А.Г. Лавер, Н.Р. Сиденко

К расчету температурного поля сверхпроводящей катушки// Математическое моделирование физических процессов. – К.: Институт математики АН УССР, 1989. с. 98-107

АКАДЕМИЯ НАУК
УКРАИНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ
МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

КИЕВ — 1989

Список литературы

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 398 с.
2. Березовский А.А. Лекции по нелинейным краевым задачам. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. - Т. I. - 288 с.
3. Дородницын В.А., Еленин Г.Г. Симметрия в решениях уравнений математической физики. - М.: Знание, 1984. - 64 с.
4. Березовский А.А., Нетесова Т.М. Групповой анализ нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. - Киев, 1986. - 56 с. - (Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 86.69).

УДК 517.947:539.2

А.Г. Лавер, Н.Р. Сиденко

К РАСЧЕТУ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ КАТУШКИ

Некоторые математические модели для определения температурных полей катушек криотурбогенераторов как периодических мелких структур сводятся к решению обобщенных (вариационных) краевых задач следующих типов:

$$(A^\varepsilon u^\varepsilon)(x) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\right) = f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon\right), \; x \in \Omega, \; u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0; \qquad (I)$$

$$\nu(\varepsilon)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + A^\varepsilon u^\varepsilon = f\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon\right), \; t \in \mathbb{R}, \; x \in \Omega, \; u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \; u^\varepsilon(t+T, x) = u^\varepsilon(t, x), \qquad (2)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2)$ - ограниченная липшицева область, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до n; коэффициенты $a_{ij}(y) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ периодические по y с кубом периодичности $Y = (0,1)^n$ (обозначение $a_{ij}(y) \in \mathcal{T}(Y)$), $a_{ij}(y)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha_0 \xi_i \xi_i$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_0 = \mathrm{const} > 0$; функции $f(x, y, u)$, $f(t, x, y, u)$ измеримы по y и (t, y) соответственно $\forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$ и равномерно непрерывны по (x, u) для $|u| \leqslant M$ $\forall M < \infty$, периодические по y с кубом Y и по t с периодом T и невозрастающие по u; $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $\nu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Предположим дополнительно, что для задачи (I) при $n \geqslant 3$ выполнено неравенство

$$|f(x, y, u)| \leqslant f_0(x) + C|u|^{\frac{n+2}{n-2}}, \; f_0 \in L_{r_0}(\Omega), \; r_0 > 2, \; C = \mathrm{const}. \qquad (3)$$

Тогда, выбирая $p > 2$ таким, чтобы $r_1 = (n+2)\frac{p}{n+p} \leqslant r_0$ и имел место изоморфизм [I]

$$(A^\varepsilon)^{-1} : W_p^{-1}(\Omega) \to \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega), \qquad (4)$$

заключаем, что оператор суперпозиции $\hat{f}^\varepsilon : u(x) \to f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u(x)\right) \equiv f^\varepsilon(x, u(x))$, действует ограниченно и непрерывно [2]

$$\hat{f}^\varepsilon : L_r(\Omega) \to L_q(\Omega), \; r = \frac{n+2}{n-2}\frac{np}{n+p}, \; q = \frac{np}{n+p}.$$

Учитывая непрерывное вложение $L_q(\Omega) \subset W_p^{-1}(\Omega)$ и, в силу неравенств $2n/(n-2) < r < np/(n-p)$, компактное вложение $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) \subset L_r(\Omega)$, приходим к выводу, что теорема Лере-Шаудера о неподвижной точке [3], примененная к операторному уравнению

$$u_\alpha = \alpha (A^\varepsilon)^{-1} \hat{f}^\varepsilon(u_\alpha), \; u_\alpha \in L_r(\Omega), \; \alpha \in [0, 1], \qquad (5)$$

