УДК 330.4

Янковий В.О.

ОПТИМАЛЬНА ФОНДООЗБРОЄНІСТЬ І ЗАМІЩЕННЯ РЕСУРСІВ У РАМКАХ CES-ФУНКЦІЇ

Обговорюються теоретико-методологічні питання використання виробничих функцій в процесі моделювання важливіших показників виробництва, представлених у вартісному вираженні. Зокрема, досліджується величина граничної норми заміщення ресурсів CES-функції в умовах, коли фондоозброєність набуває оптимального значення, тобто максимізує випуск продукції. Пропонується нове тлумачення граничної норми заміщення ресурсів як індикатора диспропорцій при інвестуванні грошових коштів у агреговані фактори «капітал» і «праця».

Ключові слова: *виробничі функції, CES-функція, оптимальна фондоозброєність, гранична норма заміщення ресурсів.*

Постановка проблеми. В останній час серед дослідників, що займаються економіко-математичним моделюванням, відновився інтерес до використання двох факторної виробничої функції (ВФ) з постійною еластичністю заміщення ресурсів (*CES*-функції – від англ. абревіатури *Constant Elasticity of Substitution*).

CES-функція може бути представлена у такому запису:

$$Y = A[\alpha K^{-\beta} + (1-\alpha)L^{-\beta}]^{-\frac{\gamma}{\beta}}, \quad (1)$$

де Y – випуск продукції у вартісному вираженні;

K – вартість капіталу, що спрямований у виробничі фонди;

L – витрати капіталу на оплату праці;

A – невідомий коефіцієнт шкали ($0 < A$);

α – невідомий коефіцієнт ваги виробничого фактора ($0 < \alpha < 1$);

β – невідомий параметр ВФ ($-1 < \beta$);

γ – невідомий показник ступеня однорідності виробничої функції ($0 < \gamma$).

ВФ (1) аналогічна функції Кобба-Дугласа в тому, що стосується припущення про постійне убування граничної віддачі виробничих ресурсів K і L. Це так звані неокласичні умови, які випливають із теорії поведінки споживача, оскільки стосовно ресурсів підприємство є споживачем і виробнича функція характеризує саме цей аспект – виробництво як споживання.

Однак, між цими ВФ є й суттєві розбіжності. Так, еластичність заміщення ресурсів σ, яка є мірою можливості заміни праці капіталом і, навпаки, для функції Кобба-Дугласа завжди дорівнює одиниці. В *CES*-функції вона може приймати будь-які значення. Для ВФ (1) еластичність заміщення ресурсів дорівнює:

$$\sigma = \frac{1}{1+\beta}, \quad (2)$$

тобто для *CES*-функції $\sigma \neq 1$, хоча так, як і в функції Кобба-Дугласа, еластичність заміщення ресурсів є постійною, що випливає з самої її назви. При $\beta \to 0$ $\sigma \to 1$ і відбувається перехід до ВФ Кобба-Дугласа. Отже, можна казати, що *CES*-функція узагальнює ВФ Кобба-Дугласа.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Практичне застосування *CES*-функції в сучасних економіко-математичних дослідженнях виробництва неможливе без всебічного визначення її властивостей, зокрема, пов'язаних з оптимізацією випуску продукції в залежності від рівня фондоозброєності праці. В існуючих теоретичних роботах основна увага приділена таким показникам *CES*-функції, як середня і гранична віддача, еластичність випуску продукції, потреба в ресурсах, заміщення ресурсів (гранична норма й еластичність заміщення) та ін. [1-5].

Що ж стосується оптимізації випуску продукції в зваженості від рівня фондоозброєності, то це питання фактично не висвітлене в математико-статистичній літературі. Між тим, у роботах [6, с.388-390; 7; 8] було показано, що для ВФ Кобба-Дугласа, побудованої на основі змінних Y, K, L, виражених у грошовому еквіваленті, існує можливість визначити *оптимальну фондо-озброєність* $ФО_0$, тобто таку, яка при інших рівних умовах максимізує випуск продукції Y. Вона дорівнює $ФО_0 = \alpha/\beta$, де α, β – еластичності виробництва відповідно до факторів «капітал» і «праця».

