом (а также пороговым нейроном, или персептроном), а функция *sign* – его активирующей функцией.

В [23] и [24] Наумом Нисоновичем была предложена функция, которую он первоначально назвал *CSIGN*, (впоследствии по его же инициативе стало использоваться название *многозначный предикат* P):

$$P(z) = exp(i2\pi\ j/k),\ \text{если}\ 2\pi j/k \leq \arg z < 2\pi(j+1)/k\ , \tag{1}$$

где arg z — аргумент комплексного числа z. Функция (1) делит комплексную плоскость на k равных секторов и отображает всю комплексную плоскость в множество корней k–ой степени из единицы. Эта функция стала ключом к определению многозначной пороговой функции [24, 25]. Функция k-значной логики $f(x_1, ..., x_n)$ называется *k-значной пороговой функцией*, если найдется такой набор из $n+1$ комплексных чисел (вектор структуры, или весовой вектор) $W = (w_0, w_1, ..., w_n)$, что на всех наборах значений переменных $x_1, ..., x_n$, на которых задана функция,

$$f(x_1, ..., x_n) = P(w_0 + w_1x_1 + w_nx_n),$$

где P – функция (1). По аналогии с булевым пороговым элементом, логический элемент, реализующий многозначную пороговую функцию, был назван многозначным пороговым элементом, или элементом многозначной пороговой логики [24–28]. Позднее, учитывая сложившиеся в связи с развитием теории искусственных нейронов и нейросетей тенденциями, в 1992 году, по инициативе Наума Нисоновича было предложено называть его многозначным нейроном [29]. В [25] было предложено два метода синтеза многозначного элемента – при помощи сведения задачи синтеза к задаче линейного программирования и при помощи алгоритма обучения, основанного на коррекции весов в зависимости от того, насколько существенно нужно изменить взвешенную сумму (ее аргумент). Нужно отметить, что это был первый в мире алгоритм обучения не для булевого, а для многозначного нейроэлемента[3]. Заметим также, что уже в середине 1970-х годов, несмотря на всю ограниченность возможностей тогдашней вычислительной техники, многозначный элемент успешно использовался для решения задач классификации в технической диагностике, в частности, для диагностики неисправностей авиационных двигателей в реальном времени. Теория многозначной пороговой логики была всесторонне представлена Наумом Нисоновичем и Ю.Л. Иваськивым в их монографии [1]. Эта теория явилась основой для развития впоследствии теории многозначных и универсальных нейронов и базирующихся на них нейросетей, которую мы рассмотрим ниже.

[3]Этот факт, а также уникальность и значимость результатов, полученных в [23]- [28] и суммированных в [1], является общепризнанным, он многократно подчеркивался разными авторами, выделим, например, фундаментальную, недавно изданную монографию Hirose A. *Complex-valued neural networks fertilize electronics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2006.

5. Цифровая обработка сигналов в произвольном базисе. Цифровая обработка сигналов с момента своего возникновения в конце 50-х - в начале 60-х годов XX века традиционно изучала обработку сигналов в базисе дискретного преобразования Фурье, реже – в базисе дискретного преобразования Уолша-Адамара, позднее широко стало применяться также косинусное преобразование и ряд других преобразований[4]. Основным свойством указанных преобразований является их ортогональность и наличие быстрых алгоритмов для их вычисления. Однако до середины 70-х годов XX века не существовало единого подхода к построению теории дискретных спектральных преобразований. Они рассматривались изолированно друг от друга, скорее на основе их физических, нежели математических свойств. Не существовало также обобщающих подходов к рассмотрению основных понятий цифровой обработки сигналов (свертка, сдвиг, корреляционная функция) в разных базисах с единых математических позиций. Такой подход был предложен в 1970-е – 1980-е годы Наумом Нисоновичем. Увидеть и развить серьезные и очень красивые алгебраические обобщения в области науки, которой занимались преимущественно инженеры, и которая изначально была далека от фундаментальной математики, мог только очень глубокий ученый. Эти обобщения позволили создать теорию цифровой обработки сигналов в произвольном базисе. Наум Нисонович обнаружил, что основные преобразования, используемые в цифровой обработке сигналов в 1960-е – начале 1970-х годов (преобразования Фурье и Уолша) состоят из характеров конечных абелевых групп (преобразование Фурье – из характеров циклической группы, а преобразование Уолша – из характеров диадической группы, достаточно подробный анализ этого факта приведен в монографии Наума Нисоновича [1]). В поисках ответа на вопрос, возможно ли рассмотреть другие преобразования, имеющие групповую природу, Наум Нисонович предложил рассмотреть систему дискретных функций Хаара и дискретное преобразование Хаара. Так появилась статья [30], в которой были введены в рассмотрение дискретные функции и дискретное преобразование Хаара и быстрый алгоритм для его вычисления, ставшие впоследствии очень популярными в цифровой обработке сигналов. В этой статье, кроме того, был предложен общий подход к построению преобразований, имеющих групповую природу. Рассмотрим основную идею этого подхода.

Пусть $Z_k = (0, 1, ..., k-1)$ — группа относительно операции сложения по $\mathrm{mod}\ k$ и $G_n = Z_k \oplus Z_k \oplus ... \oplus Z_k$ - прямая сумма n групп Z_k. Элемент α группы G_n - это n-мерный вектор с компонентами принадлежащими Z_k. Элементы $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ группы G_n будем нумеровать при помощи номеров, получающихся в виде сумм $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i k^{n-1}$. Тогда $G_n = \{\alpha | 0 \leq \alpha \leq k^n - 1\}$. Пусть U – унитарное пространство комплекснозначных функций, заданных на G_n, со скалярным произведением (f, g), определенным для любых $f, g \in U$ следующим образом:

[4]Одной из самых удачных обзорных монографий в данной области является N. Ahmed and K.R. Rao, Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, New York, 1975. Русский перевод: Н. Ахмед, К.Р. Рао, Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов, М.: радио и Связь, 1980.

$$(f,g)=\sum_{\alpha\in G_n} f(\alpha)\bar{g}(\alpha),$$

где $\bar{g}$ - функция, комплексно сопряженная к g. Рассмотрим группу комплекснозначных характеров группы G_n. Характер X_α, соответствующий элементу $\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_n)\in G_n$, определяется следующим образом:

$$\mathrm{X}_\alpha(\beta)=\varepsilon^{\alpha\beta},\ \beta=(\beta_1,...,\beta_n)\in G_n,$$

где ε - первообразный корень k-той степени из единицы, $\alpha\beta=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+...+\alpha_n\beta_n$. Характер $\mathrm{X}_{\mathbf{0}}=\mathrm{X}_{0...0}\equiv 1$ называется главным характером группы G_n, а характеры $\mathrm{X}_{\mathbf{k^{n-1}}}=\mathrm{X}_{10...0}$, $\mathrm{X}_{\mathbf{k^{n-2}}}=\mathrm{X}_{010...0}$, ..., $\mathrm{X}_{\mathbf{1}}=\mathrm{X}_{0...01}$ являются образующими группы характеров. Как хорошо известно, множество характеров группы G_n образует ортогональный базис пространства U. Матрица характеров порядка k^n выглядит следующим образом:

$$\mathrm{X}_n=\|a_{\alpha\beta}\|\,,\ a_{\alpha\beta}=\varepsilon^{\alpha\beta},\ 0\le\alpha\le k^n-1,\ 0\le\beta\le k^n-1.$$

Определим следующие k^n комплекснозначных функций, заданных на G_n и нумеруемых элементами группы G_n:

$$h_{0...0}(\beta)\equiv 1,\ \beta\in G_n,$$

$$h_{0...0\alpha_i\alpha_{i+1}...\alpha_n}(\beta_1,...,\beta_n)=\begin{cases}\varepsilon^{\alpha_i\beta_i},\ \text{если}\,(\beta_{i+1},...,\beta_n)=(\alpha_{i+1},...,\alpha_n)\,,\\ 0,\ \text{если}\ (\beta_{i+1},...,\beta_n)\ne(\alpha_{i+1},...,\alpha_n)\,,\end{cases}$$

где α_i - первая слева ненулевая компонента вектора $\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_n)$.

