УДК 512.86

**А. О. Кирилюк** (Ужгородський нац. ун-т)

# ПЕРША ГРУПА КОГОМОЛОГІЙ ДЛЯ НЕЗВІДНИХ 3-ПІДГРУП ГРУПИ $GL(3,\mathbb{Z}[\varepsilon])$

The descriptions of the classes of cocycles of finite irreducible nilpotent subgroups of group $GL(3,\mathbb{Z}[\varepsilon])$, $\varepsilon^3=1$, $\varepsilon\neq 1$ are given in the paper.

У роботі дано описання класів коциклів скінченних незвідних нільпотентних підгруп групи $GL(3,\mathbb{Z}[\varepsilon])$, $\varepsilon^3=1$, $\varepsilon\neq 1$.

В $[1,2]$ розглянуто узагальнення класичних кристалографічних груп на деякі кільця $R$. Використовуючи результати [3], у роботі [4] дане описання двовимірних $R$-кристалографічних груп для кільця $R$ цілих величин квадратичного розширення поля раціональних 2-адичних чисел $\mathbb{Q}_2$. В даній роботі описуються класи коциклів скінченних незвідних нільпотентних підгруп групи $GL(3,\mathbb{Z}[\varepsilon])$ $(\varepsilon^3=1,\varepsilon\neq 1)$ із значеннями в адитивній групі $C^3$, де $C=\mathbb{C}^+/\mathbb{Z}[\varepsilon]^+$.

Як показано в [5], група $GL(3,\mathbb{Z}[\varepsilon])$ містить наступні незвідні неспряжені 3-підгрупи:
1) максимальні: $U_0=\langle diag[\varepsilon,1,1],b\rangle$ ($b$ — матриця підстановки $(1,2,3)$), яка також може бути представлена у вигляді
$U_0=\left\langle a=\begin{pmatrix}0&0&\varepsilon\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},b \mid a^9=b^3=(ab^{-1})=1,b^{-1}a^3b=a^3,(ba)^3=a^3\right\rangle$; $U_1=$ $=T_1^{-1}U_0T_1, U_2=T_2^{-1}U_0T_2$, де $T_1=\begin{pmatrix}t&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}, T_2=\begin{pmatrix}t&0&1\\0&t&1\\0&0&1\end{pmatrix}, t=\varepsilon-1;$
2) мономіальні неабелеві: $V_0=\langle a_0=diag[\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon],a_1=diag[1,\varepsilon,\varepsilon^2],b\rangle$ $(a_0a_1=$ $=a_1a_0,a_0b=ba_0,b^{-1}a_1b=a_0a_1)$, $V_1=T_1^{-1}V_0T_1$, $V_2=T_2^{-1}V_0T_2$, $W_0=\langle a_1,a\rangle$, $(a_1^3=a^9=1,a_1^{-1}aa_1=a^4)$, $W_1=T_1^{-1}W_0T_1$, $W_2=T_2^{-1}W_0T_2$.
3) циклічна $A=\langle a|\ a^9=1\rangle$.

Знайдемо першу групу когомологій $H^1\big(U_0,C^3\big)$. Оскільки $(a-1)$ оборотна над $\mathbb{C}$ матриця, то в кожному класі коциклів групи $U_0$ в групі $C^3$ міститься коцикл $f$ такий, що $f(a)=0$.

Нехай $f(b)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ $(\beta_i\in C), i=1,2,3$. Із умови

$$(b^2+b+1)f(b)=0 \tag{1}$$

випливає, що $\beta_1+\beta_2+\beta_3=0$. Отже, $f(b)=(\beta_1,\beta_2,-\beta_1-\beta_2)$.

Умова $b^{-1}a^3b=a^3$ дає $b^{-1}a^3f(b)+b^{-1}f(a^3)+f(b^{-1})-f(a^3)$. А оскільки $f(a^i)=$ $=0$ $\forall i\in\mathbb{N}$ та $f(b^{-1})=-b^{-1}f(b)$, то

$$(a^3-1)f(b)=0, \tag{2}$$

звідки одержуємо $t\beta_j=0$, $t=\varepsilon-1$, $j=1,2,3$.

