А.Г. Лавер

Усреднение периодической по времени краевой задачи для сингулярно возмущенного нелинейного параболического уравнения с двумя быстро осциллирующими переменными// Дифференциальные уравнения с частными производными в прикладных задачах. – К.: Институт математики АН УССР, 1986, с. 65-71

АКАДЕМИЯ НАУК
УКРАИНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ
МАТЕМАТИКИ

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

КИЕВ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ АН УССР
1986

льных градиентов температуры происходит значительно позже.

Учтем теперь вертикальное распределение солености $S$, описывая процесс турбулентного обмена уравнениями теплопроводности и диффузии солей с коэффициентом обмена вида

$$K_z = K_0 (1 - \alpha\, \partial T/\partial z + \beta\, \partial S/\partial z)^{-1}.$$

Если годовые колебания $T$ и $S$ на поверхности аппроксимированы только первыми гармониками с амплитудами $A_1$ и $B_1$ соответственно со сдвигом фаз $\psi$, то по аналогии имеем [4]

$$\alpha T - \beta S = \sum_{k=0}^{N} \Phi_k(z,t) \lambda_1^k, \quad K_z = \int (\alpha \cdot \partial T/\partial t - \beta \cdot \partial S/\partial t)\, dz,$$

$$\lambda_1 = C_1 \sqrt{\omega/2K_0}, \quad C_1^2 = \alpha^2 A_1^2 + \beta^2 B_1^2 - \alpha\beta A_1 B_1 \sin 2\psi.$$

При $\lambda_1 > \lambda$, что имеет место для условий Черного моря, эффекты нелинейности обостряются. Сильный градиент солености уменьшает интенсивность зимней конвекции и вертикальные эпюры $T$ в период выхолаживания становятся более инверсными.

## Список литературы


1. Богуславский С.Г. Температурное поле Тропической Атлантики. – Киев: Наук.думка, 1977. – 164 с.
2. Березовский А.А., Богуславский С.Г. Задачи тепло- и массопереноса в решении актуальных проблем Черного моря. – Киев, 1984. – 59 с. – (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 84.59).
3. Котовщиков Б.Б. Нелинейная модель сезонного термоклина. – Севастополь, 1983. – 11 с. – Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 4890.
4. Котовщиков Б.Б. Поле солености и вертикальный обмен в Черном море. – Севастополь, 1984. – 16 с.– Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 1920.




УДК 517.947

А.Г. Лавер

# УСРЕДНЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПО ВРЕМЕНИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Будем изучать поведение при $\varepsilon \to 0$ решения следующей краевой задачи:

$$\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\bar\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(x,t,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\right) + a_0\left(x,t,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2}\right) u^\varepsilon = \tag{1}$$

$$= f\left(x,t,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2},u^\varepsilon\right) \equiv f^\varepsilon(u^\varepsilon),$$

$$u^\varepsilon(x,t+T) = u^\varepsilon(x,t), \quad u^\varepsilon(x,t)\big|_\Gamma = 0, \quad x \in \Omega,\ t \in R,$$

где $\Omega$ – ограниченная область в $R^n$ с границей $\Gamma$, по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до $n$. $\bar\partial/\partial x_i$ – вариационные производные, $T = const > 0$, и выполняются неравенства

$$a_{ij}(x,t,y,z)\xi_i\xi_j \geq \alpha_0|\xi|^2, \quad a_0(x,t,y,z) \geq 0 \tag{2}$$

$$\forall\, \xi, y, z \in R^n,\ x \in \Omega,\ t \in R,\ \alpha_0 = const > 0.$$

Коэффициенты $a_{ij}(x,t,y,z)$, $a_0(x,t,y,z)$ и функция $f(x,t,y,z,u)$, $u \in R$ периодические по $y \in R^n$ с параллелепипедом периодичности $Y = \prod_{j=1}^{n}(0,y_j^0)$, по $z \in R^n$ с параллелепипедом периодичности $Z = \prod_{j=1}^{n}(0,z_j^0)$ и по $t$ – с периодом $T$ (обозначение: $a_{ij}(x,t,y,\cdot) \in \mathcal{T}(Z)$, $a_{ij}(x,t,\cdot,z) \in \mathcal{T}(Y)$, $a_{ij}(x,\cdot,y,z) \in \mathcal{T}(0,T)$ и т.д.).

1. Предполагаем, что данные задачи удовлетворяют условиям: 1) $\Omega$ – липшицева область; 2) коэффициенты $a_{ij}(x,t,y,z)$, $a_0(x,t,y,z)$ принадлежат пространству $C(Q_T \times Y \times Z)$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, периодичны по $t$ с периодом $T$, по $y, z$ – с параллелепипедами $Y$, $Z$ и удовлетворяют условиям (2). Функция $f(x,t,y,z,u)$: 3) $\forall u \in R$ измерима по $(x,t,y,z) \in \Omega \in R \times R^n \times R^n$; 4) $\forall (x,u)$ равномерно периодична по $t$ с периодом $T$

и по $y, z$ – с параллелепипедами $Y, Z$ ; 5) равномерно непрерывна по $(x, y, u)$ на каждом ограниченном множестве $\{x \in \Omega,\ y \in R^n,\ |u| \le M\}$, причем равномерно относительно почти всех (п.в.) $(t, z) \in (0,T) \times Z$ ; 6) всюду в $\Omega \times (0,T) \times Y \times Z$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x,t,y,z,u)| \le f_0(x,t) + C_1|u|,\ f_0 \in L_2(Q_T),\ C_1 = \mathrm{const} > 0; \quad (3)$$

7) не возрастает по $u$ $\forall (x,t,y,z) \in \Omega \times (0,T) \times Y \times Z$.

При сделанных предположениях задача (1) имеет единственное решение $u^\varepsilon \in L_2(0,T; \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)) \cap H^1(0,T; H^{-1}(\Omega)) \cap H^{1/2}(0,T; L_2(\Omega))$ (см. [1, теорема 1]).

2. Исследуем поведение решения при $\varepsilon \to 0$. С этой целью определим функцию $\hat{u}(x,t)$ как решение задачи [2]:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(q_{ij}(x,t)\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_j}\right) + \bar{\bar{a}}_0(x,t)\,\hat{u} = \bar{\bar{f}}(x,t,\hat{u}) \equiv \bar{\bar{f}}(\hat{u}),\ \hat{u}|_\Gamma = 0, \quad (4)$$

где

$$q_{ij}(x,t) = \left[q^1_{ij}(x,t,\cdot) - q^1_{ik}(x,t,\cdot)\frac{\partial \theta^j(x,t,\cdot)}{\partial y_k}\right]_Y,\quad \bar{\bar{a}}_0(x,t) = [a_0(x,t,\cdot,\cdot)]_{Y,Z},$$

$$q^1_{ij}(x,t,y) = \left[a_{ij}(x,t,y,\cdot) - a_{ik}(x,t,y,\cdot)\frac{\partial \chi^j(x,t,y,\cdot)}{\partial z_k}\right]_Z,\ [u(x,t,\cdot)]_Z = \frac{1}{|Z|} \times$$

$$\times \int_Z u(x,t,z)\,dz,\ \ \bar{\bar{f}}(x,t,u) = [f(x,t,\cdot,\cdot,u)]_{Y,Z},\ [u(x,t,\cdot,\cdot)]_{Y,Z} = \frac{1}{|Y|\cdot|Z|}\int_Y\int_Z u(x,t,y,z)\,dy\,dz.$$

Функции $\theta^k(x,t,y)$, $\chi^l(x,t,y,z)$, $k,l = \overline{1,n}$, определяются как решения задач

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial z_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial z_j}(\chi^l - z_l)\right) = 0,\ \chi^l \in V^1(Z),\ \frac{\bar{\partial}}{\partial y_i}\left(q^1_{ij}\frac{\partial}{\partial y_j}(\theta^k - y_k)\right) = 0,\ \theta^k \in V^1(Y); \quad (5)$$

где, например, $V(Y) = H^1(Y) \cap \mathcal{J}(Y)$, $V^1(Y) = \{v \in V(Y) \mid [v]_Y = 0\}$. Из (5) функции $\chi^l, \theta^k$ определяются единственным образом. Задача (4) имеет единственное решение в $L_2(0,T; \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))$.



Определим коэффициенты $a^{\varepsilon(\beta)}_{ij}(x,t) \equiv a^{(\beta)}_{ij}\left(x,t,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2}\right)$, $a^{\varepsilon(\beta)}_0(x,t) \equiv a^{(\beta)}_0\left(x,t,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2}\right)$, которые удовлетворяют условиям

$$a^{(\beta)}_{ij}(x,t,y,z),\ a^{(\beta)}_0(x,t,y,z) \in C^\infty(Q_T \times Y \times Z),\ a^{(\beta)}_{ij}(x,t,y,z)\xi_i\xi_j \ge \alpha_1|\xi|^2,$$

$$a^{(\beta)}_0(x,t,y,z) \ge 0\ \forall \xi, y, z \in R^n,\ x \in \Omega,\ t \in R,\ \alpha_1 = \mathrm{const} > 0, \quad (6)$$

$$\|a_{ij}(x,t,y,z) - a^{(\beta)}_{ij}(x,t,y,z)\|_{C(Q_T\times Y\times Z)} \to 0,\ \ \|a_0(x,t,y,z) - a^{(\beta)}_0(x,t,y,z)\|_{C(Q_T\times Y\times Z)} \to 0$$

при $\beta \to \infty$.

Рассмотрим задачи

$$\varepsilon\frac{\partial u^{\varepsilon(\beta)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{\varepsilon(\beta)}_{ij}\frac{\partial u^{\varepsilon(\beta)}}{\partial x_j}\right) + a^{\varepsilon(\beta)}_0 u^{\varepsilon(\beta)} = f^\varepsilon(u^{\varepsilon(\beta)}),\ u^{\varepsilon(\beta)}(x,t+T) = u^{\varepsilon(\beta)}(x,t),$$
$$u^{\varepsilon(\beta)}|_\Gamma = 0; \quad (7)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(q^{(\beta)}_{ij}\frac{\partial \hat{u}^{(\beta)}}{\partial x_j}\right) + \bar{\bar{a}}^{(\beta)}_0\hat{u}^{(\beta)} = \bar{\bar{f}}(\hat{u}^{(\beta)}),\ \hat{u}^{(\beta)}|_\Gamma = 0. \quad (8)$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия (6). Тогда при $\beta \to \infty$ решение $u^{\varepsilon(\beta)} \to u^\varepsilon$ и $\hat{u}^{(\beta)} \to \hat{u}$ в $L_2(0,T; \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))$ сильно.

Доказательство. Умножая скалярно в $L_2(Q_T)$ уравнения (1) и (7) на функцию $v \in L_2(0,T; \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))$ и вычитая из второго уравнения первое, имеем (здесь (...)– скалярное произведение в $L_2(Q_T)$ ):

$$\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t}(u^{\varepsilon(\beta)} - u^\varepsilon), v\right) + \int_{Q_T}\left\{\left(a^{\varepsilon(\beta)}_{ij}\frac{\partial u^{\varepsilon(\beta)}}{\partial x_j} - a^\varepsilon_{ij}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\right)\frac{\partial v}{\partial x_i} +\right.$$

$$\left. + (a^{\varepsilon(\beta)}_0 u^{\varepsilon(\beta)} - a^\varepsilon_0 u^\varepsilon)v\right\}dx\,dt = (f^\varepsilon(u^{\varepsilon(\beta)}) - f^\varepsilon(u^\varepsilon), v),$$

откуда, принимая $v = u^{\varepsilon(\beta)} - u^\varepsilon$ и учитывая условие периодичности по времени и монотонность правой части, получаем неравенство

$$\alpha_1 \| u^{\varepsilon} - u^{\varepsilon(\beta)} \|^2_{L_2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))} \le \int_{Q_T} \Big\{ (a^{\varepsilon}_{ij} - a^{\varepsilon(\beta)}_{ij}) \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (u^{\varepsilon(\beta)} - u^{\varepsilon}) +$$

$$+ (a^{\varepsilon}_0 - a^{\varepsilon(\beta)}_0) u^{\varepsilon} (u^{\varepsilon(\beta)} - u^{\varepsilon}) \Big\} \, dx\,dt .$$

Так что, используя априорную оценку $\| u^{\varepsilon} \|_{L_2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))} \le const$ (см. [1, теорема 1]), имеем окончательно

$$\| u^{\varepsilon} - u^{\varepsilon(\beta)} \|_{L_2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))} \le const \Big[ \sup_{i,j} \| a_{ij} - a^{(\beta)}_{ij} \|_{C(Q_T \times Y \times Z)} + \| a_0 - a^{(\beta)}_0 \|_{C(Q_T \times Y \times Z)} \Big]. \quad (9)$$

Далее, как и в [3], можно показать, что $\| q_{ij} - q^{(\beta)}_{ij} \|_{C(Q_T)} \to 0$, $\| \bar{\bar{a}}_0 - \bar{\bar{a}}^{(\beta)}_0 \|_{C(Q_T)} \to 0$ при $\beta \to \infty$. Поэтому для решений $\hat{u}$ и $\hat{u}^{(\beta)}$ будет справедливо неравенство, аналогичное (9).

Лемма . Пусть заданная на $\Omega \times (0,T) \times R^n \times R^n$ измеримая функция $f(x,t,y,z)$ равномерно периодична по $y, z$ с параллелепипедами периодичности $Y, Z$, равномерно непрерывна по $x$, $y$, причем равномерно относительно п.в. $(t,z) \in (0,T) \times Z$, и имеет мажоранту $f_0(x,t) \in L_p(Q_T)$, $p \ge 1$. Тогда при $\varepsilon \to +0$ $f(x,t,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2}) \to \bar{\bar{f}}(x,t) = [f(x,t,\cdot,\cdot)]_{Y,Z}$ слабо в $L_p(Q_T)$.

Доказательство леммы подобно доказательству леммы работы [1].

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и : 1) для п.в. $(t,z)$, $\forall (x,y,u) \in \Omega \times R^n \times R$ существует измеримая производная $f_t$, удовлетворяющая оценке (3); 2) для п.в. $(t,z)$, $\forall (x,y) \in \Omega \times R^n$ функция $f$ абсолютно непрерывна по $u$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon \ne 0)$ решение $u^{\varepsilon(\beta)} \to \hat{u}^{(\beta)}$ слабо в $H^1(0,T;\mathring{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{T}(0,T)$.

Доказательство проводим методом работы [3]. Опуская для простоты индекс $\beta$, определяем сопряженные функции $\hat{\chi}^l, \hat{\theta}^k$, $l,k = \overline{1,n}$ :

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\Big(a^*_{ij} \frac{\partial}{\partial z_j} (\hat{\chi}^l - z_l)\Big) = 0, \quad \hat{\chi}^l \in V^{\perp}(Z), \quad \hat{q}^1_{ij} = \Big[a_{ij} - a_{kj} \frac{\partial \hat{\chi}^i}{\partial z_k}\Big]_Z,$$

$$a^*_{ij} = a_{ji},$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\Big(\hat{q}^{1*}_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} (\hat{\theta}^k - y_k)\Big) = 0, \quad \hat{\theta}^k \in V^{\perp}(Y), \quad \hat{q}_{ij} = \Big[\hat{q}^1_{ij} - \hat{q}^1_{kj} \frac{\partial \hat{\theta}^i}{\partial y_k}\Big]_Y .$$



Применяя оператор $\partial/\partial x_j$ к функции $\varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2})$, получаем $\partial/\partial x_j + 1/\varepsilon \cdot \partial/\partial y_j + 1/\varepsilon^2 \, \partial/\partial z_j$. Так что для $A^*_{\varepsilon} = -\partial/\partial x_i (a^*_{ij}(x,t,x/\varepsilon, x/\varepsilon^2)\partial/\partial x_j)$ запишем

$$A^*_{\varepsilon} = \varepsilon^{-4} A^*_1 + \varepsilon^{-3} A^*_2 + \varepsilon^{-2} A^*_3 + \varepsilon^{-1} A^*_4 + A^*_5 ,$$

$$A^*_1 = -\frac{\partial}{\partial z_i}\Big(a^*_{ij} \frac{\partial}{\partial z_j}\Big), \quad A^*_2 = -\frac{\partial}{\partial z_i}\Big(a^*_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j}\Big) - \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(a^*_{ij} \frac{\partial}{\partial z_j}\Big),$$

$$A^*_3 = -\frac{\partial}{\partial y_i}\Big(a^*_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j}\Big) - \frac{\partial}{\partial z_i}\Big(a^*_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big) - \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^*_{ij} \frac{\partial}{\partial z_j}\Big),$$

$$A^*_4 = -\frac{\partial}{\partial y_i}\Big(a^*_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big) - \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^*_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j}\Big), \quad A^*_5 = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^*_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big).$$

Зафиксировав $\lambda \in \{1,2,\dots,n\}$, ищем функцию $W_{\varepsilon} = \varepsilon \alpha + \varepsilon^2(\beta + z_{\lambda}) + \varepsilon^3 \gamma + \varepsilon^4 \delta$ из уравнения

$$A^*_{\varepsilon} W_{\varepsilon} = g_0 + \varepsilon g_1, \quad g_0 = -\frac{\partial \hat{q}_{\lambda i}}{\partial x_i}, \quad (10)$$

$$g_1 = (A^*_2 \delta + A^*_3 \gamma + A^*_4(\beta + z_{\lambda}) + A^*_5 \alpha) + \varepsilon (A^*_3 \delta + A^*_4 \gamma + A^*_5(\beta + z_{\lambda})) + \varepsilon^2 (A^*_4 \delta + A^*_5 \gamma) + \varepsilon^3 A^*_5 \delta .$$

Неизвестные коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ определим из задач

$$A^*_1 \alpha = 0, \quad (11^0)$$

$$A^*_1 (\beta + z_{\lambda}) + A^*_2 \alpha = 0, \quad (11^1)$$

$$A^*_1 \gamma + A^*_2 (\beta + z_{\lambda}) + A^*_3 \alpha = 0, \quad (11^2)$$

$$A^*_1 \delta + A^*_2 \gamma + A^*_3 (\beta + z_{\lambda}) + A^*_4 \alpha = g_0 . \quad (11^3)$$

Решениями $(11^0)$ и $(11^1)$ будут $\alpha = -\hat{\theta}^{\lambda}(x,y,t) + \theta(x,t)$, $\beta = -\chi^{\lambda} + \chi^j \, \partial\theta^{\lambda}/\partial y_j + \tilde{\beta}(x,y,t)$, где $\theta, \tilde{\beta}$ – произвольные функции. Уравнения $(11^2)$ и $(11^3)$ будут разрешимы

относительно $\gamma$ и $\delta$ . В силу условий (6) $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in C^{\infty}(Q_T \times Y \times Z)$ . Далее, аналогично [1] получаем оценки $\|p_i^{\varepsilon}\|_{L_2(Q_T)} \leq const$, $\left\|\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\right\|_{L_2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))} \leq const$, где $p_i^{\varepsilon} = a_{ij}^{\varepsilon}\, \partial u^{\varepsilon}/\partial x_j$.
Поэтому выделяем подпоследовательности, по прежнему обозначенные $u^{\varepsilon}, p_i^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}(u^{\varepsilon})$ , чтобы $u^{\varepsilon} \to u$ в $H^1(0,T;\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))$ слабо, $p_i^{\varepsilon} \to p_i$ , $f^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}) \to F$ в $L_2(Q_T)$ слабо. Поскольку вложение $H^1(Q_T) \subset L_2(Q_T)$ компактно, имеем также

$$u^{\varepsilon} \to u \qquad \text{в} \quad L_2(Q_T) \qquad \text{сильно.} \tag{12}$$

Так что, переходя в (7) к слабому пределу в $L_2(Q_T)$ при $\varepsilon \to +0$ , получаем

$$-\frac{\partial p_i}{\partial x_i} + \bar{\bar{a}}_0 u = F. \tag{13}$$

Аналогично [1] можно показать, что $F = \bar{\bar{f}}(u)$. Далее покажем, что $p_i = q_{ij}\, \partial u/\partial x_j$ . Для этого уравнение (7) домножаем в $L_2(Q_T)$ на $\varphi W_{\varepsilon}$ , где $\varphi \in C^1(Q_T)$ произвольна, а уравнение (10)–на $\varphi u^{\varepsilon}$ , в результате чего приходим к равенству

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}, \varphi W_{\varepsilon}\right) + \left(p_i^{\varepsilon}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} W_{\varepsilon}\right) - \left(\frac{\partial \hat{q}_{\lambda i}}{\partial x_i}, \varphi u^{\varepsilon}\right) - \int_{Q_T}\left(a_{ji}^{\varepsilon}\frac{\partial W_{\varepsilon}}{\partial x_j}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u^{\varepsilon} dx dt +$$
$$+ (a_0^{\varepsilon} u^{\varepsilon}, \varphi W_{\varepsilon}) = (f^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}), \varphi W_{\varepsilon}) - \varepsilon(g_1, \varphi u^{\varepsilon}). \tag{14}$$

Переходя в (14) к пределу при $\varepsilon \to +0$ , с учетом (12) получаем

$$\left(p_i, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} x_{\lambda}\right) - \left(\frac{\partial \hat{q}_{\lambda i}}{\partial x_i}, \varphi u\right) - \left(\hat{q}_{\lambda i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u\right) + (\bar{\bar{a}}_0 u, \varphi x_{\lambda}) = (\bar{\bar{f}}(u), \varphi x_{\lambda}). \tag{15}$$

Из сравнения (15) и (13) следует, что $p_i = \hat{q}_{ij}\, \partial u/\partial x_j$ . Однако, $\hat{q}_{ij} = q_{ij}$ . Таким образом, $u \in H^1(0,T;\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)) \cap \mathcal{T}(0,T)$ – решение задачи (4). При $\varepsilon \to -0$ результат тот же. Теорема доказана.



Список литературы


1. Лавер А.Г., Сиденко Н.Р. Усреднение периодической по времени краевой задачи для сингулярно возмущенного слабо нелинейного параболического уравнения.– Укр.мат.журн., 1983, 35, № 4, с. 441-447.
2. Bensoussan A., Lions J.L., Paranicolaou G. Sur de nouveaux problemes asymptotigues.– C.r.Acad.sci.,1976, 282, ser.A, N3, p. 143-147.
3. Bensoussan A., Lions J.-L., Paranicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures.– North-Holland Publ.Comp., 1978. – 724 p.


УДК 517.946.9

Ю.В. Леонтьев

## ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ДВУМЕРНОЙ ОДНОФАЗНОЙ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Рассмотрим следующую однофазную квазистационарную задачу Стефана, записанную в безразмерном виде:

$$\Delta\theta - q\theta_{\eta} = 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad 0 < \eta < f(\xi), \tag{1}$$

$$\theta_{\xi}(0,\eta) = 0, \quad \theta_{\xi}(1,\eta) + Bi\,\theta(1,\eta) = 0, \tag{2}$$

$$\theta(\xi,0) = 1, \quad \theta(\xi, f(\xi)) = \theta_k, \tag{3}$$

$$\theta_{\xi}(\xi, f(\xi)) f' - \theta_{\eta}(\xi, f(\xi)) = Q, \tag{4}$$

где $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, $\theta = (u - u_{cp})/(u_0 - u_{cp})$,

$\theta_k = (u_k - u_{cp})/(u_0 - u_{cp})$, $f = f^*/l$, $Bi = \alpha l/\lambda$,

$q = lv/a^2$, $Q = lvQ^*/[\lambda(u_0 - u_{cp})]$.