Функции $\{h_\alpha|\alpha\in G_n\}$ ортогональны:

$$(h_\alpha,h_\beta)=\begin{cases}k^i,\ \text{если}\ \alpha=\beta,\\ 0,\ \text{если}\ \alpha\ne\beta,\end{cases}$$

где α_i номер первой ненулевой компоненты вектора $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$. Таким образом, функции $\{h_\alpha|\alpha\in G_n\}$ формируют ортогональный базис пространства U.

Наряду с системой функций $\{h_\alpha|\alpha\in G_n\}$, можно определить другие системы функций с похожими свойствами. Пусть $S(n)$ - симметрическая группа перестановок n символов $1, 2, \ldots, n$. Операция перестановки $S(n)$ над элементами группы G_n определяется следующим образом. Пусть

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ j_1 & j_2 & \dots & j_n\end{pmatrix}\text{и}\quad \alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_n)\,.$$

Тогда $\sigma\ \alpha=(\alpha_{j_1},\ \alpha_{j_2},\ ...,\ \alpha_{j_n})$, т.е., операция сводится к перестановке компонент вектора α. Соответствие между α и $\sigma\alpha$ для каждого $\sigma\in S(n)$ и $\alpha\in G_n$ определяет автоморфизм группы G_n. Если f – некоторая функция, определенная на группе G_n, то перестановка $\sigma\in S(n)$ переставляет компоненты вектора $\alpha\in G_n$, т.е., $\sigma\ f(\alpha)=f(\sigma\ \alpha)$.

Если X - характер группы G_n, то σX также является характером группы G_n. В частности, $\sigma\mathrm{X}_0=\mathrm{X}_0$ и множество образующих группы характеров $\mathrm{X}_{k^{n-1}},...,\mathrm{X}_1$ отображается на себя через $\sigma\in S(n)$. Пусть σ_i автоморфизм группы, переставляющий первую и i–тую компоненты векторов, оставляя все остальные компоненты на их местах. В этом случае $X_{\mathbf{k}^{n-1}} = \sigma_i X_{\mathbf{k}^{n-1}}$. $\forall \sigma \in S(n)$ множество функций $\Omega_\sigma = \{\sigma\ h_\alpha | \alpha \in G_n\}$ является полной системой ортогональных функций, заданных на группе G_n. Очевидно, что: функции $\sigma\ h_\alpha$ принимают значения из множества $0,\ 1,\ \ldots,\ \varepsilon^{k-1}$; скалярное произведение $(\sigma\ h_\alpha, \sigma\ h_\alpha)$ всегда равно некоторой степени k; ненулевые коэффициенты, с которыми функции $\sigma\ h_\alpha$ входят в разложение генерируемых характеров, равны единице; характеры группы G_n представляются как следующие суммы:

$$\chi^r_{k^{n-1}} = \sum_{\alpha \in G_{n-1}} h_{r,\alpha} \text{ and } \chi^r_{k^{n-1}} = \sum_{\alpha \in G_{n-1}} \sigma_i h_{r,\alpha},\ (r = 1, 2, ..., k-1; i = 1, 2, ..., n).$$

Множество функций $\Omega_\sigma = \{\sigma\ h_\alpha | \alpha \in G_n,\ \sigma \in S(n)\}$ называется *k-системой функций Хаара* с меткой σ [30]. Для k=2 и $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n & n-1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ 2-система Ω_{σ_0} совпадает с классической системой функций Хаара[5] с точностью до нумерации функций в системе. Нормируя все функции $\sigma\ h_\alpha \in \Omega_{\sigma_0}$ при помощи нормы $\|\sigma\ h_\alpha\| = \sqrt{(\sigma\ h_\alpha, \sigma\ h_\alpha)}$, мы получаем ортонормальную k-систему функций $\Phi_\sigma = \{\sigma\varphi_\alpha | \varphi_\alpha = \sigma h_\alpha / \|\sigma h_\alpha\|\}$. Пусть D_n - матрица, состоящая из функций φ_α. Пусть $\mathbf{x} = \{x(0, ..., 0), ..., x(k-1, ..., k-1)\}$ вектор-строка значений функции (сигнала) $x(\alpha)$, заданной на элементах $\alpha \in G_n$. Преобразование, определяемое k-системой функций Хаара с меткой $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$

$$\mathbf{F_x} = \mathbf{x} D^*_n,$$

называется *преобразованием Хаара* сигнала $x(\alpha)$. Также в [30] были рассмотрены основные свойства преобазования Хаара и быстрый алгоритм его вычисления, а также быстрый алгоритм проверки однородности булевой функции с применением преобразования Хаара.

Дальнейшие исследования привели Наума Нисоновича к созданию строгой алгебраической теории цифровой обработки сигналов в произвольном базисе, обобщению основных понятий цифровой обработки сигналов (спектр, свертка, корреляционная функция) для произвольных невырожденных дискретных спектральных преобразований, к рассмотрению нового, неортогонального, но очень эффективного преобразования – конъюнктивного, нашедшего, например, множество применений при решении задач распознавания образов и в теории булевых функций. Эти результаты были получены в работах [31–33] и впоследствии обобщены в [34]. Рассмотрим основную идею предложенной теории. Пусть $A = (a_{ij})$ - произвольная невырожденная матрица порядка $N \times N$ над полем комплексных чисел C, и $\mathbf{a}_i = (a_{0i}, a_{1i}, ..., a_{N-1i})^T$ — i-тая строка матрицы A, $i, j = 0, 1, ..., N-1$. Столбцы матрицы A рассматриваются как функции, определенные на произвольном упорядоченном множестве $Q = \{q_0, q_1, ..., q_{N-1}\}$. Рассмотрим N-мерное линейное пространство V вещественнозначных функций, определенных на Q. Элементы пространства V будем представлять, как N-мерные векторы-столбцы над C. Умножение элементов $\mathbf{f} = (f_0,\ f_1,\ ...,\ f_{N-1})^T \in V$ и $\mathbf{g} = (g_0,\ g_1,\ ...,\ g_{N-1})^T \in V$ определяется как:

$$\mathbf{f} \circ \mathbf{g} = (f_0 g_0,\ f_1 g_1,\ ...,\ f_{N-1} g_{N-1})^T. \tag{2}$$

[5]Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. Москва: Физматгиз, 1958.