На нашу думку, вказаний підхід можна використати й для *CES*-функції, оскільки остання, як було показано вище, узагальнює ВФ Кобба-Дугласа.

Формулювання цілей статті. Метою статті є визначення для *CES*-функції оптимальної фондоозброєності – такої структури інвестованого у виробництво капіталу, що забезпечує максимізацію випуску продукції при заданому обсязі $K + L = C$. Окрім того, ми спробуємо дослідити наслідки оп-

© **Янковий Володимир Олександрович,** к.е.н., доцент кафедри економіки і управління національним господарством, Одеський національний економічний університет, тел.: 0674833553, e-mail: vladimir_ya@ukr.net

тимальної фондоозброєності для інших параметрів ВФ (1), зокрема, розрахувати граничну норму заміщення ресурсів, а також точки і зони беззбитковості в умовах додаткового інвестування капіталу C_1 у виробництво, яке досить точно описується за допомогою *CES*-функції.

За визначенням, гранична норма заміщення ресурсів *h* у рамках будь-якої ВФ являє собою співвідношення граничних віддач відповідних ресурсів. У даному випадку для *CES*-функції – це співвідношення граничних віддач праці і капіталу:

$$h = \frac{\partial Y}{\partial L} : \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{1-\alpha}{A^{\beta}}\left(\frac{Y}{L}\right)^{1+\beta} : \frac{\alpha}{A^{\beta}}\left(\frac{Y}{K}\right)^{1+\beta} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\beta}. \tag{3}$$

Формула (2) показує, що гранична норма заміщення ресурсів *h* у рамках ВФ (1) залежить як від ваги кожного виробничого фактора, так і від співвідношення самих факторів – фондоозброєності. Чим вище фондоозброєність, тим вище і гранична норма заміщення витрат живої праці виробничими фондами. При фіксованому обсязі виробництва зростання одного ресурсу відповідає зменшенню іншого і навпаки.

Виклад основного матерілу дослідження. Припустимо, що фондоозброєність виробництва є оптимальною, тобто такою, що загальний інвестований капітал $C = K + L$ забезпечує максимальний випуск продукції *Y*. Виведемо формулу оптимальної фондоозброєності в умовах інвестування грошового капіталу *C* у виробництво продукції, яке описується *CES*-функцією.

$$Y = A[\alpha K^{-\beta} + (1-\alpha)(C-K)^{-\beta}]^{-\frac{\gamma}{\beta}} \to \max. \tag{4}$$

Для вирішення поставленого завдання знайдемо *L* з рівняння зв'язку $L = C - K$, підставимо у вираження (1) і будемо шукати його максимум [9-11]. Знайдемо критичні точки функції (4), в яких перші похідні Y' по *K* дорівнюють 0 або ∞:

$$\begin{aligned} Y' &= -\frac{\gamma}{\beta} A[\alpha K^{-\beta} + (1-\alpha)(C-K)^{-\beta}]^{-\frac{\gamma}{\beta}-1} \times \\ &\times[-\beta\alpha K^{-\beta-1} + \beta(1-\alpha)(C-K)^{-\beta-1}] = \\ &= \gamma A[\alpha K^{-\beta} + (1-\alpha)(C-K)^{-\beta}]^{-\frac{\gamma}{\beta}-1} \times [\alpha K^{-\beta-1} - (1-\alpha)(C-K)^{-\beta-1}]. \end{aligned} \tag{5}$$

Очевидно, що $Y' = 0$ або $Y' = \infty$, коли один із співмножників вираження (5) дорівнює 0. Розглянемо обидва випадки:

1. $\alpha K^{-\beta} + (1-\alpha)(C-K)^{-\beta} = 0.$

2. $\alpha K^{-\beta-1} - (1-\alpha)(C-K)^{-\beta-1} = 0.$

Знайдемо рішення першого рівняння:

$$\left(\frac{K}{C-K}\right)^{-\beta} = -\frac{1-\alpha}{\alpha} \Rightarrow \frac{K}{C-K} = \left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}. \tag{6}$$

Оскільки $C - K = L$, то рівняння (6) приймає такий кінцевий вигляд:

$$ФО_1 = \frac{K}{L} = \left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \tag{7}$$

де $ФО_1$ – фондоозброєність для першого випадку.

