А.Г. Лавер

Переодические решения некоторых нелинейных сингулярно-возмущённых параболических уравнений// Доклады Академии Наук Украинской ССР Серия «А», 1983, №8, с. 10-13

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

Серия „А“

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

№ 8

КИЕВ — 1983

1. *Connes A.* A factor of type II with countable fundamental group.— J. Operator Theory, 1980, **4**, p. 151—153.
2. *Connes A., Jones V.* A II_1 factors with two nonconjugate Cartan subalgebras.— Bull. Amer. Math. Soc., 1982, **6**, N 2, p. 211—212.
3. *Choda M.* Crossed products and property T.— Math. Japan, 1981, **26**, N 5, p. 557—567.

Физико-технический институт низких температур АН УССР

Поступило 22.02.83

УДК 517.947

А. Г. ЛАВЕР

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком АН УССР Ю. А. Митропольским)

Изучим при $\varepsilon \to +0$ краевую задачу

$$\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - M(x, t) u^\varepsilon = f(x, t, u^\varepsilon), \quad x \in \Omega, \quad t \in R,$$
$$u^\varepsilon(x, t+T) = u^\varepsilon(x, t), \; u^\varepsilon(x, t)|_\Gamma = 0, \tag{1}$$

в пространстве $L_2(\Omega)$. Здесь Ω — ограниченная область в R^n с гладкой границей Γ, $T=\mathrm{const}>0$, M — линейный самосопряженный эллиптический оператор второго порядка вида

$$M(x, t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j}\right) - a_0(x, t), \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad a_0 \geqslant \alpha_0 > 0,$$
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \; \alpha_0, \alpha_1 = \mathrm{const} > 0 \;\; \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n. \tag{2}$$

Коэффициенты a_{ij} предполагаются непрерывно дифференцируемыми по x, кроме того, a_{ij}, $\partial a_{ij}/\partial x_i$, a_0 непрерывны по совокупности переменных при $t \in [0, T]$, $x \in \bar{\Omega}$ и удовлетворяют по t условию Гельдера с показателем $\eta > 0$ и константой C_1, не зависящей от x. Функция f осуществляет деминепрерывное и ограниченное отображение из $R \times \Omega \times L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, причем выполняется неравенство

$$(f(x, t, u) - f(x, t, v), \; u - v) \leqslant 0 \;\; \forall u, v \in L_2(\Omega). \tag{3}$$

Здесь $(.,.)$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Данные задачи (1) предполагаются T-периодическими по t. Обозначая $f(x, t, u^\varepsilon) \equiv f(t, u^\varepsilon)$ и $B(t)u^\varepsilon \equiv -M(x, t)u^\varepsilon$ получаем следующую задачу в $L_2(\Omega)$:

$$\varepsilon \frac{du^\varepsilon}{dt} + B(t) u^\varepsilon = f(t, u^\varepsilon), \quad u^\varepsilon(t+T) = u^\varepsilon(t) \tag{4}$$

с эллиптическим оператором $B(t)$, область определения которого состоит из всех функций пространства $W_2^2(\Omega)$, обращающихся на границе в нуль. При фиксированном $\varepsilon > 0$ разрешимость задачи (4) гарантируют следующие условия.

Теорема 1. Пусть выполняются вышеизложенные ограничения и существует $R_1 > 0$, не зависящее от ε, что для $\|u\| = R_1$ и $\forall\, t \in [0, T]$ справедливо $(f(t, u), u) < 0$. Тогда существует такое $u_0 \in L_2(\Omega)$, $\|u_0\| \leqslant R_1$, что обобщенное решение (4) с начальным условием u_0 периодично по t с периодом T.

Доказательство существования и единственности периодического решения задачи (4) следует из [1, 2] и условий (2). Предположим, что функция f непрерывна по совокупности переменных при $t\in[0,T]$, $x\in\overline{\Omega}$, $|u|<C_2$, где $C_2=\text{const}>0$. Используя принцип Лере — Шаудера [3] и условия (2), можно показать, что вырожденная (при $\varepsilon=0$ задача (4) имеет единственное решение в $L_2(\Omega)$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1, предположения относительно f, и существуют производные f_t и f_u, причем f_t удовлетворяет тем же условиям, что и f. Тогда обобщенное решение задачи (4) при $\varepsilon\to+0$ равномерно на R стремится к $\tilde{u}(t)$ — решению вырожденной задачи (4).

