

А.Г. Лавер, Н.Р. Сиденко

Асимптотика решения периодической по времени краевой задачи для
сингулярно возмущённого нелинейного параболического уравнения с быстро
осциллирующими коэффициентами// Украинский математический журнал,
1984, том 36, №2, с. 165-171

ISSN 0041-6053

УКРАИНСКИЙ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ

2

ТОМ 36

НАУКОВА АУМКА

1984

ТОМ 36, № 2, 1984

1. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел.— М.: Наука, 1971.— 416 с.
2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: В 2-х т.— М.: Мир, 1965.— Т. 1. 615 с.
3. Wintner A. The theory of measure in arithmetical semi-groups.— Baltimore, 1944.— 120 p.
4. Котляр Б. Д. О сингулярных числах интегральных операторов.— Докл. АН СССР, 1976, 229, № 4, с. 794—796.
5. Котляр Б. Д. О сингулярных числах интегральных операторов.— Дифференц. уравнения, 1978, 14, № 8, с. 1473—1477.
6. Харди Г. Расходящиеся ряды.— М.: Изд. иностр. лит., 1951.— 504 с.
7. Cochran J. A. Growth estimates for the singular values of square-integrable kernels.— Pacif. J. Math., 1975, 56, N 1, 51—58.

ВНИИмехчермет, Днепропетровск

Поступила в редакцию 16.11.821

УДК 517.947

А. Г. Лавер, Н. Р. Сиденко

Асимптотика решения периодической по времени краевой задачи для сингулярно возмущенного нелинейного параболического уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами

Будем изучать поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения краевой задачи

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial u^\varepsilon / \partial t - \bar{\partial} (a_{ij}(x, t, \varepsilon^{-1}x) \partial u^\varepsilon / \partial x_j) / \partial x_i + a_0(x, t, \varepsilon^{-1}x) u^\varepsilon = \\ = f(x, t, \varepsilon^{-1}x, u^\varepsilon), \quad x \in \Omega, \quad t \in R, \end{aligned} \quad (1)$$

$$u^\varepsilon(x, t + T) = u^\varepsilon(x, t), \quad u^\varepsilon(x, t)|_\Gamma = 0,$$

где Ω — ограниченная область в R^n с границей Γ , по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до n , $\bar{\partial} / \partial x_i$ — вариационные производные, $T = \text{const} > 0$, имея в виду, что выполняются условия

$$\begin{aligned} a_{ij}(x, t, y) \xi_i \xi_j \geq \alpha_0 |\xi|^2, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad a_0 \geq 0 \quad \forall \xi, \quad y \in R^n, \\ x \in \Omega, \quad t \in R; \quad \alpha_0 = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Коэффициенты $a_{ij}(x, t, y)$, $a_0(x, t, y)$ и функция $f(x, t, y, u)$, $u \in R$, периодические по $y \in R^n$ с параллелепипедом периодичности $Y = \prod_{j=1}^n (0, y_j^0)$ и по t с периодом T (обозначения: $a_{ij}(x, t, \cdot) \in \mathcal{F}(Y)$, $a_{ij}(x, \cdot, y) \in \mathcal{F}(0, T)$ и т. д.).

1. Предполагаем, что данные задачи удовлетворяют условиям: 1) Ω — липшицева область; 2) коэффициенты $a_{ij}(x, t, y)$, $a_0(x, t, y)$ определены, измеримы и ограничены на $\Omega \times R \times R^n$, причем равномерно периодичны по t с периодом T и по y — с параллелепипедом Y , и удовлетворяют условиям (2); 3) для почти всех (п. в.) $(t, y) \in (0, T) \times Y$, $\forall x \in \Omega$ существуют измеримые ограниченные производные $\partial a_{ij}(x, t, y) / \partial x_i$, $\partial a_{ij} / \partial y_i$, $\partial a_{ij} / \partial t$, $\partial a_0 / \partial t$.

Функция $f(x, t, y, u)$: 4) $\forall u \in R$ измерима по $(x, t, y) \in \Omega \times R \times R^n$; 5) $\forall (x, u) \in \Omega \times R$ равномерно периодична по t с периодом T и по y — с параллелепипедом Y ; 6) равномерно непрерывна по (x, u) на каждом ограниченном множестве $\{x \in \Omega, |u| < M\}$, причем равномерно относительно п. в. $(t, y) \in (0, T) \times Y$; 7) всюду в $\Omega \times (0, T) \times Y \times R$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} |f(x, t, y, u)| \leq f_0(x, t) + c|u|^r, \quad f_0 \in L_{2r}(Q_T), \quad c = \text{const}, \\ Q_T = \Omega \times (0, T), \quad 1 < r < (n+1)/(n-1); \end{aligned} \quad (3)$$

8) не возрастает по u $\forall (x, t, y) \in \Omega \times (0, T) \times Y$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1) — 8). Тогда при $\varepsilon \neq 0$ задача (1) имеет единственное решение $u^\varepsilon \in H_T^1 = \{u \in H^1(Q_T) \cap \mathcal{J}(0, T) \mid u|_\Gamma = 0\}$.

