УДК 519.21

**В. П. Рудько, Н. В. Юрченко** (Ужгородський нац. ун-т)

# СИЛОВСЬКІ $p$-ПІДГРУПИ В $GL(n,\mathbb{Z}[\varepsilon])$

The criterion of the isomorphism of the Sylow subgroups of the general linear group over the ring $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ have been found in the paper.

Знаходиться критерій ізоморфізму силовських підгруп повної лінійної групи над кільцем $\mathbb{Z}[\varepsilon]$.

Силовські $p$-підгрупи повних лінійних груп над кільцями головних ідеалів характеристики нуль вивчались в роботах [1–6]. В [6] знайдено критерій ізоморфізму силовських $p$-підгруп групи $GL(n,K)$ над кільцем $K$ головних ідеалів характеристики нуль з необоротним елементом $p$. В даній роботі встановлюється критерій ізоморфізму силовських $p$-підгруп групи $GL(n,R)$ над кільцем $R$ типу кільця $\mathbb{Z}[\varepsilon]$.

Нехай $R$ — область цілісності характеристики нуль, просте число $p$ — необоротне в $R$, силовська $p$-підгрупа $P_p$ в групі $R^*$ має порядок $p$ і $P_p = \langle\varepsilon\rangle$ $(\varepsilon^p = 1)$. Відмітимо, що кільце $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ міститься в $R$ і задовольняє названим умовам.

Наступне твердження добре відоме.

**Лема 1.** *Нехай $F$ — поле відношень кільця $R$. Якщо $t < p$, то елементарна абелева група $P_p^t = P_p \times \cdots \times P_p$ порядку $p^t$ буде єдиною, з точністю до спряженності, силовсъкою $p$-підгрупою групи $GL(t,F)$. Зокрема, будь-яка $p$-підгрупа групи $GL(t,R)$ буде елементарною абелевою групою.*

**Теорема 1.** *Нехай $2 \le m < p$. З точністю до ізоморфізму, всі силовсъкі $p$-підгрупи групи $GL(m,R)$ вичерпуються елементарними абелевими групами відповідно порядків $p^2,\dots,p^m$.*

**Теорема 2.** *Нехай $p > 2$. Силовські $p$-підгрупи групи $GL(n,R)(n > 1)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $n = 2$.*

Введемо в розгляд матриці

$$a_j = \begin{pmatrix} \varepsilon^{j-1} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \varepsilon & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \le j \le m).$$

**Лема 2.** *Елементарна абелева група*

$$H_j = \langle a_j,\, \varepsilon e_j\rangle \quad (e_j - \textit{одиниця в} \quad GL(j,R))$$

*порядку $p^2$ буде силовсъкою $p$-підгрупою групи $GL(j,R)$.*

***Доведення***. Проведемо індукцію по $j$ $(2 \le j < p)$. Група $H_2$ є силовська $p$-підгрупа групи $GL(2,R)$. Нехай $2 \le j < p-1$ і $H_j$ є силовською $p$-підгрупою групи $GL(j,R)$. Покажемо, що група $H_{j+1}$ буде силовською $p$-підгрупою в групі $GL(j+1,R)$. Нехай

$$a \in GL(j+1,R), \quad a^p = e_{j+1} \quad \text{і} \quad aa_{j+1} = a_{j+1}a.$$

Із цих співвідношень випливає, що $a$ — верхньотрикутна матриця, діагональні елементи якої належать групі $P_p$. Нехай

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & a' \end{pmatrix} \quad (\alpha \in P_p,\ a' \in GL(j,R)).$$

Так як $a'a_j = a_j a'$, $a'^p = e_j$ і $H_j$ – силовська $p$-підгрупа, то $a' \in H_j$, тобто $a' = a_j^u(\varepsilon e_j)^v$. Нехай

$$b = a_{j+1}^{-u}(\varepsilon e_{j+1})^{-v}a.$$

Тоді

$$b = \begin{pmatrix} \varepsilon^t & * \\ 0 & e_j \end{pmatrix},$$

де $* = (\alpha_1, \ldots, \alpha_j) \in R^j$ і $b^p = e_{j+1}$.
Так як $ba_{j+1} = a_{j+1}b$, то

$$\varepsilon^t + \varepsilon^{j-1}\alpha_1 = \varepsilon^j\alpha_1 + 1,$$
$$\alpha_1 + \varepsilon^{j-2}\alpha_2 = \varepsilon^j\alpha_2,$$