Линейное пространство V с определенным на нем произведением (2) образует алгебру. Обозначим ее $V(A, \circ)$. Упорядоченное множество

$$\{\mathbf{a}_0,\ \mathbf{a}_1,\ ...,\ \mathbf{a}_{N-1}\} \tag{3}$$

столбцов матрицы A образует базис этой алгебры. Произведение двух произвольных столбцов $\mathbf{a}_i \circ \mathbf{a}_j$ $i, j = 0, 1, ..., N-1$ матрицы A раскладывается по базису (3) следующим образом:

$$\mathbf{a}_i \circ \mathbf{a}_j = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{ij}^{(k)} \mathbf{a}_k, \tag{4}$$

где $\alpha_{ij}^{(k)}$ $i, j, k = 0, 1, ..., N-1$ - структурные константы алгебры $V(A, \circ)$. Из (4) следует, что $\mathbf{a}_i \circ \mathbf{a}_j = A\alpha_{ij}$, где $\alpha_{ij} = \left(\alpha_{ij}^{(0)}, \alpha_{ij}^{(1)}, ..., \alpha_{ij}^{(N-1)}\right)^T$. Отсюда $\alpha_{ij} = A^{-1}(\mathbf{a}_i \circ \mathbf{a}_j))$ и

$$\alpha_{ij}^{(k)} = \sum_{p=0}^{N-1} c_{kp} a_{pi} a_{pj}, \tag{5}$$

где $A^{-1} = (c_{ij})$, $i, j, k = 0, 1, ..., N-1$.

Если рассматривать элементы множества $Q = \{q_0, q_1, ..., q_{N-1}\}$, как равноудаленные точки на оси времени ($q_i = i,\ i = 0, 1, ..., N-1$), то всякая функция, определенная на Q, может рассматриваться как *дискретный сигнал*, заданный на конечном интервале.

Рассмотрим также алгебру $V(A, *)$, изоморфную алгебре $V(A, \circ)$, элементами которой являются сигналы над полем комплексных чисел C, заданные на Q. Произведение в алгебре $V(A, *)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}&(f_0, f_1, ..., f_N)^T * (g_0, g_1, ..., g_N)^T = \\ &= \left(\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} \alpha_{ij}^{(0)} f_i g_j,\ \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} \alpha_{ij}^{(1)} f_i g_j,\ ...,\ \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} \alpha_{ij}^{(N-1)} f_i g_j\right)^T.\end{aligned} \tag{6}$$

Произведение (6) называется A-сверткой сигналов [31–34]. *A-спектом* сигнала $\mathbf{f}$ называется матричное произведение $A\mathbf{f}$ [31, 32]. Классическая теорема о сверке, которая в течение многих лет рассматривалась исключительно для базиса Фурье, была доказана в [31] для произвольного базиса в следующей формулировке: A-спектр A-свертки сигналов $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ равен произведению A-спектров этих сигналов в алгебре $V(A, \circ)$:

$$A(\mathbf{f} * \mathbf{g}) = A\mathbf{f} \circ A\mathbf{g}. \tag{7}$$

Пусть $\mathbf{f} = (f_0, f_1, ..., f_{N-1})^T$ - дискретный сигнал, который определен на множестве (на конечном интервале) $\{0, 1, ..., N-1\}$, т.е., $f(x) = f_x$, $x = 0, 1, ..., N-1$. Сигнал

$$f^{(k)}(x) = f(x \div k) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_{jk}^{(x)} f(j),\ k = 0, 1, ..., N-1, \tag{8}$$

называется *A-сдвигом* сигнала $\mathbf{f}$ во времени на k [32].

Если A в (8) - преобразование Адамара-Уолша, A-сдвиг сигнала совпадает с классическим диадическим сдвигом, если A – дискретное преобразование Фурье, то A-сдвиг совпадает с циклическим сдвигом и т.д. Матрица $S^{(k)} = (s_{ij}) = A^{-1}(a_k \circ A)$ (где $s_{ij} = \alpha_{jk}^{(i)}$, а $\mathbf{a}_k$ – k-тый столбец матрицы A) называется матрицей сдвига сигнала на k отсчетов. Таким образом,

$$\mathbf{f}^{(k)} = S^{(k)}\mathbf{f}.$$

Поскольку $\alpha_{ij}^{(k)} = \alpha_{ji}^{(k)}$, то свертка (6), как следует из (7) и (8), может быть представлена следующим образом:

$$f * g(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)g(x \div k).$$

Теперь стало возможным определить и другие основные понятия цифровой обработки сигналов для случая произвольного базиса. *A-взаимно-корреляционная функция* $R_{\mathbf{fg}}$ сигналов $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ и, соответственно *A-автокорреляционная функция* $R_{\mathbf{f}}$ сигнала $\mathbf{f}$ определяются так [31, 32]:

$$R_{fg}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)g(x \div k), \quad R_f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)f(x \div k).$$

A-спектр мощности $\mathbf{e}_{\mathbf{f}}$ сигнала $\mathbf{f}$ и энергия $E_{\mathbf{f}}$ сигнала $\mathbf{f}$ определяются, соответственно, так [32, 34]: $\mathbf{e}_{\mathbf{f}} = A\mathbf{f} \circ \left(A^T\right)^{-1}\mathbf{f}$, $E_{\mathbf{f}} = \sum\limits_{k=0}^{N-1} f_k^2$.

В [31], развивая свою идею о том, что не только традиционные ортогональные преобразования Фурье, Уолша, косинусное имеют множество полезных свойств и быстрые алгоритмы для их вычисления, Наум Нисонович впервые ввел в рассмотрение новое спектральное преобразование дискретных сигналов – *конъюнктивное*, нашедшее впоследствии множество применений. Матрица конъюнктивного преобразования K_n порядка 2^n определяется как кронекеровская n-ая степень матрицы $K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$K_n = K_1^{\otimes n}.$$

Матрица K_n состоит из всех конъюнкций n булевых переменных рангов от 0 до n. Эта матрица замечательна тем, что, будучи кронекеровской n-ой степень матрицы второго порядка, допускает факторизацию в произведение n слабозаполненных матриц и, соответственно, конъюнктивное преобразование порядка $N = 2^n$ имеет быстрый алгоритм (подобно преобразованиям Фурье и Уолша-Адамара), требующий для вычисления конъюнктивного спектра выполнения всего $\frac{N}{2}\log_2 N$ операций сложения. Обратное конъюнктивное преобразование над полем действительных чисел определяется матрицей $K_n^{-1} = (K_1^{-1})^{\otimes n}$, где $K_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, а над полем из двух элементов матрица K_n обратна самой себе. В [33] было показано, что с помощью конъюнктивного преобразования строятся быстрые и очень эффективные алгоритмы отыскания тупиковых тестов и распознавания монотонности булевых функций. В [35] и [36] Наум Нисонович разработал быстрые методы решения систем булевых уравнений (см. также [37]), систем уравнений над полем действительных чисел с булевскими ограничениями и нахождения максимальных элементов частично упорядоченного множества двоичных векторов. Для решения всех этих задач также успешно применялось конъюнктивное преобразование.