Доказательство. Положив $f^\varepsilon(u)(x, t) = f(x, t, \varepsilon^{-1}x, u(x, t))$, определяем оператор суперпозиции, действующий в силу условий 4), 6), 7) [1] из пространства $L_p(Q_T) \cap \mathcal{J}(0, T)$, $p = 2r$, в пространство $L_2(Q_T) \cap \mathcal{J}(0, T)$. Определим линейный оператор A_ε на множестве

$$D(A_\varepsilon) = \{u \in H_T^1 \mid \bar{\partial}(a_{ij}^\varepsilon(x, t) \partial u / \partial x_j) / \partial x_i \in L_2(Q_T)\}.$$

$$a_{ij}^\varepsilon(x, t) \equiv a_{ij}(x, t, \varepsilon^{-1}x), \quad a_0^\varepsilon(x, t) \equiv a_0(x, t, \varepsilon^{-1}x),$$

совпадающий с левой частью уравнения (1) и действующий в пространстве $L_2(Q_T) \cap \mathcal{J}(0, T)$. Ввиду (2) имеем неравенство

$$(A_\varepsilon u, u) \geq \alpha_0 \|u\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))}^2, \quad (4)$$

где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в $L_2(Q_T)$. Следовательно, справедлива оценка

$$\|u\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))} \leq \alpha_0^{-1} \|A_\varepsilon u\|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq c_1 \alpha_0^{-1} \|A_\varepsilon u\|_{L_2(Q_T)},$$

$$c_1 = \text{const} > 0. \quad (5)$$

Умножая равенство (1) скалярно в $L_2(Q_T)$ на $\partial u / \partial t$ и используя условия теоремы и неравенство Коши с малым ν , получаем оценку

$$(1 - \nu/2) \|\partial u / \partial t\|_{L_2(Q_T)}^2 \leq (2\nu)^{-1} \|A_\varepsilon u\|_{L_2(Q_T)}^2 + c_2 \|u\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))}^2. \quad (6)$$

В силу условий 2), 3) и оценок (5), (6) множество $D(A_\varepsilon)$ плотно в $L_2(Q_T) \cap \mathcal{J}(0, T)$, а область значений A_ε совпадает с $L_2(Q_T) \cap \mathcal{J}(0, T)$. Следовательно, существует ограниченный обратный оператор $A_\varepsilon^{-1}: L_2(Q_T) \cap \mathcal{J}(0, T) \rightarrow D(A_\varepsilon)$, где $D(A_\varepsilon)$ рассматривается как гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{D(A_\varepsilon)} = (u, v)_{\dot{H}_T^1} + (\bar{\partial}(a_{ij}^\varepsilon \partial u / \partial x_j) / \partial x_i, \bar{\partial}(a_{ij}^\varepsilon \partial v / \partial x_j) / \partial x_i).$$

Так что задаче (1) эквивалентно функциональное уравнение $u^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} f^\varepsilon(u^\varepsilon)$ в $L_p(Q_T) \cap \mathcal{J}(0, T)$, разрешимость которого доказывается с помощью принципа Лере — Шаудера [2]. С этой целью рассматриваем уравнение с параметром $\alpha \in [0, 1]$

$$u_\alpha^\varepsilon = \alpha A_\varepsilon^{-1} f^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon). \quad (7)$$

В силу непрерывности A_ε^{-1} , ограниченности и непрерывности оператора суперпозиции, оператор в правой части (7) непрерывен по (α, u) на $[0, 1] \times (L_p(Q_T) \cap \mathcal{J}(0, T))$. Далее, поскольку вложение $H^1(Q_T) \subset L_p(Q_T)$ компактно, $A_\varepsilon^{-1} f^\varepsilon(u)$ — компактное преобразование $L_p(Q_T) \rightarrow L_p(Q_T)$. Умножив скалярно в $L_2(Q_T)$ уравнение $A_\varepsilon u_\alpha^\varepsilon = \alpha f^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon)$ на $|u_\alpha^\varepsilon|^{p-2}$, получаем

$$(p-1) \int_{Q_T} a_{ij}^\varepsilon(x, t) (\partial u_\alpha^\varepsilon / \partial x_j) (\partial |u_\alpha^\varepsilon|^{p-2} / \partial x_i) |u_\alpha^\varepsilon|^{p-2} + (p-1)^{-1} a_0^\varepsilon(x, t) |u_\alpha^\varepsilon|^p dx dt =$$

$$= \alpha \int_{Q_T} f^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon) |u_\alpha^\varepsilon|^{p-2} dx dt \leq \alpha \int_{Q_T} f^\varepsilon(0) |u_\alpha^\varepsilon|^{p-2} dx dt \leq$$

$$\leq \|f^\varepsilon(0)\|_{L_p(Q_T)} \|u_\alpha^\varepsilon\|_{L_p(Q_T)}^{p-1}.$$

С другой стороны, используя неравенство Пуанкаре, имеем

$$\int_{Q_T} |u|^{p-2} |\nabla_x u|^2 dx dt \geq \nu_0 \rho^{-2} \int_{Q_T} |u|^p dx dt, \quad \nu_0 = \text{const} > 0.$$

Следовательно,

$$\|u_\alpha^\varepsilon\|_{L_p(Q_T)} \leq$$

Таким образом, для уравнения — Шаудера, и задача имеет единственно в $L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))$

$$\alpha_0 \|u^\varepsilon - u_1^\varepsilon\|$$

Теорема доказана.