гарантирует существование у задачи (I) решения $u^\varepsilon \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, если имеет место априорная оценка решений (5). Для ее вывода умножив уравнение (I) с параметром α на $|u_\alpha^\varepsilon|^{r_1 - 2} u_\alpha^\varepsilon$ и проинтегрировав по Ω, с учетом монотонности $f^\varepsilon(x, \cdot)$ получим

$$\frac{4(r_1 - 1)\alpha_0}{r_1^2} \left\| \nabla |u_\alpha^\varepsilon|^{r_1/2} \right\|^2_{(L_2(\Omega))^n} \leqslant \alpha \int_\Omega f^\varepsilon(x, 0) |u_\alpha^\varepsilon|^{r_1 - 2} u_\alpha^\varepsilon \, dx \leqslant \|f_0\|_{L_{r_1}(\Omega)} \|u_\alpha^\varepsilon\|^{r_1 - 1}_{L_{r_1}(\Omega)}. \qquad (6)$$

Отсюда следует оценка

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \|u_\alpha^\varepsilon\|_{L_{r_1}(\Omega)} \leqslant \frac{C^2 r_1^2}{4(r_1 - 1)\alpha_0} (\mathrm{mes}\, \Omega)^{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}} \|f_0\|_{L_{r_0}(\Omega)},$$

где C - константа вложения $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Возвращаясь к (6), получаем требуемую оценку

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \left\| |u_\alpha^\varepsilon|^{r_1/2} \right\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} \leqslant M, \; \sup_{\alpha \in [0,1]} \|u_\alpha^\varepsilon\|_{L_r(\Omega)} \leqslant M_1 = (C_1 M)^{2/r_1}, \qquad (7)$$

где C_1 - константа вложения $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \subset L_{2n/(n-2)}(\Omega)$.

Если $\tilde{u} \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ - другое решение задачи (I), то $\tilde{u} \in L_{2n/(n-2)}(\Omega)$ и в силу (3) $f^\varepsilon(x, \tilde{u}) \in L_{2n/(n+2)}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, и из (I) следует, что

$$\alpha_0 \|u^\varepsilon - \tilde{u}\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} \leqslant (f^\varepsilon(x, u^\varepsilon) - f^\varepsilon(x, \tilde{u}), u^\varepsilon - \tilde{u})_{L_2(\Omega)} \leqslant 0.$$

Таким образом, при $n \geq 3$ и условии (3) задача (I) имеет в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ единственное решение $u^\varepsilon \in \overset{\circ}{W}{}_p^{1}(\Omega)$, для которого справедливы равномерные оценки (7),

$$\|\hat{f}^\varepsilon(u^\varepsilon)\|_{L_q(\Omega)} \leq M_2 \tag{8}$$

и следующая (см. [I]):

$$\|u^\varepsilon\|_{\overset{\circ}{W}{}_p^{1}(\Omega)} \leq M_3, \tag{9}$$

где M_i не зависят от ε.

В практически важном случае $n=2$ достаточно вместо (3) выполнения условия

$$|f(x,y,u)| \leq f_0(x) + c|u|^s,\ s \geq 1,\ f_0 \in L_{r_0}(\Omega),\ r_0 > 1,\ c = \mathrm{const}. \tag{10}$$

При этом полагаем $s = r/q,\ r \geq q = 2p/(2+p) > 1$, где $p > 2$ выбрано так, чтобы $q \leq r_0$ и имел место изоморфизм (4). Тогда

$$\hat{f}^\varepsilon : L_r \to L_q \subset W_p^{-1}(\Omega),\ \overset{\circ}{W}{}_p^{1}(\Omega) \subset C^\alpha(\bar{\Omega}),\ 0 < \forall \alpha < 1 - \frac{2}{p}.$$

Априорная оценка (7) в этом случае имеет место $\forall r < \infty$, и, следовательно, справедливы оценки (8), (9).