Необходимо отметить еще целый ряд красивых и важных результатов, полученных Наумом Нисоновичем в сотрудничестве с коллегами и учениками в развитие теории цифровой обработки сигналов в произвольном базисе. В [38] понятие свертки сигналов в произвольном базисе обобщено и рассмотрено для многомерного случая. В [39] рассмотрена тесная связь между реальными оптическими системами обработки сигналов и их цифровыми моделями, строящимися при помощи математического аппарата обработки сигналов в произвольном базисе. В [40] впервые в мире решена обратная задача Карунена-Лоэва. Преобразование Карунена-Лоэва известно в цифровой обработке сигналов, как оптимальное преобразование для решения задач линейной фильтрации, сжатия информации, выявления наиболее важных спектральных составляющих сигнала (так называемых "главных компонент"). Поскольку это преобразование строится из собственных векторов ковариационной матрицы ансамбля конкретного класса сигналов, его построение является непростой задачей, очень затратной с точки зрения вычислительной сложности. Обратная задача Карунена-Лоэва состоит в том, чтобы найти для данного спектрального преобразования такой ансамбль сигналов, для которого это преобразование будет именно преобразованием Карунена-Лоэва. В [40] эта задача была впервые успешно решена для преобразования Уолша. В [41] основные понятия обработки сигналов в произвольном базисе рассмотрены для пары спектральных преобразований (в частности, введен в рассмотрение A-спектр B-свертки и на его основе обобщены остальные понятия). В [42] понятие функции Френеля обобщено для произвольного невырожденного дискретного спектрального преобразования. Функции Френеля были до этого известны из оптики для преобразования Фурье и позволяли выполнить преобразование Фурье посредством свертки (в оптике именно свертка является естественной, "физической", операцией). В [42] понятие функции и преобразования Френеля обобщено для случая произвольного невырожденного спектрального преобразования сигналов, получены необходимые и достаточные условия существования функций Френеля у спектрального преобразования, найдены функции и соответствующие им преобразования Френеля для преобразования Уолша. Позднее, в [43] было показано, что дискретное преобразование Фурье четного порядка имеет две функции Френеля, а нечетного – только одну. Рассматривая сверточную алгебру сигналов (см. выше), Наум Нисонович пришел к выводу, что сверточные алгебры могут использоваться для построения эффективных алгоритмов распознавания образов и одновременно для доказательства их корректности. Эта идея была обоснована и развита в работе [44]. Развивая идею, заложенную в природе конъюнктивного преобразования, Наум Нисонович предложил рассмотреть класс бинарных полиномиальных преобразований, которые наряду с конъюнктивным преобразованием могут найти успешное применение при решении задач технической диагностики и построении отказоустойчивых систем. Этот класс преобразований и их применения подробно рассмотрены в [45]. Наум Нисонович постоянно занимался поиском новых спектральных преобразований с полезными свойствами (наличие быстрого алгоритма для вычисления, простота вычисления обратного преобразования, возможность применения преобразования для решения прикладных задач). Так, в [46] рассмотрено золотое преобразование Фиббоначчи, являющееся обобщением ранее предложенного Наумом Нисоновичем преобразования Паскаля, и быстрый алгоритм его вычисления.

Цифровая обработка сигналов в произвольном базисе продолжает развиваться. Множество авторов используют конъюнктивное преобразование для решения самых разных задач в области технической диагностики, распознавания образов и синтеза схем. Дальнейшее развитие получили функции и преобразования Френеля, найденные в том числе и для конъюнктивного преобразования (они оказались замечательным образом связаны с золотым сечением).

6. Теория универсальных и многозначных нейронов. Термины "искусственный нейрон"и "искусственная нейросеть"стали широко использоваться, начиная с 1982 года, после публикации известной работы Дж. Хопфилда[6]. Очень быстро слово "искусственный"стали опускать, скорее добавляя слово "биологический", когда речь шла не о искусственных, а о естественных нейронах. В работе Дж. Хопфилда было предложено радикальное решение проблемы, вошедшей в научную литературу под названием "ограничение Минского-Пейперта"[7]. Рассматривая проблему функциональных возможностей классического порогового элемента, (который рассматривался, в частности, как упрощенная модель биологического нейрона, хотя нейроном в то время и не назывался), Минский и Пейперт показали, что пороговый элемент способен обучаться реализации только булевых пороговых функций, число которых уже даже для 4-х переменных ничтожно мало по сравнению с числом всех булевых функций. Для реализации непороговых функций необходимо было строить сети из пороговых элементов. Поскольку никаких общих подходов к построению таких сетей и их обучению тогда не существовало, это привело к быстрому падению в начале 1970-х годов интереса к булевой пороговой логике. Дж. Хопфилд предложил соединить пороговые элементы в сеть, в которой каждый элемент соединен с каждым, предложил называть элементы сети нейронами, показал, что функциональные возможности этой сети очень велики и предложил алгоритм обучения для этой сети. Появление данной работы способствовало очень быстрому возникновению новой области в кибернетике – теории нейросетей, которая включила в себя свою историческую предшественницу, пороговую логику. Выше мы рассказали о том, что в конце 60-х – в начале 70-х годов прошлого века Наум Нисонович создал многозначную пороговую логику и, соответственно, многозначный пороговый элемент. Естественно, что внимание, которое вновь привлекли к себе в начале 80-х булевы "пороговые"исследования, не могли пройти мимо его внимания. Вернувшись в начале 80-х годов к активным исследованиям в этой области, Наум Нисонович продолжал их до конца своей жизни, заложив основы

[6] Hopfield J. “Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities”, Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 79, 1982, pp. 2554-2558.

[7] Minsky, M. & Papert, S. Perceptrons: An Introduction to Computational Geometry/MIT Press, Cambridge, MA, 1969.

теории многозначных и универсальных нейронов. В [24] и в [1] было показано, что при $k=2$ многозначная пороговая логика превращается в булеву пороговую логику, а многозначный элемент в обычный пороговый элемент, хотя и с комплексными весами. Вопрос о том, возможно ли таким образом видоизменить активирующую функцию (1) элемента, чтобы при $k=2$ он реализовывал непороговые булевы функции, занимал Наума Нисоновича много лет. Сначала возникла идея, как решить эту задачу для булевых функций двух переменных (из которых непороговых только две – сумма по mod 2 и ее отрицание). Эта идея, состоящая в том, что для $k=2$ комплексную плоскость следует делить не на два сектора (как это делается с помощью функции (1), а на большее их число, была представлена в [47], где рассматривалась следующая активирующая функция, "разделяющая"комплексную плоскость на 4 сектора:

$$P(z) = \begin{cases} 1, \text{ если } (0 \leq \arg z < \pi/2) \vee (\pi \leq \arg z < 3\pi/2), \\ -1, \text{ если } (\pi/2 \leq \arg z < \pi) \vee (3\pi/2 \leq \arg z < 2\pi). \end{cases}$$

Таблица 1. Реализация функции сумма по mod 2

Номер набора	x_1	x_2	$z = w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2$ $W = (0,1,i)$	$P_B(z)$	$XOR = x_1 \oplus x_2$
1)	**1**	**1**	1+i	**1**	**1**
2)	**1**	**-1**	1- i	**-1**	**-1**
3)	**-1**	**1**	-1+i	**-1**	**-1**
4)	**-1**	**-1**	-1- i	**1**	**1**