2. Исследуем поведение функции $\hat{u}(x, t)$ как

$$-\partial(q_{ij}(x, t) \partial \hat{u} / \partial x_j)$$

где

$$\bar{a}_0(x, t) = [a_0(x, t, \varepsilon^{-1}x)]$$

$$q_{ij} = [a_{ij}(x, t, \varepsilon^{-1}x)]$$

Функции $\chi^k(x, t, y)$, $k = 1, \dots, n$ дачи

$$\bar{\partial}(a_{ij}(x, t, y) \partial \chi^k / \partial x_j)$$

где

$$V(Y) = H^1(Y)$$

Задача (11) имеет единственное периодическое по t с периодом 2π решение в $V^1(Y)$. Задача Доказательство этого

Рассмотрим случаи

$$= \bigcup_{i=1}^s \bar{Y}_i, \quad \text{где } s \in N, Y_i \subset Y$$

$$\bar{W}_q^i(Y) = \bigoplus_{i=1, s} W_q^i(Y_i), \quad q = 1, \dots, n$$

Теорема 2. Пусть коэффициенты a_{ij}, a_0 принадлежат $\bar{W}_\infty^1(Y)$, $\partial a_{ij} / \partial x_i \in C^0(\bar{Y}) \times R$ существует изм

$$|f_t(x, t)|$$

4) для n в (t, y) и

Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\dot{H}^1(\Omega) \cap \mathcal{J}(0, T).$$

Доказательство. $= a_{ij}^\varepsilon \partial u^\varepsilon / \partial x_j$, ввиду (1)

$$\|u^\varepsilon\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))}$$

Тогда при $\varepsilon \neq 0$
 $H^1(Q_T) \cap \mathcal{F}(0, T)$

$\varepsilon^{-1}x, u(x, t)$, опре-
 лений 4), 6), 7) [1]
 в $L_2(Q_T) \cap \mathcal{F}(0, T)$.

(Q_T) .
 $\varepsilon^{-1}x$,
 в пространство

(4)

тельно, справедлива

$\|A_\varepsilon u\|_{L_2(Q_T)}$,
 (5)

используя условия
 энку

$\|u\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))}$. (6)

во $D(A_\varepsilon)$ плотно в
 с $L_2(Q_T) \cap \mathcal{F}(0, T)$.
 ратор $A_\varepsilon^{-1} : L_2(Q_T) \cap$
 льбертово простран-

$\partial v / \partial x_j / \partial x_i$).

нение $u^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} f^\varepsilon(u^\varepsilon)$
 ся с помощью прин-
 м уравнение с пара-

(7)

вности оператора су-
 по (α, u) на $[0, 1] \times$
 $Q_T \subset L_p(Q_T)$ ком-
 $\rightarrow L_p(Q_T)$. Умножив
 p^{-2} , получаем

$\int_0^T \int_\Omega |\alpha^\varepsilon(x, t)| |u^\varepsilon| dx dt =$

$\int_0^T \int_\Omega dx dt \leq$

имеем

$= \text{const} > 0$.

ри., 1984, т. 36, № 2

Следовательно,

$$\|u_\alpha^\varepsilon\|_{L_p(Q_T)} \leq c_3 p^2 (p-1)^{-1} \|f^\varepsilon(0)\|_{L_p(Q_T)} \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (8)$$

Таким образом, для уравнения (7) выполнены все условия принципа Ле-
 ре — Шаудера, и задача (1) имеет решение в $D(A_\varepsilon) \subset \dot{H}_T^1$. Это решение
 единственно в $L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))$, поскольку

$$\alpha_0 \|u^\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))} \leq (f^\varepsilon(u^\varepsilon) - f^\varepsilon(u_1^\varepsilon), u^\varepsilon - u_1^\varepsilon) \leq 0.$$

Теорема доказана.

2. Исследуем поведение решения при $\varepsilon \rightarrow 0$. С этой целью определим
 функцию $\hat{u}(x, t)$ как решение гомогенизированной задачи [3]

$$-\partial(q_{ij}(x, t) \hat{u} / \partial x_j) / \partial x_i + \bar{a}_0(x, t) \hat{u} = \bar{f}(x, t, \hat{u}), \hat{u}|_\Gamma = 0, \quad (9)$$

где

$$\bar{a}_0(x, t) = [a_0(x, t, \cdot)], \bar{f}(x, t, u) \equiv \bar{f}(u)(x, t) = [f(x, t, \cdot, u)], \quad (10)$$

$$q_{ij} = [a_{ij}(x, t, \cdot) - a_{ik}(x, t, \cdot) \partial \chi^k(x, t, \cdot) / \partial y_k], \quad [u(x, t, \cdot)] = \\ = |Y|^{-1} \int_Y u(x, t, y) dy.$$

Функции $\chi^k(x, t, y)$, $k = \overline{1, n}$, $(x, t) \in \Omega \times R$, определяются как решение за-
 дачи

$$\bar{\partial}(a_{ij}(x, t, y) \partial(\chi^k - y_k) / \partial y_j) / \partial y_i = 0, \quad \chi^k(x, t, \cdot) \in V^1(Y), \quad (11)$$

где

$$V(Y) = H^1(Y) \cap \mathcal{F}(Y), \quad V^1(Y) = \{v \in V(Y) \mid [v] = 0\}.$$

Задача (11) имеет единственное решение, которое является ограниченной
 периодической по t с периодом T абстрактной функцией от (x, t) со значе-
 ниями в $V^1(Y)$. Задача (9) имеет единственное решение в $L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))$.
 Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1.