Выберем последовательность $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$ так, чтобы, ввиду (8), $\hat{f}^\varepsilon(u^\varepsilon) \rightharpoonup \hat{f}$ слабо в $L_q(\Omega)$. Поскольку $q > 2n/(n+2)$, $n \geq 2$, вложение $L_q(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ компактно; следовательно,

$$\|\hat{f}^\varepsilon(u^\varepsilon) - \hat{f}\|_{H^{-1}(\Omega)} \to 0,\quad \varepsilon_k \to 0. \tag{11}$$

Определим функцию v^ε как решение задачи $A^\varepsilon v^\varepsilon = \hat{f}$, $v^\varepsilon \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Справедливо неравенство

$$\|u^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha_0}\|\hat{f}^\varepsilon(u^\varepsilon) - \hat{f}\|_{H^{-1}(\Omega)}, \tag{12}$$

и имеют место сходимости [I]

$$v^\varepsilon (A^\varepsilon)^{-1}\hat{f} \longrightarrow u = A^{-1}\hat{f} \quad \text{слабо в } \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega), \tag{13}$$

$$a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_j} \longrightarrow q_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} \quad \text{слабо в } L_2(\Omega),\ i = \overline{1,n},$$

где $q_{ij} = \mathrm{const}$, $q_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha_0 \xi_i \xi_i$, $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$Av = -q_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j},\ v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega), \tag{14}$$

$$q_{ij} = \left\langle a_{ij}(y) - a_{ik}(y)\frac{\partial \chi^j(y)}{\partial y_k}\right\rangle,\ \langle \varphi \rangle \equiv \int_Y \varphi(y)\,dy,\ \varphi \in \mathcal{T}(Y) \cap L_1(Y),$$

а функции χ^j, $j = \overline{1,n}$, определяются как решения задач

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y) - a_{ik}(y)\frac{\partial \chi^j}{\partial y_k}\right) = 0,\quad \chi^j \in H^1(Y) \cap \mathcal{T}(Y),\ \langle \chi^j \rangle = 0.$$

Из (II)-(I3) вытекает, что при $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega),$$

$$a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup q_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} \quad \text{слабо в } L_2(\Omega),\ i = \overline{1,n}. \tag{15}$$

Более того, в силу (9) и так как вложения $\overset{\circ}{W}{}_p^{1} \subset L_r$ при $n \geq 3$, $\overset{\circ}{W}{}_p^{1} \subset C$ при $n = 2$ компактны, имеем

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } \overset{\circ}{W}{}_p^{1}(\Omega),\ \|u^\varepsilon - u\|_{L_r(\Omega)} \to 0 \quad (n \geq 3), \tag{16}$$

$$\|u^\varepsilon - u\|_{C(\bar{\Omega})} \to 0 \quad (n = 2). \tag{17}$$

Рассмотрим неравенство

$$0 \geq (f^\varepsilon(x,u^\varepsilon) - f^\varepsilon(x, u - \lambda v),\ u^\varepsilon - u + \lambda v)_{L_2(\Omega)} \quad \forall v \in C(\bar{\Omega}),\ \lambda > 0. \tag{18}$$

Учитывая неравенства $r > 2n/(n-2) > q' = q/(q-1)$ $(n \geq 3)$, сходимости (I6), (I7) и следующую сходимость:

$$f^\varepsilon(x, u - \lambda v) = f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u - \lambda v\right) \rightharpoonup \bar{f}(x, u - \lambda v) = \langle f(x,\cdot,u-\lambda v)\rangle \text{ слабо в } L_q(\Omega),$$

предельным переходом в (I8) по $\varepsilon = \varepsilon_k$ и далее по $\lambda \to 0$ (с учетом, что $\bar{f}(x,u)$ – непрерывный оператор $L_r \to L_q$) последовательно получаем

$$0 \geq (\hat{f} - \bar{f}(x, u - \lambda v), v)_{L_2(\Omega)},\ 0 \geq (\hat{f} - \bar{f}(x,u), v)_{L_2(\Omega)} \quad \forall v \in C(\bar{\Omega}).$$

Так что $\hat{f} = \bar{f}(x,u)$ и $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^{1}(\Omega)$ является решением задачи

$$Au = \bar{f}(x,u),\ u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega), \tag{19}$$

где A имеет вид (I4). Поскольку решение задачи (I9) единствен но, то сходимости (I5), (I7), а также $\|v^\varepsilon - v\|_{L_{2n/(n-2)}(\Omega)} \to 0$ $(n \geqslant 3)$ имеют место, когда $\varepsilon \to +0$ произвольно.