Співвідношення $(ab^{-1})^3=1$ та $(ba)^3=a^3$ призводять до умов

$$\begin{cases}\big((ab^{-1})+ab^{-1}+1\big)f(b)=0,\\ \big((ab)+ab+1\big)f(b)=0.\end{cases}$$

Ці умови виконуються в силу умов $t\beta_i = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Нехай $h$ — кограниця, що визначається вектором $x = (x_1, x_2, x_3)$ $\big(x_i \in C^3\big)$ і $f_1 = f + h$. Зберігаючи умову $f_1(a) = 0$, одержимо

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \varepsilon \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

тобто $x_3 = x_2 = x_1$, $tx_1 = 0$. Таким чином $x = (x_1, x_1, x_1)$ $(tx_1 = 0)$. Тоді $h(b) = (b-1)x = 0$. Неважко переконатись, якщо $x \in \mathbb{C}$ і $tx \in \mathbb{Z}[\varepsilon]$, то $x \in x_0 + \mathbb{Z}[\varepsilon]$, де $x_0 \in \{0, t^{-1}, 2t^{-1}\}$.

Таким чином, ми довели наступне твердження.

**Теорема 1.** *В кожному класі коциклів групи $U_0$ в групі $C^3$ існує єдиний коцикл $f$ такий, що $f(a) = 0$, $f(b) = (\beta_1, \beta_2, -\beta_1 - \beta_2)$, де $t\beta_1 = t\beta_2 = 0$. Група $H^1\big(U_0, C^3\big)$ є елементарною абелевою групою типу* (3, 3).

Знайдемо групу $H^1\big(U_1, C^3\big)$, де

$$U_1 = \left\langle a' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, b' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Аналогічно попередньому випадку $f(a') = 0$ і $f(b') = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $t\beta_i = 0$, $i = 1, 2, 3$.

З умови $(1 + b' + (b')^2)f(b') = 0$ та

$$T_1^{-1}(1 + ab + (ab)^2)T_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

слідує $f(b') = (\beta_1, \beta_2, -\beta_2)$.

Нехай $Z = (z_1, z_2, z_3)$, $z_i \in C^3$. Додавши кограницю, зберігаючи умову $f_1(a') = 0$, отримаємо

$$(a' - 1)Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = 0,$$

звідки $z_3 = 0$, $tz_1 - z_2 = 0$, $z_2 = 0$, $tz_1 = 0$. Отже, $Z = (z_1, 0, 0)$, $tz_1 = 0$. З умови $(b'-1)Z + f(b') = f_1(b')$ не отримуємо жодних уточнень, тому $f(b') = (\beta_1, \beta_2, -\beta_2)$, $t\beta_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Тим самим доведено наступне.

**Теорема 2.** *В кожному класі коциклів групи $U_1$ в групі $C^3$ існує єдиний коцикл $f$ такий, що $f(a') = 0$, $f(b') = (\beta_1, \beta_2, -\beta_2)$, де $t\beta_1 = t\beta_2 = 0$. Група $H^1(U_1, C^3)$ є абелевою групою типу* (3, 3).

Знайдемо групу $H^1\big(U_2, C^3\big)$, де

$$U_1 = \left\langle a'' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}, b'' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Як і раніше $f(a'')=0$. Оскільки

$$T_2^{-1}C_2T_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то з умови $T_2^{-1}C_2T_2 f(b')=0$ слідує $\beta_3=0$. Додавши кограницю, отримаємо:

$$f(a'')+(a''-1)Z = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = 0,$$

тому $z_1=2z_2$, $tz_2=0$, $z_3=z_1+z_2=z_3=0$ і $Z=(2z_2,z_2,0), tz_2=0$. Аналогічно

$$f(b'')+(b''-1)Z = f(b'')+ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2z_2 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f(b''),$$

звідки $f(b'')=(\beta_1,\beta_2,0), t\beta_i=0, i=1,2$. Тому $H^1(U_2,C^3)$ є абелевою групою типу $(3,3)$.

**Теорема 3.** *В кожному класі коциклів групи $U_2$ в групі $C^3$ існує єдиний коцикл $f$ такий, що $f(a'')=0$, $f(b'')=(\beta_1,\beta_2,0)$, де $t\beta_1=t\beta_2=0$. Група $H^1(U_2,C^3)$ є абелевою групою типу* (3, 3).

Знайдемо групу $H^1(V_0,C^3)$.

Очевидно $f(a_0)=0$ і нехай $f(a_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $f(b)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$. З властивостей твірних елементів $(a_0-1)f(a)=0$, $(a_0-1)f(b)=0$ отримаємо відповідно $t\alpha_1=0$, $t\beta_i=0$, $i=1,2,3$. З (1), (2) слідує $\beta_3=-\beta_1-\beta_2$.

Нехай $h$ — кограниця, яка визначається вектором $x=(x_1,x_2,x_3)$ $\big(x_j\in C^3\big)$ і $f_1=f+h$. Зберігаючи умову $f_1(a_0)=0$, одержимо $(a_0-1)X=0$, тобто $tx_i=0$,

$$f_1(b)=f(b)+(b-1)X = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ -\beta_1-\beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1+x_3 \\ x_1-x_2 \\ x_2-x_3 \end{pmatrix}.$$

Візьмемо $x_3=-\beta_1, x_2=\beta_2, x_1=0$, тоді $f_1(b)=0$. Отже, $f(b)=0$.

Із співвідношення $b^{-1}a_1ba^{-1}=0$ випливає $b^{-1}a_1bf(a_1^{-1})+b^{-1}a_1f(b)+b^{-1}f(a_1)+ + f(b^{-1})=0$ або $(-b^{-1}a_1ba_1^{-1})f(a_1)=0$, $(b^{-1}-a_0)f(a_1)=0$, тобто $tf(a_1)=0$, а тому ми не отримали жодних нових обмежень. Таким чином, доведено теорему.

**Теорема 4.** *В кожному класі коциклів групи $V_0$ в групі $C^3$ існує єдиний коцикл $f$ такий, що $f(a_0)=f(b)=0$, $f(a_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, де $t\alpha_i=0$. Група $H^1\big(V_0,C^3\big)$ є елементарною абелевою 3-групою типу* (3, 3, 3).

Знайдемо групу $H^1(V_1,C^3)$.

$$V_1=\left\langle a_0, a_1'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon t \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, b'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right\rangle.$$

Легко бачити, що $f(a_0) = 0$. З умови $(a_0 - 1)Z = 0$, при $Z = (z_1, z_2, z_3)$, отримаємо $tz_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Нехай $f(a_1') = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, тоді, додавши кограницю, отримаємо

$$(a_1' - 1)Z + f(a_1') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & t & \varepsilon t \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + f(a_1') = \begin{pmatrix} \alpha_1 + z_1 + z_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Виберемо $\alpha_1 + z_1 + z_2 = 0$, тоді $f(a_1') = (0, \alpha_2, \alpha_3)$, $Z = (z_1, -z_1, z_3)$.
Оскільки $(b' - a_0)f(a_1') = 0$, то

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix},$$

звідки $\alpha_3 = -\alpha_2$, $f(a_1') = (0, \alpha_2, -\alpha_2)$.

Додамо кограницю

$$(b' - 1)Z + f(b') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ -z_1 \\ z_3 \end{pmatrix} + f(b') = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ z_1 - z_3 + \beta_2 \\ -z_1 - 2z_3 + \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Виберемо $z_3 = z_1 - \beta_2$, тоді $f(b') = (\beta_1, 0, \beta_3)$. Інші співвідношення не дають нових обмежень. Тому має місце наступне твердження.

**Теорема 5.** *В кожному класі коциклів групи $V_1$ в групі $C^3$ існує єдиний коцикл $f$ такий, що $f(a_0') = 0$, $f(a_1') = (0, \alpha_2, -\alpha_2)$, $f(b') = (\beta_1, 0, \beta_3)$, де $t\alpha_2 = t\beta_i = 0$. Група $H^1\big(V_1, C^3\big)$ є елементарною абелевою 3-групою типу* (3, 3, 3).

Знайдемо групу $H^1(V_2, C^3)$.

$$V_2 = \left\langle a_0, a_1'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon^2 \\ 0 & \varepsilon & -\varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, b'' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, f(a_0) = 0.$$

Нехай $f(a_1'') = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $f(b'') = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Неважко переконатись, що $t\alpha_i = 0$, $t\beta_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Аналогічно попередньому випадку одержимо $f(a_1'') = (0, 0, \alpha_3)$, $f(b'') = (0, \beta_2, \beta_3)$. Отже, ми довели теорему 6.