Рассмотрим случай кусочно-гладких коэффициентов a_{ij} . Пусть $\bar{Y} =$
 $= \bigcup_{i=1}^s \bar{Y}_i$, где $s \in N$, Y_i — области с границами ∂Y_i , $\partial Y_i \setminus \partial Y \in C^2$. Обозначим

$$\bar{W}_q^1(Y) = \dot{\bigcap}_{i=1, s} W_q^1(Y_i), \quad \bar{C}^1(Y) = \dot{\bigcap}_{i=1, s} C^1(Y_i), \quad C_1^1(Y) = \bar{C}^1(Y) \cap C^0(Y).$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и следующие: 1²⁾
 коэффициенты a_{ij} , a_0 равномерно непрерывны по x ; 2²⁾ $a_{ij}(x, t, \cdot) \in C^0(Q_T;$
 $\bar{W}_\infty^1(Y))$, $\partial a_{ij} / \partial x_l \in C^0(Q_T; \bar{W}_{q_0}^1(Y))$, $q_0 > n$; 3²⁾ для п. в. (t, y) , $\forall (x, u) \in \Omega \times$
 $\times R$ существует измеримая производная f_t , удовлетворяющая оценке

$$|f_t(x, t, y, u)| \leq f_1(x, t) + c|u|^r, \quad f_1 \in L_2(Q_T); \quad (12)$$

4²⁾ для п. в. (t, y) и $\forall x \in \Omega$ функция f абсолютно непрерывна по u .

Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon \neq 0$, решение $u^\varepsilon \rightarrow \hat{u}$ слабо в $V_T = H^1(0, T;$
 $\dot{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{F}(0, T)$.

Доказательство проводим методом работы [3]. Обозначая $p_i^\varepsilon =$
 $= a_{ij}^\varepsilon \partial u^\varepsilon / \partial x_j$, ввиду (2), (3) имеем равномерные оценки

$$\|u^\varepsilon\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))} \leq c_4 \|f_0\|_{L_2(Q_T)}, \quad \|p_i^\varepsilon\|_{L_2(Q_T)} \leq c_5 = \text{const} \quad \forall \varepsilon. \quad (13)$$

Укр. мат. журн., 1984, т. 36, № 2

167

Выводя из (1) уравнение для разностного отношения $v_h^\varepsilon = h^{-1} [u^\varepsilon(x, t+h) - u^\varepsilon(x, t)]$ и учитывая условия 3), 8), 4²) [4], получаем неравенство

$$\|v_h^\varepsilon\|_{L_2(0,T;\dot{H}^1(\Omega))}^2 \leq c_6 \int_0^1 (\|f_t(x, t+\tau h, \varepsilon^{-1}x, u^\varepsilon(x, t))\|_{L_2(Q_T)}^2 + \|u^\varepsilon\|_{L_2(0,T;\dot{H}^1(\Omega))}^2) d\tau.$$

Используя условие 3²), периодичность функций по t и оценки (8) и (13), из последнего неравенства получаем

$$\begin{aligned} \|v_h^\varepsilon\|_{L_2(0,T;\dot{H}^1(\Omega))}^2 &\leq c_6 (2\|f_1\|_{L_2(Q_T)}^2 + 2c^2\|u^\varepsilon\|_{L_p(Q_T)}^p + \|u^\varepsilon\|_{L_2(0,T;\dot{H}^1(\Omega))}^2) \leq \\ &\leq c_7 (\|f_1\|_{L_2(Q_T)}^2 + \|f_0\|_{L_p(Q_T)}^p + \|f_0\|_{L_2(Q_T)}^2) \quad \forall \varepsilon, h. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (3), (13), (15) непосредственно вытекает, что имеет место равномерная оценка

$$\|u^\varepsilon\|_{\dot{V}_T} \leq c_8 \quad \forall \varepsilon \quad (15)$$

и можно выделить такие подпоследовательности, по-прежнему обозначенные $u^\varepsilon, p_i^\varepsilon, f^\varepsilon(u^\varepsilon)$, что $u^\varepsilon \rightarrow u$ в \dot{V}_T слабо, $p_i^\varepsilon \rightarrow p_i$, $\partial p_i^\varepsilon / \partial x_i \rightarrow \partial p_i / \partial x_i$, $f^\varepsilon(u^\varepsilon) \rightarrow F$ в $L_2(Q_T)$ слабо. Поскольку вложение $\dot{V}_T \subset L_p(Q_T)$ компактно, имеем

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L_p(Q_T)} \rightarrow 0. \quad (16)$$

Переходя в уравнении (1) к слабому пределу в пространстве $L_2(Q_T)$, когда для определенности $\varepsilon \rightarrow +0$, получаем

$$-\partial p_i / \partial x_i + \bar{a}_0 u = F. \quad (17)$$

Покажем, что $F = \bar{f}(u)$. В силу условия (8)

$$0 \geq (f^\varepsilon(u^\varepsilon) - f^\varepsilon(w), u^\varepsilon - w) \quad \forall w \in C^0(Q_T). \quad (18)$$

Используя (16) и условия 7), 8), переходим к пределу по ε :

$$0 \geq (F - \bar{f}(w), u - w).$$

Последнее неравенство справедливо $\forall w \in L_p(Q_T)$ ввиду непрерывности оператора $\bar{f}(u): L_p(Q_T) \rightarrow L_2(Q_T)$. Положив $w = u - \lambda v$, $\lambda > 0$, $v \in L_p(Q_T)$, получаем $(F - \bar{f}(u - \lambda v), v) \leq 0$. Следовательно, устремив $\lambda \rightarrow +0$, имеем $(F - \bar{f}(u), v) \leq 0 \quad \forall v \in L_p(Q_T)$, откуда $F = \bar{f}(u)$.