Задача типа (2) изучена в работе [4] при таком условии на $f(t,x,y,v)$:

$$|f|+\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| \leqslant f_0(t,x)+c|v|^s,\ f_0 \in L_{2s}((0,T)\times\Omega)\cap J(0,T),$$

$$1 \leqslant s < \frac{n+1}{n-1},\ c = const.$$

Установлено, что при $\varepsilon \neq 0$ задача имеет единственное решение $v^\varepsilon \in H^1(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))\cap J(0,T)$; при $\varepsilon \to 0$ решение v^ε слабо сходится в этом пространстве к единственному решению $v(t,x)$ усредненной задачи, которая в данном случае имеет вид

$$-q_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = \bar{f}(t,x,v),\ x\in\Omega,\ v|_{\partial\Omega}=0, \tag{I9'}$$

где $t \in \mathbb{R}$ - параметр, коэффициенты q_{ij} те же, что в (I4).

Таким образом, в качестве математической модели для расчета температурных полей катушек криотурбогенераторов можно использовать вместо обобщенных краевых задач (I), (2) классические задачи (I9), (I9'). В этом, собственно, и заключается математический метод гомогенизации [I] для приближенного расчета физического поля в периодической мелкой структуре. Если эффективные (гомогенизированные) коэффициенты теплопроводности q_{ij} катушки уже найдены, остается решить нелинейную краевую задачу вида (I9). При тепловых расчетах катушек криотурбогенераторов типичен случай плоской задачи, когда область Ω является прямоугольником $\Pi = (0,a)\times(0,b)$, а эффективные коэффициенты $q_{12}=q_{21}=0$, что соответствует в (I) случаю, когда $a_{12}=a_{21}=0$, $a_{11}(y)$ и $a_{22}(y)$ имеют в Y ось симметрии $\{y_1=\frac{1}{2}\}$ или $\{y_2=\frac{1}{2}\}$ (см. [5]).

Рассмотрим задачу типа (I9)

$$Av = -q_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - q_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f(x,y,v),\ (x,y)\in\Pi,\ v|_{\partial\Pi}=0, \tag{20}$$

предполагая, что f удовлетворяет следующим условиям: I) $f(x,y,v)$ - определенная для $(x,y)\in\Pi, v\in\mathbb{R}$ функция, локально в $\Pi\times\mathbb{R}$ непрерывная по Гельдеру по переменным (x,y) и имеющая производную f'_v , кусочно непрерывную по v и ограниченную на каждом множестве $\{(x,y)\in\Pi, |v|\leqslant M<\infty\}$; 2) $f(x,y,v)$ не возрастает по v;

3) $f(x,y,0)>0$, $\sup\limits_{(x,y)\in\Pi} f(x,y,0)<\infty$; 4) $\lim\limits_{v\to+\infty}\sup\limits_{(x,y)\in\Pi} f(x,y,v)<0$.

Они отличаются от условий, которым удовлетворяет $\bar{f}$ в (I9), в частности, не требуется степенной оценки роста типа (I0). При этих условиях задача (20) имеет единственное классическое решение $v\in C^2(\Pi)\cap C^\alpha(\bar\Pi)$ $\forall\alpha\in(0,1)$. Единственность - следствие монотонности f . Существование устанавливается путем применения теоремы Лере-Шаудера к уравнению с параметром

$$v_\beta = \beta A^{-1}\hat{f}(v_\beta),\ v_\beta\in C(\bar\Pi),\ \beta\in[0,1], \tag{2I}$$

эквивалентному задаче (20) с функцией βf .

