

## ВРАХУВАННЯ ЗМІШУВАННЯ У ВЕКТОРНИХ МЕЗОНАХ МЕТОДОМ НАКЛАДАННЯ КОНФІГУРАЦІЙ

**І. Гайсак, Ю. Фекете, В. Морохович, С. Халупка\*, М. Салак\*\***

Ужгородський національний університет, 88000, Ужгород, вул. Волошина, 32

\*Університет ім. Шафарика, кафедра теоретичної фізики та геофізики, вул.  
Мойсесова, 16, Кошице, 04154, Словацька республіка

\*\*Пряшівський університет, кафедра фізики, вул. 17 грудня, Пряшів, 08009,  
Словацька республіка

На основі чисельного розв'язку системи зв'язаних каналів для S- і D-хвиль отримано спектр мас та хвильові функції сімейства векторних мезонів  $c\bar{c}$  та  $u\bar{d}$  в триплетних станах. При розрахунках взято добре відомий корнелський потенціал із змішаною Лоренц-структурою конфайнментного члена. Спін-залежна частина потенціалу взята з підходу Брейта-Фермі. Вплив сингулярних доданків розглянуто в рамках теорії збурення та модифікованим для системи зв'язаних рівнянь методом накладання конфігурацій (МНК). Показано, що навіть невеликий домішок D-хвилі є дуже важливим при обчисленні окремих характеристик мезонних станів.

Мезонні стани, які розглядаються, як зв'язані стани системи кварк-антикварк є зручними об'єктами для вивчення як ефектів сильної взаємодії, так і різних характеристик слабкої взаємодії [1,2]. Для опису низькоенергетичних властивостей гадронів використовують наступні підходи – підхід Бете-Солпітера, метод розрахунків на решітках та потенціальні моделі. Кожен з цих методів має свої переваги та недоліки. Найбільш простими у математичному відношенні, що важливо при проведенні практичних розрахунків, є потенціальні моделі. В межах даної моделі добре вдається описати усереднений спектр-мас [1], спінові ефекти [3] та ширини розпадів важких кварконіїв [4]. Що ж стосується легкокваркових систем, то тут ситуація доволі суперечлива. З одними й тими ж параметрами можна описати окремі ефекти (спінові, розпади, усереднений спектр мас)[5], але не вдається описати всі ефекти в сукупності. Причиною цього є те, що легкокваркові системи є явно релятивіст-

ськими і до них треба застосовувати релятивістські потенціальні моделі.

При розгляді спінових ефектів в потенціальних моделях виникають сингулярні члени потенціалу міжкваркової взаємодії виду  $1/r^3$  та  $\delta(\vec{r})$ . Це є серйозною проблемою при розрахунках характеристик мезонів. В цьому випадку, як правило, застосовують теорію збурень. Вона була фактично першим методом який використовувався для дослідження характеристик мезонів, які розглядалися як двокваркові системи. Але вона має певні недоліки. Основним недоліком є те, що теорія передбачає малість взаємодії, а в гадронній фізиці це збурення порядку 30-500 MeV, що зрівняно з відстанню між незбуреними енергетичними рівнями і, відповідно, не виконується умова про малість збурення. Для уникнення зазначених проблем з успіхом застосовують варіаційний метод [6]. Відмітимо також, що в триплетному стані мають місце конфігурації з невизначеним орбітальним моментом ( $J = L + 1, J = L - 1$ ).

Наприклад, змішування  $S$ - і  $D$ -хвиль має місце в стані  $\Gamma$  (ми використовуємо спектроскопічні позначення  $J^P$ , де вказано повний момент і парність системи). В більшості робіт при розгляді триплетних станів (див. [3] та цитовану літературу) автори нехтують зв'язком каналів, або вводять додатковий параметр – кут змішування [7,8].

В нашій роботі розглянуто вплив сингулярних членів потенціалу між-кваркової взаємодії для стану кварконія  $\Gamma$ , який описується системою зв'язаних рівнянь, проведено порівняння методів збурення та накладання конфігурацій, які модифіковані до системи зв'язаних рівнянь. При виборі структури, параметрів потенціалу та схеми чисельного рішення системи зв'язаних диференціаль-

них рівнянь ми слідували роботі [9], в якій досліджено вклад  $D$ -хвильової компоненти на енергетичний спектр та ширини розпадів векторних мезонів, а розрахунковий варіант методу накладання конфігурацій взято з [3], де розглянуто надтонке розщеплення на основі рівняння Шредінгера. В такому підході кут змішування  $S$  і  $D$  хвиль визначається динамікою системи і не потребує додаткових експериментальних даних.