Виразимо капітал *K* із співвідношення (7) і підставимо його в формулу (1) з метою визначення максимального випуску продукції *Y* у грошовому вираженні:

$$K = L\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}; \quad Y = A[\alpha L^{-\beta}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-1} + (1-\alpha)L^{-\beta}]^{-\frac{\gamma}{\beta}} =$$

$$= A[-(1-\alpha)L^{-\beta} + (1-\alpha)L^{-\beta}]^{-\frac{\gamma}{\beta}} = 0. \tag{8}$$

Оскільки у першому випадку $Y = 0$ при будь-яких значеннях коефіцієнтів *CES*-функції, то точка $ФО_1$, що визначається формулою (7), не є точкою її екстремуму.

Знайдемо рішення другого рівняння:

$$\left(\frac{K}{C-K}\right)^{-\beta-1} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \Rightarrow \frac{K}{C-K} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1+\beta}}. \tag{9}$$

Звідси, фондоозброєність для другого випадку $ФО_2$ дорівнює:

$$ФО_2 = \frac{K}{L} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1+\beta}} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\sigma}. \tag{10}$$

Підставляючи вираження капіталу K із формули (10) у формулу (1) з метою визначення максимального випуску продукції Y, у результаті елементарних перетворень отримаємо:

$$K = L\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1+\beta}}; \quad Y = A[\alpha L^{-\beta}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\frac{\beta}{1+\beta}} + (1-\alpha)L^{-\beta}]^{-\frac{\gamma}{\beta}} =$$

$$= AL^{\gamma}[\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{1+\beta}} + 1-\alpha]^{-\frac{\gamma}{\beta}} = AL^{\gamma}[(1-\alpha)^{\frac{\beta}{1+\beta}}\alpha^{\frac{1}{1+\beta}} + 1-\alpha]^{-\frac{\gamma}{\beta}} =$$

$$= AL^{\gamma}(1-\alpha)^{-\frac{\gamma}{\beta}}[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1+\beta}} + 1] = AL^{\gamma}(1-\alpha)^{-\frac{\gamma}{\beta}}[ФО_2 + 1]^{-\frac{\gamma}{\beta}}. \tag{11}$$

Так як у другому випадку $Y = 0$ лише при певних значеннях коефіцієнтів *CES*-функції ($A = 0$; $\alpha = -1$), які не належать до області визначення коефіцієнтів ВФ (1), то точка $ФО_2$, що розраховується за формулою (10), може розглядатись як точка її екстремуму. Отже, для забезпечення максимального випуску продукції у грошовому вираженні в умовах інвестування деякої постійної суми грошового капіталу у виробництво, що досить точно описується *CES*-функцією, фондоозброєність повинна визначатись за формулою (10), яку ми будемо називати *оптимальною фондоозброєністю* для ВФ (1).

Підставимо тепер вираження оптимальної фондоозброєності із формули (10) у вираження (3), яке визначає граничну норму заміщення ресурсів h:

$$h = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\beta} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1+\beta}}\right]^{1+\beta} = 1. \tag{12}$$

Окрім отриманих результатів, особливий інтерес являє собою використання побудованої функції (1) з метою прийняття управлінських рішень щодо додаткової інвестиції $C_1 = K_1 + L_1$ у виробництво за умови його потенційної беззбитковості. Очевидно, якщо змінні Y, K, L у формулі (1) представлені в грошовому вираженні, то різниця

$$Y - C = p(C) \tag{13}$$

визначає величину прибутку, отриманого в процесі інвестування. У випадку, коли цей процес достатньо точно описується *CES*-функцією, величина $p(C_1)$ дорівнює

$$p(C_1) = A[\alpha K_1^{-\beta} + (1-\alpha)L_1^{-\beta}]^{-\frac{\gamma}{\beta}} - C_1. \tag{14}$$