Действительно, здесь оператор $\hat{f}: C(\bar\Pi)\ni v \to f(x,y,v)\in L_\infty(\Pi)$ локально липшицев и ограниченно действующий, так как, ввиду условий I) - 3),

$$\sup_{(x,y)\in\Pi}|f(x,y,\eta)|<\infty\ \forall\eta\in\mathbb{R},\ -\infty<\inf_{(x,y)\in\Pi} f(x,y,c_1)\leqslant f(x,y,v)\leqslant$$

$$\leqslant \sup_{(x,y)\in\Pi} f(x,y,c_0)<+\infty\ \ \forall v\in C(\bar\Pi): c_0\leqslant v\leqslant c_1,\ c_i = const.$$

Поскольку область $\Pi\in W^1_\infty$, то линейный оператор A^{-1} является непрерывным преобразованием

$$L_\infty(\Pi)\to\bigcap_{p\in(1,\infty)}\mathring{W}^1_p(\Pi)\subset C^\alpha(\bar\Pi)\ \forall\alpha\in(0,1).$$

Так что для доказательства разрешимости уравнения (2I) остается только получить априорные оценки его решений. При этом фактически $v_\beta\in C^2(\Pi)$, так как в силу локальной гельдеровости $f(x,y,\eta)$ и $v_\beta\in C^\alpha(\bar\Pi)$ имеем

$$\hat{f}(v_\beta)|_{\Omega'}\in C^\gamma(\Omega') \Rightarrow A^{-1}\hat{f}(v_\beta)|_{\Omega'}\in C^{2+\gamma}(\Omega'),\ \gamma>0,\ \forall\Omega': \bar\Omega'\subset\Pi.$$

Если $\min v_\beta = v_\beta(x',y')$, $\max v_\beta = v_\beta(x'',y'')$, где $(x',y'),(x'',y'')\in\Pi$, то $(Av_\beta)(x',y')\leqslant 0$, $(Av_\beta)(x'',y'')\geqslant 0$. Следовательно, при $\beta>0$ имеем $f(x',y',\min v_\beta)\leqslant 0$, $f(x'',y'',\max v_\beta)\geqslant 0$. Отсюда, ввиду условий 2) - 4), вытекает $\min v_\beta > 0$, $\max v_\beta \leqslant v_m$, где

$$0<v_m = \max\eta:\ \sup_{(x,y)\in\Pi} f(x,y,\eta)=0. \tag{22}$$

Поскольку $v_\beta|_{\partial\Pi}=0$, $v_0 = 0$, получили априорные оценки

$$0 \le v_\beta(x,y) \le v_m, \quad (x,y) \in \bar{\Pi}, \quad \beta \in [0,1]. \tag{23}$$

При условиях I) – 4) решение задачи (20) можно находить численно проекционно-итерационным методом (ПИМ), описанным ниже. Определив по (22), (23) числа

$$-\delta = \sup_{(x,y)\in\Pi} \max_{v\in[0,v_m]} f'_v(x,y,v) \le 0, \quad -d = \inf_{(x,y)\in\Pi} \min_{v\in[0,v_m]} f'_v(x,y,v) > -\infty,$$

$\lambda = \frac{1}{2}(d+\delta) > 0$, положим $f^*_\lambda(x,y,v) = f^*(x,y,v) + \lambda v$,

$$f^*(x,y,v) = \begin{cases} f(x,y,v), & 0 \le v \le v_m, \\ f(x,y,0) + f'_v(x,y,+0)v, & v < 0, \\ f(x,y,v_m) + f'_v(x,y,v_m-0)(v-v_m), & v > v_m, \end{cases}$$

и вместо (20) будем решать эквивалентную задачу

$$Av + \lambda v = f^*_\lambda(x,y,v), \quad (x,y) \in \Pi, \quad v|_{\partial\Pi} = 0. \tag{24}$$