Было показано, что при помощи этой активирующей функции на "новом пороговом"элементе реализуется классическая непороговая функция – сумма по mod 2, например, весовым вектором W=(0,1,i) (в чем легко убедиться из Таблицы 1), как, впрочем, реализуется и ее отрицание, и все остальные функции от двух переменных, являющиеся пороговыми. В [48] было предложено выбирать действительную и мнимую часть весов для "нового порогового"элемента в виде двоичных векторов, что облегчало его аппаратную реализацию [49, 50]. Одновременно, продолжая исследовать возможности универсального представления булевых функций, Наум Нисонович предложил идею реализации непороговых булевых функций на одном логическом элементе над кольцом классов вычетов. Аппаратная реализация такого элемента была предложена в [51], а в [52] и [53] данный подход был глубоко исследован, была показана связь активирующей функции, допускающей представление всех булевых функций заданного числа переменных над кольцом классов вычетов с -последовательностями (последовательностями максимальной длины). Вопрос расширения возможностей представления функций многозначной логики был исследован в [54], где было предложено параметрическое представление многозначных функций от n переменных над квазиполями при помощи $(n+1)$-мерных весовых векторов и активирующей функции (многозначного предиката).

Создавая новые логические (нейро-) элементы, Наум Нисонович также работал над тем, чтобы соединить их в сети, а также над новыми алгоритмами обучения и собственно нейронов, и сетей. Кроме сети Хопфилда, в конце 80-х – в начале 90-х годов прошлого века очень популярной стала клеточная нейросеть, в которой каждый нейрон соединен только с фиксированным количеством ближайших соседей из ограниченной окрестности. В [29] была предложена клеточная нейросеть из многозначных элементов (которые, начиная с этой работы, стали называться многозначными нейронами). Был предложен также алгоритм обучения этой сети, и рассмотрено ее использование в качестве ассоциативной памяти для хранения полутоновых изображений. В [55, 56] было рассмотрено понятие универсального бинарного (булевого) нейрона с комплексными весами, реализующего произвольные, а не только пороговые, булевы функции, обобщающее описанный выше "новый пороговый"элемент для функций любого числа переменных. В [56] был предложен алгоритм обучения этого нейрона, основанный на том, что его обучение можно свести к обучению многозначного нейрона. Активирующая функция универсального нейрона была получена путем обобщения активирующей функции (9). Для реализации всех функций от n переменных комплексная плоскость делится на m секторов, где $m \geq 2n$, и активирующая функция задается в виде альтернирующей последовательности 1, -1, 1, -1,… на этих секторах:

$$P(z) = (-1)^j, \text{ если } \quad 2\pi/j \leq \arg z < 2\pi/(j+1). \tag{9}$$

В [56] была предложена, а в [57] развита идея клеточной нейросети на универсальных нейронах. Клеточная нейросеть, в которой каждый нейрон соединен только с ближайшими соседями в заданном окне, очень удобна для решения задач обработки изображений. В [56, 57] было показано, как такая сеть может использоваться для реализации задачи точного выделения контуров на изображении. При этом выделение контуров сводилось к разделению изображения на бинарные срезы с последующей их обработкой при помощи булевых функций выделения контуров (рассматривались функции для выделения нисходящих, восходящих и глобальных перепадов яркости). Все эти функции от 9 переменных (9 – это как раз количество элементов изображения в локальном окне 3x3, в котором обычно производится выделение контуров) были непороговыми, однако легко реализовывались на универсальном нейроне при помощи нового алгоритма обучения. В [58] была предложена новая нейросеть на многозначных нейронах – со случайными связями, в которой каждый нейрон соединялся со случайно выбранным ограниченным количеством произвольно расположенных других нейронов. При использовании этой сети в качестве ассоциативной памяти для хранения изображений, даже при соединении каждого нейрона не более, чем с десятой частью остальных, она существенно превосходила по своим возможностям (количество сохраняемых изображений, устойчивость к шуму и возможность восстановления информации по фрагменту) ставшую к тому времени классической сеть Хопфилда. В [58, 59] был также предложен новый, вычислительно более эффективный, алгоритм обучения многозначного нейрона – алгоритм с коррекцией ошибки, обобщавший классический алгоритм обучения Ф. Розенблатта с коррекцией ошибки для порогового элемента. Если T – ожидаемый (правильный) выход нейрона, Y – реальный (но неправильный) выход нейрона, $W = (w_0, w_1, ..., w_n)$– $(n+1)$-мерный весовой вектор, $X = (x_1, ..., x_n)$ – n-мерный вектор входов и $\bar{x}$- число, комплексно сопряженное к x, то коррекция весов осуществляется по правилу:

$$\begin{aligned}\tilde{w}_i &= w_i + \tfrac{1}{(n+1)}(T-Y)\bar{x}_i; \quad i=1,...,n,\\ \tilde{w}_0 &= w_0 + \tfrac{1}{(n+1)}(T-Y).\end{aligned} \tag{10}$$

Алгоритм обучения (10), как оказалось, вообще не зависит от значности логики k в (1), и, как оказалось впоследствии, он успешно работает даже для непрерывного случая ($k \to \infty$), т.е., для бесконечнозначной логики[8]. В [58] было также показано, что многозначный нейрон может использоваться для предсказания временных рядов. В [60] многозначный нейрон был представлен как универсальный аппроксиматор, позволяющий восстанавливать потерянную информацию, а также прогнозировать поведение различных процессов. В [61] на основе алгоритма обучения (10) многозначного нейрона был предложен алгоритм обучения с коррекцией ошибки для универсального нейрона. В [61] и [62] этот алгоритм был использован для обучения и реализации на универсальном нейроне непороговых булевых функций обнаружения и фильтрации импульсного шума. Соответственно, фильтрация импульсного шума на изображениях была реализована на клеточной нейросети из универсальных нейронов. В [63] было предложено использовать многозначный нейрон для решения задач распознавания образов, в которых в качестве признаков, описывающих объекты, используются фазовые составляющие низкочастотных коэффициентов спектра Фурье изначальных представлений объектов (например, их изображений). Действительно, фазы, являющиеся попросту говоря аргументами комплексных спектральных коэффициентов Фурье, определяют не что иное, как точки на единичной окружности, являющиеся естественными входами для многозначного нейрона.

Отдельно необходимо отметить идею многозначной фильтрации, основанной на сглаживании дискретного k-значного сигнала при помощи нелинейной функции (1). Многозначная фильтрация изображений и ее реализация при помощи клеточной нейросети на многозначных нейронах была рассмотрена в [64]. Как оказалось, многозначная фильтрация весьма эффективна для фильтрации гауссовского аддитивного и мультпликативного (спекл) шума, а также для мягкого повышения локальных контрастов на изображении, что выражается в выделении либо самых мелких деталей, либо деталей заданных размеров. Эти очень полезные свойства многозначных фильтров (как и алгоритм точного выделения контуров) могут с успехом использоваться для решения задач улучшения качества медицинских изображений – выделения скрытых деталей, выявления структуры тканей и т.д. Применения клеточных нейросетей на многозначных и универсальных нейронах в обработке медицинских изображений рассматривалось в [65] для ультразвуковых изображений, а в [66] для рентгеновских и томографических изображений.