Доказательство. При доказательстве следуем работе [4]. Если $u^\varepsilon(t)$ — обобщенное решение задачи (4), то

$$u^\varepsilon(t)=U_\varepsilon(t,0)\,u_0+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t V_\varepsilon(t,s)\,f(s,u^\varepsilon(s))\,ds. \tag{5}$$

Согласно [2], $u^\varepsilon(t)$ — единственное решение задачи (1) с начальным условием $u^\varepsilon(0)=u_0$ при $t\in[0,T]$. Из [5] следует, что $\|U_\varepsilon(t,s)\|\leqslant C_3e^{\overline{\frac{-\vartheta(t-s)}{\varepsilon}}}$, где C_3, ϑ — положительные постоянные. Перепишем (5) так:

$$u^\varepsilon(t)=U_\varepsilon(t,0)\;u_0+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t U_\varepsilon(t,s)\,[f(s,u^\varepsilon(s))-f(t,u^\varepsilon(t))]\,ds+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t U_\varepsilon(t,s)\,B(s)\,B^{-1}(s)\,f(t,u^\varepsilon(t))\,ds=U_\varepsilon(t,0)\;u_0+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t U_\varepsilon(t,s)\,[f(s,u^\varepsilon(s))-f(t,u^\varepsilon(t))]\,ds-\int_0^t U_\varepsilon(t,s)\times$$

$$\times\frac{dB^{-1}(s)}{ds}\,f(t,u^\varepsilon(t))\,ds+B^{-1}(t)\,f(t,u^\varepsilon(t))-U_\varepsilon(t,0)\,B^{-1}(0)\,f(t,u^\varepsilon(t)).$$

Используя оценку для U_ε и свойства функции f заключаем, что при $\varepsilon\to+0$ $u^\varepsilon(t)\to B^{-1}(t)\,f(t,\tilde{u}(t))=\tilde{u}(t)$ равномерно на $[\delta,T]$, $\forall t$, $0<\delta<T$. Поскольку $u^\varepsilon(T)=u^\varepsilon(0)$, то имеем также $u^\varepsilon(0)=B^{-1}(0)\;f(0,\tilde{u}(0))+\chi(\varepsilon)$, где $\chi(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to+0$. Отсюда

$$U_\varepsilon(t,0)\,u_0-U_\varepsilon(t,0)\,B^{-1}(0)\,f(t,u^\varepsilon(t))=U_\varepsilon(t,0)\,B^{-1}(0)\times$$

$$\times\{[f(0,\tilde{u}(0))-f(t,u^\varepsilon(t))]+\chi(\varepsilon)\}.$$

На достаточном малом $[0,\delta]$ это выражение мало в силу непрерывности f и оценки для U_ε, а на $[\delta,T]$ мало в силу равномерной ограниченности U_ε. Таким образом, $u^\varepsilon(t)\to\hat{u}(t)$ равномерно на $[0,T]$ при $\varepsilon\to 0$, а в силу условий периодичности и на всей оси R.

Пусть оператор M имеет дискретный простой спектр $\{\mu_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, который $\forall t\in[0,T]$ удовлетворяет неравенству $\ldots<\mu_k(t)<\ldots<\mu_2(t)<\mu_1(t)<0$, соответствующие собственные функции $\{\psi_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$, $M\psi_k=\mu_k\psi_k$, образуют полную ортонормированную систему в $L_2(\Omega)$, и ряды по ψ_k сходятся абсолютно и равномерно. Например $\partial\psi_k/\partial t=\sum_{j=1}^{\infty}A_{kj}\psi_j$ $A_{kj}=(\partial\psi_k/\partial t,\;\psi_j)$. Предполагая, что f бесконечно дифференцируема по t и u, а $B^{-1}(t)$ по t, решение задачи (1) ищем в виде ряда

$$u^{\varepsilon}(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, t). \tag{6}$$

В важном частном случае, когда $f(x, t, u) = h(x, t) + \varepsilon f_1(x, t, u)$, задачу (1) можно решать методами [6, гл. 4, §§ 1, 2]. Подставляя ряд (6) для определения $u_i(x, t)$ получаем задачи

$$\varepsilon^0 : -Mu_0 = f(x, t, u_0), \ u_0(x, t)|_{\Gamma} = 0, \tag{7^0}$$

$$\varepsilon^1 : -Mu_1 = -\frac{\partial u_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{u=u_0} \cdot u_1, \ u_1(x, t)|_{\Gamma} = 0, \tag{7^1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varepsilon^n : -Mu_n = -\frac{\partial u_{n-1}}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{u=u_0} \cdot u_n + P_n(u_1, \ldots, u_{n-1}), \ u_n(x, t)|_{\Gamma} = 0,$$

$$n = 2, 3, \ldots \tag{7^n}$$

Здесь P_n — некоторые многочлены от известных функций. Задачу (7^0) можно решать методом Ньютона [7], а остальные — методом Фурье, предполагая, что для $\tilde{M} = M + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{u=u_0}$ справедливы те же ограничения на спектр и собственные функции, что и для оператора M. Обозначим n-ю частичную сумму ряда (6) как $u_{\varepsilon n}(x, t)$, а $z(x, t) = u^{\varepsilon}(x, t) - u_{\varepsilon n}(x, t)$.