Зрозуміло, що точка і зона беззбитковості інвестування у виробництво додаткового капіталу C_1 випливають з формули (14) при виконанні умови $p(C_1) \geq 0$. Відразу відмітимо, що K_1, L_1 будемо визначати у відношенні оптимальної фондоозброєності (10), тобто за наступних умов:

$$K_1 = L_1 \frac{\alpha^{\sigma}}{(1-\alpha)^{\sigma}}; \quad L_1 = K_1 \frac{(1-\alpha)^{\sigma}}{\alpha^{\sigma}}; \quad K_1 + L_1 = C_1. \tag{15}$$

Виразимо з формул (15) величини K_1, L_1 через C_1:

$$K_1 = C_1 \frac{\alpha^{\sigma}}{\alpha^{\sigma} + (1-\alpha)^{\sigma}}; \quad L_1 = C_1 \frac{(1-\alpha)^{\sigma}}{\alpha^{\sigma} + (1-\alpha)^{\sigma}}. \tag{16}$$

Позначимо

$$N = \frac{\alpha^{\sigma}}{\alpha^{\sigma} + (1-\alpha)^{\sigma}}; \quad M = \frac{(1-\alpha)^{\sigma}}{\alpha^{\sigma} + (1-\alpha)^{\sigma}}. \tag{17}$$

Тоді можна записати $K_1 = NC_1$, $L_1 = MC_1$, $N + M = 1$. Тобто виконуються всі умови (15). Підставимо знайдені вираження K_1, L_1 у формулу прибутку (14), який не будемо вважати негативним:

$$p(C_1) = A[\alpha K_1^{-\beta} + (1-\alpha)L_1^{-\beta}]^{-\frac{\gamma}{\beta}} - C_1 = A[\alpha(NC_1)^{-\beta} + (1-\alpha)(MC_1)^{-\beta}]^{-\frac{\gamma}{\beta}} - C_1 =$$
$$= AC_1^{\gamma}[\alpha N^{-\beta} + (1-\alpha)M^{-\beta}]^{-\frac{\gamma}{\beta}} - C_1 \geq 0. \tag{18}$$

Звідси випливає базова нерівність, виконання якої забезпечує беззбитковість додаткового інвестування у виробництво:

$$C^{\gamma-1} \geq \frac{[\alpha N^{-\beta} + (1-\alpha)M^{-\beta}]^{\frac{\gamma}{\beta}}}{A}. \tag{19}$$

Висновки і перспективи подальших досліджень. На основі отриманої формули (11) можна стверджувати, що гранична норма заміщення ресурсів *CES*-функції в умовах оптимальної фондоозброєності повинна дорівнювати 1. За визначенням це означає, що одна грошова одиниця (100, 1000, 10000 … грн.), спрямована у виробничий капітал, буде в цьому випадку забезпечувати зменшення витрат праці на точно таку ж грошову одиницю при умові незмінності випуску продукції. А невиконання співвідношення $h = 1$, яке випливає з формули (11), можна розглядати як сигнал про порушення оптимальної фондоозброєності, тобто про певні диспропорції при інвестуванні коштів у агреговані виробничі фактори «капітал» і «праця».

Так, якщо $h > 1$, то це буде свідчити про те, що фактична фондо-озброєність перевищує оптимальну, яка визначається формулою (9) для *CES*-функції. У цьому випадку можна говорити про надмірні витрати капіталу, що спрямований у виробничі фонди, в порівнянні з коштами на оплату праці. Тобто суб'єкту господарювання, наприклад, підприємству, слід скоротити основні виробничі фонди, витрати на сировину, матеріали тощо. Або підвищити фонд оплати праці за рахунок залучення додаткових працівників, посилення їх матеріального стимулювання. Зрозуміло, що в ситуації $h < 1$ управлінські рекомендації дзеркально протилежні: підприємству потрібно нарощувати фондоозброєність живої праці.

На нашу думку, оптимальна фондоозброєність (9) і виведена на її основі гранична норма заміщення ресурсів $h = 1$ можуть служити додатковими корисними характеристиками при застосуванні *CES*-функції в процесі економіко-математичного аналізу виробництва.

Формула (19) надає ключ до визначення точок і зон беззбитковості в залежності від ступеня однорідності *CES*-функції γ. Тут можливі три випадки: *а*) $\gamma > 1$, тобто при позитивному ефекті розширення масштабів виробництва; *б*) $\gamma < 1$, тобто при негативному ефекті розширення масштабів виробництва; *в*) $\gamma = 1$ (при лінійній однорідності *CES*-функції), коли спостерігається нульовий ефект від розширення масштабів виробництва.

У кожному з вказаних випадків на базі (19) розраховується відповідна точка і зона беззбитковості інвестування у виробництво, що описується ВФ (1). Отже, традиційне застосування *CES*-функції як ефективного інструменту економічного аналізу витрат виробничих ресурсів може бути істотно поширене та поглиблене за рахунок використання співвідношення (19), яке відкриває перед економістами-практиками нові можливості в сфері прогнозування зон беззбитковості капітальних вкладень та управління інвестиційними проектами.

При практичному застосуванні *CES*-функції слід мати на увазі, що формула (1), на відміну від функції Кобба-Дугласа, навіть після логарифмічного перетворення залишається нелінійною. Тому безпосереднє оцінювання невідомих параметрів *A*, α, β, γ зумовлює застосування нелінійних методів, зокрема, нелінійного програмування.

У тих ситуаціях, коли рівняння регресії не є лінійним відносно параметрів, що оцінюються, зазвичай використовують нелінійний метод найменших квадратів, який базується на ітеративній мінімізації цільової функції залишків моделі за методами градієнтного спуску, Марквардта, Ньютона-Гаусса та ін. Це, зазвичай, викликає додаткові обчислювальні труднощі при застосуванні *CES*-функції в економічних дослідженнях.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Терехов Л.Л. Производственные функции / Л.Л. Терехов. – М.: Статис- тика, 1974. – 128 с.
2. Клейнер Г.Б. Производственные функции : теория, методы, применение / Г.Б. Клейнер. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.
3. Вітлінський В.В. Моделювання економіки: навч. пос. / В.В. Вітлінський. – К. : КНЕУ, 2003. – 408 с.
4. Производственные функции [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://i.kpi.ua/podladchikov/-menu=micro-firm-2-.htm
5. Казакова М.В. Анализ свойств производственных функций, используемых при декомпозиции экономического роста / М.В. Казакова. – М., 2013 [Электронный ресурс]. – Режим доступа :ftp://ftp.repec.org/opt/ReDIF/RePEc/rnp/wpaper/31.pdf
6. Економетрія : навч. посіб. / за ред. А.Ф. Кабака, О.В. Проценка. – Одеса: НМЦО-ОДЕУ, 2003. – 562 с.
7. Янковий В.О. Прогнозування зони беззбитковості інвестицій у хлібопекарську промисловість за допомогою виробничої функції / В.О. Янковий // Вісник соціально-економічних досліджень. – Одеса. – 2006. – № 22. – С. 410–414.
8. Черевко Є.В. Оптимальна фондоозброєність та початковий капітал / Є.В. Черевко // Вісник соціально-економічних досліджень. – Одеса. – 2007. – № 26. – С.359–365.
9. Янковий В.О. Оптимальна фондоозброєність у рамках *CES*-функції / В.О. Янковий / Матер. міжнар. конф. «Інновації в сучасній науці». – Київ, 6 липня 2015, ч. 1. – С. 68–71.
10. Янковий В.О. Гранична норма заміщення *CES*-функції в умовах оптимальної капіталоозброєності / В.О. Янковий / Матер. міжнар. науково-практичної конф. «Перспективи розвитку економічної системи в умовах нестабільності». – Дніпропетровськ, 4-5 вересня, 2015. – С. 56–59.
11. Янковий В.О. Умова одиничної граничної норми заміщення ресурсів для виробничої функції Кобба-Дугласа і *CES*-функції / В.О. Янковий / Матер. V межд. заочной научно-практической конф. «Развитие науки в XXI веке». – Харьков : научно-информационный центр «Знание», 2015. – С. 48–52.

