УДК 519.8

А. Ю. Брила, В. І. Гренджа (Ужгородський нац. ун-т)

ЗАДАЧІ ЛЕКСИКОГРАФІЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРО РАНЕЦЬ

The method of finding of attainable optimum solutions of lexicographic knapsack problem by reduce it to the problem of onecriterion optimization with a scalar objective function is considered.

Розглядається метод знаходження досяжних оптимальних розв'язків задачі лексикографічної оптимізації про ранець шляхом зведення її до однокритеріальної задачі з скалярною цільовою функцією.

Вступ

Прикладні задачі лексикографічної оптимізації про ранець виникають у випадку, коли оптимальний набір у класичній задачі про ранець необхідно знайти на основі багатьох критеріїв, які строго ранжировані за важливістю. Для розв'язання цієї задачі в [1, 2] запропоновано підхід, що ґрунтується на використанні схеми скаляризації. Такий підхід для задачі про ранець має суттєвий недолік, оскільки на першому кроці розв'язується класична задача про ранець з одним (першим) критерієм, але на усіх наступних на множину допустимих розв'язків накладається додаткове обмеження, яке не дозволяє застосувати на цих кроках методи розв'язання задачі про ранець.

У даній статті пропонується підхід до розв'язання лексикографічної задачі про ранець шляхом побудови функціоналу ([2,3]), що представляє лексикографічний порядок віддачі переваги на множині допустимих розв'язків. Вибравши цей функціонал у якості цільової функції можемо знайти досяжні оптимальні розв'язки розглядуваної задачі як задачі однокритеріальної оптимізації і для її розв'язання можна використати методи розв'язання класичної задачі про ранець. Аналогічний підхід пропонується також при розв'язанні лексикографічно-лексикографічної задачі про ранець

1. Знаходження досяжних оптимальних розв'язків лексикографічної задачі про ранець

Розглядається задача

$$\max{}^{L}\bar{c}\left(x\right), \ \ x\in X, \tag{1}$$

де множина допустимих розв'язків X задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le C,$$
$$x_j \in Z, \ j=\overline{1,n}.$$

Цільова функція $\bar{c}\left(x\right) = \left(c_1\left(x\right), c_2\left(x\right), \ldots.., c_q\left(x\right)\right)$, за якою порівнюються допустимі альтернативи, є векторною згорткою критеріїв $c_k\left(x\right), \ k=1,2,...,q$ у субординації строгого ранжирування $Rg\left(1,2,...,q\right)$, а кожен з критеріїв $c_k\left(x\right)$– лінійна скалярна функція n змінних

$$c_k\left(x\right)=\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j, \quad 1\le k\le q.$$

Ця функція є однієї із числових оцінок допустимих альтернатив.

Нехай $\alpha_q>0$ - деяке додатне число, а інші додатні числа $\alpha_{q-1},\alpha_{q-2},...,\alpha_1$ поступово знаходяться з умови

$$\alpha_r>\frac{1}{\mu_r}\sum_{k=r+1}^{q}\alpha_k M_k, r=q-1,q-2,...,1,$$

де $0<\mu_r\le \min\limits_{\substack{i,j\in\{1,2,\ldots,n\}\\ c_{ri}\ne c_{rj}}} \left|c_{ri}-c_{rj}\right|,$

$$M_k\ge\left(\max_j c_{kj}\right)\left[\frac{C}{\min\limits_j w_j}\right]-\left(\min_j c_{kj}\right)\left[\frac{C}{\max\limits_j w_j}\right],$$

([ ] -ціла частина числа).

Теорема 1. *Розв'язок задачі*

$$\max L\left(x\right)=\sum_{k=1}^{q}\alpha_k c_k\left(x\right), \quad x\in X, \tag{2}$$

є розв'язком задачі (1).

Доведення теореми легко отримати, враховуючи спосіб вибору коефіцієнтів додатної лінійної згортки.

Оскільки субординація Rg є субординацією строгого ранжирування і визначається перестановкою номерів критеріїв $(k_1,\, k_2,\, \ldots, k_q)$ (де $\{k_1,k_2,...,k_q\}=\{1,2,...,q\}$), то можна утворити стільки різних субординацій строгого ранжирування, скільки існує перестановок номерів критеріїв, а саме – $q!$. Зрозуміло, що різним субординаціям, загалом кажучи, будуть відповідати різні набори додатних чисел $\alpha_k,\ k=1,2,...,q$, за якими оптимальні розв'язки є досяжними за зваженою сумою різноважливих критеріїв.

Постає питання, чи існує такий набір додатних чисел $\alpha_k,\ k=1,2,...,q$, за яким оптимальні розв'язки лексикографічної задачі (1) є досяжними за зваженою сумою з даними коефіцієнтами різноважливих критеріїв у будь-якій із субординацій строго ранжирування, яка визначається довільною перестановкою номерів критеріїв $(k_1,\, k_2,\, \ldots, k_q)$, де $\{k_1,k_2,...,k_q\}=\{1,2,...,q\}$. Введемо величини μ^*, M^*:

$$0<\mu^*\le\min\left\{\left|c_{ri}-c_{rj}\right|\left|\ c_{ri}\ne c_{rj},\ r\in\{1,2,...,q\}\right.,\ i,j\in\{1,2,...,n\}\right\},$$

$$M^*\ge\left(\max_j c_{kj}\right)\left[\frac{C}{\min\limits_j w_j}\right]-\left(\min_j c_{kj}\right)\left[\frac{C}{\max\limits_j w_j}\right],\ k=1,2...,q.$$

Нехай $\alpha_k^*,\ k = 1, 2, ..., q,$ – набір додатних чисел, де $\alpha_q^* > 0$ вибрано довільним чином, а інші числа $\alpha_{q-1}^*, \alpha_{q-2}^*, ..., \alpha_1^*$, поступово визначені згідно умови

$$\alpha_r^* > \frac{1}{\mu^*} \sum_{k=r+1}^{q} \alpha_k^* M^*. \tag{3}$$

Розглянемо субординацію строгого ранжирування, що визначається перестановкою номерів критеріїв $(k_1, k_2, ..., k_q)$. Запишемо задачу знаходження оптимального розв'язку в заданій субординації строгого ранжирування

$$\max{}^L \tilde{c}(x) = \left(c_{k_1}(x), c_{k_2}(x), ..., c_{k_q}(x)\right),\ x \in X. \tag{4}$$

Розглянемо функціонал

$$B(x) = \sum_{l=1}^{q} \alpha_l^* c_{k_l}(x) \tag{5}$$

та відповідну задачу однокритеріальної оптимізації

$$\max B(x) = \sum_{l=1}^{q} \alpha_l^* c_{k_l}(x),\ x \in X, \tag{6}$$

де коефіцієнти $\alpha_k^*,\ k = 1, 2, ..., q$, вибрано згідно (3).

Теорема 2. *Розв'язок задачі (6) є розв'язком задачі лексикографічної оптимізації (4) для довільної перестановки* $(k_1, k_2, ..., k_q)$ *номерів критеріїв.*

Доведення теореми легко отримати враховуючи вибір коефіцієнтів μ^*, M^* та коефіцієнтів $\alpha_k^*,\ k = 1, 2, ..., q$.

2. Знаходження досяжних оптимальних розв'язків лексикографічнолексикографічної задачі про ранець

Розглянемо задачу лексикографічно-лексикографічної оптимізації про ранець

$$\max{}^{LL} c'(x),\ \ x \in X, \tag{7}$$

де множина допустимих розв'язків X, така ж, як і у задачі (1), $c'(x) = (c_1(x), c_2(x), \ldots, c_q(x))$ – векторна згортка критеріїв $\bar{c}_k(x)$, $k = 1, 2, ..., q$ у субординації строгого ранжирування $Rg(1, 2, ..., q)$, а кожен з критеріїв $\bar{c}_k(x) = (c_{k1}(x), c_{k2}(x), \ldots, c_{kq_k}(x))$, $k \in \{1, 2, ..., q\}$, в свою чергу, є векторною згорткою скалярних критеріїв c_{ki}, $i = 1, 2, ..., q_k$ в субординації $Rg(1, 2, ..., q_k)$.

У [1] доводиться, що задача лексикографічно-лексикографічної оптимізації (7) еквівалентна задачі лексикографічної оптимізації

$$\max{}^L \tilde{c}'(x),\ x \in X, \tag{8}$$

де

$$\tilde{c}' = \left(c_{11}, c_{12}, ..., c_{1q_1}, c_{21}, c_{22}, ..., c_{2q_2}, ..., c_{q1}, c_{q2}, ..., c_{qq_q}\right).$$

Тому, для розв'язання задачі (8), а отже і для розв'язання задачі (7), можуть бути використані ті ж самі підходи, що і для розв'язання задачі лексикографічної оптимізації.

Висновки

Зведення задачі (1) до задачі (2), а також задач (4) до задач (6) дає можливість перейти від задачі багатокритеріальної оптимізації до звичайної задачі про ранець, для розв'язання якої можна застосувати відомі методи.

Недоліком такого підходу є те, що швидко зростають коефіцієнти додатної лінінійної згортки, які визначають функціонал, що задає лексикографічний порядок віддачі переваги на множині допустимих розв'язків. Для подолання цієї проблеми необхідно при їх знаходженні усі коефіцієнти додатної лінійної згортки поділити на найбільший із них.

1. Червак Ю. Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір/ Ю.Ю. Червак. — Ужгород: Ужгородський нац. ун–т, 2002. — 312 с.
2. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Опимизация по последовательно применяемым критериям/ В.В. Подиновский, В.М. Гаврилов. — М.:Наука, 1975. — 192 с.
3. Брила А. Ю. Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации по взвешенной сумме критериев разной важности в транзитивной субординации/ А.Ю. Брила // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — №5. — С. 135–138.

Одержано 05.05.2013