УДК 517.9

І. І. Король (Ужгородський нац. ун-т)

ІНТЕГРУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

In this paper the numerical-analytic method for investigating of the problem of existing and approximate constructing of the solutions of the boundary value problem for nonlinear systems of differential equations with delay is suggested.

У роботі розглядається чисельно-аналітичний метод дослідження існування та наближеної побудови розв'язків крайової задачі для нелінійних систем диференціальних рівнянь з запізненням.

Диференціальні рівняння з запізнюючим аргументом знаходять широке застосування при дослідженні процесів у механіці, автоматичному керуванні, економіці, біології тощо. Через це теорія рівнянь з запізненням досліджувалася в багатьох роботах, зокрема [1–4]. У даній роботі для дослідження розв'язків нелінійних диференціальних систем з запізненням, підпорядкованих лінійним крайовим умовам, обгрунтовано чисельно-аналітичний алгоритм, який був раніше запропонований для дослідження періодичних розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь [5], та використано ідеї теорії функціонально-диференціальних рівнянь, викладені в [1].

1. Постановка задачі. Розглянемо питання існування та наближеної побудови розв'язків системи нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням

$$\begin{gathered} \tfrac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{p} A_i(t)x(h_i(t)) + g(t, x(h_1(t)), \cdots, x(h_p(t))),\ t \in [a,b], \\ x(s) = u(s),\ s \notin [a,b], \end{gathered} \tag{1}$$

де $t \in [a,b]$, $A_i(t)$ — $(n \times n)$-вимірні матриці, $h_i : [a,b] \to \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R} \setminus [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ — деякі задані інтегровні функції, $N = np$, $h_i(t) \leq t$, які підпорядковані загальним функціональним крайовим умовам

$$\ell x = \alpha \tag{2}$$

де $\ell : D^n \to \mathbb{R}^n$ — n-вимірний обмежений лінійний вектор-функціонал, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $D^n = D^n[a,b]$ — простір абсолютно неперервних функцій $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ з нормою $\|x\| = |x| = col(|x_1|, \cdots, |x_n|)$.

Позначимо [1]

$$(S_h x)(t) = \begin{cases} x(h(t)), & h(t) \in [a,b], \\ 0, & h(t) \notin [a,b], \end{cases}$$

$$u_h(t) = \begin{cases} 0, & h(t) \in [a,b], \\ u(h(t)), & h(t) \notin [a,b]. \end{cases}$$

При цьому рівняння (1) запишеться так:

$$\tfrac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{p} A_i(t)(S_{h_i}x)(t)) + f(t, (S_{h_1}x)(t), \cdots, (S_{h_p}x)(t)),$$

де

$$f(t,(S_{h_1}x)(t),\cdots,(S_{h_p}x)(t))=g(t,x(h_1(t))+u_{h_1}(t),\cdots,x(h_p(t))+u_{h_p}(t))+\sum_{i=1}^{p}A_i(t)u_{h_i}(t),$$

або у вигляді

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)(S_hx)(t)+f(t,(S_hx)(t)), \tag{3}$$

де $A(t)=(A_1(t),\cdots,A_p(t))$ — $(n\times N)$-вимірна матриця, складена з $(n\times n)$-вимірних матриць $A_i(t)$, $u_h(t)=col(u_{h_1}(t),\cdots,u_{h_p}(t))$, $(S_h)(t)=col((S_{h_1}x)(t),\cdots,(S_{h_p}x)(t))$. Будемо вважати, що оператор S_h діє з простору D^n у простір $L^N=\underbrace{L^n\times\cdots\times L^n}_{p}$, де L^n — банахів простір інтегровних на $[a,b]$ вектор-функцій $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$.

Під розв'язком диференціальної системи (3) будемо розуміти [1] абсолютно неперервну на $[a,b]$ функцію $x(t)\in D^n$ з інтегровною на $[a,b]$ похідною: $\dot{x}(t)\in L^n$, яка задовольняє систему (3) майже всюди на $[a,b]$.