Классическое решение задачи (20) является единственным в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Pi)$ решением задачи (24) вследствие монотонности и подлинейности $f^*(x,y,v)$. Задаче (24) в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Pi)$ эквивалентно интегральное уравнение

$$v = \hat{G}_\lambda \hat{f}^*_\lambda(v), \; v \in L_2(\Pi), \; \hat{G}_\lambda = (A+\lambda I)^{-1}: \; L_2(\Pi) \to \overset{\circ}{H}{}^1(\Pi). \tag{25}$$

Рассматриваемый как преобразование $L_2(\Pi) \to L_2(\Pi)$ оператор $\hat{G}_\lambda \hat{f}^*_\lambda$ сжимающий. Действительно, $\partial f^*/\partial v \in [-d, -\delta]$, поэтому

$$\left|\frac{\partial}{\partial v} f^*_\lambda(x,y,v)\right| \le \frac{1}{2}(d-\delta), \; \|\hat{f}^*_\lambda(v_2) - \hat{f}^*_\lambda(v_1)\|_{L_2(\Pi)} \le \frac{1}{2}(d-\delta)\|v_2 - v_1\|_{L_2(\Pi)}.$$

Спектр оператора $A+\lambda I$ таков:

$$\lambda_{nm} = \lambda + q_{11}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + q_{22}\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \; \varphi_{nm} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y, \; n,m \in \mathbb{N}.$$

Значит, $\|\hat{G}_\lambda\|_{\mathcal{L}(L_2(\Pi))} = \lambda_{11}^{-1}$,

$$\|\hat{G}_\lambda \hat{f}^*_\lambda(v_2) - \hat{G}_\lambda \hat{f}^*_\lambda(v_1)\|_{L_2(\Pi)} \le k\|v_2 - v_1\|_{L_2(\Pi)}, \; k = \frac{d-\delta}{2\lambda_{11}} < 1. \tag{26}$$

Обозначим $G_\lambda(x,y;\xi,\eta)$ функцию Грина оператора $A+\lambda I$;

имеем

$$\hat{G}_\lambda v = \int_\Pi G_\lambda(x,y;\xi,\eta) v(\xi,\eta)\, d\xi d\eta, \; G_\lambda(x,y;\xi,\eta) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\varphi_{nm}(x,y)\varphi_{nm}(\xi,\eta)}{\lambda_{nm}}.$$

Полагая $\forall n \in \mathbb{N}$

$$G^{(n)}_\lambda(x,y;\xi,\eta) = \sum_{k,m=1}^{n} \frac{\varphi_{km}(x,y)\varphi_{km}(\xi,\eta)}{\lambda_{km}}, \; \hat{G}^{(n)}_\lambda v = \int_\Pi G^{(n)}_\lambda(x,y;\xi,\eta) v(\xi,\eta)\, d\xi d\eta,$$

решаем уравнение (25) численно следующим П И М:

$$v_{n+1} = \hat{G}^{(n+1)}_\lambda \hat{f}^*_\lambda(v_n), \; n = 0,1,2,\ldots \; . \tag{27}$$

Выведем оценку сходимости итераций v_n при помощи галеркинских приближений $v^{(n)}$, определяемых из уравнений

$$v^{(n)} = \hat{G}^{(n)}_\lambda \hat{f}^*_\lambda(v^{(n)}), \; n = 1,2,\ldots \; . \tag{28}$$

Последние однозначно разрешимы, так как для оператора в правой части при любом n справедлива оценка (26). Из (25) и (28) имеем (ниже $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\Pi)}$)

$$\|v^{(n)} - v\| \le \|\hat{G}^{(n)}_\lambda[\hat{f}^*_\lambda(v^{(n)}) - \hat{f}^*_\lambda(v)]\| + \|(\hat{G}_\lambda - \hat{G}^{(n)}_\lambda)\hat{f}^*_\lambda(v)\| \le$$

$$\le k\|v^{(n)} - v\| + \frac{1}{\lambda_{n+1}}\|\hat{f}^*_\lambda(v)\|, \; \lambda_n = \min(\lambda_{n1}, \lambda_{1n}), \tag{29}$$

$$\|v^{(n)} - v\| \le \frac{1}{(1-k)^2\lambda_{n+1}}\|\hat{f}(0)\|, \; n \in \mathbb{N}.$$