В [67] были рассмотрены булевы функции для выделения контуров по заданным направлениям, их реализация на универсальном нейроне и обработка с их

[8]Континуальный многозначный нейрон и нейросеть с прямым распространением сигнала и обучением с обратным распространением ошибки на таких нейронах были предложены в работе Aizenberg I. and Moraga C., "Multilayer Feedforward Neural Network based on Multi-Valued Neurons and a Backpropagation Learning Algorithm"// Soft Computing, vol. 11, No 2, January, 2007, pp. 169-183. К сожалению, Наум Нисонович уже не мог увидеть эту работу, являющуюся непосредственным развитием заложенных им идей.

помощью изображений на клеточной нейросети. В [68] многозначные фильтры, клеточные булевы фильтры (определяемые булевыми функциями выделения контуров и функциями обнаружения и фильтрации импульсного шума) были объединены единой концепцией клеточной нейрофильтрации. В [69] и [70] была предложена нейросеть из многозначных нейронов для решения задач распознавания изображений. В частности, в [70] она использовалась для решения задачи распознавания лиц. В [71] были подробно рассмотрены методы обработки изображений на клеточных нейросетях из многозначных и универсальных нейронов (фильтрация аддитивного и мультипликативного гауссовского шума, выделение контуров, выделение деталей заданных размеров).

Наиболее полным образом теория многозначных и универсальных нейронов, включающая и алгебраические, теоретико-групповые основы, вкратце рассмотренные выше, и алгоритмы обучения нейронов, и подробные доказательства всех фактов, и обзор применения полученных результатов для решения практических задач, была представлена в монографии [2], написанной Наумом Нисоновичем совместно с И.Н. Айзенбергом и Й. Вандевалле. Нужно отметить, что эта монография, вышедшая на английском языке в известном американо-голландском издательстве, сыграла большую роль в том, что очень много ученых из крупнейших научных центров разных стран стали использовать многозначные нейроны и сети из них для решения самых разных задач, прежде всего распознавания образов и классификации. Получили дальнейшее развитие и собственно многозначные нейроны. За последние годы были введены в рассмотрение нейроны с непрерывными входами и выходами, которыми в этом случае могут являться произвольные точки на единичной окружности, многослойная нейросеть на многозначных нейронах с алгоритмом обучения, который не требует дифференцируемости активирующей функции, с помощью этой новой сети было решено множество новых задач классификации, которые раньше либо не решались вообще, либо решались недостаточно хорошо. Был также усовершенствован алгоритм обучения универсального нейрона.

Заключение. Мы попытались очень кратко представить в этой статье Наума Нисоновича Айзенберга, и просто как Человека, и как Ученого. Статья получилась довольно большой с точки зрения стандартов журнальной статьи. Но вместе с тем мы смогли привести лишь краткое изложение основных научных результатов Наума Нисоновича со ссылками менее чем на половину опубликованных им работ. Его творческое наследие огромно, и, чтобы подробно остановиться только на основных результатах, придется выйти далеко за рамки одной журнальной статьи. Научные идеи Наума Нисоновича живы и продолжают развиваться, и это очень приятно. Любой человек жив столько, сколько живет он в памяти других людей, сколько помнят люди то хорошее, что им было сделано. К этому можно добавить еще, что большой Ученый жив столько, сколько работают и развиваются его научные идеи.

И. Н. Айзенберг (Texas A&M University-Texarkana (США))
И. В. Семйон (Ужгородский нац. ун-т)
А. И. Циткин (Metropolitan Telecommunications (США))

1. *Айзенберг Н. Н., Иваськив Ю. Л.*[9] Многозначная пороговая логика. – К.: Наук. думка, 1977.
2. *Aizenberg I. N., Aizenberg N. N. and Vandewalle J.* Multi-valued and universal binary neurons: theory, learning, applications. – Boston-Dordrecht-London: Kluwer Academic Publishers, 2000.
3. *Айзенберг Н. Н.* О представлениях полного произведения конечных групп // Укр. мат. журн. – 2001. – № 4. – С. 5-12.
4. *Айзенберг Н. Н.* О вычислении на АЦМ представлений силовской 2-подгруппы симметрической группы S_{2^n} // Доклады и сообщения УжГУ, серия физ-мат. наук. – 1961. – №4. – С. 73-75.
5. *Айзенберг Н. Н., Летичевский А. А.* О возможности вычисления представлений конечных групп на электронной цифровой машине // Доклады и сообщения УжГУ, серия физ-мат. наук. – 1962. – № 5. – С. 78-80.
6. *Айзенберг Н. Н., Летичевский А. А.* Об использовании электронных вычислительных машин для вычисления представлений одного класса конечных групп // Успехи математических наук. – Т. XVII. –1962. – № 6 (108). – С. 221.
7. *Айзенберг Н. Н., Летичевский А. А.* Прямые произведения конечных групп и их вычисление на ЭВМ // Кибернетика. – 1965. – №. 3. – С. 63-71.
8. *Айзенберг Н. Н.* О представлении функций k–значной логики полиномами по mod k // Кибернетика. – 1968. – № 2. – С. 102.
9. *Айзенберг Н. Н., Семйон И. В., Циткин А. И.* Мощность класса функций k-значной логики, представимых полиномами по модулю k // Многоустойчивые элементы и их применение. – М. – Советское радио. – 1971. – С.78-83.
10. *Айзенберг Н. Н., Семйон И. В.* Некоторые критерии представимости функций k-значной логики полиномами по модулю k // Многоустойчивые элементы и их применение. – М. – Советское радио. – 1971. – С. 84-88.
11. *Айзенберг Н. Н., Семйон И. В., Циткин А.И.* Полиномиальные представления логических функций. Автоматика и вычислительная техника. – 1971. – № 2. – С. 6-13.
12. *Айзенберг Н. Н., Француз А. Г.* Распознавание образов на конечном множестве операций // Проблемы бионики. Изд. Харьковского университета. – 1970. – Вып.4. – С. 70-74.
13. *Айзенберг Н. Н.* Простые тесторы // Доклады АН СССР. – 1971. – Т.201. – № 4. – С. 801-802.
14. *Айзенберг Н. Н., Циткин А. И.* Методы взвешивания признаков при распознавании образов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1971. – №3. – С. 132-138.
15. *Айзенберг Н. Н., Циткин А. И.* Разбиения и классификация // Кибернетика. – 1971. – № 3. – С. 147.
16. *Айзенберг Н. Н., Иваськив Ю. Л.* О групповых свойствах тестов, используемых в задачах диагностики, надежности и контроля // Кибернетика. – 1975. – № 5. – С. 156.
17. *Айзенберг Н. Н., Циткин А. И.* Применение вероятностей на конечных абелевых группах в тестовых методах распознавания образов // Кибернетика. – 1983. – № 1. – С. 91-98.
18. *Айзенберг Н. Н., Циткин А. И.* Вопросы применения простых тесторов // Кибернетика. – 1974. – № 1. – С. 135-141.
19. *Айзенберг Н. Н., Петрус В. С., Плахотнюк В. М., Самченко Н. М., Циткин А. И.* Применение тесторных методов для выбора оптимальных различающих признаков микроорганизмов. Микробиологический журнал. – 1974. – № 1. – С. 9-13.
20. *Айзенберг Н. Н., Корабельщикова Н. И., Лесик О. В.* Роль некоторых изменений обмена в возникновении осложнений беременности и родов у женщин, больных ревматизмом // Акушерство и гинекология. – 1974. – № 9. – С. 28-30.
21. *Айзенберг Н. Н., Рабинович З. Л.* Некоторые классы функционально полных систем операций и канонические формы представления функций многозначной логики // Кибернетика. – 1965. – № 2. – С. 37-46.

