УДК 512.547.25

П. М. Гудивок, М. П. Желізняк (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО НЕРОЗКЛАДНІ МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННИХ 2-ГРУП НАД ЛОКАЛЬНИМИ ОБЛАСТЯМИ ЦІЛІСНОСТІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НУЛЬ

It's making up clear in the paper, when the set of the degrees of all indecomposable matrix representations of a finite 2-group over a noetherian local integral domain of characteristic zero with residue class field of characteristic 2 is finite.

З'ясовується, коли є скінченною множина степенів всіх нерозкладних матричних зображень скінченної 2-групи над нетеровою локальною областю цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2.

Нехай K — локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики p і $D(G,K)$ — множина степенів всіх нерозкладних матричних K-зображень скінченної групи G. Задача про скінченність множини $D(G,K)$ повністю розв'язана, якщо K — повне дискретно нормоване кільце ([1]– [5]), або G — p-група і K — кільце формальних степеневих рядів від змінних $x_1,\dots,x_m$ з коефіцієнтами із повного дискретно нормованого кільця ([6]– [7]).

В даній роботі вияснясться, коли множина $D(G,K)$ скінченна, якщо G — скінченна 2-група і K — нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2.

Лема 1 ([8]). *Нехай L — комутативне кільце з одиницею, G — скінченна група, $\Gamma : g \to \Gamma(g)$ — матричне L-зображення групи G ($g \in G$, $\Gamma(g) \in GL(n,L)$) і $W(\Gamma) = \{C \in M(n,L) \,|C\Gamma(g) = \Gamma(g)C, g \in G\}$, де $M(n,L)$ — множина всіх матриць порядку n над кільцем L. Якщо $W(\Gamma)$ — локальне кільце, то Γ є нерозкладним матричним L-зображенням групи G.*

Лема 2. *Нехай $H = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$—абелева 2-група типу $(2,2)$ $(a^2 = b^2 = e)$ і K — локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2. Множина $D(H,K)$ нескінченна.*

Доведення. Розглянемо наступне матричне K-зображення Γ_n групи H:

$$a \to \Gamma_n(a) = \begin{pmatrix} -E & 0 & 0 & J \\ 0 & E & E & 0 \\ 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

$$b \to \Gamma_n(b) = \begin{pmatrix} E & 0 & E & 0 \\ 0 & -E & 0 & E \\ 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

де E — одинична матриця порядка n і J — жорданова клітка порядку n з одиницями по головній діагоналі. Використовуючи лему 1 і доведення теореми 1 в [9], неважко показати, що зображення Γ_n є нерозкладним над кільцем K. Лема доведена.

Лема 3. *Нехай $H = \langle a \rangle$ — циклічна група порядку 4 і K — нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2. Множина $D(H, K)$ нескінченна, якщо $2K$ не є максимальним ідеалом кільця K.*

Доведення. Нехай $2K$ не є максимальним ідеалом кільця K. Тоді існує такий необоротний елемент t кільця K, що $t \notin 2K$. Із доведення теореми 4 в [9] випливає, що наступне матричне K-зображення Γ_n групи $H = \langle a \rangle$ буде нерозкладним:

$$\Gamma_n : \quad a \to \Gamma_n(a) = \begin{pmatrix} 0 & -E & tE & 0 \\ E & 0 & 0 & J \\ 0 & 0 & -E & tE \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Лема доведена.

Теорема 1. *Нехай G — скінченна 2-група порядку $|G| > 2$ і K — нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2. Множина $D(G, K)$ скінченна тоді і тільки тоді, коли G — циклічна група порядку 4 і $2K$ — максимальний ідеал кільця K.*

Доведення теореми випливає із лем 2–3 і [2]— [4].

Лема 4. *Нехай $H = \langle a \rangle$ — циклічна група порядку 2 і K — нетерове локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, яке не є дискретно нормованим кільцем. Якщо 2 не простий елемент кільця K, то множина $D(H, K)$ нескінченна.*

Доведення. Нехай

$$2 = \theta t_1^{r_1} \cdots t_s^{r_s} \quad (r_i \geqslant 1; i = 1, ..., s), \tag{1}$$

де $\theta \in K^*$ (K^* — мультиплікативна група кільця K), $t_1, ..., t_s$ — різні прості елементи кільця K, тобто $t_i \neq \theta_j t_j$ при $i \neq j$ ($\theta_j \in K^*$).

Розглянемо спочатку випадок, коли в (1) $s > 1$. Покажемо, що матричне K-зображення

$$\Gamma : \quad a \to \begin{pmatrix} E & t_1E + t_2J \\ 0 & -E \end{pmatrix} = \Gamma(a) \tag{2}$$

є нерозкладним K-зображенням групи $H = \langle a \rangle$. Скористаємось лемою 1. Нехай C така матриця порядку $2n$ над кільцем K, що

$$\Gamma(a)C = C\Gamma(a),$$

тобто

$$\begin{pmatrix} E & t_1E + t_2J \\ 0 & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & t_1E + t_2J \\ 0 & -E \end{pmatrix},$$

де C_i — матриця порядку n ($i = 1, 2, 3, 4$). Звідси одержуємо, що $C_3 = 0$ і

$$t_1C_4 + t_2JC_4 = t_1C_1 + t_2C_1J + 2C_2,$$

тобто

$$t_1(C_4 - C_1) + t_2(JC_4 - C_1J) = 2C_2.$$

Звідси випливає, що

$$C_4 \equiv C_1(modRadK),$$
$$JC_4 \equiv C_1J(modRadK).$$

Отже,

$$JC_1 \equiv C_1J(modRadK),$$

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix} (modRadK), \tag{3}$$

де $\alpha \in K$, $RadK$ — радикал кільця K.

