УДК 519.6

М. І. Глебена (Ужгородський нац. ун-т)
Г. Г. Цегелик (Львівський нац. ун-т імені Івана Франка)

АПАРАТ НЕКЛАСИЧНИХ МІНОРАНТ НЬЮТОНА ТА ЙОГО ВИКОРИСТАННЯ

Consider the construction of the apparatus of non-classical Newtonian minorants and their diagrams of functions of one real variable, given in tabular form.

Розглянуто побудову апарату некласичних мінорант Ньютона та їхніх діаграм функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично.

Вступ. В [1] розроблено апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона для функцій однієї дійсної змінної. В роботі розглянемо побудову апарату некласичних мінорант Ньютона та їхніх діаграм функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично, встановимо необхідні та достатні умови існування мінoранти Ньютона; вивчимо властивості мінoранти Ньютона та її діаграми; введемо основні характеристики мінoранти Ньютона та її діаграми; побудуємо алгоритми для їхнього відшукання.

Як застосування, побудований апарат можна буде використати для розробки алгоритмів оптимізації як негладких логарифмічно опуклих функцій однієї та багатьох дійсних змінних, так і для довільних функцій.

1. Поняття некласичної мінoранти Ньютона та її діаграми функції, заданої таблично. Розглянемо функцію дійсної змінної $y = f(x)$, задану своїми значеннями в деяких точках x_i, $i = 0, 1, \dots, n$:

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{1}$$

Нехай

$$|y_i| = a_i, \quad 0 < a_i \le M, \quad i = 0, 1, \dots, n, \tag{2}$$

де M - деяка стала.

Означення 1. *Точку $P_i(x_i, -\ln a_i)$ з координатами $x = a_i$, $y = -\ln a_i$ у площині xy назвемо точкою зображення значення функції $y = f(x)$ у точці $x = x_i$.*

Припустимо, що точки зображення P_i значень функції $y = f(x)$ у точках x_i, $i = 0, 1, \dots, n$, в площині xy побудовані. З кожної точки P_i проведемо півпряму у від'ємному напрямі осі Oy перпендикулярно до осі Ox. Множину точок цих півпрямих позначимо через S, а її опуклу оболонку – через $C(S)$. Для кожного $x \in [x_0, x_n]$ визначимо точку $D_x(x, \chi_x)$, де

$$\chi_x = \sup_{(x,y) \in C(S)} y.$$

Множина точок $D_x(x, \chi_x)$, $x \in [x_0, x_n]$, утворює лінію δ_f, яка обмежує $C(S)$ зверху. Ця лінія є неперервною, вгнутою ламаною лінією і її рівняння має вигляд

$$y = \chi(x), \quad x \in [x_0, x_n],$$

де $\chi(x) = \chi_x$.

Позначимо

$$m_f(x) = \exp(-\chi(x)), \quad x \in [x_0, x_n].$$

Тоді для кожного $x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$, виконується нерівність

$$m_f(x_i) \leq |f(x_i)| = a_i.$$

Справді, з побудови δ_f випливає, що

$$-\ln|f(x_i)| \leq \chi(x_i),$$

або

$$|f(x_i)| \geq \exp(-\chi(x_i)) = m_f(x_i).$$

Крім того, $m_f(x_0) = |f(x_0)|$, $m_f(x_n) = |f(x_n)|$.

Означення 2. *Функцію $y = m_f(x)$, визначену на проміжку $[x_0, x_n]$, назвемо некласичною мінорантою Ньютона функції $y = f(x)$ на цьому проміжку, а ламану лінію δ_f - її діаграмою.*

На рис.1 побудована діаграма міноранти Ньютона функції, заданої в дев'ятьох точках.

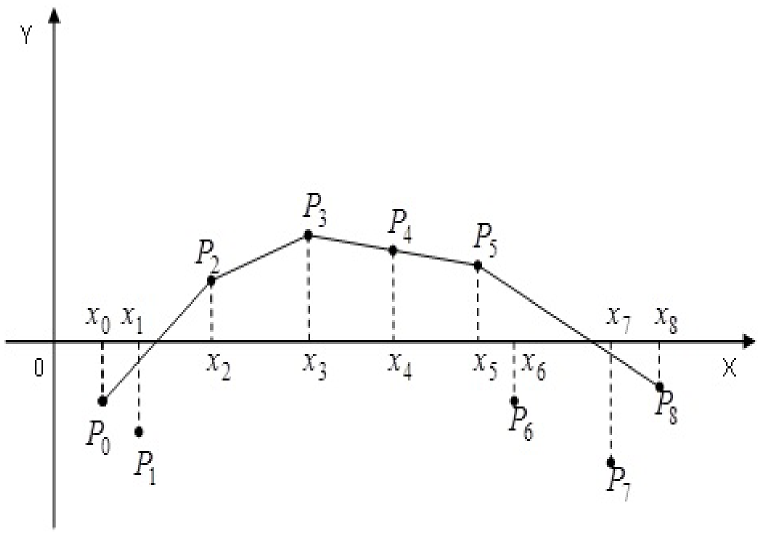

Рис. 1

Діаграма δ_f міноранти Ньютона функції $y = f(x)$ має такі властивості:

- кожна вершина δ_f розміщена в одній із точок зображення P_i значення функції $y = f(x)$ у точці x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$;
- кожна точка зображення P_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, розміщена на δ_f або нижче неї.

Нехай

$$m_f(x_i) = t_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Означення 3. *Величини*

$$r_i = \left(\frac{t_{i-1}}{t_i}\right)^{\frac{1}{x_i - x_{i-1}}} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

і

$$d_i = \frac{r_{i+1}}{r_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

назвемо відповідно i – м числовим нахилом та i – м відхиленням діаграми δ_f міноранти Ньютона.

Означення 4. *Якщо точка зображення P_i, $i = 0, 1, \dots, n$, знаходиться у вершині δ_f, то індекс i назвемо вершинним індексом, якщо ж на δ_f, то діаграмним індексом δ_f. Індекси $i = 0$ та $i = n$ віднесемо до вершинних індексів.*

Множину всіх вершинних індексів позначимо через I, а множину діаграмних індексів – через G. Очевидно, $I \subseteq G$ і $t_i = a_i$ для всіх $i \in G$.

Нехай φ_i – кут між відрізком $D_{x_{i-1}} D_{x_i}$ діаграми δ_f і додатним напрямом осі абсцис. Тоді кутовий коефіцієнт k_i відрізка $D_{x_{i-1}} D_{x_i}$ визначиться за формулою

$$k_i = \frac{\chi_{x_i} - \chi_{x_{i-1}}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{-\ln t_i + \ln t_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \ln \left(\frac{t_{i-1}}{t_i}\right)^{\frac{1}{x_i - x_{i-1}}}.$$

Тому

$$k_i = \ln r_i.$$

Звідси випливає, що

$$r_i = \exp\left(tg\varphi_i\right), \quad d_i = \exp\left(tg\varphi_{i+1} - tg\varphi_i\right).$$

Якщо $\{i_k\} \quad (k = 0, 1, \dots, s;\ s \le n)$ – послідовність вершинних індексів δ_f, то

$$r_{i_1} > r_{i_2} > \cdots > r_{i_s};$$

$$r_{i_k+1} = r_{i_k+2} = \cdots = r_{i_{k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots, s-1;$$

$$d_i \le 1, \quad i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$d_{i_k} < 1, \quad k = 1, 2, \dots, s-1.$$

Нехай p і q – два послідовні вершинні індекси δ_f, індекс i задовольняє умову $p < i < q$. Розглянемо відрізок $D_{x_p} D_{x_q}$ діаграми δ_f (рис. 2).

Тоді

$$\frac{\chi_{x_q} - \chi_{x_p}}{x_q - x_p} = \frac{\chi_{x_i} - \chi_{x_p}}{x_i - x_p},$$

або

$$\frac{-\ln a_q + \ln a_p}{x_q - x_p} = \frac{-\ln t_i + \ln a_p}{x_i - x_p}.$$

Звідси

$$t_i = \left(a_p^{x_q - x_i} a_q^{x_i - x_p}\right)^{\frac{1}{x_q - x_p}}.$$

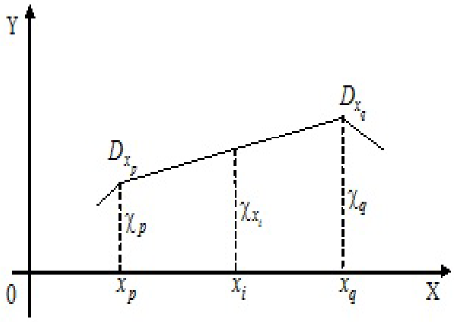

Рис. 2

Аналогічно одержуємо формулу для мінoранти Ньютона $m_f(x)$ на проміжку $[x_p, x_q]$

$$m_f(x) = \left(a_p^{x_q - x} a_q^{x - x_p}\right)^{\frac{1}{x_q - x_p}}.$$

2. Властивості мінoранти Ньютона та її діаграми. Якщо рівняння відрізка $D_{x_p}D_{x_q}$ діаграми δ_f має вигляд $y = kx + b$, $x \in [x_p, x_q]$, то

$$m_f(x) = \exp(-kx - b), \quad x \in [x_p, x_q].$$

Звідси випливає таке твердження.

Твердження 1.

- *Якщо $k \neq 0$, то мінoранта Ньютона $m_f(x)$ на проміжку $[x_p, x_q]$ є строго опуклою функцією; якщо $k = 0$, то $m_f(x)$ на цьому проміжку є відрізком, паралельним осі абсцис.*

- *Якщо $f(x) = A\exp(kx + b)$, то $m_f(x) = |f(x)|$.*

З побудови δ_f випливають наступні твердження.

Твердження 2.

- *Мінoранта Ньютона $m_f(x)$, $x \in [x_0, x_n]$, складається з $(s-1)$ – ї опуклих дуг, де s – кількість вершинних індексів δ_f.*

- *Якщо функція є логарифмічно опуклою, то $m_f(x) \geq f(x)$ для всіх $x \in [x_0, x_n]$; якщо є логарифмічно вгнутою, то $m_f(x) \leq f(x)$ для всіх $x \in [x_0, x_n]$.*

Твердження 3. *Для того, щоб для функції $f(x)$, заданої таблицею значень (1), існувала діаграма δ_f, визначена на проміжку $[x_0, x_n]$, необхідно і досить, щоб для неї виконувалась умова (2).*

Твердження 4. *Мінoранта Ньютона $m_f(x)$ функції $y = f(x)$, заданої таблицею значень (1), є неперервною і логарифмічно опуклою функцією на проміжку $[x_0, x_n]$.*

Твердження 5. *Якщо для функції* $y = f(x)$, *заданої таблицею значень (1), виконуються умови (2), то*

$$\min_{1<i\leq n} |f(x_i)| = \min_{x\in[x_0,x_n]} m_f(x).$$

При цьому, якщо

$$\min_{1<i\leq n} |f(x_i)| = |f(x_s)|,$$

то

$$\min_{x\in[x_0,x_n]} m_f(x) = m_f(x_s) = t_s,$$

де $s \in G$.

3. Алгоритм відшукання зростаючої послідовності вершинних індексів і спадної послідовності числових нахилів. Цей алгоритм складається з низки кроків. На першому кроці покладаємо $i_0 = 0$, знаходимо

$$r = \max_{i_0<i\leq n} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{\frac{1}{x_i-x_0}}, \tag{3}$$

визначаємо індекс i, для якого в (3) досягається максимум, і позначаємо його через i_1. Якщо максимум в (3) досягається для декількох індексів $i_{01}, i_{02}, \ldots, i_{0s_0}$, то через i_1 позначаємо більший з них:

$$i_1 = \max_{1\leq j\leq s_0} i_{0j}.$$

Індекси i_{0j}, $j = 1, 2, \ldots, s_0$, будуть діаграмними індексами δ_f. Тоді покладаємо $r_{i_1} = r$.