[9] Данный список литературы не является полной библиографией научных работ Н. Н. Айзенберга. Здесь приводятся только наиболее значимые публикации – монографии, журнальные статьи, статьи в сборниках, авторские свидетельства и патенты, ряд статей в трудах международных конференций, которые цитируются в тексте. Полная библиография насчитывает более 150 работ.

22. *Айзенберг Н. Н.* О представлении суммы по mod m в одном классе нормальных форм функций m –значной логики // Кибернетика. – 1965. – № 4. – С. 101-102.
23. *Айзенберг Н. Н., Иваськив Ю. Л., Поспелов Д. А.* Об одном обобщении пороговой функции // Доклады АН СССР. – 1971. – Т. 196. – № 6. – С. 1287-1290.
24. *Айзенберг Н. Н., Ивасьвив Ю. Л., Поспелов Д. А., Худяков Г. Ф.* Многозначные пороговые функции. Булевы комплексно-пороговые функции и их обобщение // Кибернетика. – 1971. – № 4. – С. 44-51.
25. *Айзенберг Н. Н., Ивасьвив Ю. Л., Поспелов Д. А., Худяков Г. Ф.* Многозначные пороговые функции. Синтез многозначного порогового элемента // Кибернетика. – 1973. – № 1. – С. 86-94.
26. *Айзенберг Н. Н., Ивасьвив Ю. Л., Поспелов Д. А., Худяков Г. Ф.* Элемент многозначной пороговой логики // Авторское свидетельство СССР № 340095, H 03 K 19/42, 7.12.1970.
27. *Айзенберг Н. Н., Ивасьвив Ю. Л.* Элемент многозначной пороговой логики // Авторское свидетельство СССР № 395985, H 03 K 19/42, 13.12.1971.
28. *Aizenberg N. N., Toshich Z.* A Generalization of the Threshold Functions // *Proceedings of the Electronic Department University of Belgrad.* – 1972. – No. 399. – P. 97-99.
29. *Aizenberg N. N., Aizenberg I. N.* CNN Based on Multi-Valued Neuron as a Model of Associative Memory for Gray-Scale Images // Proceedings of the Second IEEE International Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications,Munich. – 1992. – IEEE 92TH0498-6. – P. 36-41.
30. *Айзенберг Н. Н., Рудько В.П., Сысуев Е.В.* Функции и дискретное преобразование Хаара, Известия АН СССР. // Техническая кибернетика. – 1975. – № 6. – С. 86-94.
31. *Айзенберг Н. Н.* Спектр свертки дискретных сигналов в произвольном базисе // Доклады АН СССР. – 1978. – Т. 241. – № 3. – С. 551-554.
32. *Айзенберг Н. Н., Трофимлюк О. Т.* Сдвиг, свертка и корреляционная функция дискретных сигналов в произвольном базисе // Доклады АН СССР. – 1980. – Т. 250. – № 1. – С. 47-51.
33. *Айзенберг Н. Н., Трофимлюк О. Т.* Конъюнктивные преобразования дискретных сигналов и их применение для отыскания тестов и распознавания монотонности функций алгебры логики // Кибернетика. – 1981. – № 5. – С. 138-139.
34. *Aizenberg N. N., Aizenberg I. N., Astola J. and Egiazarian K.* An introduction to algebraic theory of discrete signals *Proceedings Of International Workshop on Transforms Filter Banks*, Tampere, Finland TICSP Series #1 (J. Astola – Ed.), February. – 1998. – P. 70–94.
35. *Айзенберг Н. Н.* Быстрые методы решения систем булевых уравнений и систем уравнений над полем действительных чисел с булевскими ограничениями // Кибернетика. – 1991. – № 3. – С. 126-127.
36. *Айзенберг Н. Н.* О максимальных элементах частично упорядоченного множества двоичных векторов // Кибернетика. – 1991. – № 4. – С. 165-166.
37. *Айзенберг Н. Н., Шмерко В. П., Кухарев Г. А.., Пак И. О., Климова Е. В.* Устройство для решения логических уравнений // Авторское свидетельство СССР № 1134015, G 06 F 7/00, 2.06.1983.
38. *Айзенберг Н. Н., Семирот М. С.* Свертка многовалентных дискретных сигналов в произвольном базисе // Цифровая обработка сигналов и ее применения.– М.: Наука. – 1981. – С. 3-12.
39. *Айзенберг Н. Н., Семирот М. С.* О цифровых аналогах оптических систем // Кибернетика. – 1984. – № 4. – С. 116-118.
40. *Айзенберг Н. Н., Семирот М. С., Поливко В. П.* Об обратной задаче Карунена-Лоэва // Радиотехника и электроника. – 1981. – Т. 26. – №. 4. – С. 778-782.
41. *Айзенберг Н. Н., Казмирчук А. А.* Применение пары спектральных преобразований дискретных сигналов для обобщения понятий: сдвиг свертка и корреляционная функция // Кибернетика. – 1987. – № 4. – С. 116-118.
42. *Айзенберг Н. Н., Бутаков В. Д., Кренкель Т. Э., Харбаш Я. Г.* Функции и преобразования Френеля для линейных невырожденных преобразований // Радиотехника и электроника. – 1984. – Т. 29. – №.4, С. 698-704.
43. *Aizenberg I. N., Aizenberg N. N., Astola J, Egiazarian K.* On generalized discrete Fresnel Transforms // Proceedings of IEEE Nordic Signal Processing Symposium (NORSIG-98), Vigso

(Denmark). – 1998. – P. 129-132.

44. *Айзенберг Н. Н., Журавлев Ю. И., Пилюгин С. В.* Применение сверточных алгебр для получения корректных распознающих алгоритмов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1987. – Т. 27. – № 6. – С. 912-923.

45. *Aizenberg N. N., Aizenberg I. N., Astola J, Egiazarian K.* Binary polynomial transforms with applications in technical diagnostics and signal processing // Proceedings Of International Workshop on Transforms Filter Banks, Tampere, Finland TICSP Series #1, February. – 1998. – P. 197-225.

46. *Aizenberg N., Aizenberg I., Stankovic M, Stankovic R., Astola J., and Egiazarian K.* "Calculation of Golden Fibonacci Transforms", Proceedings of International TICSP Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing, SMMSP'2001 (T.Saramaki, K.Egiazarian, J.Astola – Eds.), TICSP Series #13. – 2001ю – P. 25-32.