звідки випливає, що

$$\alpha_1 = (\varepsilon^t - 1)(\varepsilon^j - \varepsilon^{j-1})^{-1},$$
$$\alpha_2 = \alpha_1(\varepsilon^j - \varepsilon^{j-2})^{-1}.$$

Легко бачити, що, якщо $\alpha_1 \neq 0$, то $\alpha_1 \in R^*$ але, так як $\pi = \varepsilon - 1$ — необоротний елемент в кільці $R$, то $\alpha_2$ не міститься в кільці $R$. Отже, $\alpha_1 = 0$ і тоді $\varepsilon^t = 1$, тобто $b = e_{j+1}$ і $a \in H_{j+1}$, що завершує індукцію. Лема доведена.

Нехай $d_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ — діагональна матриця порядку $m$, в якій $i$-ий елемент діагоналі рівний $\varepsilon$, а всі інші діагональні елементи рівні одиниці.

**Лема 3.** *Нехай* $2 \leq m - s$. *Елементарна абелева група*

$$G_s = P_p^s \times H_{m-s}$$

*порядку* $p^{s+2}$ $(s = 1, \ldots, m-2)$ *буде силовською* $p$*-підгрупою групи* $GL(m, R)$.

***Доведення***. Якщо це не так, то існує матриця $a \in GL(m,R)$, яка централізує групу $G_s$ і $a^s = e_m$. В групі $G_s$ існує матриця з різними діагональними елементами, яка також комутує з матрицею $a$. З цієї умови неважко одержати, що

$$a = \begin{pmatrix} a' & * \\ 0 & a'' \end{pmatrix},$$

де $p$-елементи $a'$ і $a''$ централізують групу $P_p^s$ і групу $H_{m-s}$ відповідно. Але ці групи є силовськими підгрупами в своїх групах. Це значить, що

$$a' \in P_p^s, \quad a'' \in H_{m-s}.$$

Тоді для деякого елемента $g \in P_p^s \times H_{m-s}$ добуток $ga$ буде унітрикутною матрицею і елементом порядку $p$. Так як $charR = 0$, то $ga = e_m$ і, отже, $a \in G_s$, що доводить лему.

Теорема 1 випливає із лем 2–3.

Нехай $H$ — підгрупа групи $GL(d,R)$, $C_p=\langle\sigma\rangle$ — циклічна порядку $p$ група підстановок, породжена циклом $\sigma$. Нехай

$$W(H)=H\wr C_p=\langle H^p,\,\widetilde{\sigma}\rangle$$

— сплетення матричної групи $H$ з групою підстановок $C_p$ ($\widetilde{\sigma}$ — матриця підстановки $\sigma$ над кільцем $M(d,R)$). Група $W(H)$ є підгрупою групи $GL(dp,R)$.

**Лема 4** ( [6]). *Група $W(P_p)$ $(p>2)$ є незвідною силовською $p$-підгрупою групи $GL(p,R)$.*

**Лема 5** ( [6]). *Нехай $d>1$ і $H$ — незвідна силовська $p$-підгрупа групи $GL(d,R)$. Тоді $W(H)$ — незвідна силовська $p$-підгрупа групи $GL(dp,R)$.*

**Наслідок 1.** *Нехай виконуються умови леми 5. Покладемо*

$$W_0(H)=H,\,W_1(H)=W(H),\,\ldots,\,W_j(H)=W(W_{j-1}(H))\quad(j=1,2,\ldots).$$

*Група $W_j(H)$ буде незвідною силовською $p$-підгрупою групи $GL(dp^j,R)$.*

**Наслідок 2.** *Нехай $0\le d_0<d$ і $H_0$ — силовська $p$-підгрупа групи $GL(d_0,R)$ (якщо $d_0>0$). Нехай*

$$n=d_0+d(n_0+n_1p+\cdots+n_sp^s)\quad(0\le n_j<p,\,n_s\ne 0,\,s\ge 0).$$

*Група*

$$G(H)=H_0\times W_0(H)^{n_0}\times W_1(H)^{n_1}\times\cdots\times W_s(H)^{n_s}$$

*буде силовською $p$-підгрупою групи $GL(n,R)$.*

Нехай

$$V_p=\left\{\begin{array}{ll} W(P_p)=P_p\wr C_p & (p>3),\\ (P_3\wr C_3)\wr C_3 & (p=3)\end{array}\right\}.$$

Очевидно $V_p$ є силовською $p$-підгрупою групи $GL(d_p,R)$, де $d_p=p$ при $p>3$ і $d_3=9$. Нехай

$$\widehat{V}_p=V_p\cap SL(d_p,R).$$

Очевидно $(V_p:\widehat{V}_p)=p$, зокрема, $V_p\,/\,\widehat{V}_p=diag[\varepsilon,1,\ldots,1]\widehat{V}_p$.