**Метод накладання конфігурацій для системи зв'язаних рівнянь**

В квазірелятивістичному підході Брейта-Фермі триплетні стани двокваркових систем описуються наступними зв'язаними рівняннями Шредінгера [9]

$$\left. \begin{aligned} \left( -\frac{1}{m_q} \frac{d^2}{dr^2} - E + {}^3V_c \right) u + \sqrt{8} V_T w = 0 \\ \left( -\frac{1}{m_q} \frac{d^2}{dr^2} - E + \frac{6}{m_q r^2} + {}^3V_c - 2V_T - 3V_{LS} \right) w + \sqrt{8} V_T u = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

де  ${}^3V_c = V_V + V_S + V_{SS}/4$ . Ми використовуємо корнелський потенціал із змішаною Лоренц - структурою, коли конфайнментний доданок містить векторну і скалярну частину:

$$V_{q\bar{q}} = V_V + V_S = -\frac{\alpha_s}{r} + \beta_V r + \beta_S r,$$

а відповідні спінові поправки рівні

$$\begin{aligned} V_{LS} &= \frac{1}{2m_q m_{\bar{q}}} \left\{ 3 \frac{\alpha_S}{r^3} + 3 \frac{\beta_V}{r} - \frac{\beta_S}{r} \right\} (\vec{L} \vec{S}), \\ V_{SS} &= \frac{4}{3m_q m_{\bar{q}}} \left\{ \frac{\beta_V}{r} - 2\pi \alpha_S \delta(r) \right\} (\vec{S}_1 \vec{S}_2), \\ V_T &= \frac{1}{m_q m_{\bar{q}}} \left\{ \frac{3\alpha_S}{r^3} + \frac{\beta_V}{r} \right\} \hat{S}_{12}. \end{aligned}$$

Зв'язування рівнянь Шредінгера відбувається за рахунок наявності в потенціалі взаємодії тензорної компоненти  $V_T$ . В роботі [9] система (1) розв'язується чисельно, коли знехтувані сингулярні члени в потенціалі  $1/r^3$  та  $\delta(\vec{r})$ . Далі ми і проводимо дослідження вкладу сингулярних членів в рамках теорії збурень та МНК. Узагальнимо дані методи на систему рівнянь, для цього зручно радіальну хвильову функцію системи записати в матричній формі

$$\Psi = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де  $u(r)$  радіальна функція  $S$ -хвильової компоненти, а  $w(r)$  -  $D$ -хвильової компоненти. Тоді рівняння Шредінгера в матричній формі має вигляд

$$\hat{H} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}, \quad (3)$$

де в гамільтоніані  $\hat{H}$  можна виділити несингулярні та сингулярні члени  $H = H_0 + W$ , а саме

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{m} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\alpha}{r} + kr + \frac{\beta_V}{3m^2 r^3}; & \sqrt{8} \frac{\beta_V}{m^2 r} \\ \sqrt{8} \frac{\beta_V}{m^2 r}; & -\frac{1}{m} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\alpha}{r} + kr + \frac{6}{mr^2} + \frac{\beta_V}{3m^2 r} - \frac{2\beta_V}{m^2 r} - \frac{3}{m^2} \left( \frac{3\beta_V - \beta_S}{r} \right) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi\alpha}{3m^2} \delta(\vec{r}); & \sqrt{8} \frac{3\alpha}{m^2 r^3}; \\ \sqrt{8} \frac{3\alpha}{m^2 r^3}; & \sqrt{8} \frac{3\alpha}{m^2 r^3} - \frac{6\alpha}{m^2 r^3} - \frac{9\alpha}{2m^2 r^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \Delta V_{SS} & \sqrt{8} \Delta V_T \\ \sqrt{8} \Delta V_T & \frac{1}{4} \Delta V_{SS} - 2\Delta V_T - 3\Delta V_{LS} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Тоді матричні елементи

набудуть вигляду

$$\Delta W_{mn} = \int \Psi_m^* \hat{W} \Psi_n d\vec{r}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Delta W_{mn} = & \int u_m \left( -\frac{2\pi\alpha}{3m^2} \delta(\vec{r}) \right) u_n dr + \int w_m \left( \sqrt{8} \frac{3\alpha}{m^2 r^3} \right) u_n dr + \int u_m \left( \sqrt{8} \frac{3\alpha}{m^2 r^3} \right) w_n dr + \\ & + \int w_m \left( -\frac{2\pi\alpha}{3m^2} \delta(\vec{r}) - \frac{6\alpha}{m^2 r^3} - \frac{9\alpha}{2m^2 r^3} \right) w_n dr = \Delta W_{SS}^{u_m u_n} + \Delta W_{ST}^{w_m u_n} + \Delta W_{ST}^{u_m w_n} + \Delta W_{SS+ST+LS}^{w_m w_n}, \end{aligned} \quad (7)$$

а в рамках теорії збурення поправка до енергетичного спектру відповідно рівна

$$\Delta E_{nn} = \Delta W_{SS}^{u_n u_n} + 2\Delta W_{ST}^{w_n u_n} + \Delta W_{SS+ST+LS}^{w_n w_n}. \quad (8)$$

Як видно з формули (7)  $S$ -хвиля дає чистий вклад лише для спінової взаємодії (1-й доданок), інтерференційний член  $SD$  (2,3-й доданки) містить

спін-тензорну поправку, а чиста  $D$ -хвиля (4-й доданок) включає всі спінозалежні складові потенціалу взаємодії, що і відображено в формулі (8).

У випадку методу накладання конфігурацій ми використовували алгоритм розвинутий в роботі [2], а саме, поправки є розв'язком наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} a_1(E - E_1^0 - W_{11}) - a_2 W_{12} - a_3 W_{13} - \dots - a_n W_{1n} &= 0, \\ c + a_2(E - E_2^0 - W_{22}) - a_3 W_{23} - \dots - a_n W_{2n} &= 0, \\ \dots & \\ -a_1 W_{n1} - a_2 W_{n2} - a_3 W_{n3} - \dots + a_n(E - E_n^0 - W_{nn}) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

де хвильова функція системи представлена через власні функції рівняння (1)

$$\phi = \sum_{i=1}^N a_i \Psi_i. \quad (10)$$

### Результати розрахунків та їх обговорення

Нижче ми приводимо результат розрахунків спектру мас  $c\bar{c}$ - та  $u\bar{d}$ -систем, а також значення радіальної хвильової функції в нулі, яка зв'язана з ширинами лептонних розпадів векторних станів [10].

Чисельні результати наведені, коли в якості базисних функцій взято від одної (відповідає теорії збурення) до трьох незбурених функцій (10). При розрахунках вибрано наступні значення мас кварків  $m_c = 1.4$  ГеВ,  $m_u = 0.33$  ГеВ. Константу сильної взаємодії розраховано за формулою асимптотичної вільності

$$\alpha_s(q) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right)},$$

де  $\Lambda = \Lambda_{\text{КХД}} = 140$  МеВ;  $n_f = 3$  для легких і змішаних мезонів;  $n_f = 4$  для  $c\bar{c}$  та  $b\bar{b}$  - кварконіїв. Переданий імпульс  $q$  ми вибираємо у виді  $q = 2\mu$ , де  $\mu$  - приведена маса системи. Лоренц-структура потенціалу взаємодії взято згідно роботи [9], а саме:  $\beta_V = 0.04$  ГеВ,  $\beta_S = 0.14$  ГеВ.

Результати розрахунку спектру мас наведені в таблиці 1 (незбурені власні значення енергії, поправка по теорії збурень, енергії по МНК з двома та трьома базисними функціями, відповідно), а експериментальні дані взято з [11]. З таблиці видно, що ряд (10) швидко збігається для важких систем і вже теорія збурень дає понад 90% вкладу сингулярних членів, однак для легких мезонів важливим є вихід за рамки теорії збурення.

Таблиця 1. Спектр – мас векторних мезонів

Стани	$M_{\text{теор.}}$ , МеВ Незб.	$M_{\text{теор.}}$ , МеВ 1набл.	$M_{\text{теор.}}$ , МеВ 2 набл.	$M_{\text{теор.}}$ , МеВ 3 набл.	$M_{\text{експ.}}$ , МеВ
$J/\psi(1S)$	3043.45	3098.58	3097.11	3096.87	3096.87
$\psi(2S)$	3649.04	3674.02	3675.50	3674.87	3685.96
$\psi(4040)$	4098.04	4113.11	-----	4113.97	4040
$\rho(770)$	685.5	778	771	768.5	768.5
$\rho(1450)$	1574.5	1643	1650	1643	1465
$\rho(1700)$	2270.5	2332	-----	2341	1700

Цікавими виявляються абсолютні величини поправок, які дають окремі сингулярні члени потенціалу в рамках теорії збурення. В таблицях 2 і 3 наведено величини поправок від спін-спінової, спін-тензорної та спін-орбітальної складових сингулярної частини взаємодії для чармонія та  $\rho$  мезона відповідно. Видно, що для важких систем величина спін-тензорної частини поправки на порядок більша від спін-спінової і повністю обумовлена наявністю домішки  $D$ -хвилі. Для легких систем спін-спінова та спін-тензорна поправки мають величину одного порядку. З наведеного слідує, що при розгляді спінових ефектів важливо

брати до уваги орбітальну структуру мезонних станів, особливо для систем з важких кварків. Хоч зауважимо, що домішок  $D$ -хвилі складає менше 1% і біля 4% для важких і легких систем відповідно [9]. Порівнюючи з роботою [8], відмітимо, що для стану  $\Psi(2S+D)$  домішок  $D$ -хвилі у нас становить  $P_D = 0.008$  [9], якому можна поставити у відповідність кут змішування  $\phi = 5^\circ$ . Але зауважимо, що у вищезгаданій роботі [8] мова йде про кут змішування чистих триплетних станів  $2S$  і  $1D$   $\phi = 12^\circ$ .

Таблиця 2. Для  $J/\psi$  мезона

	$\Delta W_{SS}^{u_n u_n}$ , MeB	$\Delta W_{ST}^{w_n u_n} + \Delta W_{ST}^{u_n w_n}$ , MeB	$\Delta W_{SS+ST+LS}^{w_n w_n}$ , MeB
$\Delta E_{11}$ , MeB	6.04	49.6	0.000502031
$\Delta E_{22}$ , MeB	4.18	21.16	0.000358519
$\Delta E_{33}$ , MeB	3.65	11.95	0.005247015

Таблиця 3. Для  $\rho$  мезона

	$\Delta W_{SS}^{u_n u_n}$ , MeB	$\Delta W_{ST}^{w_n u_n} + \Delta W_{ST}^{u_n w_n}$ , MeB	$\Delta W_{SS+ST+LS}^{w_n w_n}$ , MeB
$\Delta E_{11}$ , MeB	60.98	31.67	- 0.19
$\Delta E_{22}$ , MeB	50.19	19.02	- 0.28
$\Delta E_{33}$ , MeB	46.64	14.69	- 0.075

Але невеликий інтегральний вклад  $D$ -хвилі особливо відчутний в нулі радіальної змінної. Значення радіальної хвильової функції в нулі пов'язане з шириною лептонних розпадів векторних мезонів [10]

$$\Gamma = ({}^3S_1 \rightarrow e^+e^-) = \frac{4\alpha_{em}^2 Q_q^2}{M_V} [R_S(0)]^2$$

В таблиці 4 наведено значення квадрата радіальної хвильової функції в нулі для незбуреного та збуреного випадку та

для розрахунку по МНК з двома і трьома базисними наборами. Бачимо, що на відміну від енергетичних спектрів при розгляді ширин розпадів вихід за рамки теорії збурень дає поправку в 20-30%. Наші результати дуже близькі до результатів роботи [10], де розглядалися ті ж кваркові системи на основі рівняння Шредінгера з узагальненим потенціалом Брейта-Фермі. Відмінність від нашої роботи полягає у виборі виду Лоренц-структури потенціалу кварк-кваркової взаємодії і нехтуванні домішкою  $D$ -хвилі.

Таблиця 4. Хвильові функції в нулі  $|R_S(0)|^2$

Стани	$ R(0) ^2$ , ГеВ <sup>3</sup> незб.	$ R(0) ^2$ , ГеВ <sup>3</sup> теор. збурень	$ R(0) ^2$ , ГеВ <sup>3</sup> 2 набл.	$ R(0) ^2$ , ГеВ <sup>3</sup> 3 набл.	$ R(0) ^2$ , ГеВ <sup>3</sup> [4]	$ R(0) ^2$ , ГеВ <sup>3</sup> [12]	$ R(0) ^2$ , ГеВ <sup>3</sup> [10]
$J/\psi(1S)$	0.77	0.69	0.83	0.85	1.05	1.45	0.81
$\psi(2S)$	0.53	0.56	0.47	0.50	0.63	0.93	0.53
$\psi(4040)$	0.47	0.53	-----	0.41	0.52	0.79	0.46
$\rho(770)$	0.11	0.086	0.126	0.136	-----	-----	-----
$\rho(1450)$	0.091	0.081	0.073	0.089	-----	-----	-----
$\rho(1700)$	0.084	0.12	-----	0.061	-----	-----	-----

**Висновки**

Таким чином, в нашій роботі проведено дослідження впливу структури потенціалу кварк-кваркової взаємодії на структуру векторних мезонів. Несингулярну частину потенціалу враховано

чисельним рішенням зв'язаної системи диференціальних рівнянь, яка відображає змішування  $S$ - і  $D$ -хвиль, а сингулярну – в рамках теорії збурення та МНК. Показано, що незважаючи на незначний домішок  $D$ -хвилі (долі процента) ця

компонента хвильової функції відіграє суттєву роль при врахуванні сингулярної частини потенціалу взаємодії, а саме сингулярні члени більшість авторів розглядає при дослідженні спінових ефектів. Причому, наявність  $D$ -хвилі суттєво підсилює вклад спин-тензорної компоненти в спектр мас. Відносно методики

врахування сингулярної частини взаємодії можна зауважити, що при розгляді спектру мас  $q\bar{q}$ -систем можна обмежитися першою поправкою теорії збурень, але при розгляді ширин розпаду результати МНК суттєво покращують теорію збурень.

1. C. Quigg, J.L. Rosner, Phys. Rep. 56, p. 167, 1982
2. G. Altarelli, N. Cabibo, G. Corbo, L. Maiani and G. Martinelli, Nucl. Phys. B 208, p. 365, 1982.
3. V. Lengyel, Yu. Fekete, I. Haysak, A. Shpenik, Eur.Phys.J. C21 355-359, 2001.
4. V. Lengyel, V. Makkay, S. Chalupka, V. Salak, Quarkonium decay widths in screened potential model, Ukr. Phys. J. V. 42, No 7, p. 773-779, 1997.
5. V. Lengyel, V. Rubish, Yu. Fekete, S. Chalupka, M. Salak, Incorporating relativistic kinematics for the description of light quark systems, J. Phys. Studies V. 2, No 1 (1998), p. 38-44.

6. Ajay K. Rai, R.H. Parmar and P.C. Vinodkumar, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 28 (2002) 2275-2282.
7. Moxhay, J.L. Rosner, Phys. Rev D 28, 1132 (1983).
8. J. L. Rosner, Charmless final states and S- and D-wave mixing in the  $\Psi'$ , Phys. Rev D, Vol. 64, 094002.
9. I. Haysak, V. Morokhovych, S. Chalupka, M. Salak, hep-ph/0201038, I.I. Haysak, V.S. Morokhovych, J. Phys. Studies V. 6, No 1 (2002), p. 55-59.
10. Buchmuller W., Tye S.-H. // Phys. Rev. D. – 1981.- 24, №1. – p. 132-144.
11. Part. Data Group, The European Physical Journal, v. 15, №1-4, (2000).
12. Eichten E., Quigg C. // Fermilab prep.- 1995.- 95/045-T – p. 1-9.

## CONFIGURATION INTERACTION METHOD FOR DESCRIBING $S$ AND $D$ MIXING IN MESONS

I. Haysak, Yu. Fekete, V. Morokhovych, S. Chalupka\*, M. Salak\*\*

Department of Theoretical Physics, Uzhgorod National University, Voloshin St. 32, Uzhgorod, Ukraine, 88000

\*Department of Theoretical Physics and Geophysics, P.J.Safarik University, Moyzesova St. 16, Kosice, Slovak Republic, 04154

\*\*Department of Physics, Presov University, Novembra St. 17, Presov, Slovak Republic, 08009

Based on the numeric solution of a system of linked channels for  $S$ - and  $D$ -waves mass spectrum and wave functions of a family of vector mesons  $c\bar{c}$  and  $u\bar{d}$  in triplet states are obtained. The calculations are performed using a well-known Cornell potential with a mixed Lorentz-structure of the confinement term. The spin-dependent part of the potential is taken from the Breit-Fermi approach. The effect of singular terms is considered in the framework of the perturbation theory and by a configuration interaction approach (CIA), modified for a system of linked equations. Even a small addition of the  $D$ -wave is shown to be very important at the calculation of certain characteristics of the meson states.