47. *Айзенберг Н. Н., Герго Э. И., Иваськив Ю. Л.* Многофункциональные настраиваемые логические модули с комплексными весами // Кибернетика. – 1985. – № 5. – С. 124-128.

48. *Айзенберг Н. Н., Герго Э. И., Иваськив Ю. Л.* Многофункциональные управляемые логические элементы с двоичными векторными весами и порогами // Кибернетика. – 1988. – № 3. – С. 108-111.

49. *Айзенберг Н. Н., Герго Э. И., Иваськив Ю. Л.* Многофункциональный элемент // Авторское свидетельство СССР № 118087, G 06 F 7/00, 27.12.1983.

50. *Айзенберг Н. Н., Герго Э. И., Иваськив Ю. Л., Семйон И. В.* Многофункциональный элемент // Авторское свидетельство СССР № 1451678, G 06 F 7/00, 2.06.1987.

51. *Айзенберг Н. Н., Айзенберг И. Н., Гавриков В. А., Пилюгин С. В., Юницкий Г. С.* Логический элемент // Авторское свидетельство СССР № 1343550, H 03 K 19/23, 2.07.1985.

52. *Айзенберг Н. Н., Иваськив Ю. Л., Пилюгин С. В.* Универсальные и многофункциональные логические элементы над кольцом классов вычетов - 1: // Кибернетика. – 1988. – №4. – С. 89-94.

53. *Айзенберг Н. Н., Иваськив Ю. Л., Пилюгин С. В.* Универсальные и многофункциональные логические элементы над кольцом классов вычетов - 2: // Кибернетика. – 1989. – №1. – С.1-8.

54. *Айзенберг Н. Н., Герго Э. И., Иваськив Ю. Л., Семйон И. В.* Многофункциональные настраиваемые логические модули на основе параметрического представления функций k-значной логики над квазиполями // Кибернетика. – 1991. – № 4. – С. 24-29.

55. *Aizenberg N. N., Aizenberg I. N., Pyshnyi M.* Ph. Multi-valued and Universal Basic Elements for CNN: Mathematical Model and Hardware Implementation // Proceedings of the 3-d International Conference "Microelectronics for Neural Networks". – Edinburgh, UK. – 1993. – P. 91-96.

56. *Aizenberg N. N., Aizenberg I. N.* Quickly Converging Learning Algorithms for Multi-Level and Universal Binary Neurons and Solving of the some image processing problems // Lecture Notes in Computer Science, (J.Mira, J.Cabestany, A.Prieto, Eds.) Vol. 686. – Springer-Verlag. – 1993. – P. 230-236.

57. *Aizenberg N. N., Aizenberg I. N.* CNN-like Networks Based on Multi-Valued and Universal Binary Neurons: Learning and Application to Image Processing // Proceedings of the Third IEEE International Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications. – Rome. – 1994. – IEEE 94TH0693-2. – P. 153-158.

58. *Aizenberg N. N., Aizenberg I. N., Krivosheev G. A.* Multi-Valued Neurons: Learning, Networks, Application to Image Recognition and Extrapolation of Temporal Series // Lecture Notes in Computer Science, Vol. 930 (J.Mira, F.Sandoval - Eds.)/ – Springer-Verlag. – 1995. – P. 389-395.

59. *Айзенберг Н. Н., Айзенберг И. Н., Кривошеев Г. А.* Нейросети на многозначных нейронах: обучение и применение в обработке и распознавании изображений // Компьютерная оптика. – 1995. – Т. 14-15. – Ч. 1. – С.179-186.

60. *Айзенберг Н. Н., Айзенберг И. Н., Кривошеев Г. А.* Способ обработки информации // Патент Российской Федерации № 2103737, G 06 F 17/10, H 03 K 19/23, 23.12.1994.

61. *Aizenberg N. N., Aizenberg I. N., Krivosheev G. A.* CNN based on Universal Binary Neurons: Learning algorithm with Error-Correction and Application to Impulsive-Noise Filtering on Gray-Scale Images // Proceedings of the Fourth International Workshop on Cellular Neural

Networks and their Applications. – Seville, Spain. – IEEE 96TH8180. – 1996. – P. 309-314.

62. *Aizenberg N. N., Aizenberg I. N., Krivosheev G. A.* Multi-Valued and Universal Binary Neurons : Mathematical Model, Learning, Networks , Application to Image Processing and Pattern Recognition, Proceedings of the 13-th International Conference on Pattern Recognition, Vienna, track D, IEEE Computer Society Press. – 1996. – P.185-189.
63. *Aizenberg I. N., Aizenberg N. N.* Universal binary and multi-valued neurons paradigm: conception, learning, applications // Lecture Notes in Computer Science. – Vol. 1240 (J.Mira, R.Moreno-Diaz, J.Cabestany - Eds.). – Springer-Verlag. – 1997. – P. 463-472.
64. *Aizenberg I. N., Aizenberg N. N.* Application of the neural networks based on multi-valued neurons in image processing and recognition // SPIE Proceedings. – Vol. 3307. – 1998. – P. 88-97.
65. *Aizenberg I. N., Aizenberg N. N., Gotko E. S.* Vandewalle J. Ultrasound medical image processing using cellular neural networks // Proceedings of the 6^{th} European Symposium on Artificial Neural Networks. – Brugge, Belgium, D-facto publications, Brussels. – 1998. – P. 315-320.
66. *Aizenberg I. N., Aizenberg N. N., Hiltner J., Moraga C. and Meyer zu Bexten E.* Cellular Neural Networks and Computational Intelligence in Medical Image Processing // Journal of Image and Vision Computing. – Vol. 19. – Feb. 2001. – P. 177-183.
67. *Aizenberg I. N., Aizenberg N. N., Vandewalle J.* Precise edge detection: representation by Boolean functions, implementation on the CNN // Proceedings of the Fifth IEEE International Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications. – London, UK. – 1998. – P. 301-306.
68. *Aizenberg I. N., Aizenberg N. N., Astola J., Bregin T., Butakov C., Egiazarian K.* New applications of the Nonlinear Cellular Neural Filters in Image Processing // SPIE Proceedings. – Vol. 3961. – 2000. – P.45-56.
69. *Aizenberg I. N., Aizenberg N. N., Krivosheev G. A.* Multi-valued and universal binary neurons: learning algorithms, application to image processing and recognition // Lecture Notes in Artificial Intelligence. – vol. 1715 (P.Perner, M.Petrou - Eds.). – Springer-Verlag. – 1999. – P. 21-35.
70. *Aizenberg I., Aizenberg N., Butakov C., Farberov E.* Image Recognition on the Neural Network based on Multi-Valued Neurons // Proceedings of the 15 th International Conference on Pattern Recognition. – Barcelona, Spain. – September 3-8, 2000. – IEEE Computer Society Press. – Vol. 2. – P. 993-996.
71. *Aizenberg I., Aizenberg N., Bregin T., Butakov C., Farberov E.* Image Processing Using Cellular Neural Networks Based on Multi-Valued and Universal Binary Neurons // Proceedings of IEEE 2000 International Workshop on Neural Networks for Signal Processing, Sydney, Australia, December 13-15, 2000. – IEEE Computer Society Press. – 2000. – P. 557-567.

Получено 08.10.2008