Теорема 3. Ряд (6) является при $\varepsilon \to +0$ асимптотическим решением задачи (1), т. е. для достаточно малых ε и $\forall\, n = 0, 1, 2, \ldots$ справедлива оценка

$$\|z\|_{L_2(Q_T)} \leqslant C\varepsilon^{n+1}, \ C = \mathrm{const} > 0, \ Q_T = \Omega \times [0, T]. \tag{8}$$

Доказательство. Учитывая соотношения (7^0) — (7^n) и используя формулу [8, стр. 67] выводим, что

$$\varepsilon \frac{\partial u_{\varepsilon n}}{\partial t} - Mu_{\varepsilon n} = \varepsilon^{n+1} \frac{\partial u_n}{\partial t} + f(x, t, u_{\varepsilon n}) - 0(\varepsilon^{n+1}),$$

откуда заключаем, что остаточный член z определяется из условий

$$\varepsilon \frac{\partial z}{\partial t} - Mz = [f(x, t, u_{\varepsilon n} + z) - f(x, t, u_{\varepsilon n})] - \varepsilon^{n+1} \frac{\partial u_n}{\partial t} + 0(\varepsilon^{n+1}), \tag{9}$$

$$z(x, t+T) = z(x, t), \ z(x, t)|_{\Gamma} = 0.$$

Скалярно в $L_2(Q_T)$ домножая уравнение (9) на z имеем

$$\int_{Q_T} \left(a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_i} + a_0 z^2\right) dx dt = \int_{Q_T} [f(x, t, u_{\varepsilon n} + z) - f(x, t, u_{\varepsilon n})] z dx dt +$$

$$+ \int_{Q_T} \left[0(\varepsilon^{n+1}) - \varepsilon^{n+1} \frac{\partial u_n}{\partial t}\right] z dx dt$$

откуда используя условия (2), неравенство Пуанкаре, монотонность f и неравенство Коши — Буняковского выводим оценку (8).

SUMMARY. Existence of a periodic solution is proved for the strong and weak nonlinear singular perturbed parabolic equations. An algorithm of an approximate search for the equations is constructed.

1. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1961, **10**, с. 297—350.
2. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов.— М. : Наука, 1972.— 416 с.
3. *Функциональный* анализ, СМБ.— М. : Наука, 1972.— 544 с.
4. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1967.— 464 с.
5. *Като Т.* Интегрирование эволюционного уравнения в банаховом пространстве.— Математика (Сб. переводов), 2 : 4, 1958, с. 117—135.
6. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных.— Киев : Вища школа, 1976.— 592 с.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1977.— 744 с.
8. *Васильева А. Б.* ,*Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М. : Наука.— 272 с.

Ужгородский государственный университет

Поступило 29.11.82

УДК 517.946

З. О. МЕЛЬНИК

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА С НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ОБЩЕГО ДВУМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком АН УССР Я. С. Подстригачем)

Пусть $G(T)$ — криволинейный четырехугольник в плоскости xOt, ограниченный линиями $t=0$, $t=T>0$, $x=s(t)$, $x=\varphi(t)$ $(s(0)=0,\ \varphi(0)=b>0,\ s(t)<\varphi(t)$ для всех $t\in[0,T])$. В $G(T)$ рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial t}{\partial t}-a(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}+a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=F(x,t,u,v,w),$$

$$\left(v=\frac{\partial u}{\partial t}=u_t,\quad w=\frac{\partial u}{\partial x}=u_x\right),\tag{1}$$

где a и F — заданные функции соответственно в $\overline{G}(T)$ и $\overline{G}(T)\times\mathbf{R}^3$. Общее двумерное строго гиперболическое уравнение второго порядка с линейной главной частью всегда приводится к виду (1) подходящей заменой $\tau=t$, $\xi=\psi(x,t)$ и последующим разложением левой части на множители.

Предполагается, что $a(x,t)\in C^3[\overline{G}(T)]$, $a(x,t)\geqslant\alpha=\mathrm{const}>0$ для всех $(x,t)\in\overline{G}(T)$, $F(x,t,u,v,w)$ непрерывна по всем переменным в $\overline{G}(T)\times\mathbf{R}^3$, непрерывно дифференцируема по x, u, v, w и производные по u, v, w равномерно ограничены. Пусть также $-a(s(t),t)<s'(t)<a(s(t),t)$, $-a(\varphi(t),t)<\varphi'(t)<a(\varphi(t),t)$ при всех $t\in[0,T]$ и кроме того, $s(t),\ \varphi(t)\in C^2[0,T]$.

Обозначим через $u_s(s(t),t)$ и $u_l(s(t),t)$ значения производных функции u в точках кривой $x=s(t)$ соответственно в направлении этой кривой и характеристики $l: x'=a(x_0,t)$, $x(\tau)=\xi$, $(\xi,\tau)\in\overline{G}(T)$, уравнение которой запишем в виде $x=\varphi_1(t,\xi;\tau)$. Аналогично, $u_\varphi(\varphi(t),t)$ и $u_m(\varphi(t),t)$ являются производными от u на линии $x=\varphi(t)$ соответственно в направлении этой линии и характеристики $x'=-a(x,t)$, $x(\tau)=\xi$, $(\xi,\tau)\in\overline{G}(T)$ с уравнением $x=\varphi_2(t,\xi,\tau)$.

Ставится задача: найти функцию u в $G(T)$ и функцию s на $]0,T]$ так, чтобы в $G(T)$ удовлетворялось уравнение (1), начальные условия на нижнем основании $G(T)$

$$u(x,0)=g(x),\ u_t(x,0)=h(x),\ x\in[0,b],\tag{2}$$