Нехай група $V_p$ діє в $R$-модулі $L_p$ з базисом $e_1,\ldots,e_{d_p}$. Розглянемо в $L_p$ $R$-підмодуль

$$M_p=\langle\pi^2e_1,\,\pi(e_2-e_1,),\ldots,\pi(e_{d_p-1}-e_{d_p-2}),\,e_1+e_2+\cdots+e_{d_p}\rangle.$$

**Лема 6.** *Модуль $M_p$ є $R\widehat{V}_p$-модулем і не буде $RV_p$-модулем.*

Нехай $T_p$ — матриця переходу від вказаного $R$-базиса в $M_p$ до $R$-базиса $\{e_j\}$ в $L_p$ (ці базиси будуть базисами в лінійному просторі $FL_p$).

**Лема 7.** *Група $U_p=T_p^{-1}\,\widehat{V}_p\,T_p$ належить групі $GL(d_p,R)$ і буде в цій групі силовською $p$-підгрупою.*

Леми 6–7 доводяться аналогічно відповідним лемам роботи [6].

**Наслідок 3.** *Якщо $n\ge d_p$, то силовські $p$-підгрупи групи $GL(n,R)$ не ізоморфні.*

***Доведення***. Групи $G(V_p)$ і $G(U_p)$ мають різні порядки (див. також наслідок 2). Доведення теореми 2 для $p > 3$ випливає з наслідку 3 і теореми 1.
Нехай далі $p = 3$.

**Лема 8.** *В наступній таблиці вказані неізоморфні силовські* 3*-підгрупи групи* $GL(m, R)(2 \leq m \leq 8)$ *і вказані їх порядки :*

$$m = 2 : H_2 = \left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, 9;$$

$$m = 3 : P_3 \wr C_3,\ 81;\ P_3 \times H_2,\ 27;$$

$$m = 4 : H_2 \times H_2,\ 81;\ (P_3 \wr C_3) \times P_3,\ 3^5;$$

$$m = 5 : H_2 \times H_2 \times P_3,\ 3^5; (P_3 \wr C_3) \times H_2,\ 3^6;$$

$$m = 6 : (P_3 \wr C_3)^2, 3^8;\ H_2 \wr C_3,\ 3^7;$$

$$m = 7 : (P_3 \wr C_3)^2 \times P_3, 3^9;\ (H_2 \wr C_3) \times P_3,\ 3^8;$$

$$m = 8 : (P_3 \wr C_3)^2 \wr H_2, 3^{10};\ (H_2 \wr C_3) \times H_2,\ 3^9.$$

Із леми 8 випливає доведення теореми 2 для $p = 3$.

В [4] показано, що силовські 2-підгрупи групи $GL(n, \mathbf{Z})$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $n \leq 3$.


1. *Гудивок П. М.* О силовских $p$-подгруппах полной линейной группы над кольцом целых чисел // Алгебра и анализ. – 1990. – **2**, № 6. – С. 121–128.
2. *Гудивок П. М.* О силовских подгруппах полной линейной группы над полными дискретно нормированными кольцами // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 7–8. – С. 918–924.
3. *Гудивок П. М., Рудько В. П.* Об изоморфизме силовских $p$-подгрупп полной линейной группы над кольцом целых чисел // Докл. АН Украины. – 1992. – № 9. – С. 3–5.
4. *Gudivok P. M., Rud'ko V. P.* On isomorphism of Sylow subgroups of the general linear groups over the of integers // J. Math. Sci. – 2000. – **102**, № 3. – P. 3998–4008.
5. *Гудивок П. М., Рудько В. П.* О силовских подгруппах полной линейной группы над областями целостности // Доповіді НАН України. – 1995. – № 8. – С. 5–7.
6. *Гудивок П. М., Рудько В. П., Юрченко Н. В.* О силовских $p$-подгруппах полной линейной группы над областями главных идеалов // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2001. – Вип. 6. – С. 31–46.


Одержано 5.11.2008