Припустимо, що за допомогою k кроків вже знайдені послідовні вершинні індекси $i_1, i_2, \ldots, i_k$, де $i_0 < i_1 < \ldots < i_k$, і числові нахили $r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots, r_{i_k}$, де $r_{i_1} > r_{i_2} > \ldots > r_{i_k}$. Тоді на $(k+1)$ – му кроці для визначення наступного вершинного індексу i_{k+1} і числового нахилу $r_{i_{k+1}}$ поступаємо так.

1. Визначаємо

$$r = \max_{i_k<i\leq n} \left(\frac{a_{i_k}}{a_i}\right)^{\frac{1}{x_i-x_{i_k}}} \tag{4}$$

2. Визначаємо індекс i, для якого в (4) досягається максимум, і позначаємо його через i_{k+1}. Якщо максимум в (4) досягається для декількох індексів $i_{k1}, i_{k2}, \ldots, i_{ks_k}$, то через i_{k+1} позначаємо більший з них

$$i_{k+1} = \max_{1\leq j\leq s_k} i_{kj}.$$

Індекси i_{kj}, $j = 1, 2, \ldots, s_k$, будуть діаграмними індексами δ_f.

3. Покладаємо

$$r_{i_{k+1}} = r.$$

4. Алгоритм відшукання спадної послідовності вершинних індексів і зростаючої послідовності числових нахилів. На першому кроці приймаємо $j_1 = n$, знаходимо

$$r = \min_{0 \le j < n} \left(\frac{a_j}{a_n} \right)^{\frac{1}{x_n - x_j}}, \tag{5}$$

визначаємо індекс j, для якого в (5) досягається мінімум, і позначаємо його через j_2. Якщо мінімум в (5) досягається для декількох індексів $j_{n1}, j_{n2}, \ldots, j_{nr_n}$, то через j_2 позначаємо менший з них:

$$j_2 = \min_{1 \le s \le r_n} j_{ns}.$$

Індекси j_{ns}, $s = 1, 2, \ldots, r_n$, будуть діаграмними індексами δ_f. Тоді покладаємо $r_{j_1} = r_n = r$.

Припустимо, що за допомогою k кроків вже знайдені послідовні вершинні індекси $j_1, j_2, \ldots, j_k$, де $n = j_1 > i_2 > \ldots > j_k$, і числові нахили $r_{j_1}, r_{j_2}, \ldots, r_{j_{k-1}}$, де $r_{j_1} < r_{j_2} < \ldots < r_{j_{k-1}}$. Тоді на $(k+1)$ – му кроці для визначення наступного вершинного індексу j_{k+1} і числового нахилу r_{j_k} поступаємо так.

1. Визначаємо

$$r = \min_{0 \le j < j_k} \left(\frac{a_j}{a_{j_k}} \right)^{\frac{1}{x_{j_k} - x_j}} \tag{6}$$

2. Визначаємо індекс j, для якого в (6) досягається мінімум, і позначаємо його через j_{k+1}. Якщо мінімум в (6) досягається для декількох індексів $j_{k1}, j_{k2}, \ldots, j_{kr_k}$, то через j_{k+1} позначаємо менший з них:

$$j_{k+1} = \min_{1 \le s \le r_k} j_{ks}.$$

Індекси j_{ks}, $s = 1, 2, \ldots, r_k$, будуть діаграмними індексами δ_f.

3.Покладаємо

$$r_{j_k} = r.$$

1. *Цегелик Г. Г.* Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, №9. – С. 1273–1276.

Одержано 19.03.2013