**Теорема 6.** *В кожному класі коциклів групи $V_2$ в групі $C^3$ існує єдиний коцикл $f$ такий, що $f(a_0'') = 0$, $f(a_1'') = (0, 0, \alpha_3)$, $f(b'') = (0, \beta_2, \beta_3)$, де $t\alpha_3 = t\beta_i = 0$. Група $H^1\big(V_2, C^3\big)$ є елементарною абелевою* 3*-групою типу* (3, 3, 3).

Відшукаємо групу $H^1(W_0, C^3)$.

Очевидно $f(a) = 0$ і нехай $f(a)_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $3\alpha_1 = 0$. З умови $a_1^{-1}aa_1 = a^4$ одержуємо $(a - 1)f(a_1) = 0$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \varepsilon \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0,$$

звідки $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, $t\alpha_1 = 0$. Тим самим доведено наступну теорему.

**Теорема 7.** *В кожному класі коциклів групи $W_0$ в групі $C^3$ існує єдиний коцикл $f$ такий, що $f(a) = 0$, $f(a_1) = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1)$, де $t\alpha_1 = 0$. Група $H^1\big(W_0, C^3\big)$ є циклічною групою порядку 3.*

Знайдемо групу $H^1(W_1, C^3)$.

$$W_1 = \left\langle a' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, a_1' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon t \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Як показано раніше $f(a) = 0$, $f(a_1') = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $t\alpha_i = 0$. Кограниця $(a' - 1)Z = 0$, тому $z_3 = 0$, $tz_1 = 0$, $z_2 = 2z_3 = 0$, $Z = (z_1, 0, 0)$. З умови $a_1^{-1}\,'a\,'a_1\,' = a^4\,'$ одержуємо $(a' - 1)f(a_1') = 0$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0,$$

звідки $\alpha_2 = \alpha_3$, $f(a_1') = (\alpha_1, 0, 0)$. Додамо кограницю

$$(a' - 1)Z + f(a_1') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & t & \varepsilon t \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + f(a_1') = f(a_1').$$

Ми не отримали нових уточнень. Тим самим доведено твердження.

**Теорема 8.** *В кожному класі коциклів групи $W_1$ в групі $C^3$ існує єдиний коцикл $f$ такий, що $f(a') = 0$, $f(a_1' = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1)$, де $t\alpha_1 = 0$. Група $H^1\big(W_1, C^3\big)$ є циклічною групою порядку 3.*

Нарешті знайдемо групу $H^1(W_2, C^3)$.

$$W_2 = \left\langle a_1'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon^2 \\ 0 & \varepsilon & -\varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, a'' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$f(a'') = 0$, $f(a_1'') = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $t\alpha_i = 0$. Аналогічно попередньому випадку, одержимо $f(a_1'') = (\alpha_1, -\alpha_1, 0)$, $t\alpha_1 = 0$. Отже, $H^1(W_2, C^3)$ є циклічною групою порядку 3. Тому має місце наступна теорема.

**Теорема 9.** *В кожному класі коциклів групи $W_2$ в групі $C^3$ існує єдиний коцикл $f$ такий, що $f(a'') = 0$, $f(a_1'') = (\alpha_1, -\alpha_1, 0)$, $t\alpha_1 = 0$. Група $H^1\big(W_2, C^3\big)$ є циклічною групою порядку* 3.

1. *П. М. Гудивок, В. П. Рудько, В. А. Бовді.* Кристалографічні групи. – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т., 2006. – 173 с.
2. *V. A. Bovdi, V. P. Rudko.* Extensions of the representations modules of a prime order // Journal of Algebra – 2006. – P. 441–451.
3. *Кирилюк А. А.* О неприводимых $p$-подгруппах группы $GL(q, R_p)$ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2003. – Вип. 8. – С. 63–69.
4. *Кирилюк А. О.* 2-адичні кристалографічні групи // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2006. – Вип. 12–13. – С. 75–82.
5. *Гудивок П. М., Кирилюк А. О., Кирилюк О. А.* Незвідні скінченні нільпотентні підгрупи групи $GL(pq, \mathbb{Z})$ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2007. – Вип. 14-15. – С. 33–40.

Одержано 11.10.2008