Согласно [5], $\forall q < \infty$ и заданного $q_0 > n$ справедливы включения

$$\chi^k(x, t, y) \in C^0(Q_T; \bar{W}_{q_0}^2(Y)) \cap C^0(Q_T \times Y) \subset C^0(Q_T; C_l^1(Y)), \quad (19)$$

$$\partial \chi^k(x, t, y) / \partial x_i \in C^0(Q_T; \bar{W}_{q_0}^2(Y)) \cap C^0(Q_T \times Y) \subset C^0(Q_T; C_l^1(Y)), \quad l = \overline{1, n}.$$

Далее, подобно тому, как это сделано в работе [3], доказываем, что $p_i = q_{ij} \partial u / \partial x_j$. Для этого уравнение (1) умножаем в $L_2(Q_T)$ на $\varphi(x, t) W_k^\varepsilon$, где $\varphi \in \dot{C}^1(Q_T)$ — произвольная функция, $W_k(x, t, y) = y_k - \chi^k(x, t, y)$, $W_k^\varepsilon(x, t) = x_k - \varepsilon \chi^k(x, t, \varepsilon^{-1}x)$, а равенство

$$\partial(a_{ij}^\varepsilon \partial W_k / \partial y_j |_{y=\varepsilon^{-1}x}) / \partial x_i = \{\partial(a_{ij}(x, t, y) \partial W_k / \partial y_j) / \partial x_i\}_{y=\varepsilon^{-1}x}$$

умножаем на φu^ε , в результате чего приходим к равенству

$$\begin{aligned} \varepsilon(\partial u^\varepsilon / \partial t, \varphi W_k^\varepsilon) + (p_i^\varepsilon, W_k^\varepsilon \partial \varphi / \partial x_i) + \varepsilon(p_i^\varepsilon, \varphi \partial W_k / \partial x_i |_{y=\varepsilon^{-1}x}) - \\ - (a_{ij}^\varepsilon \partial W_k / \partial y_j |_{y=\varepsilon^{-1}x}, u^\varepsilon \partial \varphi / \partial x_i) - (\{\partial(a_{ij} \partial W_k / \partial y_j) / \partial x_i\}_{y=\varepsilon^{-1}x}, \varphi u^\varepsilon) + \\ + (a_0^\varepsilon u^\varepsilon, \varphi W_k^\varepsilon) = (f^\varepsilon(u^\varepsilon), \varphi W_k^\varepsilon). \end{aligned} \quad (20)$$

Используя по $\varepsilon \rightarrow +0$

$(p_i, x_k$

Из сравнения

зультат тот же, как и в (13).

Замечание

$\partial x_i, \bar{a}_0 \in C^0$

условия $\Gamma \in$

3. Вводятся

покажем, что

$= u^\varepsilon - u - \chi^k$

$n \geq 2$ докажем

Лемма

ции χ^k удовлетворяет

ведлива оценка

$\| \chi^k \|$

Доказано

Для $\Gamma \in C^2$ и

Очевидно, что образом:

$\langle \langle \chi^\varepsilon \rangle \rangle_{W_1^1}$

$\times | \varepsilon \chi^k(x, t)$

$\times | \varepsilon \chi^k$

В силу условия

К интегралу I_1^ε

$q_1 = (n-1)/(s-$

$|I_2^\varepsilon| \leq |\Gamma|^{1/\nu} \{ \{ \{$

$- \varepsilon$

Используя условие 2²) и свойства (16), (19), переходим в (20) к пределу по $\varepsilon \rightarrow +0$:

$$(p_i, x_k \partial \varphi / \partial x_i) - ([a_{ij} \partial W_k / \partial y_j], u \partial \varphi / \partial x_i) - (\partial [a_{ij} \partial W_k / \partial y_j] / \partial x_i + \varphi u) + (\bar{a}_0 u, \varphi x_k) = (\bar{f}(u), \varphi x_k). \quad (21)$$

Из сравнения (21) с (17) следует доказываемое равенство. При $\varepsilon \rightarrow -0$ результат тот же. Таким образом, $u \in \dot{V}_T$ — решение задачи (9). Теорема доказана.

Замечание. Из условий теоремы 2 с учетом (19) имеем $q_{ij}, \partial q_{ij} / \partial x_i, \bar{a}_0 \in C^0(Q_T)$. Так как $\bar{f}(\hat{u}) \in L_2(Q_T)$, то из (9) при дополнительном условии $\Gamma \in C^2$ следует [6], что $\hat{u} \in L_2(0, T; H^2(\Omega)) \cap \dot{V}_T$.

3. Вводя следующий член асимптотики u^ε в виде

$$\chi^\varepsilon(x, t, \varepsilon^{-1}x) = -\varepsilon \chi^k(x, t, \varepsilon^{-1}x) \hat{u}(x, t) / \partial x_k, \quad (22)$$

покажем, что при некоторых дополнительных условиях на данные $z^\varepsilon = u^\varepsilon - \hat{u} - \chi^\varepsilon \rightarrow 0$ сильно в $L_2(0, T; H^1(\Omega))$, когда $\varepsilon \rightarrow 0$. С этой целью для $n \geq 2$ докажем следующее утверждение.

Лемма. Пусть $\hat{u} \in L_2(0, T; W_s^2(\Omega))$, где $s > n - 1$, $\Gamma \in C^2$, а функции χ^k удовлетворяют условиям (19). В этих условиях при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедлива оценка

$$\|\chi^\varepsilon|_\Gamma\|_{L_2(0, T; W_s^{1-1/s}(\Gamma))} = O(\varepsilon^\nu), \quad 0 < \nu < 1 - (n - 1)/s. \quad (17)$$

Доказательство. Ввиду (19) очевидно, что $\chi^\varepsilon|_\Gamma \in L_2(0, T; W_s^{1-1/s}(\Gamma))$. Для $\Gamma \in C^2$ имеем

$$\|\chi^\varepsilon\|_{W_s^{1-1/s}(\Gamma)} = \|\chi^\varepsilon\|_{L_s(\Gamma)} + \ll \chi^\varepsilon \gg_{W_s^{1-1/s}(\Gamma)},$$

$$\ll \chi^\varepsilon \gg_{W_s^{1-1/s}(\Gamma)} = \left(\iint_\Gamma |x - x'|^{2-n-s} |\chi^\varepsilon(x, t, \varepsilon^{-1}x) - \chi^\varepsilon(x', t, \varepsilon^{-1}x')|^s d\sigma_x d\sigma_{x'} \right)^{1/s}. \quad (23)$$

Очевидно, что $\|\chi^\varepsilon\|_{L_2(0, T; L_s(\Gamma))} = O(\varepsilon)$. Оценим полунорму в (23) следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \langle \chi^\varepsilon \rangle \rangle_{W_s^{1-1/s}(\Gamma)} &\leq \left(\iint_\Gamma |x - x'|^{2-n-s} |\hat{u}(x, t) / \partial x_k - \hat{u}(x', t) / \partial x_k|^s \times \right. \\ &\times |\varepsilon \chi^k(x, t, \varepsilon^{-1}x)|^s d\sigma_x d\sigma_{x'} \Big)^{1/s} + \left(\iint_\Gamma |\partial u(x', t) / \partial x_k|^s |x - x'|^{2-n-s} \times \right. \\ &\times |\varepsilon \chi^k(x, t, \varepsilon^{-1}x) - \varepsilon \chi^k(x', t, \varepsilon^{-1}x')|^s d\sigma_x d\sigma_{x'} \Big)^{1/s} \equiv I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon. \end{aligned} \quad (24)$$

В силу условий (19) справедливо неравенство

$$\|I_1^\varepsilon\|_{L_2(0, T)} \leq c_9 |\varepsilon| \|\hat{u}\|_{L_2(0, T; W_s^2(\Omega))}.$$

К интегралу I_2^ε применим неравенство Гельдера с показателями $p_1 = \tilde{p}/s$, $q_1 = (n - 1)/(s - 1)$, где $\tilde{p} = (n - 1)s/(n - s)$, $W_s^{1-1/s}(\Gamma) \subset L_{\tilde{p}}(\Gamma)$. Имеем

$$\begin{aligned} |I_2^\varepsilon| &\leq |\Gamma|^{1/\tilde{p}} \left\{ \left(\iint_\Gamma |\partial \hat{u}(x', t) / \partial x_k|^{\tilde{p}} d\sigma_{x'} \right)^{s/\tilde{p}} \left(\iint_\Gamma |x - x'|^{(2-n-s)q_1} |\varepsilon \chi^k(x, t, \varepsilon^{-1}x) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \varepsilon \chi^k(x', t, \varepsilon^{-1}x')\right|^{sq_1} d\sigma_x d\sigma_{x'} \right)^{1/q_1} \Big\}^{1/s} \leq c_{10} \|\hat{u}\|_{W_s^2(\Omega)} \times \end{aligned}$$

$= h^- [u^\varepsilon(x, t+h) - u^\varepsilon(x, t)]$ — неравенство

$$\|u^\varepsilon\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))}^2 d\tau.$$

оценки (8) и (13),

$$\|u^\varepsilon\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))}^2 \leq \dots \quad (14)$$

место равномерная (15)

$$\partial p_i^\varepsilon / \partial x_i \rightarrow \partial p_i / \partial x_i, \quad L_p(Q_T) \text{ компактно,} \quad (16)$$

нстве $L_2(Q_T)$, когда

$$\dots \quad (17)$$

$$\dots \quad (18)$$

по ε :

непрерывности опе- > 0 , $v \in L_p(Q_T)$, по- $\lambda \rightarrow +0$, имеем

ивы включения

$$\dots; C_l^1(Y), \quad (19)$$

$$C_l^1(Y), \quad l = \overline{1, n}.$$

казываем, что $p_i =$

на $\varphi(x, t) W_k^\varepsilon$, где $\varphi \in$

y , $W_k^\varepsilon(x, t) = x_k -$

$\partial x_i / \partial y = \varepsilon^{-1} x$

ству

$x_i|_{y=\varepsilon^{-1}x} -$

$\}_{y=\varepsilon^{-1}x}, \varphi u^\varepsilon) +$

$$(20)$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\iint_{\Gamma} | \dots |^{sq_1} |x - x'|^{(2-n-s)q_1} d\sigma_x d\sigma_{x'} \right)^{1/q_1} \right\}^{1/s} \leq \\ & \leq c_{11} \|\hat{u}\|_{W_s^2(\Omega)} \sum_{k=1}^n \left(\iint_{\Gamma} | \dots |^{sq_1} |x - x'|^{(2-n-s)q_1} d\sigma_x d\sigma_{x'} \right)^{1/sq_1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Интеграл в (25) оцениваем так же, как в случае неравенства (24):

$$\begin{aligned} & \left(\iint_{\Gamma} |x - x'|^{(2-n-s)q_1} |\varepsilon \chi^k(x, t, \varepsilon^{-1}x) - \varepsilon \chi^k(x', t, \varepsilon^{-1}x')|^{sq_1} d\sigma_x d\sigma_{x'} \right)^{1/sq_1} \leq \\ & \leq \left(\iint_{\Gamma} |x - x'|^{(2-n-s)q_1} |\varepsilon \chi^k(x, t, \varepsilon^{-1}x) - \varepsilon \chi^k(x', t, \varepsilon^{-1}x)|^{sq_1} d\sigma_x d\sigma_{x'} \right)^{1/sq_1} + \\ & + \left(\iint_{\Gamma} |x - x'|^{(2-n-s)q_1} |\varepsilon \chi^k(x', t, \varepsilon^{-1}x) - \varepsilon \chi^k(x', t, \varepsilon^{-1}x')|^{sq_1} d\sigma_x d\sigma_{x'} \right)^{1/sq_1} \equiv \\ & \equiv I_3^\varepsilon + I_4^\varepsilon. \end{aligned}$$

Интеграл $I_3^\varepsilon = O(\varepsilon)$ при $(n-2)q_1 < n-1$, т. е. при $s > n-1$. Ввиду условий (19) интеграл I_4^ε оценим так:

$$\begin{aligned} |I_4^\varepsilon| & \leq c_{12} |\varepsilon|^{s/q_1} \left(\iint_{\Gamma} |\varepsilon^{-1}x - \varepsilon^{-1}x'|^{\delta - sq_1} |\chi^k(x', t, \varepsilon^{-1}x) - \right. \\ & \left. - \chi^k(x', t, \varepsilon^{-1}x')|^{sq_1 - \delta} |x - x'|^{(2-n)q_1 - \delta} d\sigma_x d\sigma_{x'} \right)^{1/sq_1}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $0 < \delta < q_1(s-n+1)$. Из (26) следует, что $I_4^\varepsilon = O(\varepsilon^{\delta/sq_1})$ при $s > n-1$. Таким образом,

$$\|I_2^\varepsilon\|_{L_2(0,T)} \leq c_{13} |\varepsilon|^{s/q_1} \|\hat{u}\|_{L_2(0,T;W_s^2(\Omega))}.$$

Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2, причем в условии (3) $f_0 \in L_p(0, T; L_{ps/2}(\Omega))$, где $s > n-1$ для $n \geq 3$, $s = 2$ для $n = 1, 2$, а граница $\Gamma \in C^2$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\|z^\varepsilon\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))} \rightarrow 0.$$

Доказательство. Обозначая

$$a^\varepsilon(u, v) = \int_{Q_T} [a_{ij}^\varepsilon (\partial u / \partial x_j) (\partial v / \partial x_i) + a_{0uv}^\varepsilon] dx dt, \quad u, v \in L_2(0, T; H^1(\Omega)),$$

рассмотрим интеграл $B^\varepsilon = a^\varepsilon(z^\varepsilon, z^\varepsilon)$:

$$B^\varepsilon = a^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) - 2a^\varepsilon(u^\varepsilon, \hat{u} + \chi^\varepsilon) + a^\varepsilon(\hat{u} + \chi^\varepsilon, \hat{u} + \chi^\varepsilon). \quad (27)$$

При этом $z^\varepsilon \in L_2(0, T; H^1(\Omega))$ ввиду свойств (19) функций χ^k и замечания. Используя уравнение (1), перепишем равенство (27):

$$\begin{aligned} B^\varepsilon & = (f^\varepsilon(u^\varepsilon), u^\varepsilon) - 2(f^\varepsilon(u^\varepsilon), \hat{u}) + 2\varepsilon (\partial u^\varepsilon / \partial t, \hat{u}) - 2a^\varepsilon(u^\varepsilon, \chi^\varepsilon) + \\ & + a^\varepsilon(\hat{u} + \chi^\varepsilon, \hat{u} + \chi^\varepsilon). \end{aligned} \quad (28)$$

В силу формулы

$$\begin{aligned} \partial(\hat{u} + \chi^\varepsilon) / \partial x_j & = \partial \hat{u} / \partial x_j - (\partial \chi^k / \partial y_j) (\partial \hat{u} / \partial x_k) - \\ & - \varepsilon [(\partial \chi^k / \partial x_j) (\partial \hat{u} / \partial x_k) + \chi^k \partial^2 \hat{u} / \partial x_j \partial x_k], \end{aligned} \quad (29)$$

вычисляя последний интеграл в (28), получаем

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(\hat{u} + \chi^\varepsilon, \hat{u} + \chi^\varepsilon) & = \int_{Q_T} \{ [a_{ij}^\varepsilon - a_{ik}^\varepsilon \partial \chi^l / \partial y_i - a_{lj}^\varepsilon \partial \chi^k / \partial y_l + \\ & + a_{ij}^\varepsilon (\partial \chi^k / \partial y_j) (\partial \chi^l / \partial y_i)] (\partial \hat{u} / \partial x_k) (\partial \hat{u} / \partial x_l) + a_0^\varepsilon (\hat{u})^2 \} dx dt + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (30)$$

Функция \hat{u} у
ограничение на \hat{f}_0

$$\|\hat{u}\|_{L_2}$$

Поскольку, в сил

$$\|\bar{f}(\hat{u})\|$$

из (31) имеем $\bar{f}(\hat{u})$

$$\hat{u} \in L_2(0, T; W_s^2(\Omega))$$

Выберем такую

$$\varphi^\varepsilon|_\Gamma =$$

Умножая уравнен
приходим к равен

$$\varepsilon (\partial u^\varepsilon / \partial t, v^\varepsilon)$$

Используя (13), (

$$|a^\varepsilon(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)| \leq c_{15}$$

Аналогичная оцен
= $O(\varepsilon^v)$. Нетрудн

$$\int_0^T [q_{ij} (\partial \hat{u} / \partial x_j) (\partial \hat{u} / \partial x_i)] dx dt$$

$$B^\varepsilon \rightarrow (\bar{f}(\hat{u}), \hat{u}) -$$

То же справедлив

Так как $z^\varepsilon|_\Gamma =$

$$\|z^\varepsilon\|_{L_2}$$

Теорема дока

1. Красносельский М. А. Интегральные операторы. М.: Наука, 1978. 496 с.
2. Функциональный анализ. М.: Наука, 1978.
3. Bensoussan A., Lions P. L., Papanicolaou G. Asymptotically Homogeneous Problems in Periodic Structures. North-Holland, 1978.
4. Ладыженская О. А. Уравнения параболического типа. М.: Наука, 1978.
5. Шефтель З. Г. Эллиптические уравнения. М.: Наука, 1978.
6. Кошелев А. И. Асимптотический анализ систем. — Усп. мат. наук, 1978, т. 36, № 3, с. 636—666.
7. Бесов О. В., Ильин И. П. Уравнения параболического типа. М.: Наука, 1978.

Ин-т матем. АН УССР

Укр. мат. журн., 1984, т. 36, № 2

Функция \hat{u} удовлетворяет условиям леммы. Действительно, учитывая ограничение на \hat{f}_0 , из задачи (9) получаем оценку, аналогичную (8):

$$\|\hat{u}\|_{L_p(0,T;L_{ps/2}(\Omega))} \leq c_3 p^{2s^2} (ps - 2)^{-1} \|f_0\|_{L_p(0,T;L_{ps/2}(\Omega))}. \quad (25)$$

Поскольку, в силу (3), справедливо неравенство

$$\|\bar{f}(\hat{u})\|_{L_2(0,T;L_s(\Omega))} \leq \|f_0\|_{L_2(0,T;L_s(\Omega))} + c \|\hat{u}\|_{L_p(0,T;L_{ps/2}(\Omega))}^{p/2},$$

из (31) имеем $\bar{f}(\hat{u}) \in L_2(0, T; L_s(\Omega))$. На основании [6] отсюда следует, что $\hat{u} \in L_2(0, T; W_s^2(\Omega))$.

Выберем такую функцию $\varphi^\varepsilon \in L_2(0, T; W_s^1(\Omega))$, чтобы [7]

$$\varphi^\varepsilon|_\Gamma = \chi^\varepsilon|_\Gamma, \quad \|\varphi^\varepsilon\|_{L_2(0,T;W_s^1(\Omega))} \leq c_{14} \|\chi^\varepsilon|_\Gamma\|_{L_2(0,T;W_s^{1-1/s}(\Gamma))}. \quad (32)$$

Умножая уравнение (1) скалярно в пространстве $L_2(Q_T)$ на $v^\varepsilon = \chi^\varepsilon - \varphi^\varepsilon$, приходим к равенству

$$\varepsilon (\partial u^\varepsilon / \partial t, v^\varepsilon) + a^\varepsilon(u^\varepsilon, \chi^\varepsilon) - a^\varepsilon(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) = (f^\varepsilon(u^\varepsilon), \chi^\varepsilon) - (f^\varepsilon(u^\varepsilon), \varphi^\varepsilon). \quad (33)$$

Используя (13), (32) и лемму, получаем оценку

$$|a^\varepsilon(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)| \leq c_{15} \|u^\varepsilon\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))} \|\varphi^\varepsilon\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))} \leq c_{16} \|\varphi^\varepsilon\|_{L_2(0,T;W_s^1(\Omega))} = O(\varepsilon^v). \quad (34)$$

Аналогичная оценка справедлива для $(f^\varepsilon(u^\varepsilon), \varphi^\varepsilon)$. Таким образом, $a^\varepsilon(u^\varepsilon, \chi^\varepsilon) = O(\varepsilon^v)$. Нетрудно видеть, что при $\varepsilon \rightarrow +0$ выражение (30) сходится к $\int_0^T [q_{ij}(\partial \hat{u} / \partial x_j)(\partial \hat{u} / \partial x_i) + \bar{a}_0(\hat{u})^2] dx dt$, так что из (28) и (9) следует

$$V^\varepsilon \rightarrow (\bar{f}(\hat{u}), \hat{u}) - 2(\bar{f}(\hat{u}), \hat{u}) + \int_{Q_T} [q_{ij}(\partial \hat{u} / \partial x_j)(\partial \hat{u} / \partial x_i) + \bar{a}_0(\hat{u})^2] dx dt = 0. \quad (35)$$

То же справедливо при $\varepsilon \rightarrow -0$. Из (35) имеем

$$\|\text{grad } z^\varepsilon\|_{L_2(Q_T)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (36)$$

Так как $z^\varepsilon|_\Gamma = -\chi^\varepsilon|_\Gamma$, в силу (36) и леммы получаем при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \|z^\varepsilon\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))} &\leq c_{17} (\|\text{grad } z^\varepsilon\|_{L_2(Q_T)} + \|\chi^\varepsilon|_\Gamma\|_{L_2(\Gamma \times (0,T))}) = \\ &= c_{17} \|\text{grad } z^\varepsilon\|_{L_2(Q_T)} + O(\varepsilon^v) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

1. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.— М.: Наука, 1966.— 496 с.
2. Функциональный анализ. СМБ.— М.: Наука, 1972.— 544 с.
3. Bensoussan A., Lions J.-L. Homogenization et perturbations singulieres.— В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики.— Новосибирск, 1976, № 1, с. 16—31.
4. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М.: Наука, 1967.— 736 с.
5. Шефтель З. Г. Энергетические неравенства и общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами.— Сибирск. мат. журн., 1965, 6, № 3, с. 636—669.
6. Кошелев А. И. Априорные оценки в L_p и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем.— Усп. мат. наук, 13, № 4, 1958, с. 29—88.
7. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.— М.: Наука, 1975.— 480 с.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила в редакцию 21.04.83