2. Лінійна крайова задача. Спочатку розглянемо лінійну неоднорідну диференціальну систему з запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)(S_hx)(t)+w(t), \tag{4}$$

$w\in L^n$, підпорядковану лінійним функціональним крайовим умовам (2). Згідно теореми Ф. Рісса [6], для будь-якого лінійного функціонала ℓ, заданого на просторі D^n абсолютно неперервних на $[a,b]$ функцій, існує неперервна зліва матрично-значна функція $C(t)$ обмеженої варіації така, що лінійний функціонал можемо записати за допомогою інтеграла Рімана-Стілтєса. Таким чином, крайові умови (2) можемо записати у вигляді

$$\int_a^b \big[dC(t)\big]x(t)=\alpha. \tag{5}$$

Відомо [1, 2], що розв'язок рівняння (1) з початковою умовою $x(a)=x_0$ має вигляд

$$x(t)=X(t)x_0+\int_a^t X(t,s)w(s)ds, \tag{6}$$

де $X(t,s)$ — $(n\times n)$-вимірна матриця Коші, яка при кожному фіксованому s є розв'язком матричної задачі Коші

$$\frac{\partial X(t,s)}{\partial t}=A(t)(S_hX(\cdot,s)(t),\quad X(s,s)=I_n.$$

Тут $X(t)=X(t,a)$ — фундаментальна $(n\times n)$-вимірна матриця відповідної (4) лінійної однорідної системи

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)(S_hx)(t), \tag{7}$$

$X(a,a) = I_n$ — одинична матриця, а через $(S_hX(\cdot,s)(t)$ позначено $(n\times N)$-вимірну матрицю, стовпці якої отримуються при застосуванні оператора внутрішньої суперпозиції S_h до відповідних стовпців $(n{\times}n)$-вимірної матриці $X(t,s)$ як до n-вимірних вектор-функцій. Підставляючи (6) у крайові умови (5), бачимо, що початкове значення x_0 розв'язку крайової задачі (2), (4) повинно задовольняти алгебраїчну систему рівнянь

$$Gx_0 = \alpha - \int\limits_a^b Z(s)w(s)ds, \tag{8}$$

де

$$Z(s) = \int\limits_s^b [dC(t)]X(t,s), \quad G = Z(a) = \ell X = \int\limits_a^b [dC(t)]X(t).$$

У некритичному випадку [2] — коли лінійна однорідна крайова задача

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)(S_hx)(t), \quad \ell x = 0, \tag{9}$$

не має нетривіальних розв'язків, лінійна неоднорідна алгебраїчна система (8) має єдиний розв'язок

$$x_0 = G^{-1}\left(\alpha - \int\limits_a^b Z(s)w(s)ds\right),$$

який є початковим значенням єдиного розв'язку крайової задачі (2), (4)

$$x(t) = X(t)G^{-1}\alpha + \int\limits_a^t X(t,s)w(s)ds - X(t)G^{-1}\int\limits_a^b Z(s)w(s)ds.$$

У подальшому будемо розглядати критичний випадок — коли

(**A**) лінійна однорідна крайова задача (9) має k, $1\le k\le n$ лінійно незалежних нетривіальних розв'язків.

Покажемо, що в цьому випадку праву частину системи (4) завжди можна "збурити"так, щоб "збурена"крайова задача мала k-параметричну сім'ю розв'язків.

Лема 1. *Нехай виконується умова* $\boldsymbol{A}$. *Тоді для довільної функції* $w(t)$ *існує функція* $W(t)$ *така, що лінійна неоднорідна крайова задача*

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)(S_hx)(t) + w(t) + W(t), \quad \ell x = \alpha \tag{10}$$

має k*-параметричну сім'ю розв'язків.*

Доведення. Нехай умова **A** виконується. Відомо [7], що алгебраїчна система (8) сумісна (і при цьому має k-параметричну сім'ю розв'язків) тоді і тільки тоді, коли виконується умова ортогональності

$$P_{G^*}\left(\alpha - \int\limits_a^b Z(s)w(s)ds - \int\limits_a^b Z(s)W(s)ds\right) = 0. \tag{11}$$

Нехай

$$W(t) = Z^*(t)P^*_{G^*_k}R_1^{-1}P_{G^*_k}\left(\alpha - \int\limits_a^b Z(s)w(s)ds\right), \qquad (12)$$

де

$$R_1 = P_{G^*_k}R_2P^*_{G^*_k}, \qquad R_2 = \int\limits_a^b Z(\tau)Z^*(\tau)d\tau.$$

Через G^+ будемо позначати єдину псевдообернену до G по Муру-Пенроузу [8] $(n\times n)$-вимірну матрицю, а через P_{G_k} і $P_{G^*_k}$ — $(n\times k)$ і $(k\times n)$-вимірні матриці, які є ортопроекторами з простору R^n на нуль простори $Ker(G)$ і $Ker(G^*)$ матриць G і G^* відповідно, причому стовпці матриці P_{G_k} є лінійно незалежними і утворюють повний базис ядра $Ker(G)$ матриці G, а рядки матриці $P_{G^*_k}$ утворюють повний базис ядра матриці G^*:

$$P_{G_k} : R^k \to Ker(G), \quad Ker(G) = P_{G_k}R^n,$$

$$P_{G^*_k} : R^n \to Ker(G^*), \quad Ker(G^*) = P_{G^*_k}R^n,$$

$$rank(P_{G_k}) = rank(P_{G^*_k}) = k = n - rank(G).$$

Підставляючи $W(t)$ вигляду (12) в (11) бачимо, що при такому виборі "збурюючої" функції умова ортогональності (11) виконується. Розв'язок системи (10) має вигляд

$$\begin{gathered} x(t) = X(t)x_0 + \int\limits_a^t X(t,s)w(s)ds + \\ + \int\limits_a^t X(t,s)Z^*(s)dsP^*_{G^*_k}R_1^{-1}P_{G^*_k}\left(\alpha - \int\limits_a^b Z(s)w(s)ds\right). \end{gathered} \qquad (13)$$

Підставляючи його в (5) бачимо, що він задовольняє крайові умови тоді і тільки тоді, коли початкове значення x_0 є розв'язком алгебраїчної системи

$$Gx_0 = \left(I_n - R_2P^*_{G^*_k}R_1^{-1}P_{G^*_k}\right)\left(\alpha - \int\limits_a^b Z(s)w(s)ds\right). \qquad (14)$$

Оскільки $P_{G_k}\big(I_n - R_2P^*_{G^*_k}R_1^{-1}P_{G^*_k}\big) = 0$, то система (14) сумісна і її загальний розв'язок має вигляд [7]

$$x_0 = P_{G_k}\xi + G^+\left(I_n - R_2P^*_{G^*_k}R_1^{-1}P_{G^*_k}\right)\left(\alpha - \int\limits_a^b Z(s)w(s)ds\right), \qquad (15)$$

де ξ — довільний k-вимірний вектор. Підставляючи x_0 вигляду (15) у (13), одержимо загальний розв'язок крайової задачі (2), (10):

$$x(t) = X(t)P_{G_k}\xi + X(t)G^+\left(I_n - R_2 P^*_{G^*_k}R_1^{-1}P_{G^*_k}\right)\left(\alpha - \int_a^b Z(\tau)h(\tau)d\tau\right) +$$
$$+ \int_a^t X(t,s)w(s)ds + \int_a^t X(t,s)Z^*(s)ds P^*_{G^*_k}R_1^{-1}P_{G^*_k}\left(\alpha - \int_a^b Z(\tau)h(\tau)d\tau\right).$$

Остаточно можемо записати його у наступному вигляді:

$$x(t,\xi) = X(t)P_{G_k}\xi +$$
$$+\left(X(t)G^+ + (R_3(t) - X(t)G^+R_2)P^*_{G^*_k}R_1^{-1}P_{G^*_k}\right)\alpha + \int_a^b L(t,s)w(s)ds,$$

де

$$R_3(t) = \int_a^t X(t,s)Z^*(s)ds,$$

і

$$L(t,s) = \begin{cases} X(t,s) - \left(X(t)G^+ + (R_3(t) - X(t)G^+R_2)\, P^*_{G^*_k}R_1^{-1}P_{G^*_k}\right)Z(s), & 0 \le s \le t \le b, \\ -\left(X(t)G^+ + (R_3(t) - X(t)G^+R_2)\, P^*_{G^*_k}R_1^{-1}P_{G^*_k}\right)Z(s), & 0 \le t < s \le b. \end{cases}$$

3. Крайова задача для нелінійної диференціальної системи з запізненням у критичному випадку. Розглянемо нелінійну диференціальну систему з запізненням та лінійними крайовими обмеженнями

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)(S_hx)(t) + f(t,(S_hx)(t)), \quad \ell x = \alpha. \tag{16}$$

Будемо досліджувати критичний випадок — коли виконується умова A. Припускаємо, що при $(t,x) \in [a,b] \times D$, де $D \subset D^n$ — замкнена обмежена область, виконуються умови:

(B) вектор-функція $f(t,(S_hx)(t))$ неперервна і виконуються оцінки

$$|f(t,(S_hx)(t))| \le M(t),$$

$$|f(t,(S_hx')(t)) - f(t,(S_hx'')(t))| \le K(t)|x'(h(t)) - x''(h(t))|, \tag{17}$$

де $M(t)$ і $K_i(t)$ — відповідно вектор-функція і матриці-функції з невід'ємними інтегровними компонентами. Тут $|f(t,x)| = col(|f_1(t,x)|, \cdots, |f_n(t,x)|)$ і всі нерівності в роботі розглядаємо покомпонентно;

(C) область $D_\beta = \{\xi \in \mathbb{R}^k \mid B(x_0(t,\xi),\beta) \subseteq D,\ t \in [a,b]\}$ не порожня, де

$$x_0(t,\xi) = X(t)P_{G_k}\xi,$$

$$\beta = \max_{t\in[a,b]}\left(\left|\left(X(t)G^+ + (R_3(t) - X(t)G^+R_2)P^*_{G^*_k}R_1^{-1}P_{G^*_k}\right)\alpha\right| + \right.$$
$$\left. + \int_a^b |L(t,s)|\, M(s)ds\right),$$

і $B(y,\varrho) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| \le \varrho\}$ для всіх $y, \varrho \in \mathbb{R}^n$;

(D) найбільше власне значення матриці Q менше за одиницю:

$$Q = \sup_{t\in[a,b]}\int_a^b |L(t,s)|K(s)ds.$$

Введемо до розгляду k-параметричну сім'ю відображень $\mathfrak{L}_\xi \colon D^n \to D^n$ і вектор-функціонал $\mu \colon D^n \to \mathbb{R}^k$, визначені згідно формул

$$(\mathfrak{L}_\xi x)(t) \overset{def}{=} X(t)P_{G_k}\xi + \left(X(t)G^+ + (R_3(t) - X(t)G^+R_2)P^*_{G^*_k}R_1^{-1}P_{G^*_k}\right)\alpha +$$
$$+ \int_a^b L(t,s)f(s,(S_hx)(s))ds,$$

і

$$\mu(x) \overset{def}{=} P_{G^*_k}\left(\alpha - \int_a^b Z(s)f(s,x(s))ds\right).$$

Неважко переконатися, що істинним є наступне твердження.

Лема 2. *Нехай для крайової задачі (16) виконується умова A. Тоді:*

1. *Якщо $\varphi = \varphi(\cdot,\xi^*) \in D^n$ є розв'язком крайової задачі (16), то значення параметра $\xi^* \in \mathbb{R}^k$ є таким, що φ є розв'язком рівняння*

$$\mu(x) = 0, \tag{18}$$

Крім того, початковим значенням розв'язку є

$$\varphi(a) = P_{G_k}\xi^* + G^+\left(\alpha - \int_a^b Z(s)f(s,\varphi(s))ds\right). \tag{19}$$

2. *Якщо при деякому $\xi \in \mathbb{R}^k$ функція $\varphi = \varphi(\cdot,\xi) \in D^n$ є розв'язком системи рівнянь (18), (20)*

$$x = \mathfrak{L}_\xi x. \tag{20}$$

то φ є розв'язком крайової задачі (16).

Доведення. Необхідність. Нехай φ є розв'язком системи (3). Тоді

$$\varphi(t) \equiv X(t)\varphi(a) + \int_a^t X(t,s)f(s,(S\varphi)(s))ds. \tag{21}$$

Підставляючи (21) у крайові умови (2) бачимо, що $\varphi(a)$ є розв'язком алгебраїчної системи

$$G\varphi(a) = \alpha - \int_a^b Z(s)f(s,(S\varphi)(s))ds.$$

Ця система є сумісною тоді і тільки тоді, коли $\mu(\varphi) = 0$. При цьому φ приймає початкове значення (19).

Достатність. Нехай φ задовольняє рівняння (18), (20). Безпосередня перевірка показує, що в цьому випадку виконується тотожність (21) і (19) є початковим значенням φ, тобто φ є розв'язком крайової задачі (16).

Для наближеної побудови розв'язків крайової задачі (16) розглянемо k-параметричну послідовність функцій

$$\begin{gathered} x_m(t,\xi) = x_0(t,\xi) + \left(X(t)G^+ + (R_3(t) - X(t)G^+R_2)P^*_{G^*_k}R_1^{-1}P_{G^*_k}\right)\alpha + \\ + \int_a^b L(t,s)f(s,x_{m-1}(s,\xi)ds, \quad x_0(t,\xi) = X(t)P_{G_k}\xi \end{gathered} \tag{22}$$

при $m = 1, 2, \ldots$ і $\xi \in \mathbb{R}^k$. Всі функції цієї послідовності задовольняють крайові умови (2).

Теорема 1. *Нехай для крайової задачі (16) виконуються умови $A-D$. Тоді:*

1) *для всіх $\xi \in D_\beta \subset \mathbb{R}^k$, оператор $\mathcal{L}_\xi$ має нерухому точку $x^*(\cdot,\xi)$ в множині $x \in D$, $\xi \in D_\beta$, яка співпадає з граничною функцією $x^*(t,\xi) = \lim\limits_{m\to\infty} x_m(t,\xi)$ послідовності (22), і виконуються наступні оцінки збіжності:*

$$|x^*(t,\xi) - x_m(t,\xi)| \leq (I_n - Q)^{-1}Q^m\beta; \tag{23}$$

2) *гранична функція $x^*(t,\xi)$ задовольняє крайові умови (2) при довільних $\xi \in \mathbb{R}^k$ і початковим значенням розв'язку є*

$$x^*(a,\xi) = P_{G_k}\xi + G^+(I_n - R_2P^*_{G^*_k}R_1^{-1}P_{G^*_k})\left(\alpha - \int_a^b Z(s)f(s,x^*(s,\xi))ds\right); \tag{24}$$

3) *гранична функція $x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$ є розв'язком крайової задачі (16) тоді і тільки тоді, коли ξ^* є розв'язком визначального рівняння $\Delta(\xi) = 0$, де*

$$\Delta(\xi) \stackrel{def}{=} \mu(x^*(\cdot,\xi)) = P_{G^*_k}\left(\alpha - \int_a^b Z(s)f(s,x^*(s,\xi))ds\right). \tag{25}$$

Доведення. Оскільки

$$|(\mathcal{L}_\xi x)(t) - x_0(t,\xi)| \le \Big|\Big(X(t)G^+ + (R_3(t) - X(t)G^+R_2)P^*_{G^*_k}R_1^{-1}P_{G^*_k}\Big)\alpha\Big| + \\ + \int_a^b |L(t,s)f(s,x(s))|ds \le \beta,$$

з умови C випливає, що $(\mathcal{L}_\xi x)(t) \in D$ при всіх $\xi \in D_\beta$. Нехай оператор $\mathcal{Q} : D^n \to D^n$ визначено згідно формули

$$(\mathcal{Q}x)(t) \overset{def}{=} \int_a^b |L(t,s)|K(s)x(s)ds.$$

Тоді з (22) і умови Ліпшіца (17) одержуємо

$$|x_{m+1}(t,\xi) - x_m(t,\xi)| = \big|\big(\mathcal{L}_\xi(x_m(\cdot,\xi) - x_{m-1}(\cdot,\xi))\big)(t)\big| \le \\ \le \big(\mathcal{Q}|x_m(\cdot,\xi) - x_{m-1}(\cdot,\xi)|\big)(t) \le \big(\mathcal{Q}^2|x_{m-1}(\cdot,\xi) - x_{m-2}(\cdot,\xi)|\big)(t) \le \\ \le \dots \le \big(\mathcal{Q}^m|x_1(\cdot,\xi) - x_0(\cdot,\xi)|\big)(t) \le (\mathcal{Q}^m\beta)(t),$$

отже

$$|x_{m+j}(t,\xi) - x_m(t,\xi)| \le \sum_{i=0}^{j-1} |x_{m+i+1}(t,\xi) - x_{m+i}(t,\xi)| \le \\ \le \sum_{i=0}^{j-1}(\mathcal{Q}^{m+i}\beta)(t) \le \sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i}\beta. \tag{26}$$

З умови D випливає, що $x_m(t,\xi)$ є послідовністю Коші, а отже, рівномірно збігається до граничної функції $x^*(t,\xi)$. Переходячи в (26) до границі при $j \to \infty$, ми одержуємо оцінки похибки (23). Оскільки всі функції задовольняють крайові умови (2), то і гранична функція $x^*(t,\xi)$ також задовольняє (2).

Переходячи в (22) до границі при $m \to \infty$ ми бачимо, що $x^*(t,\xi)$ задовольняє рівняння

$$x(t) = X(t)P_{G_k}\xi + \Big(X(t)G^+ + (R_3(t) - X(t)G^+R_2)P^*_{G^*_k}R_1^{-1}P_{G^*_k}\Big)\alpha + \\ + \int_a^b L(t,s)f(s,x(s)ds). \tag{27}$$

Таким чином, згідно леми 2, гранична функція $x^*(t,\xi)$ є розв'язком крайової задачі (16) тоді і тільки тоді, коли виконується умова $\Delta(\xi) = 0$. Поклавши $t = a$ в (27), бачимо, що (24) є початковим значенням розв'язку.

Наступне твердження містить достатні умови існування розв'язку крайової задачі (16), для перевірки яких досить знати тільки наближені розв'язки $x_m(t,\xi)$, і не потрібно знаходити граничну функцію $x^*(t,\xi)$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови $A - D$, і, крім того:*

1) *існує замкнена опукла множина $D' \subset D_\beta \subset \mathbb{R}^k$ така, що для деякого фіксованого $m \in \mathbb{N}$, наближене визначальне рівняння*

$$\Delta_m(\xi) \overset{def}{=} \mu(x_m(\cdot,\xi)) = P_{G^*_k}\left(\alpha - \int_a^b Z(s)f\left(s, x_m(s,\xi)\right)ds\right) = 0 \tag{28}$$

має єдиний ізольований розв'язок $\xi = \xi_{0m} \in D'$ ненульового індексу;

2) *на границі $\partial D'$ області D' виконується умова*

$$\inf_{\xi\in\partial D'} |\Delta_m(\xi)| > Q_1(I_n - Q)^{-1}Q^m\beta, \tag{29}$$

де

$$Q_1 = \int\limits_a^b |P_{G^*_{k^*}} Z(s)|K(s)ds.$$

Тоді існує розв'язок $x^*(t) = x^*(t, \xi^*)$ крайової задачі (16), де $\xi^* \in D'$.

Доведення. Розглянемо сім'ю неперервних при $\xi \in \partial D'$ і $\theta \in [a, b]$ векторних полів

$$\Delta(\theta, \xi) = \Delta_m(\xi) + \theta(\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)), \quad 0 \le \theta \le 1,$$

які зв'язують векторні поля $\Delta(0, \xi) = \Delta_m(\xi)$ і $\Delta(1, \xi) = \Delta(\xi)$. Припустимо, що існує $\theta_0 \in [0, 1]$ таке, що $\Delta(\theta_0, \xi) = 0$. Тоді

$$\Delta_m(\xi) = -\theta_0\big(\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)\big). \tag{30}$$

З (23), (25), (28) і умови Ліпшіца (17) маємо

$$|\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)| \le \int\limits_a^b |P_{G^*_k} Z(s)||f(s, x^*(s, \xi)) - f(s, x_m(s, \xi))|ds \le$$
$$\le \int\limits_a^b |P_{G^*_k} Z(s)|K(s)|x^*(s, \xi) - x_m(s, \xi)|ds \le Q_1(I_n - Q)^{-1}Q^m\beta.$$

Але в цьому випадку з (30) одержуємо нерівність

$$|\Delta_m(\xi)| \le |\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)| \le Q_1(I_n - Q)^{-1}Q^m\beta,$$

яка протирічить умові (29). Це означає, що сім'я полів $\Delta(\theta, \xi)$ не приймає нульового значення при $\partial D'$, а тому векторні поля $\Delta(\xi)$ і $\Delta_m(\xi)$ є гомотопними. Таким чином, обертання векторного поля $\Delta(\xi)$ на границі $\partial D'$ також відмінне від нуля, а отже $\Delta(\xi)$ рівне нулю хоча б в одній точці $\xi^* \in D'$.

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 277 с.
2. *A.A.Boichuk, A.M.Samoilenko* Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary Value Problems. – VSP Utrecht Boston, 2004. – 320 p.
3. *Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием – К.: Вища школа, 1979 – 248 с.
4. *Хейл Дж.К.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 422 с.
5. *Король І.І.* Існування і наближена побудова розв'язків крайових задач// Доповіді НАН України – 2007. – №11. – С.17–22.
6. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа: Учеб. пос. – М.: Высш. школа, 1982. – 271 с.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. –552 с.
8. *Penrose R.* A Generalized Inverse for Matrices// Proc.Cambridge Philos.Soc., 1955. – **55**, 3.– P.406-413.

Одержано 29.10.2008