Из (27) и (28) следует

$$\|v^{(n)} - v_n\| \le k\|v^{(n)} - v_{n-1}\| \le k\|v^{(n)} - v^{(n-1)}\| + k\|v^{(n-1)} - v_{n-1}\| \le k\|v^{(n)} - v^{(n-1)}\| +$$

$$+ k^2\|v^{(n-1)} - v^{(n-2)}\| + k^2\|v^{(n-2)} - v_{n-2}\| \le \sum_{i=1}^{n-1} k^i\|v^{(n-i+1)} - v^{(n-i)}\| + k^n\|v^{(1)} - v_0\|. \tag{30}$$

Так же, как (29), выводим оценку

$$\|v^{(n+1)} - v^{(n)}\| \le \frac{1}{(1-k)^2\lambda_{n+1}}\|\hat{f}(0)\|, \; n \in \mathbb{N}.$$

Подставляя ее в (30), получаем

$$\|u_n - u^{(n)}\| \le \frac{1}{(1-k)^2}\|\hat{f}(0)\| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{k^{n-i}}{\lambda_{i+1}} + k^n \|u^{(1)} - u_0\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Последнее неравенство вместе с (29) дает оценку сходимости П И М

$$\|u_n - u\|_{L_2(\Pi)} \le \frac{1}{(1-k)^2}\|\hat{f}(0)\|_{L_2(\Pi)} \sum_{i=1}^{n} \frac{k^{n-i}}{\lambda_{i+1}} + k^n \|u^{(1)} - u_0\|_{L_2(\Pi)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

поскольку

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}} < \sum_{i=1}^{n} \frac{k^{n-i}}{\lambda_{i+1}} < \frac{k^{n-[n/2]}}{\lambda_2} \sum_{i=0}^{[n/2]-1} k^i + \frac{1}{\lambda_{[n/2]+2}} \sum_{i=0}^{n-[n/2]-1} k^i < \frac{1}{1-k}\left(\frac{k^{n/2}}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_{[n/2]+2}}\right).$$

Приведем развернутую запись П И М :

$$u_n(x,y) = \sum_{k,m=1}^{n} u_{km}^{(n)} \varphi_{km}(x,y), \quad n = 1,2,\dots,$$

$$u_{km}^{(n+1)} = \frac{1}{\lambda_{km}} \int_0^{b}\!\!\int_0^{a} f^*\Big(x,y,\sum_{r,s=1}^{n} u_{rs}^{(n)} \varphi_{rs}(x,y)\Big)\varphi_{km}(x,y)\,dx\,dy + d_{km}^{(n)}, \qquad (3I)$$

$$k,m = \overline{1,n+1},$$

$$d_{km}^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\lambda_{km}} u_{km}^{(n)}, & k,m = \overline{1,n}, \\ 0, & k = n+1 \vee m = n+1. \end{cases}$$

Критерий точности расчета

$$\Delta_n = \|u_{n+1} - u_n\|_{L_2(\Pi)} = \Big[\sum_{k,m=1}^{n} \big(u_{km}^{(n+1)} - u_{km}^{(n)}\big)^2 + \sum_{m=1}^{n+1} \big(u_{(n+1)m}^{(n+1)}\big)^2 + \sum_{k=1}^{n} \big(u_{k(n+1)}^{(n+1)}\big)^2\Big]^{1/2}.$$