REFERENCES

1. Terehov, L.L. (1974). *Proizvodstvennye funkcii [Production functions]*. Moscow: Statistika [in Russian].
2. Klejner, G.B. (1986). *Proizvodstvennye funkcii: teorija, metody, primenenie [Production functions: theory, methods, applications]*. Moscow: Finansy i statistika [in Russian].
3. Vitlinskyi, V.V. (2003). *Modeliuvannia ekonomiky [Simulation of the economy]*. Kyiv: KNEU [in Ukrainian].
4. Proizvodstvennye funkcii [Production functions]. (n.d.). *i.kpi.ua*. Retrieved from http://i.kpi.ua/podladchikov/-menu=micro-firm-2-.htm [in Russian].
5. Kazakova, M.V. (2013). *Analiz svojstv proizvodstvennyh funkcij, ispolzuemyh pri dekompozicii jekonomicheskogo rosta [Analysis of the properties of production functions used in the decomposition of economic growth]*. Moscow. Retrieved from ftp://ftp.repec.org/opt/ReDIF/RePEc/rnp/wpaper/31.pdf [in Russian].
6. Kabak, A.F., & Protsenko, O.V. (Eds.). (2003). *Ekonometriia [Econometrics]*. Odesa: NMTsO-ODEU [in Ukrainian].
7. Iankovyi, V.O. (2006). Prohnozuvannia zony bezzbytkovosti investytsii u khlibopekarsku promyslovist za dopomohoiu vyrobnychoi funktsii [Prediction of the break-even zone of investment in the baking industry using production function]. *Visnyk sotsialno-ekonomichnykh doslidzhen – Socio-economic Research Bulletin*, 22, 410-414 [in Ukrainian].
8. Cherevko, Ie.V. (2007). Optymalna fondoozbroienist ta pochatkovyi capital [The optimal capital-labor ratio and initial capital]. *Visnyk sotsialno-ekonomichnykh doslidzhen – Socio-economic Research Bulletin*, 26, 359-365 [in Ukrainian].
9. Iankovyi, V. O. (2015). Optymalna fondoozbroienist u ramkakh CES-funktsii [Optimal capital-labour ratio within *CES*-function]. *Innovatsii v suchasnii nautsi – Innovations in the modern science:* Proceedings of the International Conference (part 1), (pp. 68-71). Kyiv: Veles [in Ukrainian].
10. Iankovyi, V. O. (2015). Hranychna norma zamishchennia CES-funktsii v umovakh optymalnoi kapitaloozbroienosti [Marginal rate of the substitution CES- function under optimal capital endowment]. *Perspektyvy rozvytku ekonomichnoi systemy v umovakh nestabilnosti – The development prospects of the economic system in the instability conditions:* Proceedings of the International Scientific and Practical Conference (pp. 56-59). Dnipropetrovsk: Perspektyva [in Ukrainian].
11. Iankovyi, V. O. (2015). Umova odynychnoi hranychnoi normy zamishchennia resursiv dlia vyrobnychoi funktsii Kobba-Duhlasa i CES-funktsii [The condition of a single marginal rate of the substitution of the resources for the Cobb-Douglas production function and CES-function]. *Razvytye nauky v XXI veke – The development of science in the XXI century:* Proceedings of the 5th International Extramural Scientific and Practical Conference (pp. 48-52). Kharkiv: Znanye [in Ukrainian].

Одержано 15.09.2015 р.