Із (3) одержуємо, що C або $E' - C$ є оборотною матрицею над кільцем K (E' — одинична матриця порядку $2n$). Звідси і з леми 1 отримуємо, що зображення Γ виду (2) є нерозкладним K-зображенням групи $H = \langle a \rangle$.

Нехай далі в (1) $s = 1$ і $r_1 > 1$. Тоді існує такий простий елемент u кільця K, що $u \neq \theta' t_1$ ($\theta' \in K^*$). Аналогічно як і в попередньому випадку показується, що матричне K-зображення

$$\Gamma' : \quad a \to \begin{pmatrix} E & t_1E + uJ \\ 0 & -E \end{pmatrix} = \Gamma'(a)$$

буде нерозкладним K-зображенням групи $H = \langle a \rangle$. Лема доведена.

Лема 5. *Нехай $H = \langle a \rangle$ — циклічна група порядку 2 і K — нетерове локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, 2 — простий елемент кільця K і факторкільце $K/2K$ не є кільцем головних ідеалів. Тоді множина $D(H, K)$ нескінченна.*

Доведення. Нехай $\overline{K} = K/2K$ і $Rad\overline{K} = \overline{u}_1\overline{K} + ... + \overline{u}_r\overline{K}$, де $\overline{u}_1, ..., \overline{u}_r$ — мінімальна система твірних елементів $Rad\overline{K}$ ($r \geqslant 2$) і $\overline{u}_j = u_j + 2K$ ($u_j \in K; j = 1, ..., r$). Очевидно,

$$\Gamma : \quad a \to \begin{pmatrix} -E & u_1E + u_2J \\ 0 & E \end{pmatrix} = \Gamma(a)$$

буде нерозкладним K-зображенням групи $H = \langle a \rangle$. Лема доведена.

Лема 6. *Нехай K — нетерове не дискретно нормоване локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, 2 — простий елемент кільця K і факторкільце $\overline{K} = K/2K$ — кільце головних ідеалів. Всі нееквівалентні нерозкладні матричні K-зображення циклічної групи $H = \langle a \rangle$ порядку 2 вичерпуються такими зображеннями:*

$$\Delta_1 : a \to 1; \quad \Delta_2 : a \to -1;$$

$$\Gamma_i : \quad a \to \begin{pmatrix} -1 & u^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (i \in \mathbb{N});$$

$$\Gamma'_j : \quad a \to \begin{pmatrix} 1 & u^j \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (j \in \mathbb{N} \cup \{0\}),$$

де $Rad\overline{K} = \overline{u}\overline{K}$, $\overline{u} = u + 2K$ ($u \in K$), $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел.

Доведення. Очевидно, $RadK = 2K + uK$ і K/uK — дискретно нормоване кільце характеристики нуль, де $\overline{2} = 2 + uK$ — простий елемент кільця K/uK. Аналогічно як і у випадку $K = \mathbb{Z}_2[[x]]$ ([6]), де $\mathbb{Z}_2$ — кільце цілих 2-адичних чисел, доводиться, що всі нееквівалентні нерозкладні матричні K-зображення групи $H = \langle a \rangle$ вичерпуються зображеннями Δ_1, Δ_2, Γ_i $(i \in \mathbb{N})$, Γ_j' $(j \in \mathbb{N} \cup \{0\})$. Лема доведена.

Теорема 2. *Нехай G — скінченна 2-група порядку $|G| > 1$, K — нетерове локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, яке не є дискретно нормованим кільцем. Множина степенів всіх нерозкладних матричних K-зображень групи G скінченна тоді і тільки тоді, коли G — група порядку 2, 2 — простий елемент кільця K і $RadK/2K$ — головний ідеал кільця $K/2K$.*

Доведення теореми випливає із теореми 1 і лем 4–6.

1. *Берман С. Д., Гудивок П. М.* О целочисленных представлениях конечных групп // ДАН СССР. – 1962. – 145, №6. – С. 1199-1201.
2. *Берман С. Д., Гудивок П. М.* Неразложимые представления конечных групп над кольцом целых p-адических чисел // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1964. – 28, №4. – С. 875-910.
3. *Heller A., Reiner I.* Representations of cyclic groups in rings of integers. I, II // Ann. Math. – 1962. – 76. – P. 73-92; 1963. – 77. – P. 318-328.
4. *Гудивок П. М.* Представления конечных групп над числовыми кольцами // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1967. – 31, №4. – С. 799-834.
5. *Jacobinski H.* Sur les ordres commutatifs avec un nombre fini de réseaux indécomposables // Acta Math. – 1967. – 118. – P. 1-31.
6. *Гудивок П. М., Орос В. М., Ройтер А. В.* О представлениях конечных p-групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми p-адическими коэффициентами // Укр. матем. ж. – 1992. – 44, №6. – С. 753-765.
7. *Бондаренко В. М., Гудивок П. М.* О представлениях конечных p-групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми p-адическими коэффициентами // Сб. Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры, Киев, Институт матем. НАН Украины. – 1993. – С. 5-14.
8. *Каш Ф.* Модули и кольца. – М.: Мир, 1981. – 368 с.
9. *Гудивок П. М., Желізняк М. П.* Про нерозкладні матричні зображення скінченних p-груп над локальними областями цілісності характеристики нуль // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем і інформ. – 2007. – Вип. 14-15. – С. 22-32.

Одержано 20.10.2008