Выполнен конкретный расчет при следующих данных: $q_{11} = q_{22} = 1$, $a=2$, $b=1$, $f = 5+x+y-u^3$. При этом $u_m = 2$, $\delta = 0$, $\alpha = 12$, $f^* = f$, $u \in [0,2]$, $f^* = 5+x+y$, $u<0$, $f^* = 21+x+y-12u$, $u>2$; двойной интеграл $I_{km}^{(n)}$ в (3I) вычисляется по приближенной формуле

$$I_{km}^{(n)} \cong \frac{8\sqrt{ab}}{\pi^2 km} \sin^2\frac{\pi}{4p} \sum_{j=0}^{2pm-1} \sum_{i=0}^{2pk-1} f^*\Big((i+\tfrac{1}{2})h_x, (j+\tfrac{1}{2})h_y, \frac{2}{\sqrt{ab}} \sum_{r,s=1}^{n} u_{rs}^{(n)} \times$$

$$\times \sin\Big[\frac{r\pi}{2pk}(i+\tfrac{1}{2})\Big] \sin\Big[\frac{s\pi}{2pm}(j+\tfrac{1}{2})\Big]\Big) \sin\Big[\frac{\pi}{2p}(i+\tfrac{1}{2})\Big] \sin\Big[\frac{\pi}{2p}(j+\tfrac{1}{2})\Big],$$

где $h_x = a/(2pk)$, $h_y = b/(2pm)$, $p = 1,2,\dots$ – параметр. При $p=5$

$u_{11}^{(1)} = 1$ получили $\Delta_5 \cong 2{,}53\ 10^{-3}$, $\|u_5\| \cong 0{,}5956$, $\|u_6\| \cong 0{,}5954$, $\Delta_5/\|u_6\| \cong 0{,}4\%$, $u_5(1,1/2) \cong 0{,}7251$, $u_6(1,1/2) \cong 0{,}7252$, $u_{11}^{(6)} \cong 0{,}5884$. При $p=5$, $u_{11}^{(1)} = 0{,}589$ показатели такие: $\Delta_5 \cong 2{,}37\ 10^{-3}$, $\|u_5\| \cong 0{,}5947$, $\|u_6\| \cong 0{,}5950$, $\Delta_5/\|u_6\| \cong 0{,}4\%$, $u_5(1,1/2) \cong 0{,}7229$, $u_6(1,1/2) \cong 0{,}7246$, $u_{11}^{(6)} = 0{,}5880$.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

1. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. - Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1978. - 700 p.
2. К р а с н о с е л ь с к и й М.А., З а б р е й к о П.П., П у с т ы л ь н и к Е.И., С о б о л е в с к и й П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. - М.: Наука, 1966. - 496 с.
3. Функциональный анализ. СМБ/ Под общ. ред. С.Г.К р е й н а . - М.: Наука, 1972. - 544 с.
4. Л а в е р А.Г., С и д е н к о Н.Р. Асимптотика решения периодической по времени краевой задачи для сингулярно возмущенного нелинейного параболического уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами // Укр. мат. журн. - 1984. - 36, № 2.- С. 165-171.
5. Б а х в а л о в Н.С., П а н а с е н к о Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. - М.: Наука, 1984. - 352 с.

УДК 517.946.9

И.И. Ю р т и н

МЕТОД РОТЭ В ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

В настоящее время одним из самых распространенных методов получения металлических деталей сложной конструкции является заливка жидким металлом соответствующих форм, в которых происходит затвердевание. Чтобы получить качественную деталь, необходимо обеспечить правильный режим кристаллизации расплавленного металла. На этот режим существенно влияет охлаждение с внешней поверхности формы средой с температурой $T_c(t)$ и коэффициентом теплообмена $\alpha(t)$.

Решающее значение для изучения такого сложного теплового процесса в жидкой и твердой фазах металла, а также в форме преобретают математические методы расчета и прогноза, основанные на исследовании специальных постановок задач теплопроводности при наличии фазовых переходов расплав-металл. Одной из таких постановок может быть следующая одномерная нестационарная задача Стефана: