Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Ужгородський національний університет

Ю. В. Козаченко, О. О. Погоріляк, А. М. Тегза

МОДЕЛЮВАННЯ ГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ТА ПРОЦЕСІВ КОКСА

Монографія

Ужгород
Видавничо-поліграфічний центр «Ужгород»
2011

УДК 519.21
ББК 22.17
В

Рецензенти:
, професор, доктор фіз.-мат. наук,
, професор, доктор фіз.-мат. наук.

Рекомендовано до друку вченою радою меаніко-математичного факультету КНУ ім. Шевченка
(протокол № ?? від ?? 2011 року)

Рекомендовано до друку вченою радою Ужгородського національного університету
(протокол № ?? від ?? 2011 року)

Козаченко, Ю. В.

Моделювання гауссових випадкових процесів та процесів Кокса: Монографія / Ю.В. Козаченко, О.О. Погоріляк, А.М. Тегза. – Уж.: ВПЦ "Ужгородський університет 2011. — ??? с.

Монографія присвячена моделюванню гауссових випадкових процесів і полів та процесів Кокса, інтенсивність яких породжується гауссовими випадковими процесами і полями. Зокрема, в роботі описуються методи побудови моделей вище згаданих класів процесів та вивчаються питання точності і надійності наближення ними процесів в різних функціональних просторах.

Викладення базується, головним чином, на результатах, отриманих авторами роботи.

Рекомендується науковим співробітникам, аспірантам та студентам, що спеціалізуються в області теорії ймовірностей. Книга також буде корисна дослідникам в області радіотехніки, фізики атмосфери, геофізики, фінансової математики, математичної економіки, які використовують методи комп'ютерного моделювання випадкових процесів.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

В наш час теорія випадкових процесів широко застосовується в різних галузях, і не тільки природничих наук, тому однією з актуальних задач залишається побудова математичної моделі випадкового процесу та дослідження її властивостей. У зв'язку з потужними можливостями електронно-обчислювальної техніки особливо актуальними стають задачі чисельного моделювання, що дають змогу спрогнозувати поведінку випадкового процесу.

Існують різні методи моделювання випадкових процесів та полів. З основними з них можна познайомитись в книгах [45], [108], [135], [136], [137], [138]. Відмітимо, що в більшості робіт по моделюванню випадкових процесів не вивчаються питання точності і надійності, тобто будуються моделі, а потім за допомогою деяких критеріїв перевіряється наскільки модель є адекватною. В даній книзі мова піде тільки про методи моделювання випадкових процесів та полів з певною точністю і надійністю заданими наперед. Зокрема будуватимуться моделі, що наближають процеси та поля в різних функціональних просторах.

В книзі, як і в більшості робіт з даної тематики, розглядаються методи моделювання гауссових випадкових процесів та полів. Це пояснюється тим, що як правило, виникає потреба моделювати процеси та поля, що є сумою великого числа випадкових факторів, які в свою чергу є незалежними один від одного. Згідно з центральною граничною теоремою такі процеси є близькі до гауссових, тому саме задача моделювання гауссових випадкових процесів і полів є найбільш актуальною. Хоча слід зауважити, що моделі, які розглядаються у даній монографії насправді є лиш близькими до гауссових процесів, а саме субгауссовими процесами. Тому перший розділ книги присвячений вивченню властивостей саме таких процесів.

Відмітимо, що в книзі розглядаються тільки центровані випадкові процеси і поля, бо моделювння детермінованих функцій не складає труднощів.

Книга складається з п'яти розділів.

В першому розділі вивчаються властивості просторів $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкових величин та просторів Орлича. Наведені всі необхідні для подальшої роботи означення та твердження для просторів Орлича, $Sub(\Omega)$, $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкових величин та процесів. Отримано ряд нерівностей для норм субгауссових величин і векторів. Знайдено оцінку норми випадкової величини в просторі Орлича, отримано співвідношення між моментною нормою та нормою Люксембурга. Наведено формулювання основних теорем про оцінки „хвостів“ розподілів $L_p(\Omega)$-процесів, $Sub_\varphi(\Omega)$-процесу. Ці твердження використовуватимуться при дослідженні точності і надійності моделі гауссового процесу в рівномірній метриці.

Другий розділ присвячений квадратично гауссовим випадковим процесам. Наведена оцінка розподілу супремуму квадратично гауссового випадкового процесу.

В третьому розділі описуються методи побудови моделей гауссових стаціонарних випадкових процесів та полів. Моделі будуються з використанням розкладів випадкових процесів та полів у ряди. Обгрунтовується справедливість існування таких моделей.

В четвертому розділі вивчаються точність та надійність моделей стаціонарних гауссових випадкових процесів в просторах $L_p\left([0,T]\right)$, $p \geqslant 1$; просторах Орлича; точність та надійність моделювання в рівномірній метриці, застосування теорії $Sub_\varphi(\Omega)$ просторів випадкових величин до знаходження точності моделювання стаціонарних гауссових процесів; розглянуто узагальнену модель гауссових стаціонарних процесів; знайдено оцінки моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів при невеликій точності.

П'ятий розділ присвячений моделюванню випадкових процесів Кокса. Описуються два підходи до моделювання з певною точністю та надійністю, заданими неперед. Розглядаються випадки, коли інтенсивність випадкових процесів Кокса породжується логарифмічно гауссовими та квадратично гауссовими як однорідними так і неоднорідними процесами та полями.

В основному монографія написана на основі робіт [24], [25], [50]– [52], [54], [73]– [75], [86]– [88].

Розділ 1

ПРОСТОРИ $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Розділ присвячений дослідженню властивостей просторів $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкових величин та просторів Орлича. Тут наведені всі необхідні для подальшої роботи означення та твердження для просторів Орлича, $Sub(\Omega)$, $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкових величин та процесів. Отримано ряд нерівностей для норм субгауссових величин і векторів. Знайдено оцінку норми випадкової величини в просторі Орлича, отримано співвідношення між моментною нормою та нормою Люксембурга. Наведено формулювання основних теорем про оцінки „хвостів“ розподілів $L_p(\Omega)$-процесів, $Sub_\varphi(\Omega)$-процесу. Ці твердження використовуватимуться при дослідженні точності і надійності моделі гауссового процесу в рівномірній метриці.

1.1. Властивості $Sub(\Omega)$ – просторів

Нехай $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P}\}$ – стандартний ймовірнісний простір.

Означення 1.1. *[109] Випадкову величину ξ називатимемо субгауссовою, якщо знайдеться таке $a \geqslant 0$, що для всіх $\lambda \in R$ виконується нерівність*

$$\boldsymbol{E}\exp\{\lambda\xi\} \leqslant \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\}.$$

Клас всіх субгауссових величин будемо позначати $Sub(\Omega)$. Розглянемо таку числову характеристику субгауссової випадкової величини ξ:

$$\tau(\xi) = \inf\left\{a \geqslant 0 : \mathbf{E}\exp\{\lambda\xi\} \leqslant \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\}, \lambda \in R\right\},$$

яку називатимемо субгауссовим стандартом випадкової величини ξ. Згідно означення, $\xi \in Sub(\Omega)$ тоді і тільки тоді, коли $\tau(\xi) < \infty$. Крім того, очевидні наступні твердження.

Лема 1.1. *[109] Справедливі співвідношення*

$$\tau(\xi) = \sup_{\lambda \neq 0}\left[\frac{2\ln \boldsymbol{E}\exp\{\lambda\xi\}}{\lambda^2}\right]^{\frac{1}{2}};$$

для всіх $\lambda \in R$
$$\boldsymbol{E}\exp\{\lambda\xi\} \leqslant \exp\left\{\frac{\lambda^2\tau^2(\xi)}{2}\right\}.$$

Приклад 1.1. [109] Нехай випадкова величина ξ має $N(0,\sigma)$ розподіл, тобто ξ має гауссів розподіл з нульовим математичним сподіванням і дисперсією σ^2. Тоді
$$\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x - \frac{x^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Робимо заміну $t = \frac{x}{\sigma} - \lambda\sigma$. Отримаємо
$$\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2} - \frac{t^2}{2}}dt = \exp\left\{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\},$$

тобто, ξ є субгауссовою величиною і $\tau(\xi) = \sigma$. $\diamondsuit$

Лема 1.2. *[109] Нехай* $\xi \in Sub(\Omega)$. *Тоді для будь-якого* $p > 0$
$$\boldsymbol{E}|\xi|^p < \infty\ ,$$

крім того, $\boldsymbol{E}\xi = 0$ *і справедлива нерівність*
$$\boldsymbol{E}\xi^2 \leqslant \tau^2(\xi)\ .$$

Лема 1.3. *[109] Нехай* $\xi \in Sub(\Omega)$. *Тоді для всіх* $x > 0$ *справедливі нерівності:*
$$P\{\xi \geqslant x\} \leqslant \exp\left\{-\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)}\right\},$$
$$P\{\xi \leqslant -x\} \leqslant \exp\left\{-\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)}\right\},$$
$$P\{|\xi| \geqslant x\} \leqslant 2\exp\left\{-\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)}\right\}.$$

Теорема 1.1. *[45] Простір субгауссових випадкових величин є банаховим відносно норми* $\tau(\xi)$.

Знайти точне значення субгауссового стандарту не завжди легко. Тому корисними є нерівності, які дозволяють оцінити τ через степеневі моменти випадкової величини.

Теорема 1.2. *[109] Нехай ξ – центрована випадкова величина. Для того, щоб ξ була субгауссовою необхідно і достатньо, щоб*

$$\Theta_1(\xi)=\sup_{k\geqslant 1}\left[\tfrac{2^k k!}{(2k)!}\boldsymbol{E}\xi^{2k}\right]^{\frac{1}{2k}}<\infty \text{ або } \Theta_2(\xi)=\sup_{k\geqslant 1}\frac{\left[\boldsymbol{E}\xi^{2k}\right]^{\frac{1}{2k}}}{\sqrt{k}}<\infty.$$

При цьому справедливі нерівності

$$\frac{\sqrt{e}}{2}\Theta_2(\xi)\leqslant\tau(\xi)\leqslant\sqrt[4]{3,1}\,\Theta_1(\xi).$$

Зауваження 1.1. Якщо випадкова величина ξ симетрична або така, що всі непарні моменти рівні нулю, то множник $\sqrt[4]{3,1}$ у правій частині останньої нерівності опускається. $\diamondsuit$

Лема 1.4. *Нехай ξ – центрована симетрична випадкова величина і $\Theta_1(\xi)<\infty$. Тоді $\xi\in Sub(\Omega)$ і $\tau(\xi)\leqslant\Theta_1(\xi)$.*

Нехай ξ – гауссова випадкова величина з параметром 0 і $\sigma^2>0$. Тоді

$$\mathbf{E}\exp\left\{\frac{s\xi^2}{2\sigma^2}\right\}=\begin{cases}(1-s)^{-\frac{1}{2}}, & s\in[0,1)\\ \infty, & s\in[1,\infty)\end{cases}.$$

Лема 1.5. *[45] Нехай $\xi\in Sub(\Omega)$, $\tau(\xi)>0$, тоді для всіх $0\leqslant s<1$ має місце нерівність*

$$\boldsymbol{E}\exp\left\{\frac{s\xi^2}{2\tau^2(\xi)}\right\}\leqslant(1-s)^{-\frac{1}{2}}.$$

Лема 1.6. *[109] Нехай ξ є субгауссовою випадковою величиною, тоді для всіх $p>0$ справедлива нерівність*

$$\boldsymbol{E}|\xi|^p\leqslant 2\left(\frac{p}{e}\right)^{p/2}(\tau(\xi))^p. \tag{1.1}$$

Згідно теореми 1.1 субгауссовий стандарт є нормою в просторі $Sub(\Omega)$. Тому для будь-яких $\xi_1,\ldots,\xi_n\in Sub(\Omega)$ виконується нерівність трикутника

$$\tau\left(\sum_{k=1}^n\xi_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^n\tau(\xi_k).$$

Для незалежних субгауссових складових цю нерівність можна підсилити.

Лема 1.7. *[45] Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – незалежні субгауссові випадкові величини. Тоді має місце нерівність*

$$\tau^2\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\tau^2(\xi_k).$$

Означення 1.2. *Випадковий процес $X = \{X(t),\ t \in \mathbf{T}\}$ називається субгауссовим процесом, якщо для всіх $t \in \mathbf{T}$ $\quad X(t)$ – субгауссова випадкова величина та $\sup\limits_{t\in\mathbf{T}}\tau(X(t)) < \infty$.*

Мають місце такі твердження.

Лема 1.8. *Нехай $\xi_i,\ i = 1, \ldots, n$ субгауссові випадкові величини, тобто $z = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – випадковий субгауссовий вектор, $\tau(\xi_i) = \tau_i$. Тоді для всіх $t > 0$ має місце наступна нерівність:*

$$\boldsymbol{E}\exp\{t\|z\|\} = \boldsymbol{E}\exp\left\{t\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|\right\} \leqslant 2\exp\left\{\frac{t^2}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\tau_i\right)^2\right\}. \tag{1.2}$$

Доведення. Нехай $t \geqslant 0$, $p_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i} = 1$. Тоді з нерівності Гельдера випливає, що

$$\mathbf{E}\exp\Big\{t\big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|\big)\Big\} \leqslant \prod_{i=1}^{n}\Big(\mathbf{E}\exp\{p_i t|\xi_i|\}\Big)^{\frac{1}{p_i}}$$

$$\leqslant 2\prod_{i=1}^{n}\exp\Big\{p_i\tau_i^2\frac{t^2}{2}\Big\} = 2\exp\Big\{\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n}p_i\tau_i^2\Big\}.$$

Якщо в останній нерівності покласти $p_i = \tau_i^{-1}\sum\limits_{j=1}^{n}\tau_j$, то отримаємо (4.51). $\square$

Лема 1.9. *Якщо виконуються умови леми 1.8, то для всіх $1 < \alpha \leqslant 2$, $s \in [0, 1)$ має місце наступна нерівність*

$$\boldsymbol{E}\exp\left\{\frac{s}{\alpha}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|^\alpha}{\sum\limits_{i=1}^{n}\tau_i^\alpha}\right\} \leqslant \exp\left\{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{s}{\alpha}\right\}(1-s)^{-\frac{1}{2}}.$$

Доведення. Якщо η – субгауссова випадкова величина з нормою $\tau(\eta) = \tau$, то з леми 1.5 випливає, що при $s \in [0,1)$ має місце нерівність

$$\mathbf{E}\exp\left\{\frac{s\eta^2}{2\tau^2}\right\} \leqslant (1-s)^{-\frac{1}{2}} \ . \tag{1.3}$$

Має місце нерівність [60]: при $x > 0$, $y > 0$,

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \quad \text{де} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \ p > 1.$$

Нехай α таке число, що $1 < \alpha < 2$, тоді при $p = \frac{2}{\alpha}$, $q = \frac{2}{2-\alpha}$ справедливе співвідношення

$$xy \leqslant \frac{\alpha}{2} x^{\frac{2}{\alpha}} + \frac{2-\alpha}{2} y^{\frac{2}{2-\alpha}} \ . \tag{1.4}$$

Тоді з останніх нерівностей (1.3) та (1.4) випливає , що для всіх $0 \leqslant s < 1$

$$\mathbf{E}\exp\left\{\frac{s}{\alpha}\left(\frac{|\eta|}{\tau}\right)^{\alpha}\right\} \leqslant \mathbf{E}\exp\left\{\frac{s\alpha\eta^2}{\alpha 2\tau^2} + \frac{(2-\alpha)}{2}\frac{s}{\alpha}\right\}$$
$$= \mathbf{E}\exp\left\{\frac{s\eta^2}{2\tau^2}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{(2-\alpha)s}{2\alpha}\right\} \leqslant (1-s)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{(2-\alpha)s}{2\alpha}\right\}. \tag{1.5}$$

Нехай $r > 0$, $p_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$.

Мають місце наступні співвідношення

$$\mathbf{E}\exp\left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^{\alpha}\right\} \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\mathbf{E}\exp\left\{\frac{p_i|\xi_i|^{\alpha}}{r}\right\}\right)^{\frac{1}{p_i}} = I.$$

З (4.52) випливає, що для $\dfrac{p_i\tau_i^{\alpha}\alpha}{r} < 1$,

$$I = \prod_{i=1}^{n}\left(\mathbf{E}\exp\left\{\frac{\alpha\tau_i^{\alpha}p_i}{r\alpha}\cdot\left(\frac{|\xi_i|}{\tau_i}\right)^{\alpha}\right\}\right)^{\frac{1}{p_i}}$$
$$\leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{p_i\alpha\tau_i^{\alpha}}{r}\right)^{-\frac{1}{2p_i}} \exp\left\{\frac{(2-\alpha)\tau_i^{\alpha}}{2r}\right\},$$

$$\ln I \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2p_i}\right)\cdot\ln\left(1-\frac{p_i\alpha\tau_i^\alpha}{r}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{2-\alpha}{2r}\tau_i^\alpha$$

$$=\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n}\tau_i^\alpha+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2p_i}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(p_i\alpha\tau_i^\alpha)^k}{kr^k}\ .$$

Якщо $p_i=\frac{1}{\tau_i^\alpha}\sum\limits_{j=1}^{n}\tau_j^\alpha\ ,\quad r=\frac{\alpha}{s}\sum\limits_{i=1}^{n}\tau_i^\alpha,\quad 0\leqslant s<1$, то

$$\ln I\leqslant\frac{s}{\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s^k}{k}=\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{s}{\alpha}-\frac{1}{2}\ln(1-s).$$

Тобто при $1<\alpha<2$ твердження леми виконується.

Нехай $\alpha=2$. Тоді для $r>0$, $p_i>1$, $i=1,\ldots,n$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}=1$ мають місце співвідношення:

$$\mathbf{E}\exp\left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right\}\leqslant\prod_{i=1}^{n}\left(\mathbf{E}\exp\left\{\frac{p_i|\xi_i|^2}{r}\right\}\right)^{\frac{1}{p_i}}=I\ .$$

З (1.3) випливає, що для $\frac{2p_i\tau_i^2}{r}<1$

$$I=\prod_{i=1}^{n}\left(\mathbf{E}\exp\left\{\frac{2\tau_i^2p_i}{r2}\left(\frac{|\xi_i|}{\tau_i}\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{p_i}}\leqslant\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{2\tau_i^2p_i}{r}\right)^{-\frac{1}{2p_i}}\ ;$$

$$\ln I\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2p_i}\right)\ln\left(1-\frac{2\tau_i^2p_i}{r}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2p_i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2\tau_i^2p_i)^k}{kr^k}\ .$$

Якщо $p_i=\frac{1}{\tau_i^2}\sum\limits_{j=1}^{n}\tau_j^2,\ r=\frac{2}{s}\sum\limits_{i=1}^{n}\tau_i^2$

$$\ln I\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s^k}{k}=-\frac{1}{2}\ln(1-s)$$

Тоді,

$$\mathbf{E}\exp\left\{\frac{s}{2}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\tau_i^2}\right\}\leqslant(1-s)^{-\frac{1}{2}}\ .$$

□

Наслідок 1.1. *Нехай* ξ_{ik}, $i=1,\dots,m_k$, $m_k\to\infty$ *– субгауссові випадкові величини,* $\tau_{ik}=\tau(\xi_{ik})$. *Якщо існує границя* $\eta_1=\lim\limits_{m_k\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m_k}|\xi_{ik}|$ *(майже скрізь або за ймовірністю) та існує границя* $\lim\limits_{m_k\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m_k}\tau_{ik}=\tau_1>0$, *тоді для всіх* $t\geqslant 0$

$$\boldsymbol{E}\exp\{t\eta_1\}\leqslant 2\exp\left\{\frac{t^2\tau_1^2}{2}\right\}.$$

Якщо існує границя $\eta_\alpha=\lim\limits_{m_k\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m_k}|\xi_{ik}|^\alpha$ *(майже скрізь або за ймовірністю),* $1<\alpha\leqslant 2$, *та існує границя* $\lim\limits_{m_k\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m_k}\tau_{ik}^\alpha=\tau_\alpha$, *тоді для всіх* $s\in[0,1)$

$$\boldsymbol{E}\exp\left\{\frac{s\eta_\alpha}{\alpha\tau_\alpha}\right\}\leqslant(1-s)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{(2-\alpha)s}{2\alpha}\right\}.$$

Твердження наслідку випливає з леми Фату.

Наслідок 1.2. *Нехай* $X=\{X(t),\ t\in\mathbf{T}\}$ *– субгауссовий випадковий процес, де* $(\mathbf{T},\mathcal{A},\mu)$ *– вимірний простір,* $\tau(t)=\tau(X(t))$. *Якщо для деякого* $1\leqslant\alpha\leqslant 2$ *(з ймовірністю одиниця або в середньому квадратичному) існує інтеграл*

$$\int\limits_{\mathbf{T}}|X(t)|^\alpha d\mu(t),$$

та існує

$$\int\limits_{\mathbf{T}}(\tau(t))^\alpha\, d\mu(t),$$

то для всіх $t\geqslant 0$, $(\alpha=1)$

$$\boldsymbol{E}\exp\left\{t\int\limits_{\mathbf{T}}|X(t)|d\mu(t)\right\}\leqslant 2\exp\left\{\frac{t^2}{2}\left(\int\limits_{\mathbf{T}}\tau(t)d\mu(t)\right)^2\right\}$$

або для всіх $s \in [0,1)$ $(1 < \alpha \leqslant 2)$

$$\boldsymbol{E}\exp\left\{\frac{s}{\alpha}\frac{\int_{\mathbf{T}}|X(t)|^{\alpha}d\mu(t)}{\int_{\mathbf{T}}(\tau(t))^{\alpha}d\mu(t)}\right\} \leqslant (1-s)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{(2-\alpha)s}{2\alpha}\right\}. \tag{1.6}$$

Твердження цього наслідку випливає з наслідку 1.1.

Зауваження 1.2. Якщо для деякої випадкової величини $\theta > 0$ для всіх $t > 0$ виконується нерівність

$$\mathbf{E}\exp\{t\theta\} \leqslant 2\exp\left\{\frac{t^2}{2}b^2\right\},$$

$\diamondsuit$

то (див., наприклад, [109]) для всіх $x > 0$

$$P\{\theta > x\} \leqslant 2\exp\left\{-\frac{x^2}{2b^2}\right\}. \tag{1.7}$$

Нехай для випадкової величини $\eta > 0$ та для всіх $s \in [0,1)$

$$\mathbf{E}\exp\{\frac{s\eta}{\alpha}\} \leqslant (1-s)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{(2-\alpha)s}{2\alpha}\right\},$$

тоді для всіх $x > 0$

$$P\{\eta > x\} \leqslant \mathbf{E}\exp\left\{\frac{s\eta}{\alpha}\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{sx}{\alpha}\right\} \leqslant (1-s)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{s\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}-\frac{x}{\alpha}\right)\right\}.$$

Якщо $s = 1-\left(2\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{-1}$ (точка мінімуму правої частини останньої нерівності), то

$$P\{\eta > x\} \leqslant \sqrt{x\frac{2}{\alpha}+1-\frac{2}{\alpha}}\exp\left\{\frac{1}{\alpha}\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{x}{\alpha}\right\}. \tag{1.8}$$

1.2. Простори Орлича випадкових величин

Означення 1.3. *Функція* $U(x)$ *називається опуклою, якщо для будь-яких* x_1 *та* x_2 *при* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *має місце нерівність*

$$U(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha U(x_1) + (1-\alpha)U(x_2).$$

Означення 1.4. *[109] Неперервна парна опукла функція* $U = \big(U(x),\ x \in R\big)$ *називається* C*-функцією, якщо* $U(0) = 0$ *і* $U(x)$ *монотонно зростає* *при* $x > 0$. *Якщо має місце*

$$U(x) = \int\limits_0^{|x|} p(x)dx,\ x \in R,$$

то функція $p(x),\ x \geqslant 0$ *називається щільністю* C*-функції* $U(x)$.

Приклад 1.2. [109] Наступні функції є простими прикладами С-функцій:

1. $U(x) = a|x|^{\alpha}, \qquad x \in R,\ \ a > 0,\ \ \alpha \geqslant 1$
2. $U(x) = c\left(\exp\left\{a|x|^{\alpha}\right\} - 1\right), \quad x \in R,\ \ c > 0,\ \ a > 0,\ \ \alpha \geqslant 1$
3. $U(x) = c\left(\exp\left\{\varphi(x)\right\} - 1\right), \quad x \in R,\ \ c > 0$ і $\varphi(x),\ x \in R$ – довільна С-функція. $\diamondsuit$

Властивості C-функцій можна знайти в [109].

Означення 1.5. *С-функція* U *називається* N*-функцією, якщо виконуються наступні умови:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{U(x)}{x} = 0;\ \lim_{x\to\infty}\frac{U(x)}{x} = \infty.$$

Приклад 1.3. Наступні функції є N-функціями:

1. $U(x) = a|x|^{\alpha}, \qquad x \in R,\ \ a > 0,\ \ \alpha > 1;$
2. $U(x) = c\left(\exp\left\{|x|^{\alpha}\right\} - 1\right),\ \ x \in R,\ \ c > 0,\ \ \alpha > 1;$
3. $U(x) = \exp\left\{|x|\right\} - |x| - 1,\ \ x \in R.$ $\diamondsuit$

Означення 1.6. *[56] Нехай* $f = (f(x), x \in R)$ *– дійсна функція. Перетворенням Юнга-Фенхеля функції* f *або функцією, спряженою до* f*, називається функція* $f^* = (f^*(x),\ x \in R)$ *, визначена рівністю*

$$f^*(x) = \sup_{y\in R}(xy - f(y)).$$

Означення 1.7. *[109] Нехай U-довільна C-функція. Простором Орлича випадкових величин $L_U(\Omega)$ називається така сім'я випадкових величин, що для кожного $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа $r_\xi > 0$, що*

$$\boldsymbol{E}U\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty.$$

На просторі Орлича $L_U(\Omega)$ визначимо функціонал

$$\|\xi\|_U = \inf\left\{r > 0 : \; EU\left(\frac{\xi}{r}\right) \leqslant 1\right\},$$

який назвемо нормою Люксембурга.

Теорема 1.3. *[109] Простір Орлича $L_U(\Omega)$ є банаховим простором відносно норми Люксембурга .*

Приклад 1.4. [109] Нехай $U(x) = |x|^p, \quad x \in R, \quad p \geqslant 1$. В цьому випадку $L_U(\Omega)$ є простором $L_p(\Omega)$, а норма Люксембурга $\|\xi\|_U$ співпадає з нормою $\|\xi\|_p = [\mathbf{E}|\xi|^p]^{\frac{1}{p}}$. ♢

В роботі буде розглянуто простори Орлича випадкових величин, що породжуються функцією $U_\alpha(x) = \exp\{c|x|^\alpha\} - 1$, де $c > 0, \alpha > 1$. Ці простори позначимо $L_{U_\alpha}(\Omega)$, а норму – $\| \bullet \|_\alpha$.

Зауваження 1.3. Умовам теореми 1.3 задовольняє функція $U_\alpha(x)$, $\alpha > 1$. Коли $0 < \alpha < 1$, то розглядатимемо функцію $U_\alpha(x)$ при достатньо великих x, $|x| > x_0$, а при $|x| \leqslant x_0$, $U_\alpha(x) = c\alpha x^2$. ♢

Лема 1.10. *Нехай N-функція $U(x)$ має властивість: існує $\gamma > 1$, що при $D \geqslant 1$*

$$U(Dx) \geqslant D^\gamma U(x) \,, \tag{1.9}$$

тоді виконується співвідношення

$$\|\xi\|_\alpha \leqslant \inf_{k>0} k\left(\boldsymbol{E}U\left(\frac{\xi}{k}\right) + 1\right)^{\frac{1}{\gamma}} . \tag{1.10}$$

Доведення. Якщо $\|\xi\|_\alpha = 0$, то нерівність тривіальна. Нехай $\|\xi\|_\alpha > 0$.

Якщо $0 < k < \|\xi\|_\alpha$ та $\varepsilon > 0$ таке число, що $k \leqslant \|\xi\|_\alpha - \varepsilon$, тоді

$$\begin{aligned} k\left(\mathbf{E}U\left(\frac{\xi}{k}\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}} &= k\left(\mathbf{E}U\left(\frac{\xi}{\|\xi\|_\alpha - \varepsilon}\cdot\frac{\|\xi\|_\alpha - \varepsilon}{k}\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ &\geqslant \quad k\left(\left(\frac{\|\xi\|_\alpha - \varepsilon}{k}\right)^{\gamma}\cdot\mathbf{E}U\left(\frac{\xi}{\|\xi\|_\alpha - \varepsilon}\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ &= \quad (\|\xi\|_\alpha - \varepsilon)\cdot\left(\mathbf{E}U\left(\frac{\xi}{\|\xi\|_\alpha - \varepsilon}\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}} \geqslant \|\xi\|_\alpha - \varepsilon\ . \end{aligned}$$

Якщо в останній нерівності ε спрямувати до 0, то отримаємо нерівність

$$k\left(\mathbf{E}U\left(\frac{\xi}{k}\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}} \geqslant \|\xi\|_\alpha.$$

Якщо $k \geqslant \|\xi\|_\alpha$, то

$$k\left(\mathbf{E}U\left(\frac{\xi}{k}\right)+1\right)^{\frac{1}{\gamma}} \geqslant \|\xi\|_\alpha\left(\mathbf{E}U\left(\frac{\xi}{k}\right)+1\right)^{\frac{1}{\gamma}} \geqslant \|\xi\|_\alpha.$$

З останніх двох нерівностей випливає твердження леми. $\square$

Зауваження 1.4. Умови леми 1.10 виконуються, наприклад, для N-функції $U(x) = \exp\{|x|^\alpha\} - 1$, $\alpha > 1$. $\diamondsuit$

Для випадкової величини ξ введемо норму $\Theta_\alpha(\xi) = \sup\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{\sqrt[n]{\mathbf{E}|\xi|^n}}{n^{1/\alpha}}$, яку назвемо моментною.

Має місце така теорема

Теорема 1.4. *[12] Для того, щоб $\xi \in L_{U_\alpha}(\Omega)$ необхідно та достатньо, щоб $\mathbf{E}\xi = 0$ та*

$$\Theta_\alpha(\xi) < \infty.$$

При цьому норми $\Theta_\alpha(\xi)$ та $\|\xi\|_\alpha$ еквівалетні, тобто існують константи $c_\alpha > 0, a_\alpha > 0$, що

$$c_\alpha\|\xi\|_\alpha \leqslant \Theta_\alpha(\xi) \leqslant a_\alpha\|\xi\|_\alpha.$$

Константи c_α та a_α не залежать від ξ.

Теорема 1.5. *Нехай ξ та η незалежні випадкові величини, такі що*

$\xi \in L_{U_\alpha}(\Omega)$, $\eta \in L_{U_\beta}(\Omega)$, $\Theta_\alpha(\xi)$ – моментна норма ξ в $L_{U_\alpha}(\Omega)$, $\Theta_\beta(\eta)$ – моментна норма η в $L_{U_\beta}(\Omega)$ Тоді $\xi \cdot \eta \in L_{U_\gamma}(\Omega)$, де $\gamma > 1$ таке число, що $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ (тобто $\gamma = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$) та $\Theta_\gamma(\xi \cdot \eta) \leqslant \Theta_\alpha(\xi) \cdot \Theta_\beta(\eta)$

Доведення. Виходячи з означення мають місце нерівності

$$\mathbf{E}|\xi|^n \leqslant \Theta_\alpha^n(\xi) \cdot n^{\frac{n}{\alpha}},$$

$$\mathbf{E}|\eta|^n \leqslant \Theta_\beta^n(\eta) \cdot n^{\frac{n}{\alpha}}, \ \ n \geqslant 2.$$

Отже, $\mathbf{E}|\xi \cdot \eta|^n = \mathbf{E}|\xi|^n \cdot \mathbf{E}|\eta|^n \leqslant (\Theta_\alpha(\xi) \cdot \Theta_\beta(\eta))^n \cdot n^{(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})\cdot n}$.

Тому при $n \geqslant 2$

$$\frac{\sqrt[n]{\mathbf{E}|\xi \cdot \eta|^n}}{n^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}} \leqslant \Theta_\alpha(\xi) \cdot \Theta_\beta(\eta),$$

Отже, $\Theta_\gamma(\xi \cdot \eta) = \sup\limits_{n \geqslant 2} \frac{\sqrt[n]{\mathbf{E}|\xi\cdot\eta|^n}}{n^{\frac{1}{\gamma}}} \leqslant \Theta_\alpha(\xi) \cdot \Theta_\beta(\eta) < \infty.$ □

Наслідок 1.3. *Справедливий ряд нерівностей:*

$$\|\xi \cdot \eta\|_\gamma \leqslant \frac{1}{c_\gamma} \cdot \Theta_\gamma(\xi \cdot \eta) \leqslant \frac{1}{c_\gamma} \cdot \Theta_\alpha(\xi) \cdot \Theta_\beta(\eta) \leqslant \frac{a_\gamma \cdot a_\beta}{c_\gamma} \cdot \|\xi\|_\alpha \cdot \|\eta\|_\beta.$$

1.3. Властивості $Sub_\varphi(\Omega)$ – просторів

Означення 1.8. *[109] Нехай $\varphi(x)$, $x \in R$, така C-функція, що $\varphi(x) = cx^2$, $x \in [-x_0, x_0]$, для деяких $c > 0$ і $x_0 > 0$. Будемо говорити, що центрована випадкова величина ξ належить простору φ-субгауссових випадкових величин, якщо знайдеться така константа $a \geqslant 0$, що для всіх $\lambda \in R$ має місце нерівність*

$$\boldsymbol{E}\exp\{\lambda\xi\} \leqslant \exp\big\{\varphi(a\lambda)\big\}.$$

Простір всіх φ-субгауссових випадкових величин, визначених на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, позначають $Sub_\varphi(\Omega)$. На просторі $Sub_\varphi(\Omega)$ розглянемо функціонал

$$\tau_\varphi(\xi) = \inf\big\{a \geqslant 0 : \mathbf{E}\exp\{\lambda\xi\} \leqslant \exp\big\{\varphi(a\lambda)\big\},\ \lambda \in R\big\}.$$

Простір центрованих випадкових величин $Sub_\varphi(\Omega)$ є природнім розширенням простору субгауссових випадкових величин.

Лема 1.11. *[109] Для довільної випадкової величини $\xi \in Sub_\varphi(\Omega)$ справедливі співвідношення*

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{\varphi^{(-1)}(\ln \boldsymbol{E} \exp\{\lambda\xi\})}{|\lambda|},$$

$$\boldsymbol{E} \exp\{\lambda\xi\} \leqslant \exp\big\{\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))\big\}, \ \lambda \in R.$$

Теорема 1.6. *[109] Простір $Sub_\varphi(\Omega)$ є банаховим простором відносно норми τ_φ.*

Оскільки у випадкових величин із простору $Sub_\varphi(\Omega)$ існує експоненційний момент, тобто $\mathbf{E}\exp\{|\xi|\} < \infty$, то для будь-якого $p > 0$ існує абсолютний степеневий момент p-го порядку, тобто $\mathbf{E}|\xi|^p < \infty$. Використовуючи моменти, на просторі $Sub_\varphi(\Omega)$ можна визначити функціонал

$$\Theta_\varphi(\xi) = \sup_{n \geqslant 2} \left(\frac{\varphi^{(-1)}(n)}{n} \sqrt[n]{\mathbf{E}|\xi|^n} \right),$$

де $\varphi^{(-1)}$ – обернена функція до функції $\varphi(x)$, $x \geqslant 0$.

Теорема 1.7. *[12] Випадкова величина ξ належить простору $Sub_\varphi(\Omega)$ тоді і тільки тоді, коли $\Theta_\varphi(\xi) < \infty$. Функціонал Θ є нормою на просторі $Sub_\varphi(\Omega)$. При цьому норми Θ_φ і τ_φ еквівалентні.*

Лема 1.12. *[109] Нехай φ – довільна N-функція і $\xi \in Sub_\varphi(\Omega)$. Тоді для довільного $x > 0$ справедлива нерівність*

$$P\left\{|\xi| \geqslant x\right\} \leqslant 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{x}{\tau_\varphi(\xi)}\right)\right\}.$$

Теорема 1.8. *[109] Нехай $\xi_1, \cdots, \xi_n, \xi_{n+1}$ – незалежні випадкові величини із $Sub_\varphi(\Omega)$, тоді*

$$\tau_\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) \leqslant \tau_\varphi\left(\sum_{k=1}^{n+1} \xi_k\right).$$

Означення 1.9. *[56] Будемо говорити, що N-функція φ підпорядкована функції ψ, якщо існують константи $x_0 \geqslant 0$, $c > 0$, що при $x \geqslant x_0$*

виконується нерівність $\varphi(x) \leqslant \psi(cx)$.

Теорема 1.9. *[109] Нехай* N*-функція* φ *підпорядкована* N*-функції* ψ. *Тоді простір* $Sub_{\varphi}(\Omega)$ *топологічно включається в простір* $Sub_{\psi}(\Omega)$ *та існує абсолютна константа* C, *що для* $\xi \in Sub_{\varphi}(\Omega)$ *має місце нерівність* $\tau_{\varphi}(\xi) \leqslant C\tau_{\psi}(\xi)$.

Теорема 1.10. *[109] Нехай функція* $\varphi(x)$ *така, що функція* $\psi(x) = \varphi(\sqrt{x})$, $x > 0$ *опукла. Нехай* $\xi_1, \cdots, \xi_n$ *незалежні випадкові величини з простору* $Sub_{\varphi}(\Omega)$. *Тоді має місце нерівність*

$$\tau_{\varphi}^2\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\tau_{\varphi}^2(\xi_k).$$

1.4. Ентропійні характеристики

Означення 1.10. *Нехай* S *непуста множина. Функція* $\rho : S \times S \to [0, \infty)$ *називається псевдометрикою, якщо вона задовільняє наступним умовам:*

1. $\rho(t, s) = \rho(s, t), \quad t, s \in S$;

2. $\rho(t, s) \leqslant \rho(t, v) + \rho(v, s), \quad t, s, v \in S$;

3. *якщо* $t = s$, *то* $\rho(t, s) = 0$.

Псевдометрика відрізняється від метрики тим, що з умови $\rho(t, s) = 0$ не випливає, взагалі кажучи, умова $t = s$.

Пара (S, ρ) називається псевдометричним простором.

Нехай (S, ρ) псевдометричний простір і $\varepsilon > 0$.

Означення 1.11. *Множину* $\bar{B}_r(t) = \{s \in S : \rho(t, s) \leqslant r\}$ *називають замкнутою кулею радіуса* r *з центром в точці* t.

Означення 1.12. *Систему замкнутих куль* $\mathcal{B} = \{B\}$, $B \subset S$ *радіуси яких не більші за* ε, *будемо називати* ε*-покриттям множини* S, *якщо* $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} = S$.

Означення 1.13. *Множину $Q \subset S$ будемо називати ε-сіткою у множині S відносно псевдометрики ρ, якщо для довільної точки $x \in S$ знайдеться хоча б одна точка $y \in Q$, така що $\rho(x, y) \leqslant \varepsilon$.*

Ясно, що якщо деяка система замкнутих куль є ε-покриттям, то центри цих куль утворюють ε-сітку у множині S . І навпаки, якщо $Q \subset S$ є ε-сіткою у множині S, то система замкнутих куль $\left\{\bar{B}_\varepsilon(y),\ y \in Q\right\}$ є ε-покриттям множини S.

Означення 1.14. *[109] Якщо існує скінченне ε-покриття множини S, то $N_\rho(S, \varepsilon)$ позначає число куль у найменшому ε-покритті цієї множини.*

Крім того, покладемо $N_\rho(S, \varepsilon) = +\infty$, якщо не існує скінченного ε-покриття множини S. Функція $N_\rho(S, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ називається метричною масивністю множини S відносно псевдометрики ρ.

Зауважимо, що $N_\rho(S, \varepsilon)$ співпадає з числом точок у мінімальній ε-сітці множини S.

Означення 1.15. *[109] Нехай*

$$H_\rho(S, \varepsilon) = \begin{cases} \ln N_\rho(S, \varepsilon), & \text{якщо } \ N_\rho(S, \varepsilon) < +\infty\ ; \\ +\infty, & \text{якщо } \ N_\rho(S, \varepsilon) = +\infty\ . \end{cases}$$

Функцію $H_\rho(S, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, будемо називати метричною ентропією відносно псевдометрики ρ.

Приклад 1.5. Нехай $-\infty < a < b < \infty$, $S = [a, b]$;

$$\rho(t, s) = |t - s|,\ t, s \in [a, b].$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$N_\rho(S, \varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{b-a}{2\varepsilon}, & \text{якщо } \frac{b-a}{2\varepsilon} \text{ ціле число}, \\ ent\left(\dfrac{b-a}{2\varepsilon}\right) + 1, & \text{якщо } \frac{b-a}{2\varepsilon} \text{ не ціле число}, \end{cases}$$

де $ent(x)$ – ціла частина числа $x \in R$.

Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\frac{b-a}{2\varepsilon} \leqslant N_\rho(S, \varepsilon) \leqslant \frac{b-a}{2\varepsilon} + 1$$

і $N_\rho(S,\varepsilon) \sim \frac{b-a}{2\varepsilon}$ при $\varepsilon \to 0$. Відповідно для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\ln\frac{b-a}{2\varepsilon} \leqslant H_\rho(S,\varepsilon) \leqslant \ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}+1\right)$$

і $H_\rho(S,\varepsilon) \sim \ln\frac{b-a}{2\varepsilon}$ при $\varepsilon \to 0$. $\diamondsuit$

Означення 1.16. *Випадковий процес $X(t)$, $t \in \mathbf{T}$ називається $L_p(\Omega)$–процесом, $p \geqslant 1$, якщо при всіх t існує $\boldsymbol{E}|X(t)|^p$ та $\sup\limits_{t\in\mathbf{T}}\|X(t)\|_{L_p} = \sup\limits_{t\in\mathbf{T}}(\boldsymbol{E}|X(t)|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$.*

Зауважимо, що звичайний простір $L_p(\Omega)$ – це простір Орлича $L_{U_p}(\Omega)$, що породжується функцією $U(x) = |x|^p$. При цьому норма Люксембурга співпадає із звичайною нормою в $L_p(\Omega)$, тобто $\|X(t)\|_{L_p} = (\mathbf{E}|X(t)|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Нехай $X = (X(t),\ t \in \mathbf{T})$ є $L_p(\Omega)$ -процесом, $p \geqslant 1$.

Позначимо $\rho_x(t,s) = \|X(t) - X(s)\|_{L_p}$.

Нехай виконуються умови:

A_1) процес X обмежений в L_p, тобто

$$\sup_{t\in\mathbf{T}}\|X(t)\|_{L_p} < \infty,$$

A_2) простір $(\mathbf{T},\rho_x)$ є сепарабельним і процес X є сепарабельним на $(\mathbf{T},\rho_x)$. Нехай $\varepsilon_0 = \sup\limits_{t\in\mathbf{T}}\|X(t)\|_{L_p}$.

Позначимо $N(\varepsilon) = N_{\rho_x}(\mathbf{T},\varepsilon)$ і $H(\varepsilon) = \ln N(\varepsilon)$ – відповідно метричну масивність і метричну ентропію параметричної множини $\mathbf{T}$ відносно псевдометрики ρ_x.

Теорема 1.11. *[109] Нехай $L_p(\Omega)$-процес X задовольняє умовам A_1) і A_2). Припустимо, що $\int\limits_0^{\varepsilon_0} N^{\frac{1}{p}}(\varepsilon)d\varepsilon < \infty$, тоді $\left(\boldsymbol{E}\left(\sup\limits_{t\in\mathbf{T}}|X(t)|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant B_p$ і для всіх $x > 0$*

$$P\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}}|X(t)| \geqslant x\right\} \leqslant \frac{B_p^p}{x^p},$$

де

$$B_p = \inf_{t\in\mathbf{T}}(\boldsymbol{E}|X(t)|^p)^{\frac{1}{p}} + \inf_{0<\theta<1}\frac{1}{\theta(1-\theta)}\int\limits_0^{\theta\varepsilon_0} N^{\frac{1}{p}}(\varepsilon)d\varepsilon\ .$$

Нехай $\gamma_0 = \sup\limits_{t,s\in\mathbf{T}}\rho_x(t,s) = \sup\limits_{t,s\in\mathbf{T}}\|X(t)-X(s)\|_{L_p}$, тоді $\gamma_0 \leqslant 2\varepsilon_0$.

Наслідок 1.4. *Нехай $L_p(\Omega)$-процес X задовільняє умовам $A_1)$ і $A_2)$. Припустимо, що* $\int\limits_0^{2\varepsilon_0} N^{\frac{1}{p}}(\varepsilon)d\varepsilon < \infty$, *тоді*

$$\left(\boldsymbol{E}\left(\sup_{t\in\mathbf{T}}|X(t)|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \widetilde{B}_p$$

і для всіх $x > 0$

$$P\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}}|X(t)| \geqslant x\right\} \leqslant \frac{\tilde{B}_p^p}{x^p} \ ,$$

де

$$\widetilde{B}_p = \inf_{t\in\mathbf{T}}\left(\boldsymbol{E}|X(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \inf_{0<\theta<1}\frac{1}{\theta(1-\theta)}\int\limits_0^{2\theta\varepsilon_0} N^{\frac{1}{p}}(\varepsilon)d(\varepsilon).$$

Нехай $\widetilde{X} = (\widetilde{X}(t),\ t \in \mathbf{T})$ деякий $Sub_\varphi(\Omega)$-процес, тобто $\widetilde{X}(t) \in Sub_\varphi(\Omega)$ для всіх $t \in \mathbf{T}$. Псевдометрика ρ_x, породжена процесом $\widetilde{X}$ на $\mathbf{T}$ має вигляд

$$\rho_x(t,s) = \tau_\varphi(\widetilde{X}(t) - \widetilde{X}(s)), \quad t,s \in \mathbf{T}.$$

Введемо умови

$A_1)$ $\quad \varepsilon_0 = \sup\limits_{t\in\mathbf{T}}\tau_\varphi(\widetilde{X}(t)) < \infty$;,

$A_2)$ простір $(\mathbf{T},\rho_x)$ є сепарабельним і процес $\widetilde{X}(t)$ є сепарабельним на $(\mathbf{T},\rho_x)$.

Теорема 1.12. *[109] Нехай $\widetilde{X} = (\widetilde{X}(t),\ t \in \mathbf{T})$ – деякий $Sub_\varphi(\Omega)$-процес. Якщо виконуються умови $A_1)$ і $A_2)$ і*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0}\frac{H(\varepsilon)}{\varphi^{(-1)}(H(\varepsilon))}d\varepsilon < \infty,$$

де $\varphi^{(-1)}(x)$, $x > 0$, обернена функція до $\varphi(x)$,

то для всіх $\lambda > 0$ має місце нерівність

$$\boldsymbol{E}\exp\left\{\lambda\sup_{t\in\mathbf{T}}|\widetilde{X}(t)|\right\} \leqslant 2Q(\lambda), \tag{1.11}$$

де

$$Q(\lambda) = \inf_{0<\theta<1} \exp\left\{\varphi\left(\frac{\lambda\varepsilon_0}{1-\theta}\right) + \frac{2\lambda}{\theta(1-\theta)}\int\limits_0^{\theta\varepsilon_0}\frac{H(\varepsilon)}{\varphi^{(-1)}(H(\varepsilon))}d\varepsilon\right\}.$$

Приклад 1.6. [109] Нехай $\widetilde{X} = (\widetilde{X}(t),\ t \in \mathbf{T})$ деякий субгауссовий процес, тобто $\widetilde{X} \in Sub_\varphi(\Omega)$-процесу з $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x > 0$. Обернена функція має вигляд $\varphi^{(-1)}(x) = \sqrt{2x}$, $x > 0$. Припустимо, що виконується умова Дадлі:

$$I(\varepsilon_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\sqrt{H(\varepsilon)}d\varepsilon < \infty,$$

де $H(\varepsilon) = H_\rho(\mathbf{T}, \varepsilon)$ – метрична ентропія множини $\mathbf{T}$ відносно субгауссового відхилення $\rho(t,s)$. У цьому випадку нерівність (1.11) переходить у нерівність

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\exp\left\{\lambda\sup_{t\in\mathbf{T}}|\widetilde{X}(t)|\right\} &\leqslant 2\exp\left\{\frac{\lambda^2\varepsilon_0^2}{2(1-\theta)^2} + \frac{2\lambda}{\theta(1-\theta)}I(\varepsilon_0\theta)\right\} \\ &\leqslant 2\exp\left\{\frac{\lambda^2\varepsilon_0^2}{2(1-\theta)^2} + \frac{2\lambda}{\theta(1-\theta)}I(\varepsilon_0)\right\},\end{aligned}$$

справедлива при всіх $\lambda \geqslant 0$, $\theta \in (0,1)$.

Застосовуючи нерівність Чебишева-Маркова, приходимо до наступної оцінки „хвоста“ розподілу супремума процесу $\widetilde{X}$. Для довільних $u > 0$ і $\lambda \geqslant 0$, $\theta \in (0,1)$

$$\begin{aligned}P\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}}|\widetilde{X}(t)| \geqslant u\right\} &\leqslant \exp\{-\lambda u\}\cdot\mathbf{E}\exp\left\{\lambda\sup_{t\in\mathcal{T}}|\widetilde{X}(t)|\right\} \\ &\leqslant 2\exp\left\{\frac{\lambda^2\varepsilon_0^2}{2(1-\theta)^2} + \lambda\left(\frac{2I(\varepsilon_0)}{\theta(1-\theta)} - u\right)\right\}.\end{aligned}$$

Мінімізуючи по λ вираз у правій частині, отримаємо оцінку

$$\begin{aligned}P\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}}|\widetilde{X}(t)| \geqslant u\right\} &\leqslant 2\exp\left\{-\frac{(1-\theta)^2}{2\varepsilon_0^2}\left(u - \frac{2I(\varepsilon_0)}{\theta(1-\theta)}\right)^2\right\} \\ &= 2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}\left(u(1-\theta) - \frac{2I(\varepsilon_0)}{\theta}\right)^2\right\},\end{aligned}$$

справедливу для всіх $u > \frac{2I(\varepsilon_0)}{\theta(1-\theta)}$.

Мінімізуючи тепер по $\theta \in (0,1)$, отримуємо при $u > 8I(\varepsilon_0)$

$$P\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}} |\widetilde{X}(t)| \geqslant u\right\} \leqslant 2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}\left(u - \sqrt{8uI(\varepsilon_0)}\right)^2\right\}.$$

$\diamondsuit$

Для загальних $Sub_\varphi(\Omega)$-процесів подібні оцінки можна дістати застосовуючи перетворення Юнга-Фенхеля. Покладемо

$$I_\varphi(v) = \int\limits_0^v \frac{H(\varepsilon)}{\varphi^{(-1)}(H(\varepsilon))} d\varepsilon, \quad v > 0.$$

Теорема 1.13. *[109] Нехай виконуються умови теореми 1.12. Тоді для довільного $\theta \in (0,1)$ і довільного $u > \frac{2I_\varphi(\theta\varepsilon_0)}{\theta(1-\theta)}$ має місце нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}} |\widetilde{X}(t)| \geqslant u\right\} \leqslant 2A(u,\theta),$$

де

$$A(u,\theta) = \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\left(u(1-\theta) - \frac{2}{\theta}I_\varphi(\theta\varepsilon_0)\right)\right)\right\}.$$

Наступна лема є уточненням леми з роботи [127].

Лема 1.13. *Нехай $(\mathbf{T},\rho)$ – метричний сепарабельний компактний простір, $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ – сепарабельний випадковий процес, $X \in Sub_\varphi(\Omega)$, $\gamma_0 = \sup\limits_{t\in\mathbf{T}} \tau_\varphi(X(t))$.*

Нехай існує монотонно зростаюча неперервна функція $\sigma = \{\sigma(h),\ h > 0\}$, $\sigma(h) \to 0$ при $h \to 0$, така, що має місце нерівність

$$\sup_{\rho(t,s)\leqslant h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \leqslant \sigma(h).$$

Нехай $\varkappa = \sigma(\inf\limits_{s\in\mathbf{T}}\sup\limits_{t\in\mathbf{T}} \rho(t,s))$, $0 < \delta < 1$, $\beta > 0$ – будь-які числа, такі, що $\delta\beta \leqslant \varkappa$.

Нехай виконується умова

$$\int\limits_0^{\beta\delta} \zeta_\varphi(u)du < \infty, \tag{1.12}$$

де

$$\zeta_\varphi(u) = \frac{H(\sigma^{(-1)}(u))}{\varphi^{(-1)}(H(\sigma^{(-1)}(u)))} \ ,$$

$\sigma^{(-1)}(u)$ *та* $\varphi^{(-1)}(u)$ *– обернені функції відповідно до функцій* $\sigma(u)$ *та* $\varphi(u)$*,* $H(v)$ *–метрична ентропія простору* $(\mathbf{T}, \rho)$*, тобто* $H(v) = \ln N(v)$*, де* $N(v)$ *– мінімальне число куль радіуса* $v > 0$*, що покривають* $(\mathbf{T}, \rho)$*. Тоді при всіх* $\lambda > 0$ *має місце нерівність*

$$\boldsymbol{E} \exp\left\{\lambda \sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)|\right\} \leqslant 2G(\lambda, \delta), \tag{1.13}$$

де

$$G(\lambda, \delta) = \exp\left\{\varphi\left(\frac{\lambda\gamma_0}{1-\delta}\right)(1-\delta) + \varphi\left(\frac{\lambda\beta}{1-\delta}\right)\delta \right.$$
$$\left. + 2\lambda\left[\gamma_0\zeta_\varphi(\delta\beta) + \frac{1}{(1-\delta)\delta}\int\limits_0^{\beta\delta^2}\zeta_\varphi(u)du\right]\right\}.$$

Розділ 2

ОЦІНКА СУПРЕМУМУ РОЗПОДІЛУ КВАДРАТИЧНО ГАУССОВОГО ПРОЦЕСУ

В даному розділі розглянуто квадратично гауссові випадкові процеси та наведено оцінку розподілу їх супремуму.

Означення 2.1. *[128] Нехай $\Xi = \{\xi(t), t \in \mathbf{T}\}$ – сім'я сумісно гауссових випадкових величин, $\mathbf{E}\xi(t) = 0$ (наприклад, $\xi(t)$ – гауссовий випадковий процес). Простір $SG_{\Xi}(\Omega)$ називається простором квадратично гауссових випадкових величин, якщо будь-яку випадкову величину $\eta \in SG_{\Xi}(\Omega)$ можна зобразити у вигляді*

$$\eta = \vec{\xi}^T A\vec{\xi} - \mathbf{E}\vec{\xi}^T A\vec{\xi}, \tag{2.1}$$

де $\vec{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\xi_k \in \Xi$, $k = 1, \ldots, n$, A – довільна симетрична матриця, або у вигляді границі в середньому квадратичному послідовностей випадкових величин, що можуть бути зображені у вигляді 2.1.

Означення 2.2. *[128] Випадковий процес $\eta = \{\eta(t), t \in \mathbf{T}\}$ називається квадратично гауссовим відносно Ξ, якщо для будь-якого $t \in \mathbf{T}$ випадкова величина $\eta(t)$ належить простору $SG_{\Xi}(\Omega)$ та $\sup_{t\in\mathbf{T}} E\eta^2(t) < \infty$.*

Нехай $(\mathbf{T}, \rho)$ компактний метричний простір, $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ квадратично гауссовий випадковий процес, нехай існує монотонно зростаюча, неперервна функція $\varphi = \{\varphi(\varepsilon), \varepsilon > 0\}$, $(\varphi(\varepsilon) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0)$ така, що $\sup\limits_{\rho(t,s)\leqslant\varepsilon} (\mathrm{Var}(X(t) - X(s)))^{\frac{1}{2}} \leqslant \varphi(\varepsilon)$. Нехай для деяких $A^- \geqslant 1, A^+ \geqslant 1$ та для всіх s таких, що $-A^- < s < A^+$ виконується нерівність

$$\mathbf{E}\exp\left\{\frac{s}{\sqrt{2}}\frac{X(t)}{(\mathrm{Var}X(t))^{\frac{1}{2}}}\right\} \leqslant R(s), \tag{2.2}$$

де $R(s)\,,\ -A^- < s < A^+$ монотонно зростаюча при $s>0$ та монотонно спадна при $s<0$ неперервна функція така, що $R(0)=1$.

Нехай $\varepsilon_0^* = \inf\limits_{t\in\mathbf{T}} \sup\limits_{s\in\mathbf{T}} \rho(t,s)\,,\ t_0=\varphi(\varepsilon_0^*)\,,\ \delta_0=\sup\limits_{t\in\mathbf{T}}(\mathrm{Var}X(t))^{\frac{1}{2}}\,,\ N(u)$ – метрична масивність метричного простору $(\mathbf{T},\rho)\,,\ \varphi^{(-1)}(\varepsilon)$ – обернена до $\varphi(\varepsilon)$ функція.

Теорема 2.1. *[128] Нехай $X(t)=\{X(t), t\in\mathbf{T}\}$ сепарабельний квадратично гауссовий випадковий процес задовольняє співвідношення* (2.2). *Нехай $r(u)\geqslant 1, u\geqslant 1$ монотонно зростаюча функція така, що функція $r(\exp\{t\})$ опукла. Якщо збігається інтеграл*

$$\int\limits_0^{t_0} r\left(N\left(\varphi^{(-1)}(u)\right)\right)du,$$

тоді для всіх $M=1,2,\ldots$ та $x>0$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}} X(t)>x\right\}\leqslant D_M^+(x)\,,$$

де

$$D_M^+(x)=\inf_{0<p<1}\left\{r^{(-1)}\left(\frac{1}{t_0p^M}\int\limits_0^{t_0p^M} r\left(N\left(\varphi^{(-1)}(\nu)\right)\right)d\nu\right)\right.$$
$$\times\inf_{0\leqslant u<\frac{1-p}{\sqrt{2}}\min\left(\frac{A^+}{\delta_0},\frac{1}{t_0p^{M-1}}\right)}\left[\left(R\left(\frac{u\sqrt{2}\delta_0}{1-p}\right)\right)^{1-p}\left(1-\frac{u\sqrt{2}t_0p^{M-1}}{1-p}\right)^{-\frac{p}{2}}\right.$$
$$\left.\left.\times\exp\left\{-\frac{up^M\sqrt{2}t_0}{2(1-p)}-ux\right\}\right]\right\},$$

і

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{t\in\mathbf{T}} X(t)<-x\right\}\leqslant D_M^-(x),$$

де

$$D_M^-(x) = \inf_{0<p<1} \left\{ r^{(-1)} \left(\frac{1}{t_0 p^M} \int\limits_0^{t_0 p^M} r\left(N\left(\varphi^{(-1)}(\nu)\right)\right) d\nu \right) \right.$$

$$\times \inf_{0\leqslant u < \frac{1-p}{\sqrt{2}} \min\left(\frac{A^-}{\delta_0}, \frac{1}{t_0 p^{M-1}}\right)} \left[\left(R\left(-\frac{u\sqrt{2}\delta_0}{1-p} \right) \right)^{1-p} \left(1 - \frac{u\sqrt{2} t_0 p^{M-1}}{1-p} \right)^{-\frac{p}{2}} \right.$$

$$\left. \left. \times \exp\left\{ -\frac{u p^M \sqrt{2} t_0}{2(1-p)} - ux \right\} \right] \right\},$$

а також

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)| > x \right\} \leqslant D_M^+(x) + D_M^-(x).$$

Лема 2.1. *[128] Для квадратично гауссового процесу $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ при всіх s таких, що $|s| < 1$ виконується наступна нерівість*

$$\mathbf{E} \exp\left\{ \frac{sX(t)}{\sqrt{2}\,(\mathrm{Var} X(t))^{\frac{1}{2}}} \right\} \leqslant (1-|s|)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{|s|}{2} \right\}.$$

Наслідок 2.1. *Нехай $X(t) = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ сепарабельний квадратично гауссовий випадковий процес, $r(u) \geqslant 1, u \geqslant 1$ монотонно зростаюча функція така, що функція $r(\exp\{t\})$ опукла. Якщо збігається інтеграл*

$$\int\limits_0^{t_0} r\left(N\left(\varphi^{(-1)}(u)\right)\right) du,$$

тоді для всіх $x > 0$

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{t\in\mathbf{T}} |X(t)| > x \right\}$$

$$\leqslant 2 \inf_{0<p<1} \left\{ r^{(-1)} \left(\frac{1}{t_0 p} \int\limits_0^{t_0 p} r\left(N\left(\varphi^{(-1)}(\nu)\right)\right) d\nu \right) \right.$$

$$\left. \times \left(1 - \frac{\sqrt{2}x(1-p)}{U} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{x(1-p)}{\sqrt{2}U} - \frac{x^2(1-p)^2}{\max(\delta_0, t_0)\, U} \right\} \right\},$$

де

$$U = \max(\delta_0, t_0) + \sqrt{2}x(1-p).$$

Доведення. Покладемо в умовах теореми 2.1 $\quad M = A^- = A^+ = 1$,

$$R(s) = (1-|s|)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{|s|}{2}\right\}.$$

Останнє можна зробити в силу леми 2.1. Нехай $t_0 > \delta_0$. Оскільки функція $R(s)$ при $0 \leqslant s \leqslant 1 <$ зростаюча, то

$$\begin{aligned}
&\inf_{0 \leqslant u < \frac{1-p}{\sqrt{2}} \min\left(\frac{A^+}{\delta_0}, \frac{1}{t_0 p^{M-1}}\right)} \left[\left(R\left(\frac{u\sqrt{2}\delta_0}{1-p}\right)\right)^{1-p} \left(1 - \frac{u\sqrt{2}t_0 p^{M-1}}{1-p}\right)^{-\frac{p}{2}}\right.\\
&\qquad\qquad \left.\times \exp\left\{-\frac{up^M\sqrt{2}t_0}{2(1-p)} - ux\right\}\right]\\
&\leqslant \inf_{0 \leqslant u < \frac{1-p}{\sqrt{2}t_0}} \left[\left(R\left(\frac{u\sqrt{2}\delta_0}{1-p}\right)\right)^{1-p} \left(\left(1 - \frac{u\sqrt{2}t_0}{1-p}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^p\right.\\
&\qquad\qquad \left.\times \left(\exp\left\{-\frac{u\sqrt{2}t_0}{2(1-p)}\right\}\right)^p \exp\{-ux\}\right]\\
&\leqslant \inf_{0 \leqslant u < \frac{1-p}{\sqrt{2}t_0}} \left[\left(R\left(\frac{u\sqrt{2}\delta_0}{1-p}\right)\right)^{1-p} \left(R\left(\frac{u\sqrt{2}t_0}{1-p}\right)\right)^p \exp\{-ux\}\right]\\
&\leqslant \inf_{0 \leqslant u < \frac{1-p}{\sqrt{2}t_0}} \left[\left(1 - \frac{u\sqrt{2}t_0}{1-p}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{u\sqrt{2}t_0}{2(1-p)}\right\} \exp\{-ux\}\right].
\end{aligned}$$

Після мінімізації правої частини одержаної нерівності по u отримаємо

$$\inf_{0 \leqslant u < \frac{1-p}{\sqrt{2}} \min\left(\frac{A^+}{\delta_0}, \frac{1}{t_0 p^{M-1}}\right)} \left[\left(R\left(\frac{u\sqrt{2}\delta_0}{1-p}\right)\right)^{1-p} \left(1 - \frac{u\sqrt{2}t_0 p^{M-1}}{1-p}\right)^{-\frac{p}{2}}\right.$$

$$\times \exp\left\{-\frac{up^M\sqrt{2}t_0}{2(1-p)} - ux\right\}\Bigg]$$

$$\leqslant \left(1 - \frac{\sqrt{2}x(1-p)}{t_0 + \sqrt{2}x(1-p)}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x(1-p)}{\sqrt{2}\left(t_0 + \sqrt{2}x(1-p)\right)}\right\}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{x^2(1-p)^2}{t_0\left(t_0 + \sqrt{2}x(1-p)\right)}\right\}. \quad \square$$

Інфімум, який фігурує в виразі для $D_M^-(x)$, в силу вигляду вище взятої функції $R(s)$ оцінюється так само. Якщо ж $t_0 < \delta_0$, то повторивши попередні міркування отримаємо повністю аналогічну оцінку для інфінумів із виразів для $D_M^+(x)$ та $D_M^-(x)$ з тією відмінністю, що замість t_0 фігуруватиме δ_0. Таким чином, твердження наслідку випливає з теореми 2.1.

Розділ 3

ПОБУДОВА МОДЕЛЕЙ ГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ТА ПОЛІВ

В даному розділі пропонуються два підходи до побудови моделей гауссових стаціонарних випадкових процесів, а також деякі їх модифікації. Методи побудови моделей узагальнюються і на випадок полів.

Нехай $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P}\}$ – стандартний ймовірнісний простір.

Нехай $X = \{X(t),\ t \in \mathbf{R}\}$ – гауссів, стаціонарний, дійсний, центрований, неперервний в середньому квадратичному випадковий процес з коваріаційною функцією

$$B(\tau) = \mathbf{E}X(t+\tau) \cdot X(t) = \int\limits_0^\infty \cos \lambda\tau dF(\lambda),$$

де $F(\lambda)$ – спектральна функція цього процесу. Покладемо, що функція $F(\lambda)$ неперервна.

Будемо вважати, що процес $X(t)$ сепарабельний та вибірково неперервний на будь-якому інтервалі $[0, T]$. Відомі необхідні та достатні умови вибіркової неперервності сепарабельних, стаціонарних, гауссових процесів на компакті [117].

Наведемо близькі до необхідних достатні умови вибіркової неперевності гауссових, стаціонарних, сепарабельних випадкових процесів.

Теорема 3.1. *[122] Для того, щоб гауссовий, сепарабельний, стаціонарний, дійсний випадковий процес $X = \{X(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$ був вибірково неперервний, достатньо, щоб виконувалась умова: при $\varepsilon > 0$*

$$\int\limits_0^\infty (\ln(1+\lambda))^{1+\varepsilon}\, dF(\lambda) < \infty, \tag{3.1}$$

де $F(\lambda)$ – спектральна функція процесу X.

Зауважимо, що твердження та доведення цієї теореми в більш слабкій формі ($\varepsilon > 2$) міститься в книзі [110].

Процес X може бути зображений у вигляді:

$$X(t) = \int\limits_0^\infty \cos \lambda t d\eta_1(\lambda) + \int\limits_0^\infty \sin \lambda t d\eta_2(\lambda), \tag{3.2}$$

де $\eta_1(\lambda)$ та $\eta_2(\lambda)$ такі незалежні центровані гауссові процеси, що

$$\mathbf{E}(\eta_i(\lambda_2) - \eta_i(\lambda_1))^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1), \quad \lambda_1 < \lambda_2,\ i = 1, 2.$$

Або якщо взяти розбиття $\Lambda = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_{M+1}\}$ множини $[0, \infty]$ так, що $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\lambda_{M+1} = \infty$, то

$$X(t) = \sum_{k=0}^{M} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \cos \lambda t d\eta_1(\lambda) + \sum_{k=0}^{M} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \sin \lambda t d\eta_2(\lambda). \tag{3.3}$$

Нехай

$$X_\Lambda(t) = \sum_{k=0}^{M} \left(\eta_{k1} \cos \zeta_k t + \eta_{k2} \sin \zeta_k t\right),$$

де ζ_k – випадкові величини розподілені на $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ з функцією розподілу

$$F_k(\lambda) = P\{\zeta_k < \lambda\} = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)}\ .$$

та $\eta_{k1} = \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} d\eta_1(\lambda)$, $\eta_{k2} = \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} d\eta_2(\lambda)$.

Даний процес $X_\Lambda(t)$ називатимемо моделлю гауссового випадкового процесу $X(t)$. І зрозуміло, що за різних умов вибору числа M, ми зможемо з різною точністю і надійністю відтворити процес на комп'ютері.

1. Отже, надалі в роботі за модель гауссового випадкового процесу $X(t)$ будемо брати випадковий процес

$$X_\Lambda(t) = \sum_{k=0}^{M} (\eta_{k1} \cos \zeta_k t + \eta_{k2} \sin \zeta_k t), \tag{3.4}$$

де $\eta_{k1} = \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} d\eta_1(\lambda)$, $\eta_{k2} = \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} d\eta_2(\lambda)$, причому зрозуміло, що η_{l1}, η_{m2}, ζ_k — незалежні при всіх l, m та k випадкові величини, $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{M+1}\}$ – таке розбиття множини $[0, \infty]$, що $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\lambda_{M+1} = \infty$, η_{k1}, η_{k2} – гауссові випадкові величини, такі що $\mathbf{E}\eta_{k1} = \mathbf{E}\eta_{k2} = 0$, $\mathbf{E}\eta_{k1}^2 = \mathbf{E}\eta_{k2}^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k) = b_k^2$, ζ_k – випадкові величини, що приймають значення на відрізках $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$, та якщо $b_k^2 > 0$, то

$$F_k(\lambda) = P\{\zeta_k < \lambda\} = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)}.$$

Якщо $b_k^2 = 0$, то $\eta_{k1} = 0, \eta_{k2} = 0, \zeta_k = 0$ з ймовірністю одиниця.

Ця модель є центрованим процесом

$$\begin{aligned}\mathbf{E}X_\Lambda(t) &= \mathbf{E}\sum_{k=0}^{M}(\eta_{k1}\cos\zeta_k t + \eta_{k2}\sin\zeta_k t) \\ &= \sum_{k=0}^{M}(\mathbf{E}\eta_{k1}\mathbf{E}\cos\zeta_k t + \mathbf{E}\eta_{k2}\mathbf{E}\sin\zeta_k t) = 0.\end{aligned}$$

Коваріаційна функція процесу $X_\Lambda(t)$ співпадає з коваріаційною функцією процесу $X(t)$

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}X_\Lambda(t+\tau)X_\Lambda(t) \\ &\quad= \mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{M}(\eta_{k1}\cos\zeta_k(t+\tau) + \eta_{k2}\sin\zeta_k(t+\tau))\right) \\ &\quad\quad \times\left(\sum_{k=0}^{M}(\eta_{k1}\cos\zeta_k t + \eta_{k2}\sin\zeta_k t)\right) \\ &\quad= \sum_{k=0}^{M}\left[\mathbf{E}\eta_{k1}^2\mathbf{E}\cos\zeta_k(t+\tau)\cos\zeta_k t + \mathbf{E}\eta_{k2}^2\mathbf{E}\sin\zeta_k(t+\tau)\sin\zeta_k t\right] \\ &\quad= \sum_{k=0}^{M} b_k^2\mathbf{E}\cos\zeta_k\tau = \sum_{k=0}^{M} b_k^2\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\cos\lambda\tau dF_k(\lambda) \\ &\quad= \int\limits_{0}^{\infty}\cos\lambda\tau dF(\lambda) = r(\tau), \qquad (3.5)\end{aligned}$$

$(\mathbf{E}\eta_{i1}\cdot\eta_{j1} = 0,\ \mathbf{E}\eta_{i2}\cdot\eta_{j2} = 0,\ \ i \neq j,\ \mathbf{E}\eta_{k1}\eta_{k2} = 0,\ k = 0, \cdots, M)$.

Але $X_\Lambda(t)$ не є гауссовим процесом. Наша мета визначити наскільки процес $X_\Lambda(t)$ близький до гауссового процесу $X(t)$.

Розглянемо модель $X_\Lambda(t)$ і покладемо, що

$$\eta_{k1} = \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} d\eta_1(\lambda), \quad \eta_{k2} = \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} d\eta_2(\lambda).$$

Нехай $\eta_\Lambda(t) = X(t) - X_\Lambda(t)$. Тоді

$$\begin{aligned}\eta_\Lambda(t) \quad = \quad & \sum_{k=0}^{M} \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \cos\lambda t d\eta_1(\lambda) + \sum_{k=0}^{M} \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \sin\lambda t d\eta_2(\lambda) \\ & -\sum_{k=0}^{M} \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \cos\zeta_k t d\eta_1(\lambda) - \sum_{k=0}^{M} \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \sin\zeta_k t d\eta_2(\lambda);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_\Lambda(t) = \sum_{k=0}^{M} \Bigg(& \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t) d\eta_1(\lambda) \\ & + \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \Bigg). \qquad (3.6)\end{aligned}$$

Лема 3.1. *Мають місце співвідношення:*

$$\boldsymbol{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t) d\eta_1(\lambda) \right)^{2m+1} = 0,$$

$$\boldsymbol{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right)^{2m+1} = 0,$$

$$\boldsymbol{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t) d\eta_1(\lambda) \right)^{2m} \leqslant Z_{km},$$

$$\boldsymbol{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right)^{2m} \leqslant Z_{km},$$

де $Z_{km} = 4^m \Delta_{2m} \boldsymbol{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left| \sin\frac{t(\zeta_k - \lambda)}{2} \right|^2 dF(\lambda) \right)^m, \ \Delta_{2m} = \frac{(2m)!}{2^m m!}$.

Доведення. Оскільки для центрованої гауссової випадкової величини ξ маємо
$\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}\xi^2 = \sigma^2$, $\mathbf{E}\xi^{2k} = \Delta_{2k}\sigma^{2k}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\Delta_{2k} = (2k-1)!! = \frac{(2k)!}{2^k k!}$, і випадкові величини ζ_k не залежать від $\eta_i(\lambda)$, тоді за теоре-

мою Фубіні маємо такі співвідношення ($\mathbf{E}_{\zeta k}$ – умовне математичне сподівання відносно ζ_k):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right)^{2m}\\
&\quad= \mathbf{E}\mathbf{E}_{\zeta k}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right)^{2m}\\
&\quad\leqslant \Delta_{2m}\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}|\cos\lambda t-\cos\zeta_k t|^2 dF(\lambda)\right)^{m}\\
&\quad\leqslant \Delta_{2m}\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left|2\sin\frac{t(\zeta_k-\lambda)}{2}\cdot\sin\frac{t(\zeta_k+\lambda)}{2}\right|^2 dF(\lambda)\right)^{m}\\
&\quad\leqslant \Delta_{2m}\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left|2\sin\frac{t(\zeta_k-\lambda)}{2}\right|^2 dF(\lambda)\right)^{m}=Z_{km}.
\end{aligned}$$

Друга нерівність доводиться аналогічно

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right)^{2m}\\
&\quad\leqslant \Delta_{2m}\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left|2\sin\frac{t(\lambda-\zeta_k)}{2}\cdot\cos\frac{t(\zeta_k+\lambda)}{2}\right|^2 dF(\lambda)\right)^{m}
\end{aligned}$$

$$\leqslant \Delta_{2m}\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left|2\sin\frac{t(\zeta_k-\lambda)}{2}\right|^2 dF(\lambda)\right)^{m}=Z_{km}. \qquad \square$$

Теорема 3.2. *Випадковий процес $\eta_\Lambda(t)$ є субгауссовим.*

Доведення. Покажемо, що

$$\chi_{k1}=\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\quad \chi_{k2}=\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)$$

є субгауссовими випадковими величинами. З леми 3.1 маємо

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right)^{2m}\right)^{\frac{1}{2m}}\\
\leqslant\ & \sqrt[2m]{4^m\Delta_{2m}}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\sin\frac{t(u-\lambda)}{2}\right)^2 dF(u)\right)^m dF_k(\lambda)\right)^{\frac{1}{2m}}\\
\leqslant\ & \sqrt[2m]{4^m\Delta_{2m}}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k))^m\frac{dF(\lambda)}{F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k)}\right)^{\frac{1}{2m}}\\
\leqslant\ & \sqrt[2m]{4^m\Delta_{2m}}\,(F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k))^{\frac{1}{2}}\,,
\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right)^{2m}\right)^{1/2m}\\
&\qquad\leqslant \sqrt[2m]{4^m\Delta_{2m}}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\sin\frac{t(u-\lambda)}{2}\right)^2 dF(u)\right)^m\right.\\
&\qquad\qquad\left.\times\frac{dF(\lambda)}{F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k)}\right)^{\frac{1}{2m}}\\
&\qquad\qquad\qquad\leqslant \sqrt[2m]{4^m\Delta_{2m}}\,(F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k))^{\frac{1}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Тоді,

$$\begin{aligned}
\Theta_1(\chi_{ki}) &= \sup_{m\geqslant 1}\left[\frac{1}{\Delta_{2m}}\mathbf{E}\chi_{ki}^{2m}\right]^{\frac{1}{2m}}\\
&= \sup_{m\geqslant 1}\left[\frac{2^m m!}{(2m)!}\cdot 4^m\cdot\frac{(2m)!}{2^m m!}\,(F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k))^m\right]^{\frac{1}{2m}}\\
&= 2\,(F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k))^{\frac{1}{2}}<\infty\,,\quad i=1,2.
\end{aligned}$$

Тобто згідно теореми 1.2 χ_{k1}, χ_{k2} є субгауссовими центрованими випадковими величинами. Отже, для кожного $t \in \mathbf{T}$ величина $\eta_\Lambda(t)$ є субгауссова випадкова величина. Те, що випадковий процес субгауссовий випливає з того, що $\eta_\Lambda(t)$ є скінченною сумою субгауссових випадкових величин. $\square$

Теорема 3.3. *Для субгауссового процесу $\eta_\Lambda(t)$ має місце така нерівність*

$$\tau(\eta_\Lambda(t)) \leqslant 4\left(\sum_{k=0}^{M} b_k^2 \sup_{m\geqslant 1}\left(\boldsymbol{E}\left|\sin\frac{t(\zeta_k-\zeta_k^*)}{2}\right|^{2m}\right)^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{2}} = (B_\Lambda(t))^{\frac{1}{2}}, \tag{3.7}$$

де $b_k^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)$, ζ_k^* – випадкові величини, що не залежать від ζ_k і мають такі ж розподіли, що і ζ_k.

Доведення. З леми 3.1 та теореми 1.2 випливає, що

$$\tau^2\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t - \cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right) \leqslant \Theta_1^2\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t - \cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right)$$

$$\leqslant \sup_{m\geqslant 1} b_k^2\left(\mathbf{E}\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left|2\sin\frac{t(\zeta_k-\lambda)}{2}\right|^2 dF_k(\lambda)\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$= \sup_{m\geqslant 1} 4b_k^2\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left|\sin\frac{t(u-\lambda)}{2}\right|^2 dF_k(\lambda)\right)^m dF_k(u)\right)^{\frac{1}{m}} = I_k.$$

Аналогічно

$$\tau^2\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t - \sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right) \leqslant \Theta_1^2\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t - \sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right)$$

$$\leqslant \sup_{m\geqslant 1} 4b_k^2\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left|\sin\frac{t(u-\lambda)}{2}\right|^2 dF_k(\lambda)\right)^m dF_k(u)\right)^{\frac{1}{m}} = I_k,$$

Тоді

$$\tau^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)+\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right)$$
$$\leqslant\left(\tau\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right)\right.$$
$$\left.+\tau\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right)\right)^2\leqslant 4I_k.$$

Оскільки доданки сум в (3.6) для різних k незалежні, то з останньої нерівності і леми 1.7 випливає, що

$$\tau^2\left(\eta_\Lambda(t)\right)\leqslant 4\sum_{k=0}^{M}I_k\ ,$$

$$\tau\left(\eta_\Lambda(t)\right)$$
$$\leqslant 4\left[\sum_{k=0}^{M}\sup_{m\geqslant 1}\frac{1}{b_k^{2/m}}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left|\sin\frac{t(u-\lambda)}{2}\right|^2 dF(\lambda)\right)^m dF(u)\right)^{\frac{1}{m}}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant 4\left[\sum_{k=0}^{M}\sup_{m\geqslant 1}b_k^2\left(\mathbf{E}\left|\sin\frac{t(\zeta_k-\zeta_k^*)}{2}\right|^{2m}\right)^{\frac{1}{m}}\right]^{\frac{1}{2}}.\quad\square$$

2. У роботі буде використовуватись і така модель гауссового, стаціонарного випадкового процесу:

$$X_\Lambda(t)=\sum_{k=0}^{M}(\eta_{k1}\cos\lambda_k t+\eta_{k2}\sin\lambda_k t),\tag{3.8}$$

$D_{\mathbf{\Lambda}}=\{\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{M+1}\}$ – таке розбиття множини $[0,\Lambda]$, $\Lambda\in\mathbf{R}_+$, що $\lambda_0=0,\ \ \lambda_k<\lambda_{k+1},\ \ \lambda_{M+1}=\Lambda,$ (Λ може бути рівним і ∞) η_{k1}, η_{k2} – гауссові незалежні випадкові величини, такі що $\mathbf{E}\eta_{k1}=\mathbf{E}\eta_{k2}=0,\ \mathbf{E}\eta_{k1}^2=\mathbf{E}\eta_{k2}^2=F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k)=b_k^2,\ \zeta_k$ –довільні числа із відрізків $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$.

3. Аналогічний підхід використовуватимемо й для побудови моделі випадкового однорідного поля.

   Нехай $\left\{Y\left(\vec{t}\right), \vec{t} \in \mathbf{T}\right\}$ – центроване, однорідне в широкому розумінні, неперервне в середньому квадратичному випадкове поле, $\left\{\mathbf{R}_+^n, \mathfrak{U}, \Phi\right\}$ – вимірний простір, $\Phi(\cdot)$ – скінченна міра. Для коваріаційної функції $B(\vec{\tau})$ вище згаданих полів має місце зображення

$$B(\vec{\tau}) = \int\limits_{\mathbf{R}_+^n} \cos\left(\vec{\lambda}, \vec{\tau}\right) d\Phi\left(\vec{\lambda}\right),$$

   де $\Phi\left(\vec{\lambda}\right)$, $\vec{\lambda} \in \mathbf{R}_+^n$ – така міра, що $\Phi\left(\mathbf{R}_+^n\right) = B(\vec{0})$. За теоремою Карунена однорідне, центроване поле $Y\left(\vec{t}\right)$ може бути зображене у вигляді

$$Y\left(\vec{t}\right) = \int\limits_{\mathbf{R}_+^n} \cos\left(\vec{\lambda}, \vec{t}\right) dZ_1\left(\vec{\lambda}\right) + \int\limits_{\mathbf{R}_+^n} \sin\left(\vec{\lambda}, \vec{t}\right) dZ_2\left(\vec{\lambda}\right), \tag{3.9}$$

   де $Z_1(S)$ та $Z_2(S)$, $S \in \mathfrak{U}$, некорельовані випадкові міри підпорядковані мірі Φ, тобто $\mathbf{E}Z_i(S_1)\, Z_i(S_2) = \Phi(S_1 \cap S_2)$, $S_1, S_2 \in \mathfrak{U}$, $i = 1, 2$, $(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток.

   За модель такого поля братимемо суму $\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)$ виду

$$\begin{aligned}\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right) = &\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} \cos\left(\vec{t}, \vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1}, \ldots, \lambda_n^{i_n}\right)\right) Z_1\left(\Delta\left(i_1, \ldots, i_n\right)\right) \\ &+ \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} \sin\left(\vec{t}, \vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1}, \ldots, \lambda_n^{i_n}\right)\right) Z_2\left(\Delta\left(i_1, \ldots, i_n\right)\right),\end{aligned} \tag{3.10}$$

   де $\vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1}, \ldots, \lambda_n^{i_n}\right)$ точки деякого розбиття $D_{\mathbf{\Lambda^n}}$:

$$\Delta\left(i_1, \ldots, i_n\right) = \Big\{\left[\lambda_1^{i_1}, \lambda_1^{i_1+1}\right) \times \ldots \times \left[\lambda_n^{i_n}, \lambda_n^{i_n+1}\right) \Big| \lambda_m^{i_m} < \lambda_m^{i_m+1},$$
$$\lambda_m^{i_m+1} - \lambda_m^{i_m} = \frac{\Lambda}{N},\ \Lambda \in \mathbf{R}_+,\ N \in \mathbf{N},\ m = \overline{1, n},\ i_m = \overline{1, N-1}\Big\}$$

   відрізку $[0,\ \Lambda]^n$, $\Lambda \in \mathbf{R}$.

4. Побудова моделей неоднорідних гауссових полів.

Нехай $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P}\}$ – стандартний ймовірнісний простір, $\left\{Y\left(\vec{t}\right), \vec{t} \in \mathbf{T}\right\}$, $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}^n$– центроване, гауссове, неперервне в середньому квадратичному випадкове поле. Тоді його коваріаційна функція $B\left(\vec{t}, \vec{s}\right)$ неперервна на $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$.

Розглянемо однорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\phi\left(\vec{t}\right) = \lambda \int\limits_{\mathbf{T}} B\left(\vec{t}, \vec{s}\right) \phi\left(\vec{s}\right) d\vec{s}. \tag{3.11}$$

Як відомо, множина власних значень λ_k такого рівняння для неперервного та невід'ємно визначеного ядра не більш як зліченна, власні функції $\phi_k\left(\vec{t}\right)$ неперервні, а самі власні значення λ_k невід'ємні [14]. Занумеруємо власні значення λ_k, $k = 1, 2, \ldots$ в порядку зростання: $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$. Відповідні їм власні функції будемо вважати ортонормованими, тобто

$$\int\limits_{\mathbf{T}} \phi_k(\vec{s})\phi_l(\vec{s}) ds = \begin{cases} 1, \, k = l, \\ 0, \, k \neq l. \end{cases}$$

Має місце зображення

$$B\left(\vec{t}, \vec{s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k\left(\vec{t}\right) \, \phi_k\left(\vec{s}\right)}{\lambda_k}, \tag{3.12}$$

причому ряд в правій частині збігається рівномірно по $s \in \mathbf{T}$ а також ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$ є збіжним [14].

Тоді саме поле $Y\left(\vec{t}\right)$ допускає зображення

$$Y\left(\vec{t}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}} \phi_k\left(\vec{t}\right), \tag{3.13}$$

де $\xi_k = N\left(0, 1\right)$, $\mathbf{E}\xi_k\xi_l = \delta_{kl}$, δ_{kl} – символ Кронекера, тобто ξ_k – незалежні, причому ряд збігається в середньому квадратичному (це випливає з теореми Карунена).

За модель такого поля прийматимемо суму

$$\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}} \phi_k\left(\vec{t}\right). \tag{3.14}$$

Розділ 4

МОДЕЛЮВАННЯ ГАУССОВИХ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З ПЕВНОЮ ТОЧНІСТЮ ТА НАДІЙНІСТЮ

В даному розділі вивчаються точність та надійність моделей стаціонарних гауссових випадкових процесів в просторах $L_p\left([0,T]\right)$, $p \geqslant 1$; просторах Орлича; точність та надійність моделювання в рівномірній метриці, застосування теорії $Sub_\varphi(\Omega)$ просторів випадкових величин до знаходження точності моделювання стаціонарних гауссових процесів; розглянуто узагальнену модель гауссових стаціонарних процесів; знайдено оцінки моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів при невеликій точності.

4.1. Надійність та точність в $L_p(\mathbf{T})$, $p \geqslant 1$ моделей гауссових стаціонарних випадкових процесів

В першому підрозділі даного розділу сформульвано й доведено теореми про наближення моделі випадкового процесу до гауссового в просторах $L_1([0,T])$, $L_p([0,T])$, $1 < p \leqslant 2$ з заданими точністю і надійністю.

В другому підрозділі сформульовані і доведені теореми про оцінки "хвостів"розподілів норм випадкових процесів при різних умовах в просторі $L_p(\mathbf{T})$, $\mathbf{T}$ – деяка параметрична множина, $p \geqslant 1$. Ці твердження використані при дослідженні умов вибору розбиття множини $[0,\infty]$ так, щоб для моделі існував гауссів процес, до якого вона наближатиметься з певними точністю та надійністю в просторі $L_p([0,T])$ в загальному випадку при $p \geqslant 1$.

Зауважимо, що оцінки, отримані в другому підрозділі при $1 < p \leqslant 2$ гірші за оцінки з першого підрозділу.

В третьому підрозділі отримано теорему про наближення моделі випадкового процесу до гауссового з заданими точністю і надійністю в просторі Орлича $L_U(\Omega)$.

4.1.1. Точність моделювання гауссових стаціонарних процесів в $L_p([0,T])$, $1 \leqslant p \leqslant 2$

Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$, де $\mathbf{T}$ – деяка параметрична множина, гауссів стаціонарний дійсний центрований неперервний в середньому квадратичному випадковий процес. Зображення цього процесу та його моделі $X_\Lambda(t)$ описані в розділі 3 відповідно виразами (3.2) та (3.4).

Означення 4.1. *Випадковий процес $X_\Lambda(t)$ наближає процес $X(t)$ з надійністю $(1-\beta)$, $0 < \beta < 1$ та точністю $\delta > 0$ в $L_p([0,T])$, якщо розбиття Λ таке, що має місце наступна нерівність*

$$P\left\{\left(\int_0^T |\eta_\Lambda(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} > \delta\right\} \leqslant \beta,$$

де $\eta_\Lambda(t) = X(t) - X_\Lambda(t)$

Теорема 4.1. *Для моделі $X_\Lambda(t)$ існує гауссів випадковий процес $X(t)$, до якого вона наближається з надійністю $(1-\beta)$, $0 < \beta < 1$ та точністю $\delta > 0$ в $L_1([0,T])$, якщо розбиття Λ таке, що*

$$\int_0^T 4\left(\sum_{k=0}^{M} b_k^2 \sup_{m \geqslant 1}\left(\boldsymbol{E}\left(\sin\frac{t(\zeta_k - \zeta_k^*)}{2}\right)^{2m}\right)^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{2}} dt \leqslant \left(\frac{\delta^2}{2(-\ln\frac{\beta}{2})}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.1}$$

Доведення. З наслідку 1.2 та теореми 3.2 випливає, що для всіх $U > 0$

$$\mathbf{E}\exp\left\{U\int_0^T |\eta_\Lambda(t)|dt\right\} \leqslant 2\exp\left\{\frac{U^2}{2}\left(\int_0^T (B_\Lambda(t))^{\frac{1}{2}}\, dt\right)^2\right\}.$$

З (1.7) маємо

$$P\left\{\int_0^T |\eta_\Lambda(t)|dt > \delta\right\} \leqslant 2\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2}\left(\int_0^T (B_\Lambda(t))^{\frac{1}{2}}\, dt\right)^{-2}\right\}.$$

Тоді, згідно означення 4.1 повинна виконуватись нерівність

$$2\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2}\left(\int\limits_0^T (B_\Lambda(t))^{\frac{1}{2}}\,dt\right)^{-2}\right\} \leqslant \beta.$$

Якщо з останньої нерівності визначити $\int_0^T (B_\Lambda(t))^{\frac{1}{2}}\,dt$, де $B_\Lambda(t)$ описане в (3.7), то отримаємо умову (4.1). □

Теорема 4.2. *Для моделі $X_\Lambda(t)$ існує гауссів випадковий процес $X(t)$, до якого вона наближається з надійністю $(1-\beta)$, $0<\beta<1$ та точністю $\delta>0$ в $L_p([0,T])$, $1<p\leqslant 2$, якщо розбиття Λ таке, що*

$$\int\limits_0^T (B_\Lambda(t))^{\frac{p}{2}}\,dt \leqslant \delta^p,$$

та

$$\int\limits_0^T (B_\Lambda(t))^{\frac{p}{2}}\,dt \leqslant Z(p,\delta), \tag{4.2}$$

де $B_\Lambda(t)$ описане в (3.7), $Z(p,\delta)$ – корінь рівняння

$$\left(\frac{\delta^p}{Z}\cdot\frac{2}{p}+1-\frac{2}{p}\right)^{1/2}\exp\left\{\frac{1}{p}\right\}\exp\left\{-\frac{\delta^p}{pZ}\right\}=\beta. \tag{4.3}$$

Доведення. З (1.6) та теореми 3.3 випливає, що для всіх $0\leqslant s<1$

$$\mathbf{E}\exp\left\{\frac{s}{p}\int\limits_0^T|\eta_\Lambda(t)|^p dt\cdot\left(\int\limits_0^T|B_\Lambda(t)|^{\frac{p}{2}}dt\right)^{-1}\right\}\leqslant(1-s)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{(2-p)s}{2p}\right\}. \tag{4.4}$$

З (1.8) та (4.4) випливає, що для $\int\limits_0^T(B_\Lambda(t))^{\frac{p}{2}}dt\leqslant\delta^p$

$$\begin{aligned} &P\left\{\left(\int\limits_0^T|\eta_\Lambda(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}>\delta\right\}\\ &\quad= P\left\{\int\limits_0^T|\eta_\Lambda(t)|^p dt\cdot\left(\int\limits_0^T|B_\Lambda(t)|^{\frac{p}{2}}dt\right)^{-1}>\delta^p\left(\int\limits_0^T|B_\Lambda(t)|^{\frac{p}{2}}dt\right)^{-1}\right\}\end{aligned}$$

$$\leqslant \left(\delta^p \cdot \frac{2}{p}\left(\int\limits_0^T |B_\Lambda(T)|^{\frac{p}{2}} dt\right)^{-1} + 1 - \frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times \exp\left\{\frac{1}{p}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{\delta^p}{p}\left(\int\limits_0^T |B_\Lambda(t)|^{\frac{p}{2}} dt\right)^{-1}\right\}.$$

Ліва частина (4.3) зростає при $Z < \delta^p$ відносно Z , тому

$$P\left\{\left(\int\limits_0^T |\eta_\Lambda(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} > \delta\right\} \leqslant \beta,$$

при умові, що виконується (4.2). □

Приклад 4.1. У теоремі 3.3 оцінивши підінтегральний вираз маємо

$$\tau(\eta_\Lambda(t)) \leqslant 4\left(\sum_{k=0}^{M-1}\left(\frac{t}{2}\right)^{2\gamma} |\lambda_{k+1} - \lambda_k|^{2\gamma}\left(F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)\right) + \right.$$
$$\left. + F(+\infty) - F(\Lambda)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Нехай $|\lambda_{k+1} - \lambda_k| = \frac{\Lambda}{M}$, тоді

$$\tau(\eta_\Lambda(t)) \leqslant 4\left(\left(\frac{\Lambda t}{2M}\right)^{2\gamma} F(\Lambda) + F(+\infty) - F(\Lambda)\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.5)$$

Нехай $\delta = 0.01$, $\beta = 0.01$, $p = 2$. Тоді з теореми 4.2 маємо $\frac{\delta}{\sqrt{z}} \exp\{\frac{1}{2} - \frac{\delta^2}{2z}\} = \beta$, звідки $z = 8.04 \cdot 10^{-6}$. Із (4.2) маємо

$$\int\limits_0^T 16\left(\left(\frac{\Lambda t}{2M}\right)^{2\gamma} F(\Lambda) + F(+\infty) - F(\Lambda)\right)$$
$$= 16\left(\frac{T^{2\gamma+1}}{2\gamma+1}\left(\frac{\Lambda}{2M}\right)^{2\gamma} F(\Lambda) + T(F(+\infty) - F(\Lambda))\right)$$

Нехай $\gamma = 1$, $T = 1$, $F(\lambda) = 1 - e^{-\lambda}$. Тоді з (4.2) та останньої рівності маємо

$$\frac{4}{3}\left(\frac{\Lambda}{M}\right)^2 (1 - e^{-\Lambda} + 16e^{-\Lambda} \leqslant 8.04 \cdot 10^{-6}$$

$$M \geqslant \frac{\Lambda(1 - e^{-\Lambda})^{\frac{1}{2}}}{(6 \cdot 10^{-6} - 12e^{-\Lambda})^{\frac{1}{2}}} \qquad \diamondsuit$$

За допомогою графічного редактора Origin наближено знайдено мінімум цієї функції по Λ: $M(16,75) \approx 7233$

Комп'ютерно змоделювавши гауссові випадкові величини η_{k1}, η_{k2} та величини ζ_k, тобто процес $X(t)$, отримано модель гауссового стаціонарного випадкового процесу з точністю 0.01 та надійністю 0.99 у просторі $L_2([0,1])$.

Рис. 4.1. Модель гауссового випадкового процесу у просторі $L_2([0,1])$, із спектральною щільністю $f(\lambda) = e^{-\lambda}$.

4.1.2. Точність моделювання гауссових стаціонарних процесів в $L_p([0,T])$ при $p \geqslant 1$.

Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$, де $\mathbf{T}$ – деяка параметрична множина, гауссів стаціонарний дійсний центрований неперервний в середньому квадратичному випадковий процес. Представлення цього процесу та його моделі $X_\Lambda(t)$ описані в розділі 3.

Нехай $\{\mathbf{T}, \mathcal{A}, \mu\}$ – вимірний простір, $\mu(\mathbf{T}) < \infty$, $\tau(t) = \tau(X(t))$.

Лема 4.1. *Нехай* $\int\limits_{\mathbf{T}} (\tau(t))^p \, d\mu(t) < \infty$, $p \geqslant 1$. *Тоді* $X \in L_p(\mathbf{T})$ *з ймовірністю одиниця.*

Доведення. Справедливість цієї леми випливає з леми 1.6 , так як

$$\mathbf{E}\int\limits_{\mathbf{T}} |X(t)|^p d\mu(t) = \int\limits_{\mathbf{T}} \mathbf{E}|X(t)|^p d\mu(t) \leqslant 2\left(\frac{p}{e}\right)^{\frac{p}{2}} \int\limits_{\mathbf{T}} \big(\tau(X(t))\big)^p d\mu(t) < \infty.$$

Отже, $\int\limits_{\mathbf{T}} |X(t)|^p d\mu(t) < \infty$ з ймовірністю одиниця. $\square$

Лема 4.2. *Для всіх $s \geqslant p \geqslant 1$, $\varepsilon > 0$, справедливе співвідношення*

$$P\left\{\|X\|_{L_p} > \varepsilon\right\} \leqslant 2\varepsilon^{-s}\left(\frac{s}{e}\right)^{\frac{s}{2}} \int\limits_{\mathbf{T}} (\tau(t))^s \, d\mu(t) \cdot \Big(\mu(\mathbf{T})\Big)^{\frac{s}{p}-1}. \tag{4.6}$$

Доведення. Згідно нерівності Чебишева

$$P\left\{\|X\|_{L_p} > \varepsilon\right\} \leqslant \frac{\mathbf{E}\|X\|^s_{L_p}}{\varepsilon^s},$$

$$\mathbf{E}\|X\|^s_{L_p} = \mathbf{E}\left(\int\limits_{\mathbf{T}} |X(t)|^p \, d\mu(t)\right)^{\frac{s}{p}} \leqslant \mathbf{E}\left(\int\limits_{\mathbf{T}} |X(t)|^p \, d\left(\frac{\mu(t)}{\mu(\mathbf{T})}\right)\right)^{\frac{s}{p}} (\mu(\mathbf{T}))^{\frac{s}{p}}$$

$$\leqslant \mathbf{E}\left(\int\limits_{\mathbf{T}} |X(t)|^s \, d\left(\frac{\mu(t)}{\mu(\mathbf{T})}\right)\right) (\mu(\mathbf{T}))^{\frac{s}{p}} = \int\limits_{\mathbf{T}} \mathbf{E}\,|X(t)|^s \, d\mu(t) \cdot (\mu(\mathbf{T}))^{\frac{s}{p}-1}.$$

Тоді з леми 1.6 випливає, що

$$P\left\{\|X\|_{L_p} > \varepsilon\right\} \leqslant \varepsilon^{-s} \cdot 2\left(\frac{s}{e}\right)^{\frac{s}{2}} \int\limits_{\mathbf{T}} (\tau(t))^s \, d\mu(t) \cdot (\mu(\mathbf{T}))^{\frac{s}{p}-1}.$$

□

Твердження 4.1. *Нехай $\tau = \sup\limits_{t\in\mathbf{T}} \tau(t) < \infty$. Тоді для всіх $\varepsilon \geqslant p^{\frac{1}{2}} (\mu(\mathbf{T}))^{\frac{1}{p}} \cdot \tau$ справедлива наступна нерівність*

$$P\left\{\|X\|_{L_p} > \varepsilon\right\} \leqslant 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\tau^2 \cdot (\mu(\mathbf{T}))^{\frac{2}{p}}}\right\}.$$

Доведення. Згідно з (4.6) для всіх $\varepsilon > 0$, $s \geqslant p$,

$$P\left\{\|X\|_{L_p} > \varepsilon\right\} \leqslant 2 s^{\frac{s}{2}} a^s,$$

де $a = \frac{(\mu(T))^{\frac{1}{p}} \cdot \tau}{\varepsilon\sqrt{e}}$. Нехай $s = a^{-2}e^{-1}$ – точка мінімуму правої частини останньої нерівності.

Тоді для $s = \frac{1}{a^2 e} \geqslant p$, тобто для $\varepsilon > (\mu(\mathbf{T}))^{\frac{1}{p}} p^{\frac{1}{2}} \tau$ маємо

$$P\left\{\|X\|_{L_p} > \varepsilon\right\} \leqslant 2(a^2 e)^{-\frac{1}{2a^2 e}} a^{\frac{1}{a^2 e}}$$
$$= 2\exp\left\{-\frac{1}{2a^2 e}\right\} = 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2(\mu(\mathbf{T}))^{\frac{2}{p}}\tau^2}\right\}. \quad \square$$

Твердження 4.2. *Нехай $\mathbf{T} = [0, T]$, $T > 0$, $\mu(\cdot)$ – міра Лебега і $\tau(t) \leqslant t^\nu b$ для деяких $\nu > 0$, $b > 0$. Тоді для $\varepsilon > p^{\frac{1}{2}} T^{\nu+\frac{1}{p}} b$ справедливе співвідношення*

$$P\left\{\|X\|_{L_p} > \varepsilon\right\} \leqslant 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2T^{2\nu+\frac{2}{p}}b^2}\right\}\left(\frac{\nu\varepsilon^2}{T^{2\nu+\frac{2}{p}}b^2} + 1\right)^{-1}. \tag{4.7}$$

Доведення. За умови теореми $\int\limits_0^T (\tau(t))^s\,dt \leqslant \dfrac{b^s T^{\nu s+1}}{\nu s+1}$ і з (4.6) отримуємо

$$P\left\{\|X\|_{L_p} > \varepsilon\right\} \leqslant 2\varepsilon^{-s}\left(\frac{s}{e}\right)^{\frac{s}{2}} \frac{b^s T^{\nu s+1}}{\nu s+1} \cdot T^{\frac{s}{p}-1} = 2s^{\frac{s}{2}} \frac{1}{\nu s+1}\left(\frac{T^{\nu+\frac{1}{p}} b}{\sqrt{e}\varepsilon}\right)^s.$$

Якщо взяти $s = \frac{\varepsilon^2}{T^{2\nu+\frac{2}{p}}b^2}$,то при $s \geqslant p$, тобто при $\varepsilon \geqslant p^{\frac{1}{2}} T^{\nu+\frac{1}{p}} b$ отримаємо

$$P\left\{\|X\|_{L_p} > \varepsilon\right\} \leqslant 2\left(\frac{\varepsilon^2}{T^{2\nu+\frac{2}{p}}b^2}\right)^{\frac{\varepsilon^2}{2T^{2\nu+\frac{2}{p}}b^2}} \frac{T^{2\nu+\frac{2}{p}}b^2}{\nu\varepsilon^2 + T^{2\nu+\frac{2}{p}}b^2}\left(\frac{T^{\nu+\frac{1}{p}} b}{\sqrt{e}\varepsilon}\right)^{\frac{\varepsilon^2}{T^{2\nu+\frac{2}{p}}b^2}}$$
$$= 2\left(\nu\frac{\varepsilon^2}{T^{2\nu+\frac{2}{p}}b^2} + 1\right)^{-1} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2T^{2\nu+\frac{2}{p}}b^2}\right\}. \quad \square$$

Теорема 4.3. *Нехай в моделі $X_\Lambda(t)$ розбиття Λ таке, що мають місце наступні нерівності*

$$\tau\left(\eta_\Lambda(t)\right) \leqslant \tau(\Lambda, T),$$

де $\tau(\Lambda, T) = (B_\Lambda(t))^{\frac{1}{2}}$ визначене в (3.7),

$$\tau(\Lambda, T) \leqslant \frac{\delta}{p^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{p}}}\ , \tag{4.8}$$

$$
\tau(\Lambda, T) \leqslant \frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}} \left(2 \ln \frac{2}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.9}
$$

тоді існує гауссів процес $X(t)$, до якого ця модель наближається з надійністю $1-\beta$, $0<\beta<1$ та точністю $\delta>0$ в $L_p([0,T])$, $p \geqslant 1$.

Доведення. Це є наслідком твердження 4.1.

Дійсно, якщо $\delta > p^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{p}} \tau(\Lambda, T)$ (це є умова (4.8)), тоді з твердження 4.1 та означення 4.1 маємо

$$
P\left\{\|\eta_\Lambda(t)\|_{L_p} > \delta\right\} \leqslant 2 \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2\tau^2(\Lambda, T) \cdot T^{\frac{2}{p}}}\right\} \leqslant \beta.
$$

А остання нерівність справедлива тоді, коли виконується умова (4.9).□

Теорема 4.4. *Нехай в моделі $X_\Lambda(t)$ розбиття Λ таке, що мають місце нерівності:*

$$
\tau(\eta_\Lambda(t)) \leqslant t^\nu \tau_\Lambda, \quad \nu > 0;
$$

(це інше представлення умови (3.7))

$$
\tau_\Lambda < \frac{\delta}{p^{\frac{1}{2}} T^{\nu+\frac{1}{p}}}; \quad \tau_\Lambda < \frac{\delta}{T^{\nu+\frac{1}{p}} (y_\beta)^{\frac{1}{2}}},
$$

де y_β є корінь рівняння $2\exp\left\{-\frac{y_\beta}{2}\right\}(\nu y_\beta + 1)^{-1} = \beta$.

Тоді існує гауссів процес $X(t)$, до якого ця модель наближається з надійністю $(1-\beta), 0<\beta<1$ і точністю $\delta>0$ в просторі $L_p([0,T])$, $p \geqslant 1$.

Доведення. Ця теорема випливає з твердження 4.2. Дійсно, нехай τ_Λ таке, що $\delta > p^{\frac{1}{2}} T^{\nu+\frac{1}{p}} \tau_\Lambda$. Тоді

$$
\frac{\delta}{T^{\nu+\frac{1}{p}} \tau_\Lambda^{\frac{1}{2}}} \geqslant \frac{\delta}{p^{\frac{1}{2}} T^{\nu+\frac{1}{p}} \tau_\Lambda} > 1.
$$

Функція $f(y_\beta) = 2\exp\left\{-\frac{y_\beta}{2}\right\}(\nu y_\beta + 1)^{-1}$ спадає при $y_\beta > 1$. Таким чином з твердження 4.2 випливає, що

$$
P\left\{\|\eta_\Lambda(t)\|_{L_p} > \delta\right\} \leqslant 2 \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2T^{2\nu+\frac{2}{p}} \tau_\Lambda^2}\right\} \cdot \left(\nu \frac{\delta^2}{T^{2\nu+\frac{2}{p}} \tau_\Lambda^2} + 1\right)^{-1}
$$

справедливе при $\frac{\delta^2}{T^{2\nu+\frac{2}{p}}\tau_\Lambda^2} \geqslant y_\beta$. $\square$

Приклад 4.2. Нехай спектральна функція $F(\lambda)$ процесу $X(t)$ така, що $F(+\infty) = 1$, $F(+\infty) - F(\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda^{2\gamma}}$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, $\lambda > 0$. Користуючись теоремою 3.2 маємо

$$\tau^2(\eta_\Lambda(t)) \leqslant 4\sum_{k=0}^{M} I_k,$$

де

$$I_k = \sup_{m\geqslant 1} 4b_k^2 \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left|\sin\frac{t(u-\lambda)}{2}\right|^2 dF_k(\lambda)\right)^m dF_k(u)\right)^{\frac{1}{m}},$$

$$b_k^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k).$$

Для $k = 0, \ldots, M-1$ справедливо:

$$\begin{aligned} I_k &\leqslant \sup_{m\geqslant 1} 4b_k^2 \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \frac{t^{2\gamma}|u-v|^{2\gamma}}{4^\gamma} dF_k(v)\right)^m dF_k(u)\right)^{\frac{1}{m}} \\ &\leqslant 4^{1-\gamma}t^{2\gamma}b_k^2 \sup_{m\geqslant 1}\left(E|\zeta_k - \zeta_k^*|^{2\gamma m}\right)^{\frac{1}{m}} = 4^{1-\gamma}t^{2\gamma}b_k^2|\lambda_{k+1}-\lambda_k|^{2\gamma}. \end{aligned}$$

Для $k = M$

$$I_M \leqslant \sup_{m\geqslant 1}\frac{4}{b_M^{\frac{2}{m}}}\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} dF(u)\right)^m dF(v)\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant 4\left(F(+\infty) - F(\lambda_M)\right).$$

Звідси,

$$\begin{aligned} &\tau^2(\eta_\Lambda(t)) \\ &\leqslant 4\left(\sum_{k=0}^{M-1} 4^{1-\gamma}t^{2\gamma}|\lambda_{k+1}-\lambda_k|^{2\gamma}\left(F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)\right) + 4\left(F(+\infty) - F(\lambda_M)\right)\right). \end{aligned}$$

Нехай $|\lambda_{k+1} - \lambda_k| = \frac{\lambda_M}{M}$, тоді

$$\tau^2(\eta_\Lambda(t)) \leqslant 4^{2-\gamma} t^{2\gamma} \left(\frac{\lambda_M}{M}\right)^{2\gamma} F(\lambda_M) + 16\left(F(+\infty) - F(\lambda_M)\right)$$

$$\leqslant 16\left(\frac{\lambda_M T}{2M}\right)^{2\gamma} + 16\lambda_M^{-2\gamma},$$

$$\tau(\Lambda, T) = 4\left(\left(\frac{\lambda_M T}{2M}\right)^{2\gamma} + \frac{1}{\lambda_M^{2\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Знайдемо мінімум цієї функції $\tau(\Lambda, T)$ по $a = \lambda_M^{2\gamma}$:

$$y = 4\left(\left(\frac{T}{2M}\right)^{2\gamma} a + \frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$y' = 2\left(\left(\frac{T}{2M}\right)^{2\gamma} a + \frac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{T}{2M}\right)^{2\gamma} - \frac{1}{a^2}\right) = 0,$$

$a = \left(\frac{2M}{T}\right)^{\gamma}$ – є точкою мінімуму.

Отже, $\lambda_M^{2\gamma} = \left(\frac{2M}{T}\right)^{\gamma}$. Тоді

$$\tau(\Lambda, T) = 4\left[\left(\frac{2M}{T}\right)^{\gamma}\left(\frac{T}{2M}\right)^{2\gamma} + \left(\frac{T}{2M}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}\left(\frac{T}{2M}\right)^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Нехай, наприклад, в теоремі 4.3 $2\ln\frac{2}{\beta} > p$. Тоді

$$\tau < \frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}}\left(2\ln\frac{2}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}} < \frac{\delta}{p^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{p}}},$$

$$4\sqrt{2}\left(\frac{T}{2M}\right)^{\frac{\gamma}{2}} < \frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}}\left(2\ln\frac{2}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$4\sqrt{2}\frac{T^{\frac{\gamma}{2}}}{\delta 2^{\frac{\gamma}{2}}} T^{\frac{1}{p}}\left(2\ln\frac{2}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} < M^{\frac{\gamma}{2}},$$

$$M > 2^{\frac{5}{\gamma}-1}\frac{T^{1+\frac{2}{p\gamma}}}{\delta^{\frac{2}{\gamma}}}\left(2\ln\frac{2}{\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Отже, процес $X_\Lambda(t)$ наближає процес $X(t)$ з надійністю $1-\beta$, $0<\beta<1$, та точністю $\delta>0$ в просторі $L_p([0,T])$, якщо $\lambda_M=\sqrt{2}M^{\frac{1}{2}}T^{-\frac{1}{2}}$ та

$$M > 2^{\frac{5}{\gamma}-1}\frac{T^{1+\frac{2}{p\gamma}}}{\delta^{\frac{2}{\gamma}}}\left(2\ln\frac{2}{\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

$\diamondsuit$

Приклад 4.3. Нехай для функції $F(\lambda)$ виконується умова $\int_0^\infty \lambda^{2\gamma}dF(\lambda)<\infty$ для деякого $0\leqslant\gamma\leqslant 1$, та $F(+\infty)=1$.

Тоді, згідно теореми 3.3

$$\tau^2(\eta_\lambda(t))\leqslant 4\sum_{k=0}^{M} I_k,$$

$$I_k=\sup_{m\geqslant 1}4b_k^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left|\sin\frac{t(u-\lambda)}{2}\right|^2 dF_k(\lambda)\right)^m dF_k(u)\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Якщо $k=0,\ldots,M-1$, то

$$I_k\leqslant 4^{1-\gamma}t^{2\gamma}b_k^2\sup_{m\geqslant 1}\left(E|\zeta_k-\zeta_k^*|^{2\gamma m}\right)^{\frac{1}{m}}\leqslant 4^{1-\gamma}t^{2\gamma}b_k^2|\lambda_{k+1}-\lambda_k|^{2\gamma},$$

де ζ_k,ζ_k^* – незалежні випадкові величини, які мають однакові функції розподілу $F_k(\lambda)=\frac{F(\lambda)-F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k)}$.

Якщо $k=M$, то

$$I_M \leqslant \sup_{m\geqslant 1}\frac{4}{b_M^{\frac{2}{m}}}\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\left|\sin\frac{t(u-\lambda)}{2}\right|^2 dF(u)\right)^m dF(\lambda)\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\leqslant \sup_{m\geqslant 1} \frac{4}{b_M^{\frac{2}{m}}} \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} \frac{t^{2\gamma}}{4^{\gamma}} |u-\lambda|^{2\gamma} dF(u) \right)^m dF(\lambda) \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\leqslant \sup_{m\geqslant 1} \frac{t^{2\gamma}4^{1-\gamma}}{b_M^{\frac{2}{m}}} \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} |u-\lambda_M|^{2\gamma} dF(u) \right)^m dF(\lambda) \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$= t^{2\gamma}4^{1-\gamma} \int_{\lambda_M}^{\infty} |u-\lambda_M|^{2\gamma} dF(u),$$

$$\tau^2(\eta_\Lambda(t))$$

$$\leqslant 4 \left(\sum_{k=0}^{M-1} 4^{1-\gamma} t^{2\gamma} b_k^2 |\lambda_{k+1}-\lambda_k|^{2\gamma} + 4^{1-\gamma} t^{2\gamma} \int_{\lambda_M}^{\infty} |\lambda-\lambda_M|^{2\gamma} dF(\lambda) \right)$$

$$= 4^{2-\gamma} t^{2\gamma} \left(\max_{0\leqslant k\leqslant M-1} |\lambda_{k+1}-\lambda_k|^{2\gamma} F(\lambda_M) + \int_{\lambda_M}^{\infty} |\lambda-\lambda_M|^{2\gamma} dF(\lambda) \right)$$

$$\leqslant \frac{16t^{2\gamma}}{4^{\gamma}} \left(\left(\frac{\lambda_M}{M} \right)^{2\gamma} + \int_{\lambda_M}^{\infty} |\lambda-\lambda_M|^{2\gamma} dF(\lambda) \right).$$

Отже,

$$\tau(\eta_\Lambda(t)) \leqslant t^{\gamma} \tau_\Lambda \ ,$$

де

$$\tau_\Lambda = \frac{4}{2^{\gamma}} \left(\left(\frac{\lambda_M}{M} \right)^{2\gamma} + \tilde{J}(\lambda_M) \right)^{\frac{1}{2}}; \quad \tilde{J}(\lambda_M) = \int_{\lambda_M}^{\infty} |\lambda-\lambda|^{2\gamma} dF(\lambda).$$

Нехай, наприклад $y_\beta > p$ в теоремі 4.6. Тоді $\tau_\Lambda \leqslant \frac{\delta}{T^{\gamma+\frac{1}{p}}(y_\beta)^{\frac{1}{2}}}$,

$$\frac{4}{2^{\gamma}} \left(\left(\frac{\lambda_M}{M} \right)^{2\gamma} + \tilde{J}(\lambda_M) \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\delta}{T^{\gamma+\frac{1}{p}}(y_\beta)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\left(\frac{\lambda_M}{M} \right)^{2\gamma} + \tilde{J}(\lambda_M) \leqslant \frac{2^{2\gamma}\delta^2}{16T^{2\gamma+\frac{2}{p}} y_\beta},$$

$$M \geqslant \lambda_M \left(\frac{2^{2\gamma}\delta^2}{16T^{2\gamma+\frac{2}{p}} y_\beta} - \tilde{J}(\lambda_M) \right)^{-\frac{1}{2\gamma}}$$

$$= \lambda_M 4^{\frac{1}{\gamma}} T^{1+\frac{1}{p\gamma}} y_\beta^{\frac{1}{2\gamma}} \left(2^{2\gamma}\delta^2 - \tilde{J}(\lambda_M) 16T^{2\gamma+\frac{2}{p}} y_\beta \right)^{-\frac{1}{2\gamma}}.$$

Отже , модель $X_\Lambda(t)$ наближає процес $X(t)$ з надійністю $1-\beta$, $0<\beta<1$ та точністю $\delta>0$ в просторі $L_p([0,T])$, якщо

$$M \geqslant \lambda_M 2^{\frac{2}{\gamma}} T^{1+\frac{1}{p\gamma}} y_\beta^{\frac{1}{2\gamma}} (4^\gamma \delta^2 - \tilde{J}(\lambda_M) 16T^{2\gamma+\frac{2}{p}} y_\beta)^{-\frac{1}{2\gamma}},$$

де y_β є корінь рівняння

$$2\exp\left\{-\frac{y_\beta}{2}\right\}(\gamma y_\beta+1)^{-1}=\beta, \quad 0\leqslant\gamma\leqslant 1.$$

$\diamondsuit$

Приклад 4.4. Із (4.5) та теореми 4.3 випливає, що

$$4\left(\left(\frac{\Lambda T}{2M}\right)^{2\gamma} F(\Lambda)+F(+\infty)-F(\Lambda)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}}\left(2\ln\frac{2}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

Звідки

$$M \geqslant 2\Lambda T^{1+\frac{1}{p}} \left(\frac{2F(\Lambda)\ln\frac{2}{\beta}}{\delta^2 - 32T^{\frac{2}{p}}\ln\frac{2}{\beta}(F(+\infty)-F(\Lambda))} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Нехай спектральна щільність $f(\lambda)=\exp(-\lambda)$, тобто $F(\lambda)=1-e^{-\lambda}$. Нехай $T=1$, $\delta=0.01$, $\beta=0.01$. Тоді маємо

$$M \geqslant 2\Lambda \left(\frac{2(1-e^{-\Lambda})\ln 200}{0.0001-32e^{-\Lambda}\ln 200} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\diamondsuit$

Мінімум цієї функції по Λ наближено рівний $M(16.55)\approx 11422$. Отже, вибравши мінімальне розбиття $M=11422$, можемо побудувати модель $X_\Lambda(t)$ гауссового процесу $X(t)$ з спектральною функцією $F(\lambda)=1-e^{-\lambda}$ (див. рис. 4.2).

Рис. 4.2. Модель гауссового випадкового процесу в просторі $L_p([0,1])$, $p \geqslant 1$ із спектральною щільністю $f(\lambda) = e^{-\lambda}$.

4.1.3. Точність моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів в нормах просторів Орлича

Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$, де $\mathbf{T}$ – деяка параметрична множина, гауссів стаціонарний дійсний центрований неперервний в середньому квадратичному випадковий процес. Представлення цього процесу та його моделі $X_\Lambda(t)$ описані в розділі 3.

Означення 4.2. *Випадковий процес $X_\Lambda(t)$ наближує процес $X(t)$ з надійністю $1-\beta$, $0 < \beta < 1$ та точністю $\delta > 0$ у просторі Орлича $L_U(\Omega)$, якщо існує таке розбиття Λ, що справедлива наступна нерівність*

$$P\left\{\|X(t) - X_\Lambda(t)\|_{L_U} > \delta\right\} \leqslant \beta.$$

Теорема 4.5. *[46] Нехай $U = \{U(x), x \in R\}$ – C-функція така, що функція $G_U(t) = \exp\left\{\left(U^{(-1)}(t-1)\right)^2\right\}$ є опуклою для $t \geqslant 1$. Тоді з ймовірністю одиниця $X \in L_U(\mathbf{T})$ і для всіх ε таких, що*

$$\varepsilon \geqslant \max(\mu(\mathbf{T}), 1) \cdot \tau \left(2 + \left(U^{(-1)}(1)\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

маємо

$$P\left\{\|X\|_{L_U} > \varepsilon\right\} \leqslant \sqrt{e}\frac{\varepsilon U^{(-1)}(1)}{\hat{\mu}(\mathbf{T}) \cdot \tau} \cdot \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2 (U^{(-1)}(1))^2}{2(\hat{\mu}(\mathbf{T}))^2 \cdot \tau^2}\right\}, \qquad (4.10)$$

де $\hat{\mu}(\mathcal{T}) = max(\mu(\mathbf{T}), 1)$.

Теорема 4.6. *Нехай в моделі $X_\Lambda(t)$ розбиття Λ таке, що справедливі нерівності*

$$\tau\left(\eta_\Lambda(t)\right) \leqslant \tau(\Lambda, T),$$

де $\tau(\Lambda, T)$ визначене в (3.7).

$$\tau(\Lambda, T) \leqslant \frac{\delta}{\hat{T} \cdot \left(2 + \left(U^{(-1)}(1)\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}}\ , \tag{4.11}$$

$$\tau(\Lambda, T) \leqslant \frac{\delta U^{(-1)}(1)}{\hat{T} x(\beta)}\ , \tag{4.12}$$

де $x(\beta) > 1$ є корінь рівняння $\sqrt{e}x \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} = \beta$ і $\hat{T} = max(T, 1)$.

Тоді існує гауссів процес $X(t)$, до якого модель $X_\Lambda(t)$ наближається з надійністю $1-\beta$, $0 < \beta < 1$ та точністю $\delta > 0$ в просторі Орлича $L_U([0, T])$, де C-функція U задовольняє умовам теореми 4.5 ($\mu(\cdot)$- міра Лебега).

Доведення. Твердження цієї теореми випливає із теореми 4.5. Дійсно, нехай $\tau(\Lambda, T)$ таке, що $\delta > \hat{T} \cdot \tau(\Lambda, T) \cdot \left(2 + \left(U^{(-1)}(1)\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}$ (це є (4.11)). Тоді

$$U^{(-1)}(1) > \left(2 + \left(U^{(-1)}(1)\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\delta U^{(-1)}(1)}{\hat{T} \cdot \tau(\Lambda, T)} \geqslant \frac{\delta}{\hat{T}\tau(\Lambda, T)\left(2 + \left(U^{(-1)}(1)\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}} \geqslant 1,$$

Функція $f(x) = \sqrt{e}x \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$ спадає при $x > 1$, $f(1) = 1$. Таким чином з (4.10) випливає, що

$$P\left\{\|\eta_\Lambda(t)\|_{L_U} > \delta\right\} \leqslant \sqrt{e}\frac{\delta U^{(-1)}(1)}{\hat{T} \cdot \tau(\Lambda, T)} \cdot \exp\left\{-\frac{\delta^2 (U^{(-1)}(1))^2}{2\hat{T}^2 \cdot \tau^2(\Lambda, T)}\right\} = \beta$$

справедливе, якщо виконується умова $\frac{\delta U^{(-1)}(1)}{\hat{T} \cdot \tau(\Lambda, T)} \geqslant x(\beta)$, тобто (4.12). □

4.2. Точність та надійність моделі стаціонарних випадкових процесів в рівномірній метриці

В першому підрозділі даного розділу для гауссових процесів з обмеженим спектром отримані оцінки супремумів норм субгауссових випадкових процесів. Далі вони будуть використані при дослідженні умов вибору розбиття множини $[0, \Lambda]$ (на якій визначена спектральна функція) так, щоб для моделі випадкового процесу існував гауссовий процес, до якого вона наближатиметься із заданими точністю та надійністю.

В другому підрозділі оцінені норми субгауссових процесів. Користуючись теорією $L_p(\Omega)$-процесів і попередніми оцінками знайдено умови розбиття Λ множини $[0,\infty]$ так, що для моделі процесу існує гауссовий випадковий процес, до якого вона наближається із заданими точністю та надійністю в рівномірній метриці.

4.2.1. Точність моделювання гауссових стаціонарних процесів з обмеженим спектром

Нехай $X(t)$ гауссовий стаціонарний дійсний центрований неперервний в середньому квадратичному випадковий процес з обмеженим спектром, тобто коваріаційна функція якого має вигляд:

$$r(\tau) = \mathbf{E}X(t+\tau)X(t) = \int\limits_0^\Lambda \cos\lambda t dF(\lambda),$$

де $F(\lambda)$ – неперервна спектральна функція цього процесу.

Означення 4.3. *Випадковий процес $X_\Lambda(t)$ наближує гауссів процес $X(t)$ з надійністю $1-\beta$, $0<\beta<1$ та точністю $\delta>0$ в просторі $C([0,T])$, якщо існує таке розбиття Λ, що справедлива нерівність*

$$P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X(t)-X_\Lambda(t)|>\delta\right\}\leqslant\beta.$$

Випадковий процес має зображення

$$X(t) = \int\limits_0^\Lambda \cos\lambda t d\eta_1(\lambda) + \int\limits_0^\Lambda \sin\lambda t d\eta_2(\lambda),$$

де $\eta_1(\lambda)$ та $\eta_2(\lambda)$ такі незалежні центровані гауссові випадкові процеси, що $E(\eta_i(\lambda_2)-\eta_i(\lambda_1))^2 = F(\lambda_2)-F(\lambda_1)$ при $\lambda_1<\lambda_2$, $i=1,2$.

За модель процесу візьмемо випадковий процес 3.8, тобто

$$X_\Lambda(t) = \sum_{k=0}^M [\eta_{k1}\cos\zeta_k t + \eta_{k2}\sin\zeta_k t],$$

де компоненти описані в розділі 3.

Для довільних $t, s \in [0, T]$ розглянемо різницю

$$\eta_\Lambda(t) - \eta_\Lambda(s) = \sum_{k=0}^{M} \left[\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t - \cos\lambda s + \cos\zeta_k s) d\eta_1(\lambda) \right.$$
$$\left. + \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t - \sin\lambda s + \sin\zeta_k s) d\eta_2(\lambda) \right],$$

де процес $\eta_\Lambda(t)$ визначений виразом (3.6). Справедлива наступна лема:

Лема 4.3. *Для* $m = 0, 1, \cdots$ *справедливі співвідношення*

$$\boldsymbol{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t - \cos\lambda s + \cos\zeta_k s) d\eta_1(\lambda) \right)^{2m+1} = 0,$$

$$\boldsymbol{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t - \sin\lambda s + \sin\zeta_k s) d\eta_2(\lambda) \right)^{2m+1} = 0,$$

$$\boldsymbol{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t - \cos\lambda s + \cos\zeta_k s) d\eta_1(\lambda) \right)^{2m} \leqslant V_{km},$$

$$\boldsymbol{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t - \sin\lambda s + \sin\zeta_k s) d\eta_2(\lambda) \right)^{2m} \leqslant V_{km},$$

де

$$V_{km} = 4^{2m} \Delta_{2m} \boldsymbol{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\left| \sin\frac{(s-t)(\lambda-\zeta_k)}{4} \right| + \left| \sin\frac{\zeta_k(s-t)}{2} \right| \right. \right.$$
$$\left. \left. \times \left| \sin\frac{(t+s)(\zeta_k-\lambda)}{4} \right| \right)^2 dF(\lambda) \right)^m, \quad \Delta_{2m} = \frac{(2m)!}{2^m m!}.$$

Доведення.

$$
\begin{aligned}
&|\cos\lambda t - \cos\zeta_k t - \cos\lambda s + \cos\zeta_k s| \\
&= \left|2\sin\frac{\lambda(s-t)}{2}\sin\frac{\lambda(s+t)}{2} - 2\sin\frac{\zeta_k(s-t)}{2}\sin\zeta_k\frac{(s+t)}{2}\right| \\
&= \left|2\sin\frac{\lambda(s+t)}{2}\left(\sin\frac{\lambda(s-t)}{2} - \sin\frac{\zeta_k(s-t)}{2}\right)\right. \\
&\qquad \left. +2\sin\frac{\zeta_k(s-t)}{2}\left(\sin\frac{\lambda(s+t)}{2} - \sin\frac{\zeta_k(s+t)}{2}\right)\right| \\
&= \left|4\sin\frac{\lambda(s+t)}{2}\sin\frac{(s-t)(\lambda-\zeta_k)}{4}\cos\frac{(s-t)(\lambda+\zeta_k)}{4}\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad \left. + 4\sin\frac{\zeta_k(s-t)}{2}\sin\frac{(s+t)(\lambda-\zeta_k)}{4}\cos\frac{(s+t)(\lambda+\zeta_k)}{4}\right| \\
&\leq 4\left(\left|\sin\frac{(s-t)(\lambda-\zeta_k)}{4}\right| + \left|\sin\frac{\zeta_k(s-t)}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{(t+s)(\zeta_k-\lambda)}{4}\right|\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|\sin\lambda t - \sin\zeta_k t - \sin\lambda s + \sin\zeta_k s| \\
&= \left|2\sin\frac{\lambda(t-s)}{2}\cdot\cos\frac{\lambda(t+s)}{2} - 2\sin\frac{\zeta_k(t-s)}{2}\cdot\cos\frac{\zeta_k(t+s)}{2}\right| \\
&= 2\left|\cos\frac{\lambda(t+s)}{2}\left(\sin\frac{\lambda(t-s)}{2} - \sin\frac{\zeta_k(t-s)}{2}\right)\right. \\
&\qquad \left. +\sin\frac{\zeta_k(t-s)}{2}\left(\cos\frac{\lambda(t+s)}{2} - \cos\frac{\zeta_k(t+s)}{2}\right)\right| \\
&= 4\left|\cos\frac{\lambda(t+s)}{2}\sin\frac{(t-s)(\lambda-\zeta_k)}{4}\cos\frac{(t-s)(\lambda+\zeta_k)}{4}\right. \\
&\qquad \left. +\sin\frac{\zeta_k(t-s)}{2}\sin\frac{(\zeta_k-\lambda)(t+s)}{4}\sin\frac{(\zeta_k+\lambda)(t+s)}{4}\right| \\
&\leqslant 4\left(\left|\sin\frac{(t-s)(\lambda-\zeta_k)}{4}\right| + \left|\sin\frac{\zeta_k(t-s)}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{(t+s)(\zeta_k-\lambda)}{4}\right|\right).
\end{aligned}
$$

Оскільки для центрованої гауссової випадкової величини ξ маємо $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}\xi^2 = \sigma^2$, $\mathbf{E}\xi^{2k+1} = 0$, $\mathbf{E}\xi^{2k} = \Delta_{2k}\sigma^{2k}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\Delta_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$, то

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\lambda s-\cos\zeta_k t+\cos\zeta_k s)d\eta_1(\lambda)\right)^{2m}\\
&\leqslant\quad \Delta_{2m}\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\lambda s-\cos\zeta_k t+\cos\zeta_k s)^2 dF(\lambda)\right)^{m}\\
&\leqslant\quad 4^{2m}\Delta_{2m}\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\left|\sin\frac{(s-t)(\lambda-\zeta_k)}{4}\right|+\left|\sin\frac{\zeta_k(s-t)}{2}\right|\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\times\left|\sin\frac{(t+s)(\zeta_k-\lambda)}{4}\right|\right)^2 dF(\lambda)\right)^{m}.
\end{aligned}
$$

Аналогічно для синусів.

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\lambda s-\sin\zeta_k t+\sin\zeta_k s)d\eta_2(\lambda)\right)^{2m}\\
&\leqslant\quad 4^{2m}\Delta_{2m}\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\left|\sin\frac{(t-s)(\lambda-\zeta_k)}{4}\right|+\left|\sin\frac{\zeta_k(t-s)}{2}\right|\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\times\left|\sin\frac{(t+s)(\zeta_k-\lambda)}{4}\right|\right)^2 dF(\lambda)\right)^{m}. \qquad\square
\end{aligned}
$$

Для процесу $\eta_\Lambda(t)$ на $[0,T]$ проведемо оцінки величин $\sigma_0=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\tau(\eta_\Lambda(t))$ та $\sigma(h)=\sup\limits_{|t-s|\leqslant h}\tau(\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s))$.

Оцінка σ_0. З леми 1.7 бачимо

$$
\begin{aligned}
&\tau^2(\eta_\Lambda(t))\\
&\leqslant\quad\sum_{k=0}^{M}\tau^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)+\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right)\\
&\leqslant\quad\sum_{k=0}^{M}\left[\tau\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right)+\tau\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right)\right]^2.
\end{aligned}
$$

Оскільки випадкові величини $\chi_{k1} = \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t) d\eta_1(\lambda)$, та $\chi_{k2} = \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t) d\eta_2(\lambda)$ такі, що їх моменти непарного порядку рівні нулю, то за теоремою 1.2

$$\tau(\chi_{ki}) \leq \Theta_1(\chi_{ki}) = \sup_{m\geq 1} \left[\frac{1}{\Delta_{2m}} E\chi_{ki}^{2m}\right]^{\frac{1}{2m}}, i = 1, 2 .$$

З леми 3.1 маємо

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\chi_{ki}^{2m} \quad &\leq \quad 4^m \Delta_{2m} \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left| \sin \frac{t(u-\lambda)}{2} \right|^2 dF(\lambda) \right)^m dF_k(u) \\
&\leqslant \quad 4^m \Delta_{2m} b_k^{2m} \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \frac{t^2|u-\lambda|^2}{4} dF_k(\lambda) \right)^m dF_k(u) \\
&\leqslant \quad 4^m \Delta_{2m} t^{2m} \frac{1}{4^m} |\lambda_{k+1} - \lambda_k|^{2m} \left(F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)\right)^m \\
&= \quad t^{2m} \Delta_{2m} |\lambda_{k+1} - \lambda_k|^{2m} \left(F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)\right)^m .
\end{aligned}$$

Тоді

$$\tau(\chi_{ki}) \leq \sup_{m\geqslant 1} \left[t^{2m} |\lambda_{k+1} - \lambda_k|^{2m} (F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k))^m\right]^{\frac{1}{2m}}$$
$$= t|\lambda_{k+1} - \lambda_k| (F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k))^{\frac{1}{2}}.$$

Отже,

$$\tau^2(\eta_\Lambda(t)) \leqslant 4 \sum_{k=0}^{M} \tau^2(\chi_{ki}) \leqslant 4t^2 \sum_{k=0}^{M} |\lambda_{k+1} - \lambda_k|^2 (F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)).$$

Тобто

$$\tau(\eta_\Lambda(t)) \leqslant 2t \left(\sum_{k=0}^{M} |\lambda_{k+1} - \lambda_k|^2 (F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)) \right)^{\frac{1}{2}},$$

Тому

$$\sigma_0 \le 2T\left(\sum_{k=0}^{M}|\lambda_{k+1}-\lambda_k|^2(F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k))\right)^{\frac{1}{2}} = b_0.$$

Якщо взяти $\lambda_{k+1}-\lambda_k = \frac{\Lambda}{M}$, тоді

$$b_0 = 2T\frac{\Lambda}{M}\left(\sum_{k=0}^{M}(F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k))\right)^{\frac{1}{2}} = 2T\frac{\Lambda}{M}\left(F(\Lambda)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Оцінка $\sigma(h)$. Розглянемо величини

$$\omega_{k1} = \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t - \cos\zeta_k t - \cos\lambda s + \cos\zeta_k s)d\eta_1(\lambda),$$

$$\omega_{k2} = \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t - \sin\zeta_k t - \sin\lambda s + \sin\zeta_k s)d\eta_2(\lambda).$$

Як і при оцінці $\tau(\eta_\Lambda(t))$ отримаємо такі нерівності

$$\tau^2(\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s)) \leqslant 2\sum_{k=0}^{M}\left(\tau^2(\omega_{k1})+\tau^2(\omega_{k2})\right) \leqslant 2\sum_{k=0}^{M}\left(\Theta_1^2(\omega_{k1})+\Theta_1^2(\omega_{k2})\right),$$

де $\Theta_1(\omega_{ki}) = \sup\limits_{m\geqslant 1}\left(\frac{2^m m!}{(2m)!}E\omega_{ki}^{2m}\right)^{\frac{1}{2m}}$.

Отже, згідно леми 4.3

$$\tau^2(\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s))$$
$$\leqslant \quad 4^3\sum_{k=0}^{M}\sup_{m\geqslant 1}\left[\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\left|\sin\frac{(s-t)(\lambda-u)}{4}\right|\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\left|\sin\frac{u(s-t)}{2}\right|\left|\sin\frac{(\lambda-u)(t+s)}{4}\right|\right)^2 dF(\lambda)\right)^m dF_k(u)\right]^{\frac{1}{m}}$$
$$\leqslant \quad 4^3\sum_{k=0}^{M}\sup_{m\geqslant 1}\left[b_k^{2m}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\frac{|s-t||\lambda-u|}{4}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{|u||s-t|}{2}\cdot\frac{|\lambda-u|(t+s)}{4}\right)^2 dF_k(\lambda)\right)^m dF_k(u)\right]^{\frac{1}{m}}$$
$$\leqslant \quad 4^3|s-t|^2\sum_{k=0}^{M}\sup_{m\geqslant 1}\left[b_k^{2m}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\frac{|\lambda-u|}{4^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(1+\frac{u(t+s)}{2}\right)^2 dF_k(\lambda)\right)^m dF_k(u)\right]^{\frac{1}{m}}$$
$$\leqslant \quad 4|s-t|^2\sum_{k=0}^{M} b_k^2|\lambda_{k+1}-\lambda_k|^2\left(1+\frac{\lambda_{k+1}(t+s)}{2}\right).$$

Якщо покласти $\lambda_{k+1}-\lambda_k=\frac{\Lambda}{M}$, то отримаємо, що

$$\tau(\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s))\leqslant 2|s-t|\left(\sum_{k=0}^{M} b_k^2\frac{\Lambda^2}{M^2}\left(1+\frac{\Lambda(t+s)}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant 2|t-s|(1+\Lambda T)\frac{\Lambda}{M}\left(F(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\sigma(h)\leqslant 2h(1+\Lambda T)\frac{\Lambda}{M}(F(\Lambda))^{\frac{1}{2}}. \tag{4.13}$$

Теорема 4.7. *Нехай в моделі $X_\Lambda(t)$ розбиття Λ таке, що при $\delta >$*

$8\tilde{I}(\varepsilon_0)$ *виконується співвідношення:*

$$2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}\left(\delta-\sqrt{8\delta\tilde{I}(\varepsilon_0)}\right)^2\right\}\leqslant\beta,$$

де $\varepsilon_0=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\tau(\eta_\Lambda(t))=\sigma_0$, $\eta_\Lambda(t)=X(t)-X_\Lambda(t)$,

$$\tilde{I}(\varepsilon_0)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\sqrt{\ln\left(\frac{T\Lambda(1+\Lambda T)}{\varepsilon M}\sqrt{F(\lambda)}+1\right)}d\varepsilon<\infty.$$

Тоді існує гауссів випадковий процес $X(t)$ *, до якого модель* $X_\Lambda(t)$ *наближатиметься з надійністю* $1-\beta$, $0<\beta<1$ *та точністю* $\delta>0$ *в просторі* $C([0,T])$.

Доведення. Дана теорема випливає з теореми 1.12 та прикладу 1.6. Дійсно, згідно прикладу 1.6 при $\delta>8I(\varepsilon_0)$ для субгауссового процесу $\eta_\Lambda(t)$ виконується нерівність [86]

$$P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta_\Lambda(t)|>\delta\right\}\leqslant2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}\left(\delta-\sqrt{8\delta\tilde{I}(\varepsilon_0)}\right)^2\right\},$$

де

$$\tilde{I}(\varepsilon_0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\sqrt{H(\varepsilon)}d\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\sqrt{\ln\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)}+1\right)}d\varepsilon<\infty,$$

$H(\varepsilon)$ – метрична ентропія компактної множини $[0,T]$,
$\sigma(h)=\sup\limits_{|t-s|<h}\tau(\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s))$.

З попередніх оцінок для $\sigma(h)$ маємо, що

$$\sigma^{(-1)}(h)=\frac{Mh}{2\Lambda\sqrt{F(\Lambda)}(1+\Lambda T)},$$

тоді

$$\tilde{I}(\varepsilon_0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\sqrt{\ln\left(\frac{T\Lambda(1+T\Lambda)}{\varepsilon M}\sqrt{F(\Lambda)}+1\right)}d\varepsilon,$$

яке можна зробити як завгодно малим при певному підборі Λ і M. Тобто буде існувати таке розбиття Λ, для якого виконуватиметься згідно означення 4.3 умова

$$2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}(\delta-\sqrt{8\delta\tilde{I}(\varepsilon_0)})^2\right\}\leqslant\beta.$$

$\square$

4.2.2. Застосування теорії $L_p(\Omega)$ - процесів при моделюванні гауссових стаціонарних випадкових процесів

Розглянемо $L_p(\Omega)$ -процеси в просторі Орлича випадкових величин, що породжується функцією $U(x)=|x|^p$, $x\in R$, $p\geqslant 2$. Випадковий процес в цьому просторі називають $L_p(\Omega)$-процесом. Норма задана, як

$$\|X(t)\|_U=\|X(t)\|_{L_p}=(\mathbf{E}|X(t)|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Нехай $X=\{X(t),t\in\mathbf{T}\}$ –гауссовий стаціонарний центрований неперервний в середньому квадратичному випадковий процес з коваріаційною функцією

$$\mathbf{E}X(t+\tau)X(t)=r(\tau)=\int\limits_0^\infty\cos\lambda\tau dF(\lambda).$$

Представлення випадкового гауссового процесу $X(t)$ та його моделі $X_\Lambda(t)$ описані в розділі 3.

Розглянемо субгауссовий процес $\eta_\Lambda(t)=X(t)-X_\Lambda(t)$. Він визначений виразом (3.6). Далі нам будуть потрібні такі твердження.

Лема 4.4. *[61] Нехай* $\|\xi\|_{L_p}=(\boldsymbol{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}}$, $1\leqslant p<\infty$, $\xi_i\in L_p$ *– послідовність незалежних випадкових величин з* $\boldsymbol{E}\xi_i=0$, $i=\overline{1,\infty}$. *Тоді*

$$\|\sum_{i=1}^n\xi_i\|_{L_p}^2\leqslant C_p\left(\sum_{i=1}^n\|\xi_i\|_{L_p}^2\right),$$

де

$$C_p=8\left(\frac{(p+1)}{2\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{2}{p}}.$$

Лема 4.5. *Якщо* $\int\limits_0^\infty\lambda^p dF(\lambda)<\infty$, $p\geqslant 2$, *то для субгауссового випадко-*

вого процесу $\eta_\Lambda(t)$ справедлива нерівність

$$\|\eta_\Lambda(t)\|_{L_p} \leqslant 2C_p^{\frac{1}{2}}\widetilde{\Delta}_p^{\frac{1}{p}}T\left[\left(\frac{\lambda_M}{M}\right)^2 F(\lambda_M) + b_M^{2-\frac{4}{p}}\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}|\lambda-\lambda_M|^p dF(\lambda)\right)^{\frac{2}{p}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.14}$$

Доведення. З леми 4.4 випливає, що

$$\begin{aligned}
&\|\eta_\Lambda(t)\|_{L_p}^2\\
&\leqslant\ C_p\sum_{k=0}^{M}\left\|\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)+\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right\|_{L_p}^2\\
&\leqslant\ 2C_p\sum_{k=0}^{M}\left\|\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right\|_{L_p}^2+\left\|\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right\|_{L_p}^2,
\end{aligned}$$

З теореми Фубіні та леми 3.1 маємо

$$\begin{aligned}
\left\|\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right\|_{L_p}^2 &= \left(\mathbf{E}\left|\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right|^p\right)^{\frac{2}{p}}\\
&= \left(\mathbf{E}\mathbf{E}_{\zeta_k}\left|\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right|^p\right)^{\frac{2}{p}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\widetilde{\Delta}_p\mathbf{E}\left|\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)^2 dF(\lambda)\right|^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}}\\
&\leqslant \widetilde{\Delta}_p^{\frac{2}{p}}\left(\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left|2\sin\frac{t(\zeta_k-\lambda)}{2}\right|^2 dF(\lambda)\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}} = Y_{kp},
\end{aligned}$$

де
$$\widetilde{\Delta}_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^p e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Аналогічно
$$\left\| \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right\|_{L_p}^2 = \left(\mathbf{E} \left| \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right|^p \right)^{\frac{2}{p}}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \left(\widetilde{\Delta}_p \mathbf{E} \left| \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t)^2 dF(\lambda) \right|^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{2}{p}} \\
&\leqslant \widetilde{\Delta}_p^{\frac{2}{p}} \left(\mathbf{E} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left| 2 \sin \frac{t(\zeta_k - \lambda)}{2} \right|^2 dF(\lambda) \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{2}{p}} = Y_{kp},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{kp} &\leqslant 4\widetilde{\Delta}_p^{\frac{2}{p}} b_k^2 \left(\mathbf{E} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left| \sin \frac{t(\zeta_k - \lambda)}{2} \right|^2 dF_k(\lambda) \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{2}{p}} \\
&= 4\widetilde{\Delta}_p^{\frac{2}{p}} b_k^2 \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left| \sin \frac{t(u - \lambda)}{2} \right|^2 dF_k(\lambda) \right)^{\frac{p}{2}} dF_k(u) \right)^{\frac{2}{p}} \\
&\leqslant 4\widetilde{\Delta}_p^{\frac{2}{p}} b_k^2 \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left| \sin \frac{t(u - \lambda)}{2} \right|^p dF_k(\lambda) dF_k(u) \right)^{\frac{2}{p}}
\end{aligned}$$

$$\leqslant 4\widetilde{\Delta}_p^{\frac{2}{p}} b_k^2 \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \frac{t^p |u - \lambda|^p}{2^p} dF_k(\lambda) dF_k(u) \right)^{\frac{2}{p}} = \widetilde{\Delta}_p^{\frac{2}{p}} b_k^2 t^2 \left(E|\theta_k|^p \right)^{\frac{2}{p}},$$

де θ_k така випадкова величина, що $\theta_k = \theta_{k1} - \theta_{k2}$, θ_{k1}, θ_{k2} незалежні однаково розподілені випадкові величини з функцією розподілу

$$F_k(\lambda) = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)}.$$

Коли $k < M$, тоді

$$(\mathbf{E}|\theta_k|^p)^{\frac{2}{p}} = \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} |u - \lambda|^p dF_k(\lambda) dF_k(u) \right)^{\frac{2}{p}} \leqslant |\lambda_{k+1} - \lambda_k|^2.$$

Коли $k = M$, тоді

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}|\theta_M|^p)^{\frac{2}{p}} &\leqslant \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} \int\limits_{\lambda_M}^{\infty} |\lambda - u|^p dF_M(\lambda) dF_M(u) \right)^{\frac{2}{p}} \\
&\leqslant \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} \int\limits_{\lambda_M}^{\infty} |\lambda - \lambda_M|^p dF_M(\lambda) dF_M(u) \right)^{\frac{2}{p}} \\
&= \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} |\lambda - \lambda_M|^p dF_M(\lambda) \right)^{\frac{2}{p}} = \frac{1}{b_M^{\frac{4}{p}}} \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} |\lambda - \lambda_M|^p dF(\lambda) \right)^{\frac{2}{p}}.
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
&\|\eta_\Lambda(t)\|_{L_p}^2 \leqslant 4C_p \sum_{k=0}^{M} Y_{kp} \\
&= 4C_p \widetilde{\Delta}_p^{\frac{2}{p}} t^2 \left(\sum_{k=0}^{M-1} b_k^2 |\lambda_{k+1} - \lambda_k|^2 + b_M^{2-\frac{4}{p}} \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} |\lambda - \lambda_M|^p dF(\lambda) \right)^{\frac{2}{p}} \right).
\end{aligned}$$

Якщо покласти $|\lambda_{k+1} - \lambda_k| = \dfrac{\lambda_M}{M}$, то

$$\|\eta_\Lambda(t)\|_{L_p}^2 = 4C_p \widetilde{\Delta}_p^{\frac{2}{p}} T^2 \left[\left(\frac{\lambda_M}{M} \right)^2 F(\lambda_M) + b_M^{2-\frac{4}{p}} \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} |\lambda - \lambda_M|^p dF(\lambda) \right)^{\frac{2}{p}} \right].$$

$\square$

Лема 4.6. *Якщо* $\int\limits_0^\infty \lambda^p dF(\lambda) < \infty$, $p \geqslant 2$, *то справедливе співвідношення*

$$\|\eta_\Lambda(t) - \eta_\Lambda(s)\|_{L_p} \leqslant 2C_p^{\frac{1}{2}} \widetilde{\Delta}_p^{\frac{1}{p}} |s-t| \left[\left(\frac{\lambda_M}{M}\right)^2 (1+\lambda_M T)^2 F(\lambda_M) \right.$$
$$\left. + b_M^{2-\frac{4}{p}} \left(\int\limits_{\lambda_M}^\infty |3u - \lambda_M|^p \, dF(u) \right)^{\frac{2}{p}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.15)$$

Доведення. З леми 4.4 маємо

$$\left\|\eta_\Lambda(t) - \eta_\Lambda(s)\right\|_{L_p}^2$$
$$\leqslant \quad 2C_p \sum_{k=0}^M \left(\left\| \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t - \cos\lambda s + \cos\zeta_k s) d\eta_1(\lambda) \right\|_{L_p}^2 \right.$$
$$\left. + \left\| \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t - \sin\lambda s + \sin\zeta_k s) d\eta_2(\lambda) \right\|_{L_p}^2 \right);$$

З теореми Фубіні та леми 4.3 випливає

$$\left\| \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t - \cos\lambda s + \cos\zeta_k s) d\eta_1(\lambda) \right\|_{L_p}^2$$
$$= \quad \left(\mathbf{E} \left| \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t - \cos\lambda s + \cos\zeta_k s) d\eta_1(\lambda) \right|^p \right)^{\frac{2}{p}}$$

$$= \quad \left(\widetilde{\Delta}_p \mathbf{E} \left| \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t - \cos\lambda s + \cos\zeta_k s)^2 dF(\lambda) \right|^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{2}{p}}$$

$$\leqslant 16 \left(\widetilde{\Delta}_p \mathbf{E} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\left| \sin \frac{(s-t)(\lambda - \zeta_k)}{4} \right| \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + \left| \sin \frac{(s-t)\zeta_k}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{(\zeta_k - \lambda)(t+s)}{4} \right| \right)^2 dF(\lambda) \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{2}{p}} = W_{kp}.$$

Аналогічна оцінка для синусів:

$$\left\| \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t - \sin \lambda s + \sin \zeta_k s) d\eta_2(\lambda) \right\|_{L_p}^2$$

$$\leqslant \quad 16 \left(\widetilde{\Delta}_p \mathbf{E} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\left| \sin \frac{(s-t)(\lambda - \zeta_k)}{4} \right| \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + \left| \sin \frac{(s-t)\zeta_k}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{(\zeta_k - \lambda)(t+s)}{4} \right| \right)^2 dF(\lambda) \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{2}{p}} = W_{kp}.$$

Тоді $\left\| \eta_\Lambda(t) - \eta_\Lambda(s) \right\|_{L_p}^2 \leqslant 4C_p \sum\limits_{k=0}^{M} W_{kp}$.
Коли $k < M$, тоді

$$W_{kp} \quad \leqslant \quad 16 \widetilde{\Delta}_p^{\frac{2}{p}} b_k^2 \left(\mathbf{E} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\left| \sin \frac{(s-t)(\lambda - \zeta_k)}{4} \right| \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + \left| \sin \frac{(s-t)\zeta_k}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{(\zeta_k - \lambda)(t+s)}{4} \right| \right)^2 dF_k(\lambda) \right)^{\frac{p}{2}} \right)$$

$$\leqslant \quad 16 \widetilde{\Delta}_p^{\frac{2}{p}} b_k^2 \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\frac{|s-t| \cdot |\lambda - u|}{4} \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + \frac{u|s-t|}{2} \frac{|u-\lambda|(s+t)}{4} \right)^2 dF_k(\lambda) \right)^{\frac{p}{2}} dF_k(u) \right)^{\frac{2}{p}}$$

$$= \widetilde{\Delta}_p^{\frac{2}{p}} b_k^2 |s-t|^2 \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} |\lambda - u|^2 \left(1 + \frac{(s+t)u}{2}\right)^2 dF_k(\lambda) \right)^{\frac{p}{2}} dF_k(u) \right)^{\frac{2}{p}}$$

$$\leqslant \widetilde{\Delta}_p^{\frac{2}{p}} b_k^2 |s-t|^2 \cdot |\lambda_{k+1} - \lambda_k|^2 \left(1 + \frac{(s+t)\lambda_{k+1}}{2}\right)^2$$

$$\leqslant \widetilde{\Delta}_p^{\frac{2}{p}} b_k^2 |s-t|^2 \cdot |\lambda_{k+1} - \lambda_k|^2 (1 + \lambda_M T)^2.$$

Коли $k = M$, тоді

$$W_{Mp} \leqslant$$

$$\leqslant \quad 16 \widetilde{\Delta}_p^{\frac{2}{p}} b_M^2 \left(\mathbf{E} \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} \left(\left| \sin \frac{(s-t)(\lambda - \zeta_k)}{4} \right| + \left| \sin \frac{(s-t)\zeta_k}{2} \right| \right)^2 dF_M(\lambda) \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{2}{p}}$$

$$\leqslant \quad 16 \widetilde{\Delta}_p^{\frac{2}{p}} b_M^2 \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} \left(\frac{|s-t| \cdot |\lambda - u|}{4} + \frac{|s-t|u}{2} \right)^2 dF_M(u) \right)^{\frac{p}{2}} dF_M(\lambda) \right)^{\frac{2}{p}}$$

$$\leqslant \quad \widetilde{\Delta}_p^{\frac{2}{p}} b_M^2 |s-t|^2 \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} ((u - \lambda_M) + 2u)^2 dF_M(u) \right)^{\frac{p}{2}} dF_M(\lambda) \right)^{\frac{2}{p}}.$$

Використовуючи нерівність [20]: $(E|\xi|)^{\frac{p}{2}} \leqslant E|\xi|^{\frac{p}{2}}$, при $p \geqslant 2$ маємо

$$W_{Mp} = \widetilde{\Delta}_p^{\frac{2}{p}} b_M^{2-\frac{4}{p}} |s-t|^2 \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} |3u - \lambda_M|^p \, dF(u) \right)^{\frac{2}{p}}.$$

Тоді

$$\|\eta_\Lambda(t) - \eta_\Lambda(s)\|_{L_p}^2 \leqslant 4 C_p \widetilde{\Delta}_p^{\frac{2}{p}} |s-t|^2 \left(\sum_{k=0}^{M-1} b_k^2 |\lambda_{k+1} - \lambda_k|^2 (1 + \lambda_M T)^2 \right.$$

$$\left. + b_M^{2-\frac{4}{p}} \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} |3u - \lambda_M|^p \, dF(u) \right)^{\frac{2}{p}} \right).$$

Тобто

$$\|\eta_\Lambda(t) - \eta_\Lambda(s)\|_{L_p} \leqslant L|s-t|,$$

де

$$L = \left(4C_p \widetilde{\Delta}_p^{\frac{2}{p}} \left(\sum_{k=0}^{M-1} b_k^2 |\lambda_{k+1} - \lambda_k|^2 (1+\lambda_M T)^2 \right.\right.$$

$$\left.\left. + b_M^{2-\frac{4}{p}} \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} |3u - \lambda_M|^p \, dF(u)\right)^{\frac{2}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \quad \square$$

Зауважимо, що коли $|\lambda_{k+1} - \lambda_k| = \frac{\lambda_M}{M}$ то

$$L \leqslant 2C_p^{\frac{1}{2}} \widetilde{\Delta}_p^{\frac{1}{p}} \left(\left(\frac{\lambda_M}{M}\right)^2 (1+\lambda_M T)^2 F(\lambda_M) + b_M^{2-\frac{4}{p}} \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} |3u - \lambda_M|^p \, dF(u)\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.16}$$

Теорема 4.8. *Якщо в моделі $X_\Lambda(t)$ розбиття Λ таке, що виконуються нерівності:*

$$\int\limits_0^\infty \lambda^p dF(\lambda) < \infty, \quad p \geqslant 2 \tag{4.17}$$

$$\frac{(p+1)^{p+1}}{(p\delta)^p} \left(\frac{p}{p-1} \left(\frac{TL}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \varepsilon_0^{1-\frac{1}{p}} + \varepsilon_0 \right)^p \leqslant \beta,$$

де L визначене в (4.16), то існує випадковий гауссів процес $X(t)$ до якого дана модель $X_\Lambda(t)$ буде наближатись з надійністю $1-\beta$, $0 < \beta < 1$ та точністю $\delta > 0$ в рівномірній метриці.

Доведення. В розділі 3 покладалось, що розглядуваний процес $X(t)$ і його модель є сепарабельними процесами. А оскільки

$$\int\limits_0^\infty (\ln(1+\lambda))^{1+\varepsilon} \, dF(\lambda) \leqslant \int\limits_0^\infty \lambda^p dF(\lambda) < \infty, \quad p \geqslant 2,$$

то з теореми 3.1 випадковий сепарабельний процес $\eta_\Lambda(t)$ є неперервним з ймовірністю одиниця.

Якщо виконується умова (4.17), то з леми 4.5 випливає, що процес $\eta_\Lambda(t)$ є $L_p(\Omega)$-процесом (оскільки $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|\eta_\Lambda(t)\|_{L_p}<\infty$).

Тоді з наслідку 1.4 для $L_p(\Omega)$-процесу справедлива нерівність:

$$P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta_\Lambda(t)|>\delta\right\}\leqslant\frac{\widetilde{B}_p^p}{\delta^p},$$

де $\widetilde{B}_p=\inf\limits_{0\leqslant t\leqslant T}(\mathbf{E}|\eta_\Lambda(t)|^p)^{\frac{1}{p}}+\inf\limits_{0<\theta<1}\frac{1}{\theta(1-\theta)}\int\limits_0^{\theta 2\varepsilon_0}N^{\frac{1}{p}}(\varepsilon)d\varepsilon,\ \varepsilon_0=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|\eta_\Lambda(t)\|_{L_p}$.

Оскільки [86] $N(\varepsilon)=\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)}+1$, $\sigma(h)=\sup\limits_{|t-s|<h}\|\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s)\|_{L_p}$.

В нашому випадку $\sigma(h)=hL$, де L визначено (4.16)

$$\sigma^{(-1)}(h)=\frac{h}{L},\quad \inf_{0\leqslant t\leqslant T}(\mathbf{E}|\eta_\Lambda(t)|^p)^{\frac{1}{p}}=0,$$

Тоді

$$\begin{aligned}
B_p &= \inf_{0<\theta<1}\frac{1}{\theta(1-\theta)}\int\limits_0^{2\theta\varepsilon_0}\left(\frac{TL}{2\varepsilon}+1\right)^{\frac{1}{p}}d\varepsilon\\
&\leqslant \inf_{0<\theta<1}\frac{1}{\theta(1-\theta)}\left[\left(\frac{TL}{2}\right)^{\frac{1}{p}}(2\theta\varepsilon_0)^{1-\frac{1}{p}}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}+2\theta\varepsilon_0\right]\\
&\leqslant \inf_{0<\theta<1}\frac{\theta^{1-\frac{1}{p}}}{\theta(1-\theta)}\left[\left(\frac{TL}{2}\right)^{\frac{1}{p}}(2\varepsilon_0)^{1-\frac{1}{p}}\frac{p}{p-1}+2\varepsilon_0\right]\\
&= \frac{(p+1)^{1+\frac{1}{p}}}{p}\left(\frac{p}{p-1}\left(\frac{TL}{2}\right)^{\frac{1}{p}}(2\varepsilon_0)^{1-\frac{1}{p}}+2\varepsilon_0\right),
\end{aligned}$$

$$P\{\sup_{0<t\leqslant T}|\eta_\Lambda(t)|>\delta\}\leqslant\frac{(p+1)^{p+1}}{(p\delta)^p}\left(\frac{p}{p-1}\left(\frac{TL}{2}\right)^{\frac{1}{p}}(2\varepsilon_0)^{1-\frac{1}{p}}+2\varepsilon_0\right)^p.$$

Оскільки з (4.14) і (4.16) випливає, що можна підібрати такі λ_M та M, щоб ε_0 та L були зроблені як завгодно малими, то існує таке розбиття

Λ, для якого згідно означення 4.3 виконуватиметься нерівність

$$\frac{(p+1)^{p+1}}{(p\delta)^p}\left(\frac{p}{p-1}\left(\frac{TL}{2}\right)^{\frac{1}{p}}(2\varepsilon_0)^{1-\frac{1}{p}}+2\varepsilon_0\right)^p \leqslant \beta.$$

□

4.3. Застосування теорії $Sub_\varphi(\Omega)$ просторів випадкових величин до знаходження точності моделювання стаціонарних гауссових процесів

В попередньому розділі ми довели, що наближення моделі до гауссового процесу має місце, коли виконується умова $\int\limits_0^\infty \lambda^\varepsilon dF(\lambda) < \infty$, при $\varepsilon \geqslant 2$. В цьому розділі за більш обмежуючих умов знайдемо оцінки, які істотно покращують оцінки попереднього розділу. Для цього використовується теорія просторів $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкових величин. Зауважимо також, що тут отримано нові нерівності для норм випадкових величин з просторів $Sub_\varphi(\Omega)$.

Нехай $X = \{X(t),\ t \in R\}$ гауссів стаціонарний дійсний центрований неперервний в середньому квадратичному випадковий процес. Побудова моделі $X_\Lambda(t)$ даного процесу описана в розділі 3.

Нам потрібні будуть наступні твердження. В даному розділі розглядатимемо простори $Sub_\varphi(\Omega)$, що породжуються функціями $\varphi_p(x)$, $p \geqslant 2$

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} |x|^p, & \text{при} |x| > 1 \\ |x|^2, & \text{при} |x| < 1 \end{cases}. \tag{4.18}$$

Нагадаємо, що при $p = 2$ простір $Sub_{\varphi_2}(\Omega)$ називається простором субгауссових випадкових величин.

Доведемо теорему, яка уточнює відповідну теорему з роботи [53]

Теорема 4.9. *Нехай ξ –випадкова величина, така, що $\boldsymbol{E}\xi^{2k+1} = 0$ при $k = 0, 1, 2, \dots$, та виконується умова*

$$S_{\varphi_p}(\xi) = \sup_{n\geqslant 1}(2n)^{\frac{1}{p}}\frac{\left(\boldsymbol{E}\xi^{2n}\right)^{\frac{1}{2n}}}{\left((2n)!\right)^{\frac{1}{2n}}} < \infty,$$

тоді $\xi \in Sub_{\varphi_p}(\Omega)$ *та має місце нерівність*

$$\tau_{\varphi_p} \leqslant 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} S_{\varphi_p}(\xi).$$

Доведення. При всіх $\lambda > 0$ мають місце співвідношення

$$\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \mathbf{E}\xi^k}{k!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}\mathbf{E}\xi^{2n}}{(2n)!} = S(\lambda),$$

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{(2n)^{\frac{1}{p}}} \right)^{2n} \left(\frac{\left(\mathbf{E}\xi^{2n}\right)^{\frac{1}{2n}}}{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}} (2n)^{\frac{1}{p}} \right)^{2n} \\ &\leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{(2n)^{\frac{1}{p}}} \right)^{2n} \left(S_{\varphi_p}(\xi)\right)^{2n}. \end{aligned}$$

Далі писатимемо $S_{\varphi_p} = S$, тому

$$S(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda S}{(2n)^{\frac{1}{p}}} \right)^{2n}.$$

Нехай γ – будь-яке число, таке, що $0 < \gamma < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lambda_1 = \frac{2^{\frac{1}{p}}\gamma}{S}$. Розглянемо спочатку такі λ , що $0 \leqslant |\lambda| \leqslant \lambda_1$, тобто $|\lambda| \leqslant \frac{2^{\frac{1}{p}}\gamma}{S}$. Тоді мають місце співвідношення

$$\begin{aligned} S(\lambda) &\leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda S}{2^{\frac{1}{p}}} \right)^{2n} = 1 + \left(\frac{\lambda S}{2^{\frac{1}{p}}} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{\lambda S}{2^{\frac{1}{p}}} \right)^2 \right)^{-1} \\ &\leqslant 1 + \left(\frac{\lambda S}{2^{\frac{1}{p}}} \right)^2 (1-\gamma^2)^{-1} = 1 + \left(\frac{\lambda S}{2^{\frac{1}{p}}\sqrt{1-\gamma^2}} \right)^2 \\ &\leqslant \exp\left\{ \left(\frac{\lambda S}{2^{\frac{1}{p}}\sqrt{1-\gamma^2}} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Оскільки

$$\frac{|\lambda|S}{2^{\frac{1}{p}}\sqrt{1-\gamma^2}} \leqslant \frac{\lambda_1 S}{2^{\frac{1}{p}}\sqrt{1-\gamma^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \leqslant \left(\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 1,$$

то при $0 \leqslant |\lambda| < \lambda_1$ з (4.18) і (4.19) випливає, що має місце нерівність

$$S(\lambda) \leqslant \exp\left\{\varphi_p\left(\frac{\lambda S}{2^{\frac{1}{p}}\sqrt{1-\gamma^2}}\right)\right\}. \tag{4.20}$$

Тепер нехай $|\lambda| > \lambda_1$. Позначимо n_λ таке ціле число, що $1 \leqslant n_\lambda \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{|\lambda|S}{\gamma}\right)^p$ та $n_\lambda + 1 > \frac{1}{2}\left(\frac{|\lambda|S}{\gamma}\right)^p$. Таке n_λ існує, оскільки

$$\frac{1}{2}\left(\frac{|\lambda|S}{\gamma}\right)^p > \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1 S}{\gamma}\right)^p = 1.$$

Позначимо

$$A_1(\lambda) = \sum_{n=1}^{n_\lambda}\left(\frac{\lambda S}{(2n)^{\frac{1}{p}}}\right)^{2n}, \quad A_2(\lambda) = \sum_{n=n_\lambda+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda S}{(2n)^{\frac{1}{p}}}\right)^{2n}.$$

Бачимо, що при $n \leqslant n_\lambda$ має місце нерівність

$$\left(\frac{|\lambda|S}{\gamma}\right)(2n)^{-\frac{1}{p}} \leqslant \left(\frac{|\lambda|S}{\gamma}\right)^p (2n)^{-1}.$$

Отже

$$A_1(\lambda) = \sum_{n=1}^{n_\lambda}\left(\frac{\frac{|\lambda|S}{\gamma}\gamma}{(2n)^{\frac{1}{p}}}\right)^{2n} \leqslant \sum_{n=1}^{n_\lambda}\left(\frac{\left(\frac{|\lambda|S}{\gamma}\right)^p\gamma}{2n}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{n_\lambda}\frac{\left(\left(\frac{|\lambda|S}{\gamma}\right)^p\gamma\right)^{2n}}{(2n)^{2n}};$$

$$\begin{aligned} A_2(\lambda) &\leqslant \sum_{n=n_\lambda+1}^{\infty}\left(\frac{|\lambda|S}{(2(n_\lambda+1))^{\frac{1}{p}}}\right)^{2n} = \left(\frac{|\lambda|S}{(2(n_\lambda+1))^{\frac{1}{p}}}\right)^{2(n_\lambda+1)} \\ &= \left(1-\left(\frac{|\lambda|S}{(2(n_\lambda+1))^{\frac{1}{p}}}\right)^2\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Оскільки $n_\lambda + 1 > \frac{1}{2}\left(\frac{|\lambda|S}{\gamma}\right)^p$, то $\frac{2(n_\lambda+1)}{(|\lambda|S)^p} > \frac{1}{\gamma^p}$, тобто $\gamma > \frac{|\lambda|S}{(2(n_\lambda+1))^{\frac{1}{p}}}$, тому з (4.21) випливає, що

$$A_2(\lambda) \leqslant \frac{\gamma^{2(n_\lambda+1)}}{1-\gamma^2} \leqslant \frac{\gamma^4}{1-\gamma^2} \leqslant \gamma^2 \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} \leqslant \gamma^2 \leqslant 2\gamma \leqslant \left(\frac{\lambda S}{\gamma}\right)^p \gamma$$

(оскільки $\left(\frac{\lambda S}{\gamma}\right)^p > 2$). Отже, при $|\lambda| > \lambda_1$, мають місце співвідношення

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= 1 + \left(\frac{|\lambda| S}{\gamma}\right)^p \gamma + \sum_{n=1}^{n_\lambda} \frac{\left(\left(\frac{|\lambda| S}{\gamma}\right)^p \gamma\right)^{2n}}{(2n)^{2n}} \\ &\leqslant 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\left(\frac{|\lambda| S}{\gamma}\right)^p \gamma\right)^{k}}{k!} \leqslant \exp\left\{\left(\frac{|\lambda| S}{\gamma}\right)^p \gamma\right\} \\ &= \exp\left\{\left(\frac{|\lambda| S}{\gamma 2^{\frac{1}{2p}}}\right)^p 2^{\frac{1}{2}} \gamma\right\} \leqslant \exp\left\{\left(\frac{|\lambda| S}{\gamma 2^{\frac{1}{2p}}}\right)^p\right\}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Оскільки $\frac{|\lambda| S}{\gamma 2^{\frac{1}{2p}}} \geqslant \frac{\lambda_1 S}{\gamma 2^{\frac{1}{2p}}} \geqslant 1$, то при $|\lambda| > \lambda_1$ з (4.22) та з (4.18) випливає, що

$$S(\lambda) \leqslant \exp\left\{\varphi_p\left(\frac{|\lambda| S}{\gamma 2^{\frac{1}{2p}}}\right)\right\}. \tag{4.23}$$

З (4.20) та (4.23) випливає ,що

$$\begin{aligned} S(\lambda) \quad &\leqslant \quad \exp\left\{\varphi\left(\frac{|\lambda| S}{2^{\frac{1}{2p}}} \inf_{0 \leqslant \gamma \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}} \max\left(\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{2^{\frac{1}{2p}}\sqrt{1-\gamma^2}}\right)\right)\right\} \\ &= \quad \exp\left\{\varphi_p\left(|\lambda| S 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\right)\right\}. \end{aligned}$$ □

Лема 4.7. *Нехай ξ деяка випадкова величина, $\alpha > 0$, $b > 0$, $S > 0$, тоді має місце нерівність*

$$\boldsymbol{E}|\xi|^S \leqslant b^S \left(\frac{S}{\alpha}\right)^{\frac{S}{\alpha}} \exp\left\{-\frac{S}{\alpha}\right\} \boldsymbol{E} \exp\left\{\frac{|\xi|^\alpha}{b^\alpha}\right\}. \tag{4.24}$$

Доведення. При $x > 0$ має місце нерівність

$$x^S \leqslant e^{x^\alpha} \left(\frac{S}{\alpha}\right)^{\frac{S}{\alpha}} e^{-\frac{S}{\alpha}},$$

(оскільки $\max\limits_{x>0} \frac{x^s}{e^{x^\alpha}} = \left(\frac{S}{\alpha}\right)^{\frac{S}{\alpha}} e^{-\frac{S}{\alpha}}$). Покладемо $x = \frac{|\xi|}{b}$, тоді

$$|\xi|^s \leqslant b^s \exp\left\{\left(\frac{|\xi|}{b}\right)^\alpha\right\} \left(\frac{s}{\alpha}\right)^{\frac{s}{\alpha}} e^{-\frac{s}{\alpha}}.$$

Якщо взяти математичне сподівання від правої і лівої частин останньої нерівності, то отримаємо (4.24). □

Лема 4.8. *При* $u > 0$, $v > 0$, $\alpha \geqslant 1$, $0 \leqslant \gamma \leqslant \alpha$

$$\left|\sin \frac{u}{v}\right| \leqslant \left(\frac{\ln(e^{\alpha-1} + u)}{\ln(e^{\alpha-1} + v)}\right)^\gamma.$$

Доведення. Якщо $u > v$, то нерівність очевидна. Нехай $u < v$, тоді

$$\left|\sin \frac{u}{v}\right| \leqslant \frac{|u|}{|v|} \leqslant \left(\frac{\ln(e^{\alpha-1} + u)}{\ln(e^{\alpha-1} + v)}\right)^\gamma,$$

так як функція $f(u) = \frac{\ln(e^{\alpha-1}+u)}{u}$ монотонно спадає при $u > 0$. Дійсно,

$$\begin{aligned} f'(u) &= \frac{\gamma\left(\ln(e^{\alpha-1}+u)\right)^{\gamma-1} \frac{u}{e^{\alpha-1}+u} - \left(\ln(e^{\alpha-1}+u)\right)^\gamma}{u^2} \\ &= \frac{\gamma u\left(\ln(e^{\alpha-1}+u)\right)^{\gamma-1} - (e^{\alpha-1}+u)\left(\ln(e^{\alpha-1}+u)\right)^\gamma}{(e^{\alpha-1}+u)u^2} \leqslant 0 \end{aligned}$$

оскільки

$$g(u) = \gamma u \leqslant (e^{\alpha-1} + u)(\ln(e^{\alpha-1} + u)) = r(u),$$

(тому що $q'(u) = \gamma$; $r'(u) = \ln(e^{\alpha-1} + u) + 1$; $r'(u) > r'(0) = \alpha \geqslant \gamma = q'(u)$). □

Наслідок 4.1. *При* $0 < \alpha \leqslant 1$ *має місце нерівність*

$$\left|\sin \frac{u}{v}\right| \leqslant \left(\frac{\ln(1 + |u|)}{\ln(1 + |v|)}\right)^\alpha. \tag{4.25}$$

Доведення. Коли $|u| \geqslant |v|$, то нерівність тривіальна. Якщо $|u| < |v|$ то досить довести (4.25) при $\alpha = 1$. Отже, коли $|u| < |v|$, то

$$\left|\sin \frac{u}{v}\right| \leqslant \frac{|u|}{|v|} \leqslant \frac{\ln(1 + |u|)}{\ln(1 + |v|)},$$

оскільки функція $f(v) = \dfrac{\ln(1+v)}{v}$ монотонно спадає при $v > 0$. $\square$

Розглянемо випадковий процес $\eta_\Lambda(t)$ описаний виразом (3.6).

Зауваження 4.1. В теоремі 3.2 було доведено, що випадковий процес η_Λ є субгауссовим, тобто належить простору $Sub_{\varphi_2}(\Omega)$, де $\varphi_2(x) = x^2$. Звідси та з теореми 1.9 випливає, що $\eta_\Lambda(t) \in Sub_{\varphi_p}(\Omega)$, де $p \geqslant 2$. $\diamondsuit$

Теорема 4.10. *Нехай для деякого $\alpha > 2$ виконуєтьcя умова*

$$\int\limits_0^\infty \exp\left\{(\ln(1+\lambda))^\alpha\right\} dF(\lambda) < \infty, \tag{4.26}$$

тоді має місце нерівність

$$\tau^2_{\varphi_p}(\eta_\Lambda(t)) \leqslant \frac{1}{\ln^2\left(1+\frac{1}{t}\right)} C_\alpha \sum_{k=0}^{M} b_k^2 d_k^2, \tag{4.27}$$

де p–таке число, що $\frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2}$, $\left(p = \frac{2\alpha}{\alpha-2}\right)$, $C_\alpha = 32 \cdot 2^{1-\frac{1}{p}} \left(e\alpha\right)^{-\frac{2}{\alpha}} e^{\frac{26}{24}}$, $b_k^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)$, d_k – норма Люксембурга випадкової величини $\ln(1+\theta_k)$ в просторі Орлича $L_U(\Omega)$, де $U(x) = \exp\{|x|^\alpha\} - 1$, $\theta_k = \frac{|\theta_{k1}-\theta_{k2}|}{2}$, θ_{k1}, θ_{k2} – незалежні випадкові величини, однаково розподілені з функцією розподілу $F_k(\lambda) = \frac{F(\lambda)-F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1}-F(\lambda_k))}$, $F(\lambda)$ – спектральна функція процесу.

Доведення. Оскільки в $\eta_\Lambda(t)$ всі доданки при різних k незалежні, то з теореми 1.10 при $p \geqslant 2$ випливає, що

$$\begin{aligned}
&\tau^2_{\varphi_p}(\eta_\Lambda(t)) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{M} \tau^2_{\varphi_p}\left[\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda) + \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right] \\
&\leqslant 2\sum_{k=0}^{M}\left(\tau^2_{\varphi_p}\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right)\right. \\
&\quad \left.+\tau^2_{\varphi_p}\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right)\right).
\end{aligned} \tag{4.28}$$

З теореми 4.9, та (4.28) випливає, що

$$\begin{aligned}
\tau^2_{\varphi_p}(\eta_\Lambda(t)) \leqslant 2\cdot 2^{1-\frac{1}{p}} \sum_{k=0}^{M} S^2_{\varphi_p}&\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right) \\
&+ S^2_{\varphi_p}\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right).
\end{aligned} \tag{4.29}$$

З леми 3.1 випливає, що ($b_k^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)$)

$$\begin{aligned}
I_k &= \mathbf{E}\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right)^{2m} \\
&\leqslant 4^m \Delta_{2m} b_k^{2m}\mathbf{E}\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\sin\frac{t(\zeta_k-\lambda)}{2}\right)^2 dF_k(\lambda)\right)^m \\
&= 4^m \Delta_{2m} b_k^{2m}\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\sin\frac{t(u-\lambda)}{2}\right)^2 dF_k(u)\right)^m dF_k(\lambda)\right) \\
&= 4^m \Delta_{2m} b_k^{2m}\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\sin\frac{t(u-\lambda)}{2}\right)^{2m} dF_k(u)dF_k(\lambda)\right).
\end{aligned}$$

З наслідку 4.1 випливає, що

$$I_k \leqslant 4^m \Delta_{2m} b_k^{2m} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\frac{\ln\left(1+\frac{|u-\lambda|}{2}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)} \right)^{2m} dF_k(u) dF_k(\lambda) \right)$$

$$= \frac{4^m \Delta_{2m} b_k^{2m}}{\left(\ln(1+\frac{1}{t})\right)^{2m}} \mathbf{E} \left(\ln(1+\theta_k)\right)^{2m} \quad , \qquad (4.30)$$

де θ_k така випадкова величина, що $\theta_k = \frac{|\theta_{k1}-\theta_{k2}|}{2}$, де θ_{k1}, θ_{k2} -незалежні однаково розподілені випадкові величини з функцією розподілу $F_k(\lambda) = \frac{F(\lambda)-F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k)}$.

З леми 4.7 при будь-яких $d_k > 0, \alpha > 2$ випливає нерівність ($S = 2m$)

$$\mathbf{E} \left(\ln(1+\theta_k)\right)^{2m} \leqslant d_k^{2m} \left(\frac{2m}{\alpha}\right)^{\frac{2m}{\alpha}} \exp\left\{-\frac{2m}{\alpha}\right\} \mathbf{E} \exp\left\{\frac{(\ln(1+\theta_k))^{\alpha}}{d_k^{\alpha}}\right\}. \qquad (4.31)$$

Оскільки при $\alpha > 2$ функція $U(x) = \exp\{|x|^{\alpha}\} - 1$ – це N -функція Орлича, то з умови теореми випливає, що випадкова величина $\ln(1+\theta_k)$ належить простору Орлича $L_U(\Omega)$. Покладемо $d_k = \|\ln(1+\theta_k)\|_{\alpha}$, тоді має місце нерівність $\mathbf{E} \exp\left\{\frac{(\ln(1+\theta_k))^{\alpha}}{d_k^{\alpha}}\right\} \leqslant 2$. Отже, при кожному $m = 1, 2, \ldots$ з (4.31) випливає нерівність

$$\mathbf{E} \left(\ln(1+\theta_k)\right)^{2m} \leqslant 2 d_k^{2m} \left(\frac{2m}{\alpha}\right)^{\frac{2m}{\alpha}} \exp\left\{-\frac{2m}{\alpha}\right\}. \qquad (4.32)$$

Отже, з (4.32) та (4.30) випливає нерівність

$$I_k \leqslant \frac{4^m \Delta_{2m} b_k^{2m}}{\left(\ln(1+\frac{1}{t})\right)^{2m}} \cdot 2 d_k^{2m} \left(\frac{2m}{\alpha}\right)^{\frac{2m}{\alpha}} \exp\left\{-\frac{2m}{\alpha}\right\}. \qquad (4.33)$$

З (4.33) та означення $S_{\varphi_p}(\bullet)$ випливає нерівність

$$S_{\varphi_p} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t) d\eta_1(\lambda) \right) \leqslant \sup_{m \geqslant 1} (2m)^{\frac{1}{p}} \frac{(I_k)^{\frac{1}{2m}}}{((2m)!)^{\frac{1}{2m}}}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sup_{m\geqslant 1} \frac{(2m)^{\frac{1}{p}}}{((2m)!)^{\frac{1}{2m}}} \frac{2((2m)!)^{\frac{1}{2m}}\sqrt{b_k^2}2^{\frac{1}{2m}}d_k}{\sqrt{2}(m!)^{\frac{1}{2m}}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)} \left(\frac{2m}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \exp\left\{-\frac{1}{\alpha}\right\} \\
&= \sup_{m\geqslant 1} \frac{\sqrt{2}b_k d_k 2^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2m}+\frac{1}{\alpha}} m^{\frac{1}{p}+\frac{1}{\alpha}}}{(m!)^{\frac{1}{2m}}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\exp\left\{\frac{1}{\alpha}\right\}}. \qquad (4.34)
\end{aligned}
$$

З формули Стірлінга випливає нерівність $\left(\frac{1}{m!}\right)^{\frac{1}{2m}} \leqslant \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{24}}$, отже з (4.34) випливає $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}=0\right)$, що

$$
\begin{aligned}
&S_{\varphi_p}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t) d\eta_1(\lambda)\right) \\
&\qquad \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)} b_k d_k 2^{\frac{1}{p}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{e\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{13}{24}} = \frac{2\sqrt{2}}{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)} b_k d_k (e\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{13}{24}}.
\end{aligned}
$$

Аналогічно доводимо, що

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t) d\eta_2(\lambda)\right)^{2m} \\
&\qquad \leqslant 4^m \Delta_{2m} b_k^{2m} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\sin\frac{t(u-\lambda)}{2}\right)^{2m} dF_k(\lambda)dF_k(u)\right) = I_k,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&S_{\varphi_p}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t) d\eta_2(\lambda)\right) \\
&\qquad \leqslant \sup_{m\geqslant 1} (2m)^{\frac{1}{p}} \frac{(I_k)^{\frac{1}{2m}}}{((2m)!)^{\frac{1}{2m}}} \leqslant \sup_{m\geqslant 1} \frac{2\sqrt{2}}{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)} b_k d_k (e\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{13}{24}}.
\end{aligned}
$$

З (4.29) випливає нерівність

$$
\tau_{\varphi_p}^2(\eta_\Lambda(t)) \leqslant 32\cdot 2^{1-\frac{1}{p}} (e\alpha)^{-\frac{2}{\alpha}} e^{\frac{26}{24}} \sum_{k=0}^{M} b_k^2 d_k^2 \frac{1}{\ln^2\left(1+\frac{1}{t}\right)} . \qquad \square
$$

Теорема 4.11. *Нехай для деякого $\alpha > 2$ виконується умова (4.26),* *тоді має місце нерівність*

$$\tau_{\varphi_p}^2(\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s)) \leqslant \frac{1}{\ln^2\left(1+\frac{1}{|t-s|}\right)} \widetilde{C}_\alpha \sum_{k=0}^{M} b_k^2 \hat{d}_k^2,$$

де $p=\frac{2\alpha}{\alpha-2}$, $\widetilde{C}_\alpha = 64\cdot 2^{1-\frac{1}{p}}(e\alpha)^{-\frac{2}{\alpha}} e^{\frac{26}{24}}$, $b_k^2 = F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k)$, $\hat{d}_k$ *– норма Люксембурга випадкової величини*

$$\ln\left(1+\frac{|\theta_{k1}-\theta_{k2}|}{4}\right)+\ln\left(1+\frac{\theta_{k1}}{2}\right)\frac{\ln\left(1+\frac{|\theta_{k1}-\theta_{k2}|}{4}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{2T}\right)}$$

в просторі Орлича $L_U(\Omega)$ *, де* $U(x)=\exp\{|x|^\alpha\}-1$, θ_{k1} *та* θ_{k2} *– незалежні однаково розподілені випадкові величини з функцією розподілу* $F_k(\lambda)=\frac{F(\lambda)-F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k)}$.

Доведення. Позначимо

$$\omega_{k1} = \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t - \cos\lambda s + \cos\zeta_k s) d\eta_1(\lambda),$$

$$\omega_{k2} = \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t - \sin\lambda s + \sin\zeta_k s) d\eta_2(\lambda).$$

З леми 1.7 випливає

$$\tau_{\varphi_p}^2(\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(t)) \leqslant 2\sum_{k=0}^{M}\left[\tau_{\varphi_p}^2(\omega_{k1})+\tau_{\varphi_p}^2(\omega_{k2})\right].$$

З теореми 4.9 маємо

$$\tau_{\varphi_p}^2(\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s)) \leqslant 2\cdot 2^{1-\frac{1}{p}}\sum_{k=0}^{M}\left(S_{\varphi_p}^2(\omega_{k1})+S_{\varphi_p}^2(\omega_{k2})\right). \qquad (4.35)$$

З леми 4.3 випливає, що

$$
\begin{aligned}
I_k &= \mathbf{E}\left(\omega_{k1}\right)^{2m} \leqslant 4^{2m}\Delta_{2m}\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\left|\sin\frac{(s-t)(\lambda-\zeta_k)}{4}\right|\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.+\left|\sin\frac{\zeta_k(s-t)}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{(t+s)(\zeta_k-\lambda_k)}{4}\right|\right)^2 dF(\lambda)\right)^m \\
&= 4^{2m}\Delta_{2m}b_k^{2m}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\left|\sin\frac{(s-t)(\lambda-u)}{4}\right|\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.+\left|\sin\frac{u(s-t)}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{(t+s)(u-\lambda)}{4}\right|\right)^{2m} dF_k(u)dF_k(\lambda)\right) \qquad (4.36)
\end{aligned}
$$

З наслідку 4.1 отримаємо, що

$$
\begin{aligned}
I_k &\leqslant 4^{2m}\Delta_{2m}b_k^{2m}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{|u-\lambda|}{4}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{|s-t|}\right)}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.+\frac{\ln\left(1+\frac{u}{2}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{|s-t|}\right)}\frac{\ln\left(1+\frac{|u-\lambda|}{4}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{(t+s)}\right)}\right)^{2m} dF_k(u)dF_k(\lambda)\right) \\
&= \frac{4^{2m}\Delta_{2m}b_k^{2m}}{\left(\ln\left(1+\frac{1}{|s-t|}\right)\right)^{2m}}\mathbf{E}\left(\ln\left(1+\frac{|\theta_{k1}-\theta_{k2}|}{4}\right)\right. \\
&\qquad \left.+\frac{\ln\left(1+\frac{\theta_{k1}}{2}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{|\theta_{k1}-\theta_{k2}|}{4}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{2T}\right)}\right)^{2m}, \qquad (4.37)
\end{aligned}
$$

де θ_{k1}, θ_{k2} – незалежні однаково розподілені випадкові величини з функцією розподілу $F_k(x)=\frac{F(x)-F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k)}$; $t,s\in[0,T]$.

З леми 4.7 при довільних $\hat{d}_k>0$, $\alpha>2$ випливає нерівність

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(\ln\left(1+\frac{|\theta_{k1}-\theta_{k2}|}{4}\right)+\frac{\ln\left(1+\frac{\theta_{k1}}{2}\right)\ln\left(1+\frac{|\theta_{k1}-\theta_{k2}|}{4}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{2T}\right)}\right)^{2m} \\
&\qquad \leqslant \hat{d}_k^{2m}\left(\left(\frac{2m}{\alpha}\right)^{\frac{2m}{\alpha}}\exp\left\{-\frac{2m}{\alpha}\right\}\mathbf{E}\exp\left\{\frac{L^\alpha}{\hat{d}_k^\alpha}\right\}\right), \qquad (4.38)
\end{aligned}
$$

де

$$L = \ln\left(1 + \frac{|\theta_{k1} - \theta_{k2}|}{4}\right) + \frac{\ln\left(1 + \frac{\theta_{k1}}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{|\theta_{k1} - \theta_{k2}|}{4}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{2T}\right)}.$$

Оскільки при $\alpha > 2$ функція $U(x) = \exp\{|x|^\alpha\} - 1$ – це N-функція Орлича, то з умови теореми випливає, що випадкова величина L належить простору Орлича $L_u(\Omega)$. Покладемо $\hat{d}_k = \|L\|_\alpha$, тоді має місце нерівність

$$\mathbf{E}\exp\left\{\frac{L^\alpha}{\hat{d}^\alpha}\right\} \leqslant 2.$$

Отже, при кожному $m = 1, 2, \ldots$ з 4.38 випливає нерівність

$$\mathbf{E}\left(\ln\left(1 + \frac{|\theta_{k1} - \theta_{k2}|}{4}\right) + \frac{\ln\left(1 + \frac{\theta_{k1}}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{|\theta_{k1} - \theta_{k2}|}{4}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{2T}\right)}\right)$$
$$\leqslant 2\hat{d}_k^{2m}\left(\frac{2m}{\alpha}\right)^{\frac{2m}{\alpha}}\exp\left\{-\frac{2m}{\alpha}\right\}. \quad (4.39)$$

Отже, з (4.37) та (4.39) випливає нерівність

$$I_k \leqslant \frac{4^{2m}\Delta_{2m} b_k^{2m}}{\left(\ln\left(1 + \frac{1}{|s-t|}\right)\right)^{2m}} 2\hat{d}_k^{2m}\left(\frac{2m}{\alpha}\right)^{\frac{2m}{\alpha}}\exp\left\{-\frac{2m}{\alpha}\right\}. \quad (4.40)$$

З (4.40) та означення $S_{\varphi_p}(\bullet)$ отримаємо

$$S_{\varphi_p}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t - \cos\zeta_k t - \cos\lambda s + \cos\zeta_k s)d\eta_1(\lambda)\right)$$
$$\leqslant \sup_{m\geqslant 1}(2m)^{\frac{1}{p}}\frac{(I_k)^{\frac{1}{2m}}}{((2m)!)^{\frac{1}{2m}}}$$
$$\leqslant \sup_{m\geqslant 1}\frac{(2m)^{\frac{1}{p}} 4\left(\frac{(2m)!}{2^m m!}\right)^{\frac{1}{2m}} b_k 2^{\frac{1}{2m}}}{((2m)!)^{\frac{1}{2m}}\ln\left(1 + \frac{1}{|s-t|}\right)}\hat{d}_k\left(\frac{2m}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\exp\left\{-\frac{1}{\alpha}\right\}$$
$$= \sup_{m\geqslant 1}\frac{2\sqrt{2}b_k\hat{d}_k 2^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2m}+\frac{1}{\alpha}} m^{\frac{1}{p}+\frac{1}{\alpha}}}{(m!)^{\frac{1}{2m}}\ln\left(1 + \frac{1}{|s-t|}\right)\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\exp\left\{\frac{1}{\alpha}\right\}}.$$

З формули Стірлінга справедлива нерівність

$$\left(\frac{1}{m!}\right)^{\frac{1}{2m}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{m}} e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{24}} .$$

Тоді, враховуючи, що $\frac{1}{p}+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}=0$, маємо

$$\begin{aligned} S_{\varphi_p}&\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t-\cos\zeta_k t-\cos\lambda s+\cos\zeta_k s)d\eta_1(\lambda)\right) \\ &\leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\ln\left(1+\frac{1}{|s-t|}\right)} b_k \hat{d}_k 2^{\frac{1}{p}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}} (e\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{13}{24}} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{\ln\left(1+\frac{1}{|s-t|}\right)} b_k \hat{d}_k (e\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{13}{24}}. \end{aligned}$$

Аналогічно дістаємо

$$S_{\varphi_p}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t-\sin\zeta_k t-\sin\lambda s+\sin\zeta_k s)d\eta_2(\lambda)\right) \leqslant \frac{4\sqrt{2}}{\ln\left(1+\frac{1}{|s-t|}\right)} b_k \hat{d}_k (e\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{13}{24}}.$$

З (4.35) випливає нерівність

$$\tau^2_{\varphi_p}(\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s)) \leqslant 64\cdot 2^{1-\frac{1}{p}} (e\alpha)^{-\frac{2}{\alpha}} e^{\frac{26}{24}} \sum_{k=0}^{M} b_k^2 \hat{d}_k^2 \frac{1}{\ln^2\left(1+\frac{1}{|s-t|}\right)}. \qquad \square$$

Зауваження 4.2. Величину d_k з теореми 4.10 можна оцінити у такий спосіб. Розглянемо в (4.31) $\mathbf{E}\exp\left\{\frac{(\ln(1+\theta_k))^\alpha}{d_k^\alpha}\right\}$.

Нехай $k<M$. Оскільки

$$L_k = \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \exp\left\{\left(\frac{\ln\left(1+\frac{|u-v|}{2}\right)}{S}\right)^\alpha\right\} dF_k(u)dF_k(v)$$

$$\leqslant \quad \exp\left\{\left(\frac{\ln\left(1+\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{2}\right)}{S}\right)^{\alpha}\right\},$$

то $L_k \leqslant 2$, коли $S \geqslant \frac{\ln\left(1+\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{2}\right)}{(\ln 2)^{\frac{1}{\alpha}}}$. Отже, згідно з означення норми Люксембурга

$$d_k \leqslant \frac{\ln\left(1+\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{2}\right)}{(\ln 2)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Коли $k = M$, то скористаємось лемою 1.10 та зауваженням 1.4. Згідно з цією лемою

$$\begin{aligned} d_M \quad &\leqslant \quad \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} \exp\left\{\left(\ln\left(1+\frac{|u-v|}{2}\right)\right)^{\alpha}\right\} dF_M(u)dF_M(v)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &\leqslant \quad \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} \exp\left\{(\ln(1+u))^{\alpha}\right\} dF_M(u)dF_M(v)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leqslant \quad \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} \exp\left\{(\ln(1+u))^{\alpha}\right\} dF_M(u)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \quad \left(\frac{1}{b_M^2}\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} \exp\left\{(\ln(1+u))^{\alpha}\right\} dF(u)\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\sum_{k=0}^{M} b_k^2 d_k^2 \leqslant \sum_{k=0}^{M-1} b_k^2 \left(\frac{\ln\left(1+\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{2}\right)}{(\ln 2)^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^2 + b_M^{2-\frac{4}{\alpha}}\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} \exp\left\{(\ln(1+u))^{\alpha}\right\} dF(u)\right)^{\frac{2}{\alpha}}.$$

З того, що $\alpha > 2$, з останньої нерівності та умови (4.26) випливає, що суму $\sum\limits_{k=0}^{M} b_k^2 d_k^2$ можна зробити як завгодно малою, якщо вибрати достатньо велике λ_M та достатньо мале $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant M-1}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)$. Наприклад, коли $\lambda_M=\Lambda$, $\lambda_{k+1}-\lambda_k=\frac{\Lambda}{M}$ при $k=0,1,\ldots,M-1$, $\sum\limits_{k=0}^{M} b_k^2\leqslant F(+\infty)$, то

$$\sum_{k=0}^{M} b_k^2 d_k^2 \leqslant \left(\frac{\ln\left(1+\frac{\Lambda}{2M}\right)}{(\ln 2)^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^2 F(+\infty)$$
$$+\left(\int\limits_{\Lambda}^{\infty}\exp\left\{(\ln(1+u))^{\alpha}\right\}dF(u)\right)^{\frac{2}{\alpha}}(F(+\infty)-F(\Lambda))^{2-\frac{4}{\alpha}}.$$

Аналогічно оцінимо величину $\hat{d}_k$ з теореми 4.11. Розглянемо в (4.38) величину

$$\mathbf{E}\exp\left\{\frac{\left(\ln\left(1+\frac{|\theta_{k1}-\theta_{k2}|}{4}\right)+\frac{\ln\left(1+\frac{\theta_{k1}}{2}\right)\ln\left(1+\frac{|\theta_{k1}-\theta_{k2}|}{4}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{2T}\right)}\right)^{\alpha}}{\hat{d}_k^{\alpha}}\right\}.$$

Нехай $k<M$.

$$\tilde{L}_k=$$
$$=\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\exp\left\{\left(\frac{\ln\left(1+\frac{|u-v|}{4}\right)+\frac{\ln\left(1+\frac{u}{2}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{2T}\right)}\ln\left(1+\frac{|u-v|}{4}\right)}{S}\right)^{\alpha}\right\}$$
$$dF_k(u)dF_k(v)$$
$$\leqslant \exp\left\{\left(\frac{\ln\left(1+\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{4}\right)+\frac{\ln\left(1+\frac{\lambda_{k+1}}{2}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{2T}\right)}\ln\left(1+\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{4}\right)}{S}\right)^{\alpha}\right\}.$$

$\tilde{L}_k\leqslant 2$ при умові, коли

$$S\geqslant\frac{\ln\left(1+\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{4}\right)+\frac{\ln\left(1+\frac{\lambda_{k+1}}{2}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{2T}\right)}\ln\left(1+\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{4}\right)}{(\ln 2)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Отже, згідно означення норми Люксембурга

$$\hat{d}_k \leqslant \frac{\ln\left(1+\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{4}\right)+\frac{\ln\left(1+\frac{\lambda_{k+1}}{2}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{2T}\right)}\ln\left(1+\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{4}\right)}{(\ln 2)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Коли $k=M$, то з леми 1.10 та зауваження 1.4 отримаємо

$$\begin{aligned}
\hat{d}_M \quad &\leqslant \quad \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\exp\left\{\left[\ln\left(1+\frac{|u-v|}{4}\right)\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left.+\frac{\ln\left(1+\frac{u}{2}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{2T}\right)}\ln\left(1+\frac{|u-v|}{4}\right)\right]^{\alpha}\right\}dF_M(u)dF_M(v)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&\leqslant \quad \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\exp\left\{\left[\ln\left(1+\frac{u}{2}\right)\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left.+\frac{\ln^2\left(1+\frac{u}{2}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{2T}\right)}\right]^{\alpha}\right\}dF_M(u)dF_M(v)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&\leqslant \quad \left(\frac{1}{b_M^2}\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\exp\left\{\left(\ln\left(1+\frac{u}{2}\right)+\frac{\ln^2\left(1+\frac{u}{2}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{2T}\right)}\right)^{\alpha}\right\}dF(u)\right)^{\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Отже

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{M} b_k^2\hat{d}_k^2 \leqslant \\
&\quad \leqslant \sum_{k=0}^{M-1} b_k^2\left(\frac{\ln\left(1+\frac{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)}{4}\right)+\frac{\ln\left(1+\frac{\lambda_{k+1}}{2}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{2T}\right)}\ln\left(1+\frac{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)}{4}\right)}{(\ln 2)^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^2 \\
&\qquad + b_M^{2-\frac{4}{\alpha}}\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\exp\left\{\left(\ln\left(1+\frac{u}{2}\right)+\frac{\ln^2\left(1+\frac{u}{2}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{2T}\right)}\right)^{\alpha}\right\}dF(u)\right)^{\frac{2}{\alpha}}. \quad \diamondsuit
\end{aligned}$$

Зауваження 4.3. Норми завжди можна оцінити більш точно наближеними методами. $\diamondsuit$

З останніх двох теорем справедливим є наслідок.

Наслідок 4.2. *Нехай для деякого $\alpha > 2$ виконується умова (4.26), тоді для сепарабельного процесу $\eta_\Lambda(t)$, що належить простору $Sub_{\varphi_p}(\Omega)$, де*

$$\varphi_p(u) = \begin{cases} u^2, & |u| < 1, \\ |u|^p, & |u| > 1, \end{cases} \qquad p = \frac{2\alpha}{\alpha - 2}\ ,$$

виконуються нерівності

$$\tau_{\varphi_p}(\eta_\Lambda(t)) \leqslant \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)} C_\Lambda, \tag{4.41}$$

де $C_\Lambda = \left(C_\alpha \sum\limits_{k=0}^{M} b_k^2 d_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$*,* C_α, b_k^2, d_k^2 *визначені у формулі (4.27), та*

$$\tau_{\varphi_p}(\eta_\Lambda(t) - \eta_\Lambda(s)) \leqslant \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{|t-s|}\right)} L_\Lambda, \tag{4.42}$$

де $L_\Lambda = \left(\widetilde{C}_\alpha \sum\limits_{k=0}^{M} b_k^2 \hat{d}_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\widetilde{C}_\alpha, \quad b_k^2,\ \hat{d}_k^2$ *визначені в теоремі 4.11.*

З леми 1.13 випливає таке твердження для процесу $\eta_\Lambda(t)$.

Теорема 4.12. *Нехай для деякого $\alpha > 2$ виконується умова (4.26). Тоді при будь-яких $T \geqslant 1$, $\lambda > 0$ та $\delta > 0$ таких, що $\delta < \frac{1}{\gamma_T} \min(L_\Lambda, \varkappa_T)$, де $\varkappa_T = \frac{L_\Lambda}{\ln(1+\frac{2}{T})}$, $\gamma_T = \frac{C_\Lambda}{\ln\left(1+\frac{1}{T}\right)}$, C_Λ визначене в (4.41), L_Λ – в (4.42), має місце нерівність*

$$\boldsymbol{E} \exp\left\{\lambda \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\eta_\Lambda(t)|\right\} \leqslant 2\tilde{G}(\lambda, \delta), \tag{4.43}$$

де

$$\tilde{G}(\lambda, \delta) = \exp\left\{\varphi_p\left(\frac{\lambda\gamma_T}{1-\delta}\right) + 2\lambda B_\delta\right\},$$

$$B_\delta = \frac{1}{(1-\delta)\delta}\left((\ln T)^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}} \delta\gamma_T + L_\Lambda^{\frac{\alpha-2}{2\alpha}} (\delta\gamma_T)^{\frac{\alpha-2}{2\alpha}} \frac{2\alpha}{\alpha-2}\right),$$

де $\varphi_p(x)$ визначене в (4.18), $p = \frac{2\alpha}{\alpha-2}$.

Доведення. Теорема випливає з леми 1.13 та наслідку 4.2.

Дійсно, покладемо в лемі 1.13 $\mathcal{T} = [0, T]$, $\rho(t, s) = |t-s|$, $X(t) = \eta_\Lambda(t)$,

$\varphi(x) = \varphi_p(x)$. З наслідку 4.2 дістаємо, що

$$\sigma(h) = \frac{L_\Lambda}{\ln\left(1+\frac{1}{h}\right)}, \quad \gamma_0 = \frac{C_\Lambda}{\ln\left(1+\frac{1}{T}\right)} = \gamma_T,$$

$$\varkappa = \varkappa_T,\ \sigma^{(-1)}(u) = \left(\exp\left\{\frac{L_\Lambda}{u}\right\} - 1\right)^{-1}.$$

Зрозуміло, що $N(\varepsilon) \leqslant \frac{T}{2\varepsilon} + 1$, тому

$$\begin{aligned} H(\sigma^{(-1)}(u)) &= \ln\left(N(\sigma^{(-1)}(u))\right) \leqslant \ln\left(\frac{T}{2}\left(\exp\left\{\frac{L_\Lambda}{u}\right\} - 1\right) + 1\right) \\ &\leqslant \ln\left(T\exp\left\{\frac{L_\Lambda}{u}\right\} - (T-1)\right) \leqslant \ln\left(T\exp\left\{\frac{L_\Lambda}{u}\right\}\right) = \frac{L_\Lambda}{u} + \ln T. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Оскільки $\delta\gamma_T \leqslant \varkappa_T$, то можна покласти $\beta = \gamma_T$, тоді з (1.13) та (4.44) отримуємо, що

$$(\lambda, \delta) \leqslant \exp\left\{\varphi_p\left(\frac{\lambda\gamma_T}{1-\delta}\right) + 2\lambda\left[\frac{1}{(1-\delta)\delta}\int_0^{\delta\gamma_T}\zeta_\varphi(u)du\right]\right\}. \tag{4.45}$$

Оскільки $\dfrac{\delta\gamma_T}{L_\Lambda} < 1$, то

$$\int_0^{\delta\gamma_T}\zeta_\varphi(u)du = \int_0^{\delta\gamma_T}\left(\frac{L_\Lambda}{u} + \ln T\right)^{1-\frac{1}{p}} du \leqslant L_\Lambda^{\frac{p-1}{p}}\,(\delta\gamma_T)^{\frac{1}{p}}\,p + (\ln T)^{1-\frac{1}{p}}\delta\gamma_T.$$

З останньої рівності та нерівностей (1.13) та (4.45) випливає

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\exp\left\{\lambda\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta_\Lambda(t)|\right\} \\ &\leqslant \quad 2\exp\left\{\varphi_p\left(\frac{\lambda\gamma_T}{1-\delta}\right) + 2\lambda\left[\frac{1}{(1-\delta)\delta}\left(L_\Lambda^{\frac{p-1}{p}}(\delta\gamma_T)^{\frac{1}{p}}p + (\ln T)^{1-\frac{1}{p}}\delta\gamma_T\right)\right]\right\} \\ &= \quad 2\exp\left\{\varphi_p\left(\frac{\lambda\gamma_T}{1-\delta}\right) + 2\lambda\frac{1}{(1-\delta)\delta}\left((\ln T)^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}\delta\gamma_T + \right.\right. \\ &+ \quad \left.\left. L_\Lambda^{\frac{\alpha-2}{2\alpha}}(\delta\gamma_T)^{\frac{\alpha-2}{2\alpha}}\frac{2\alpha}{\alpha-2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

□

Наслідок 4.3. *Нехай виконуються умови теореми 4.12, тоді для будь-яких $T > 0$, $\varepsilon > 2B_\delta$, $\delta > 0$, $\delta < \frac{L_\Lambda}{\gamma_T}$; $\delta < \frac{\varkappa_T}{\gamma_T}$ має місце нерівність*

$$P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta_\Lambda(t)| > \varepsilon\right\} \leqslant 2\exp\left\{-\varphi_p^*\left(\frac{\varepsilon - 2B_\delta}{\gamma_T}(1-\delta)\right)\right\}, \qquad (4.46)$$

де $B_\delta = \dfrac{1}{(1-\delta)\delta}\left((\ln T)^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}\delta\gamma_T + L_\Lambda^{\frac{\alpha-2}{2\alpha}}(\delta\gamma_T)^{\frac{\alpha-2}{2\alpha}}\dfrac{2\alpha}{\alpha-2}\right)$,

$p = \frac{2\alpha}{\alpha-2}$, $\varphi_p^*(u)$, $u > 0$ – *перетворення Юнга-Фенхеля функції* $\varphi_p(u)$, $\varphi_p^*(u) = \sup\limits_{v>0}(uv - \varphi_p(v))$.

Доведення. З нерівностей Чебишева та (4.43) випливає, що

$$P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta_\Lambda(t)| > \varepsilon\right\} \leqslant 2\exp\left\{\varphi_p\left(\frac{\lambda\gamma_T}{1-\delta}\right) + 2\lambda B_\delta\right\}\cdot\exp\{-\lambda\varepsilon\}$$
$$= 2\exp\left\{-\left(\frac{\lambda\gamma_T}{1-\delta}\frac{\varepsilon - 2B_\delta}{\gamma_T}(1-\delta) - \varphi_p\left(\frac{\lambda\gamma_T}{1-\delta}\right)\right)\right\}.$$

Якщо в правій частині цієї нерівності при $\varepsilon \geqslant 2B_\delta$ взяти інфінум по $\frac{\lambda\gamma_T}{1-\delta}$, то отримаємо (4.46).

Знайдемо точний вигляд функції $\varphi^*(u)$:

$$\varphi_p^*(u) = \sup_{v>0}\{uv - \varphi_p(v)\} = \sup_{|v|<1}\{uv - v^2\} = u\frac{u}{2} - \frac{u^2}{4} = \frac{u^2}{4}, \qquad 0 \leqslant u < 2,$$

$$\varphi_p^*(u) = \sup_{v>1}\{uv - v^p\} = u\left(\frac{u}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} - \left(\frac{u}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} = \frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}}u^{\frac{p}{p-1}}, \qquad u > p,$$

$\varphi_p^*(u) = u - 1$, при $v = 1$ і $2 \leqslant u \leqslant p$.

Отже

$$\varphi_p^*(u) = \begin{cases} \dfrac{u^2}{4}, & 0 \leqslant u < 2 \\ u - 1, & 2 \leqslant u \leqslant p\,. \\ \dfrac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}}u^{\frac{p}{p-1}}, & u > p \end{cases}$$

□

Теорема 4.13. *Для існування процесу $X(t)$, до якого модель $X_\Lambda(t)$ наближатиметься з заданою точністю $\varepsilon > B_\delta$ в рівномірній метриці* *та надійністю* $1-\varkappa$, $\varkappa>0$ *треба підібрати таке розбиття* Λ, *щоб виконувалась нерівність*

$$2\exp\left\{-\varphi_p^*\left(\frac{\varepsilon-2B_\delta}{\gamma_T}(1-\delta)\right)\right\}\leqslant\varkappa,$$

де $B_\delta=\frac{1}{(1-\delta)\delta}\left((\ln T)^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}\delta\gamma_T+L_\Lambda^{\frac{\alpha-2}{2\alpha}}(\delta\gamma_T)^{\frac{\alpha-2}{2\alpha}}\frac{2\alpha}{\alpha-2}\right)$, $p=\frac{2\alpha}{\alpha-2}$.

З наслідку 4.3 отримаємо таке твердження

Наслідок 4.4. *Якщо в (4.46) покласти* $\delta=\left(\frac{2A(\alpha,T)}{\varepsilon}\right)^{\frac{2\alpha}{3\alpha+2}}$, *де*

$$A(\alpha,T)=L_\Lambda^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}(\gamma_T)^{\frac{\alpha-2}{2\alpha}}\frac{2\alpha}{\alpha-2}$$

то отримаємо, що при будь-якому

$$\varepsilon>2A(\alpha,T)\cdot\max\left(\left(\frac{\gamma_T}{L_\Lambda}\right)^{\frac{3\alpha+2}{2\alpha}},\left(\frac{\gamma_T}{\varkappa_T}\right)^{\frac{3\alpha+2}{2\alpha}},2\right)$$

має місце нерівність

$$\begin{aligned}
&P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta_{N,\Lambda}(t)|\geqslant\varepsilon\right\}\\
\leqslant\quad&2\exp\left\{\varphi_p^*\left(\frac{\varepsilon-\frac{2\delta^{\frac{\alpha-2}{2\alpha}}}{(1-\delta)\delta}\left((\ln T)^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}\delta^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}\gamma_T+A(\alpha,T)\right)}{\gamma_T}(1-\delta)\right)\right\}\\
=\quad&2\exp\left\{\varphi_p^*\left(\frac{\varepsilon(1-\delta)}{\gamma_T}-2(\ln T)^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}-\frac{2A(\alpha,T)}{\gamma_T\delta^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}}\right)\right\}\\
=\quad&2\exp\left\{\varphi_p^*\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon\left(\frac{2A(\alpha,T)}{\varepsilon}\right)^{\frac{2\alpha}{3\alpha+2}}-(2A(\alpha,T))^{\frac{2\alpha}{3\alpha+2}}\varepsilon^{\frac{\alpha+2}{3\alpha+2}}}{\gamma_T}-2(\ln T)^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}\right)\right\}\\
=\quad&2\ exp\left\{\varphi_p^*\left(\frac{\varepsilon-2\varepsilon^{\frac{\alpha+2}{3\alpha+2}}(2A(\alpha,T))^{\frac{2\alpha}{3\alpha+2}}}{\gamma_T}-2(\ln T)^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

4.4. Застосування різних оцінок до моделюваня гауссових стаціонарних процесів

У першому підрозділі пропонується модель гауссового стаціонарного випадкового процесу, кореляційна функція якої не співпадає з кореляційною функцією процесу, що моделюється.

При високій точності моделювання оцінки надійності гірші ніж у попередніх випадках. Але застосування цього методу не потребує додаткових обмежень на спектральну функцію процесу. Оцінки мають місце тільки при обмеженнях, що забезпечують вибіркову неперервність з ймовірністю одиниця процесу, що моделюється.

У другому підрозділі пропонується модель гауссового стаціонарного випадкового процесу, кореляційна функція якої співпадає з кореляційною функцією процесу, що моделюється. Одержано деякі оцінки субгауссового стандарту, за якими побудовано модель процесу з заданою точністю і надійністю в $C([0,T])$. Застосування цього методу потребує додаткових обмежень на спектральну функцію процесу, зате при високій точності моделювання, оцінки надійності є кращими ніж у першому підрозділі.

У третьому підрозділі отримано оцінки наближення стаціонарного гауссового процесу його моделлю з заданими надійністю та точністю в просторі $C([0,T])$. Ці оцінки гірші попередніх при високій точності моделювання. Але вони не вимагають додаткових обмежень на спектральну функцію і можуть ефективно застосовуватись при невеликій точності (тобто при малій точності забезпечують високу надійність).

4.4.1. Побудова моделі гауссового стаціонарного випадкового процесу, кореляційна функція якої не співпадає з кореляційною функцією процесу, що моделюється

Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ – гауссів стаціонарний дійсний центрований неперервний в середньому квадратичному випадковий процес з коваріаційною функцією

$$\mathbf{E}X(t+\tau)X(t) = r(\tau) = \int_0^\infty \cos\lambda\tau dF(\lambda) \ ,$$

де $F(\lambda)$ – неперервна спектральна функція процесу.

Випадковий процес $X(t)$ має зображення

$$X(t) = \int\limits_0^\infty \cos\lambda t d\eta_1(\lambda) + \int\limits_0^\infty \sin\lambda t d\eta_2(\lambda),$$

де $\eta_1(\lambda)$, $\eta_2(\lambda)$ визначені в (3.2)

$$X(t) = X_\Lambda(t) + X^\Lambda(t),$$

де $X_\Lambda(t) = \int\limits_0^\Lambda \cos\lambda t d\eta_1(\lambda) + \int\limits_0^\Lambda \sin\lambda t d\eta_2(\lambda)$ з коваріаційною функцією

$$r_\Lambda(\tau) = \mathbf{E}X_\Lambda(t+\tau)X_\Lambda(t) = \int\limits_0^\Lambda \cos\lambda\tau dF(\lambda),$$

$$X^\Lambda(t) = \int\limits_\Lambda^\infty \cos\lambda t d\eta_1(\lambda) + \int\limits_\Lambda^\infty \sin\lambda t d\eta_2(\lambda)$$

з коваріаційною функцією

$$r^\Lambda(\tau) = \mathbf{E}X^\Lambda(t+\tau)X^\Lambda(t) = \int\limits_\Lambda^\infty \cos\lambda\tau dF(\lambda).$$

За модель процесу $X(t)$ візьмемо модель типу (3.8), тобто

$$X_\Lambda^M(t) = \sum_{k=0}^{M} (\eta_{k1}\cos\zeta_k t + \eta_{k2}\sin\zeta_k t),$$

де $\Lambda = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_M\}$ таке розбиття множини $[0, \Lambda]$, що $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\lambda_M = \Lambda$,

η_{k1}, η_{k2}, ζ_k незалежні випадкові величини такі, що $\mathbf{E}\eta_{k1} = \mathbf{E}\eta_{k2} = 0$,

$$\mathbf{E}\eta_{k1}^2 = \mathbf{E}\eta_{k2}^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k) = b_k^2, \quad k = 1, \ldots, M,$$

ζ_k –випадкові величини, що приймають значення на відрізках $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ та мають такі функції розподілу

$$P\{\zeta_k < \lambda\} = F_k(\lambda) = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)}.$$

Покажемо при яких умовах треба вибирати розбиття Λ, щоб для моделі X_Λ^M існував центрований гауссовий процес $X(t)$, який би вона наближала в просторі $C([0,T])$ із заданими точністю та надійністю.

Позначимо

$$\begin{aligned}\eta_\Lambda(t) &= X_\Lambda^M(t) - X_\Lambda(t) \\ &= \sum_{k=0}^{M}\left[\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t - \cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda) + \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t - \sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right].\end{aligned} \tag{4.47}$$

Основні твердження для субгауссового процесу $\eta_\Lambda(t)$ наведені в розділі 3.

Справедливі наступні теореми.

Теорема 4.14. *Для субгауссового випадкового процесу $\eta_\Lambda(t)$ має місце така нерівність*

$$\tau(\eta_\Lambda(t)) \leqslant 4\frac{\ln^\gamma\left(1+\frac{\Lambda}{M}\right)}{\ln^\gamma\left(1+\frac{2}{t}\right)}\left(F(\Lambda)\right)^{\frac{1}{2}},$$

де $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, ...\lambda_M\}$, $\lambda_0 = 0, \lambda_k \leqslant \lambda_{k+1}, \lambda_M = \Lambda$, $F(\Lambda)$ – спектральна функція.

Доведення. З теореми 1.2 та леми 3.1 випливає

$$\tau^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(cos\lambda t-cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right)\leqslant\Theta_1^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(cos\lambda t-cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right)$$

$$\leqslant\ \sup_{m\geqslant 1}\left[\frac{1}{\Delta_{2m}}\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(cos\lambda t-cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right)^{2m}\right]^{\frac{1}{m}}$$

$$\leqslant\ \sup_{m\geqslant 1}b_k^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(2sin\frac{t(u-\lambda)}{2}\right)^2dF_k(\lambda)\right)^m dF_k(u)\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\leqslant\ \sup_{m\geqslant 1}4b_k^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\frac{\ln^\gamma(1+u-\lambda)}{\ln^\gamma\left(1+\frac{2}{t}\right)}\right)^{2m}dF_k(\lambda)dF_k(u)\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\leqslant\ 4\frac{\ln^{2\gamma}(1+\lambda_{k+1}-\lambda_k)}{\ln^{2\gamma}\left(1+\frac{2}{t}\right)}\left(F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k)\right)=I_k.$$

Аналогічно отримаємо:

$$\tau^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right)\leqslant\Theta_1^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right)$$

$$\leqslant\ \sup_{m\geqslant 1}\left[\frac{1}{\Delta_{2m}}\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right)^{2m}\right]^{\frac{1}{m}}$$

$$\leqslant\ \sup_{m\geqslant 1}b_k^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(2\sin\frac{t(u-\lambda)}{2}\right)^2dF_k(\lambda)\right)^m dF_k(u)\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\leqslant\ \sup_{m\geqslant 1}4b_k^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\frac{\ln^\gamma(1+u-\lambda)}{\ln^\gamma\left(1+\frac{2}{t}\right)}\right)^{2m}dF_k(\lambda)dF_k(u)\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\leqslant\ 4\frac{\ln^{2\gamma}(1+\lambda_{k+1}-\lambda_k)}{\ln^{2\gamma}\left(1+\frac{2}{t}\right)}\left(F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k)\right)=I_k.$$

$$\tau^2 \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t) d\eta_1(\lambda) + \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right)$$

$$\leqslant \left(\tau \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t) d\eta_1(\lambda) \right) + \tau \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right) \right)^2$$

$$\leqslant 4 I_k. \quad (4.48)$$

Оскільки доданки сум (4.47) для різних k незалежні, то з (4.48) та леми 1.7 випливає

$$\tau^2 \left(\eta_\Lambda(t) \right) \leqslant 4 \sum_{k=0}^{M} I_k,$$

$$\tau \left(\eta_\Lambda(t) \right) \leqslant 2 \left(\sum_{k=0}^{M} 4 \frac{\ln^{2\gamma}(1 + \lambda_{k+1} - \lambda_k)}{\ln^{2\gamma}(1 + \frac{2}{t})} \cdot \left(F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k) \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Якщо покладемо $\lambda_{k+1} - \lambda_k = \frac{\Lambda}{M}$, то

$$\tau(\eta_\Lambda(t)) \leqslant 4 \ln^{-\gamma} \left(1 + \frac{2}{t} \right) \ln^{\gamma} \left(1 + \frac{\Lambda}{M} \right) \left(F(\Lambda) \right)^{\frac{1}{2}}, \ \gamma > 0. \qquad \square$$

Для довільних $t, s \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} &\eta_\Lambda(t) - \eta_\Lambda(s) \\ &\quad = \sum_{k=0}^{M} \left[\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t - \cos\lambda s + \cos\zeta_k s) d\eta_1(\lambda) \right. \\ &\qquad \left. + \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t - \sin\lambda s + \sin\zeta_k s) d\eta_2(\lambda) \right]. \end{aligned}$$

Теорема 4.15. *Має місце нерівність*

$$\begin{aligned} &\tau \left(\eta_\Lambda(t) - \eta_\Lambda(s) \right) \\ &\qquad \leqslant 8 \left(F(\Lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\ln^{\gamma} \left(1 + \frac{2}{|t-s|} \right)} \cdot \ln^{\gamma} \left(1 + \frac{\Lambda}{M} \right) \left(1 + \frac{\ln^{\gamma}(1+\Lambda)}{\ln^{\gamma} \left(1 + \frac{2}{T} \right)} \right), \end{aligned}$$

$t, s \in [0, T]$.

Доведення. Позначимо

$$\omega_{k1} = \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t - \cos \lambda s + \cos \zeta_k s) d\eta_1(\lambda),$$

$$\omega_{k2} = \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t - \sin \lambda s + \sin \zeta_k s) d\eta_2(\lambda).$$

Згідно леми 1.7 та теореми 1.2

$$\tau^2(\eta_\Lambda(t) - \eta_\Lambda(s)) \leqslant 2 \sum_{k=0}^{M} (\tau^2(\omega_{k1}) + \tau^2(\omega_{k2})) \leqslant 2 \sum_{k=0}^{M} (\Theta_1^2(\omega_{k1}) + \Theta_1^2(\omega_{k2})),$$

де

$$\Theta_1(\omega_{ki}) = \sup_{m \geqslant 1} \left(\frac{1}{\Delta_{2m}} E\omega_{ki}^{2m} \right)^{\frac{1}{2m}}, \quad i = 1, 2.$$

Згідно леми 4.3 маємо

$$\tau^2 \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t - \cos \lambda s + \cos \zeta_k s)\, d\eta_1(\lambda) \right)$$

$$\leqslant \quad 16 \sup_{m \geqslant 1} \left(\mathbf{E} \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\left| \sin \frac{(s-t)(\lambda - \zeta_k)}{4} \right| + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + \left| \sin \frac{\zeta_k (s-t)}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{(\lambda - \zeta_k)(t+s)}{4} \right| \right)^2 dF(\lambda) \right)^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \quad 16b_k^2 \sup_{m\geqslant 1}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\frac{\ln^\gamma(1+|\lambda-u|)}{\ln^\gamma(1+\frac{4}{|s-t|})}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\frac{\ln^\gamma(1+u)}{\ln^\gamma(1+\frac{2}{|s-t|})}\frac{\ln^\gamma(1+|\lambda-u|)}{\ln\left(1+\frac{4}{s+t}\right)}\right)^{2m} dF_k(\lambda)dF_k(u)\right)^{\frac{1}{m}}\\
&\leqslant \quad 16\left(\frac{\ln^\gamma(1+\lambda_{k+1}-\lambda_k)}{\ln^\gamma\left(1+\frac{2}{|s-t|}\right)}+\frac{\ln^\gamma(1+\lambda_{k+1})}{\ln^\gamma\left(1+\frac{2}{|s-t|}\right)}\frac{\ln^\gamma(1+\lambda_{k+1}-\lambda_k)}{\ln^\gamma\left(1+\frac{4}{s+t}\right)}\right)^2\\
&\qquad\times\left(F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k)\right)\\
&\leqslant \quad 16\left(F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k)\right)\frac{\ln^{2\gamma}(1+\lambda_{k+1}-\lambda_k)}{\ln^{2\gamma}\left(1+\frac{2}{|s-t|}\right)}\left(1+\frac{\ln^\gamma(1+\lambda_{k+1})}{\ln^\gamma\left(1+\frac{2}{T}\right)}\right)^2=J_k.
\end{aligned}
$$

Аналогічно отримаємо

$$
\begin{aligned}
&\tau^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t-\sin\lambda s+\sin\zeta_k s\right)d\eta_2(\lambda)\right)\\
&\qquad\leqslant \quad 16\sup_{m\geqslant 1}\left(\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\left|\sin\frac{(s-t)(\lambda-\zeta_k)}{4}\right|\right.\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\left.+\left|\sin\frac{\zeta_k(s-t)}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{(\lambda-\zeta_k)(t+s)}{4}\right|\right)^2 dF(\lambda)\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}\\
&\leqslant \quad 16b_k^2 \sup_{m\geqslant 1}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\frac{\ln^\gamma(1+|\lambda-u|)}{\ln^\gamma(1+\frac{4}{|s-t|})}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\frac{\ln^\gamma(1+u)}{\ln^\gamma(1+\frac{2}{|s-t|})}\frac{\ln^\gamma(1+|\lambda-u|)}{\ln\left(1+\frac{4}{s+t}\right)}\right)^{2m} dF_k(\lambda)dF_k(u)\right)^{\frac{1}{m}}\\
&\leqslant 16\left(F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k)\right)\frac{\ln^{2\gamma}(1+\lambda_{k+1}-\lambda_k)}{\ln^{2\gamma}\left(1+\frac{2}{|s-t|}\right)}\left(1+\frac{\ln^\gamma(1+\lambda_{k+1})}{\ln^\gamma\left(1+\frac{2}{T}\right)}\right)^2=J_k.
\end{aligned}
$$

Тоді $\tau^2\left(\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s)\right)\leqslant 4\sum\limits_{k=0}^{M}J_k$.

Якщо покласти $\lambda_{k+1}-\lambda_k=\frac{\Lambda}{M}$, то

$$\tau\left(\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s)\right)\leqslant 8(F(\Lambda))^{\frac{1}{2}}\frac{\ln^\gamma\left(1+\frac{\Lambda}{M}\right)}{\ln^\gamma\left(1+\frac{2}{|s-t|}\right)}\left(1+\frac{\ln^\gamma(1+\Lambda)}{\ln^\gamma\left(1+\frac{2}{T}\right)}\right).$$

$\square$

Теорема 4.16. *Якщо виконується умова:*

$$\int\limits_0^\infty \ln^{2\varepsilon}(1+u)dF(u)<\infty,\quad 0<\varepsilon\leqslant 1,$$

тоді

$$\tau\left(X^\Lambda(t)-X^\Lambda(s)\right)\leqslant\frac{2\tilde{Q}^{\frac{1}{2}}}{\ln^\gamma(1+\frac{1}{|t-s|})},$$

де $\tilde{Q}=\int\limits_\Lambda^\infty \ln^{2\gamma}(1+\lambda)dF(\lambda)$, $0<\gamma\leqslant 1$.

Доведення.

$$r^\Lambda(\tau)=\mathbf{E}X^\Lambda(t+\tau)X^\Lambda(t)=\int\limits_\Lambda^\infty\cos\lambda\tau dF(\lambda),$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left|X^\Lambda(t)-X^\Lambda(s)\right|^2&=2\left(r^\Lambda(0)-r^\Lambda(t-s)\right)\\&=2\left[(F(+\infty)-F(\Lambda))-\int\limits_\Lambda^\infty\cos\lambda(t-s)dF(\lambda)\right]\\&=2\int\limits_\Lambda^\infty\left(1-\cos\lambda(t-s)\right)dF(\lambda)\\&=4\int\limits_\Lambda^\infty\sin^2\frac{\lambda(t-s)}{2}dF(\lambda)\leqslant 4\int\limits_\Lambda^\infty\frac{\ln^{2\gamma}(1+\lambda)}{\ln^{2\gamma}(1+\frac{2}{|t-s|})}dF(\lambda).\end{aligned}$$

Тоді,

$$\tau\left(X^\Lambda(t)-X^\Lambda(s)\right)\leqslant\left(\mathbf{E}\left|X^\Lambda(t)-X^\Lambda(s)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=2\left(\int\limits_\Lambda^\infty\frac{\ln^{2\gamma}(1+\lambda)}{\ln^{2\gamma}(1+\frac{2}{|t-s|})}dF(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\ln^\gamma(1+\frac{2}{|t-s|})}\left(\int\limits_\Lambda^\infty\ln^{2\gamma}(1+\lambda)dF(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}}.\quad\square$$

Теорема 4.17. *Якщо випадковий процес $X_\Lambda^M(t)$ має розбиття Λ таке, що виконується ряд нерівностей:*

$$\int\limits_0^\infty \ln^{2\gamma}(1+\lambda)dF(\lambda) < \infty\;, 0<\gamma\leqslant 1\;,$$

$$2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_{01}^2}\left(\alpha\delta-\sqrt{8\alpha\delta I_1(\varepsilon_{01})}\right)^2\right\} + 2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_{02}^2}\left((1-\alpha)\delta-\sqrt{8(1-\alpha)\delta I_2(\varepsilon_{02})}\right)^2\right\} \leqslant \beta \quad (4.49)$$

при $\delta > 8\max\big(I_1(\varepsilon_{01}), I_2(\varepsilon_{02})\big)$,

де $0<\alpha<1$, $\varepsilon_{01}=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\tau(X_\Lambda(t)-X_\Lambda^M(t))$, $\varepsilon_{02}=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\tau(X^\Lambda(t))$,

$$I_1(\varepsilon_{01}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_{01}}\left(\ln\left(\frac{T}{4}\exp\left\{\left(\frac{8\sqrt{F(\Lambda)}\ln^\gamma\left(1+\frac{\Lambda}{M}\right)\left(1+\frac{\ln^\gamma(1+\Lambda)}{\ln^\gamma\left(1+\frac{2}{T}\right)}\right)}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right\}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{T}{4}+1\right)\right)^{\frac{1}{2}}d\varepsilon,$$

$$I_2(\varepsilon_{02}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_{02}}\left(\ln\left(\frac{T}{4}\exp\left\{\left(\frac{2\int\limits_\Lambda^\infty\ln^{2\gamma}(1+\lambda)dF(\lambda)}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right\}-\frac{T}{4}+1\right)\right)^{\frac{1}{2}}d\varepsilon,$$

тоді існує гауссів випадковий процес $X(t)$, до якого ця модель $X_\Lambda^M(t)$ наближатиметься в просторі $C([0,T])$ з надійністю $1-\beta$, $0<\beta<1$ та точністю $\delta>0$.

Доведення. За теоремою 1.12 та прикладом 1.6 маємо

$$\begin{aligned}
&P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X(t)-X_\Lambda^M(t)|\geqslant\delta\right\}\\
&\leqslant\quad P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_\Lambda(t)-X_\Lambda^M(t)|>\alpha\delta\right\}+P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X^\Lambda(t)|>(1-\alpha)\delta\right\}\\
&\leqslant\quad 2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_{01}^2}\left(\alpha\delta-\sqrt{8\alpha\delta I_1(\varepsilon_{01})}\right)^2\right\}+\\
&\qquad +2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_{02}^2}\left((1-\alpha)\sqrt{8(1-\alpha)\delta I_2(\varepsilon_{02})}\right)^2\right\}.
\end{aligned}$$

З теореми 4.15 випливає, що $\sigma_1(h)=\sup\limits_{|t-s|<h}\tau(\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s))\leqslant\frac{\tilde G}{\ln^\gamma\left(1+\frac{2}{h}\right)}$, де

$$\tilde G=8\sqrt{F(\Lambda)}\ln^\gamma\left(1+\frac{\Lambda}{M}\right)\left(1+\frac{\ln^\gamma(1+\Lambda)}{\ln^\gamma\left(1+\frac{2}{T}\right)}\right).$$

$$\sigma_1^{(-1)}(h)=\frac{2}{\exp\left\{\left(\frac{\tilde G}{h}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right\}-1}.$$

Тоді

$$I_1(\varepsilon_{01})=\frac{1}{\sqrt2}\int\limits_0^{\varepsilon_{01}}\left(\ln\left(\frac{T}{2\sigma_1^{(-1)}(\varepsilon)}+1\right)\right)^{\frac12}d\varepsilon$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\int\limits_0^{\varepsilon_{01}}\left(\ln\left(\frac{T}{4}\exp\left\{\left(\frac{\tilde G}{\varepsilon}\right)^{\frac1\gamma}\right\}-\frac{T}{4}+1\right)\right)^{\frac12}d\varepsilon,$$

$\varepsilon_{01}=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\tau(\eta_\Lambda(t))$ визначене в теоремі 4.14

З теореми 4.16 випливає, що $\sigma_2(h)=\sup\limits_{|t-s|<h}(X^\Lambda(t)-X^\Lambda(s))\leqslant\frac{2\tilde Q}{\ln^\gamma\left(1+\frac{2}{h}\right)}$, де $\tilde Q=\int\limits_\Lambda^\infty\ln^{2\gamma}(1+\lambda)dF(\lambda)$, тоді

$$\sigma_2^{(-1)}(h)=2\left(\exp\left\{\left(\frac{2\tilde Q}{\varepsilon}\right)^{\frac1\gamma}\right\}-1\right)^{-1},$$

$$I_2(\varepsilon_{02}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\varepsilon_{02}} \left(\ln \left(\frac{T}{4} \exp \left\{ \left(\frac{2\tilde{Q}}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right\} - \frac{T}{4} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} d\varepsilon.$$

де

$$\varepsilon_{02} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \tau(X^{\Lambda}(t)) \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left(\mathbf{E}|X^{\lambda}(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{F(+\infty) - F(\Lambda)}.$$

Згідно означення 4.3 модель $X_{\Lambda}^{M}(t)$ наближатиме процес $X_{\Lambda}^{M}(t)$ з надійністю $1-\beta$, $0<\beta<1$ та точністю $\delta>0$ в просторі $C([0,T])$, якщо виконуватиметься умова (4.49) □

4.4.2. Побудова моделі гауссового стаціонарного випадкового процесу, кореляційна функція якої співпадає з кореляційною функцією процесу, що моделюється

Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ – гауссів стаціонарний дійсний центрований неперервний в середньому квадратичному випадковий процес з коваріаційною функцією

$$\mathbf{E}X(t+\tau)X(t) = r(\tau) = \int\limits_0^{\infty} \cos \lambda\tau dF(\lambda) \ ,$$

де $F(\lambda)$ – неперервна спектральна функція процесу.

Випадковий процес $X(t)$ має зображення

$$X(t) = \int\limits_0^{\infty} \cos \lambda t d\eta_1(\lambda) + \int\limits_0^{\infty} \sin \lambda t d\eta_2(\lambda),$$

де $\eta_1(\lambda)$, $\eta_2(\lambda)$ незалежні центровані гауссові випадкові процеси з незалежними приростами. Представимо $X(t)$ як

$$X(t) = X_{\Lambda}(t) + X^{\Lambda}(t),$$

де $X_{\Lambda}(t) = \int\limits_0^{\Lambda} \cos \lambda t d\eta_1(\lambda) + \int\limits_0^{\Lambda} \sin \lambda t d\eta_2(\lambda)$,

$$X^{\Lambda}(t) = \int\limits_{\Lambda}^{\infty} \cos \lambda t d\eta_1(\lambda) + \int\limits_{\Lambda}^{\infty} \sin \lambda t d\eta_2(\lambda).$$

За модель процесу $X(t)$ візьмемо модель типу (3.4), тобто

$$X_\Lambda^M(t) = \sum_{k=0}^{M} (\eta_{k1} \cos \zeta_k t + \eta_{k2} \sin \zeta_k t),$$

де $\Lambda = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_M\}$ таке розбиття множини $[0, \infty]$, що $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\lambda_{M+1} = \infty$; η_{k1}, η_{k2}, ζ_k незалежні випадкові величини такі, що $\mathbf{E}\eta_{k1} = \mathbf{E}\eta_{k2} = 0$,

$$\mathbf{E}\eta_{k1}^2 = \mathbf{E}\eta_{k2}^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k) = b_k^2, \quad k = 1, \ldots, M,$$

ζ_k –випадкові величини, що приймають значення на відрізках $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ та мають такі функції розподілу

$$P\{\zeta_k < \lambda\} = F_k(\lambda) = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)}.$$

Покажемо за яких умов треба вибирати розбиття Λ, щоб для моделі X_Λ^M існував центрований гауссовий процес $X(t)$, який би вона наближала в просторі $C([0,T])$ із заданими точністю та надійністю.

Позначимо

$$\begin{aligned} \eta_\Lambda(t) &= X(t) - X_\Lambda^M(t) \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \left[\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t) d\eta_1(\lambda) + \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right] \\ &\quad + \int_{\lambda_M}^{\infty} (\cos \lambda t - \cos \zeta_M t) d\eta_1(\lambda) + \int_{\lambda_M}^{\infty} (\sin \lambda t - \sin \zeta_M t) d\eta_2(\lambda). \quad (4.50) \end{aligned}$$

Справедливі наступні теореми.

Теорема 4.18. *Якщо* $\int_0^\infty \int_0^\infty (u - \lambda)^{2\tilde{\alpha}} dF(\lambda) dF(u) < \infty$ *при* $0 < \tilde{\alpha} \leqslant 1$, *то для субгауссового процесу* $\eta_\Lambda(t)$ *має місце така оцінка*

$$\tau(\eta_\Lambda(t)) \leqslant 2 \left(4 \frac{\ln^{2\gamma} \left(e^{\alpha - 1} + \frac{\Lambda}{M} \right)}{\ln^{2\gamma} \left(e^{\alpha - 1} + \frac{2}{t} \right)} F(\Lambda) + \int_\Lambda^\infty \int_\Lambda^\infty (t(u - \lambda))^{2\tilde{\alpha}} dF(\lambda) dF(u) \right)^{1/2},$$

де $\alpha \geqslant 1$, $0 \leqslant \gamma \leqslant \alpha$.

Доведення.

$$\tau^2(\eta_\Lambda(t)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{M-1} \tau^2 \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t) d\eta_1(\lambda) + \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right)$$

$$+ \tau^2 \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} (\cos\lambda t - \cos\zeta_M t) d\eta_1(\lambda) + \int_{\lambda_M}^{\infty} (\sin\lambda t - \sin\zeta_M t) d\eta_2(\lambda) \right). \quad (4.51)$$

Оцінимо перший доданок у (4.51):

$$\tau^2 \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t) d\eta_1(\lambda) + \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right)$$

$$\leqslant \left(\tau \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t) d\eta_1(\lambda) \right) + \tau \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right) \right)^2. \quad (4.52)$$

$$\tau^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right)\leqslant\theta_1^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right)$$

$$\leqslant\sup_{m\geqslant 1}\left[\frac{1}{\Delta_{2m}}\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right)^{2m}\right]^{\frac{1}{m}}$$

$$\leqslant\sup_{m\geqslant 1}\left[4^m\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left|\sin\frac{t(\zeta_k-\lambda)}{2}\right|^2 dF(\lambda)\right)^m\right]^{\frac{1}{m}}$$

$$=\sup_{m\geqslant 1}\left[4^m b_k^{2m}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\sin\frac{t(u-\lambda)}{2}\right)^2 dF_k(u)\right)^m dF_k(\lambda)\right)\right]^{\frac{1}{m}}$$

$$=\sup_{m\geqslant 1}4b_k^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\sin\frac{t(u-\lambda)}{2}\right)^2 dF_k(u)\right)^m dF_k(\lambda)\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\leqslant\sup_{m\geqslant 1}4b_k^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\frac{\ln^\gamma(e^{\alpha-1}+u-\lambda)}{\ln^\gamma(e^{\alpha-1}+\frac{2}{t})}\right)^{2m}dF_k(u)dF_k(\lambda)\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\leqslant 4\frac{\ln^{2\gamma}(e^{\alpha-1}+\lambda_{k+1}-\lambda_k)}{\ln^{2\gamma}(e^{\alpha-1}+\frac{2}{t})}\left(F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k)\right)=I_k.$$

Аналогічно отримаємо

$$\tau^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right)\leqslant I_k.$$

Оцінимо другий доданок у (4.51):

$$\tau^2\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\cos\lambda t-\cos\zeta_M t)d\eta_1(\lambda)\right)\leqslant\theta_1^2\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\cos\lambda t-\cos\zeta_M t)d\eta_1(\lambda)\right)$$

$$\leqslant\sup_{m\geqslant 1}\left[\frac{1}{\Delta_{2m}}\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\cos\lambda t-\cos\zeta_M t)d\eta_1(\lambda)\right)^{2m}\right]^{\frac{1}{m}}$$

$$\leqslant\sup_{m\geqslant 1}\left[\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\left|2\sin\frac{t(\lambda-\zeta_M)}{2}\right|^2 dF(\lambda)\right)^m\right]^{\frac{1}{m}}$$

$$\leqslant\sup_{m\geqslant 1}\left[\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}|t(u-\lambda)|^{2\tilde{\alpha}}dF(\lambda)\right)^m dF(u)\right]^{\frac{1}{m}}$$

$$\leqslant\sup_{m\geqslant 1}\left[\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}|t(u-\lambda)|^{2\tilde{\alpha}}dF(\lambda)\right)^m dF(u)\right]^{\frac{1}{m}}$$

$$\leqslant\sup_{m\geqslant 1}\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}t^{2m\tilde{\alpha}}(u-\lambda)^{2m\tilde{\alpha}}dF(\lambda)dF(u)\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\leqslant\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}t^{2\tilde{\alpha}}(u-\lambda)^{2\tilde{\alpha}}dF(\lambda)dF(u).$$

Аналогічно отримаємо

$$\tau^2\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\sin\lambda t-\sin\zeta_M t)d\eta_2(\lambda)\right)\leqslant\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}t^{2\tilde{\alpha}}(u-\lambda)^{2\tilde{\alpha}}dF(\lambda)dF(u),$$

де $0\leqslant\tilde{\alpha}\leqslant 1$.

Співставивши (4.51) і (4.52), використавши останні нерівності, матимемо

$$\tau^2(\eta_\Lambda(t))\leqslant\sum_{k=0}^{M-1}\tau^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)+\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right)$$

$$+\tau^2\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)+\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right)$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{M-1}\left(\tau\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right)+\tau\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right)\right)^2$$

$$+\left(\tau\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right)+\tau\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right)\right)^2$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{M-1}4I_k+4\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}t^{2\tilde{\alpha}}(u-\lambda)^{2\tilde{\alpha}}dF(\lambda)dF(u).$$

Якщо покладемо $\lambda_{k+1}-\lambda_k=\frac{\Lambda}{M}$, то

$$\tau(\eta_\Lambda(t))\leqslant 2\left(\sum_{k=0}^{M-1}4\frac{\ln^{2\gamma}\left(e^{\alpha-1}+\frac{\Lambda}{M}\right)}{\ln^{2\gamma}\left(e^{\alpha-1}+\frac{2}{t}\right)}b_k^2+\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(t(u-\lambda))^{2\tilde{\alpha}}dF(\lambda)dF(u)\right)^{1/2}$$

$$=2\left(4\frac{\ln^{2\gamma}\left(e^{\alpha-1}+\frac{\Lambda}{M}\right)}{\ln^{2\gamma}\left(e^{\alpha-1}+\frac{2}{t}\right)}F(\Lambda)+\int\limits_{\Lambda}^{\infty}\int\limits_{\Lambda}^{\infty}(t(u-\lambda))^{2\tilde{\alpha}}dF(\lambda)dF(u)\right)^{1/2}. \quad \square$$

Приклад. Розглянемо частковий випадок: $F(\lambda)=1-e^{-\lambda}$, $\tilde{\alpha}=0.5$, $\gamma=0.5$, $\alpha=1$.

Умови теореми виконуються, отже,

$$\tau(\eta_\Lambda(t))\leqslant 2\sqrt{4\frac{\ln(1+\frac{\Lambda}{M})}{\ln(1+\frac{2}{t})}(1-e^{-\Lambda})+\int\limits_{\Lambda}^{\infty}\int\limits_{\Lambda}^{\infty}t(u-\lambda)e^{-\lambda}e^{-u}d\lambda du}=$$

$$=4\sqrt{\frac{\ln(1-\frac{\Lambda}{M})}{\ln(1+\frac{2}{t})}(1-e^{-\Lambda})}.$$

Для $\forall t,s\in\mathcal{T}$

$$\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s)=\sum_{k=0}^{M-1}\left[\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t-\cos\lambda s+\cos\zeta_k s)d\eta_1(\lambda)\right.$$

$$+\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t-\sin\lambda s+\sin\zeta_k s)d\eta_2(\lambda)\Bigg] \tag{4.53}$$

$$+\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\cos\lambda t-\cos\zeta_M t-\cos\lambda s+\cos\zeta_M s)d\eta_1(\lambda)$$

$$+\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\sin\lambda t-\sin\zeta_M t-\sin\lambda s+\sin\zeta_M s)d\eta_2(\lambda).$$

Теорема 4.19. *Якщо виконуються умови теореми 4.18, то* $\forall t,s\in[0,T]$, $\alpha\geqslant 1$, $0\leqslant\gamma\leqslant\alpha$, $0<\tilde{\alpha}\leqslant 1$ *має місце така оцінка*

$$\tau(\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s))\leqslant 8\left(F(\Lambda)\frac{\ln^{2\gamma}\left(e^{\alpha-1}+\frac{\Lambda}{M}\right)}{\ln^{2\gamma}\left(e^{\alpha-1}+\frac{2}{|s-t|}\right)}\left(1+\frac{\ln^{\gamma}\left(e^{\alpha-1}+\Lambda\right)}{\ln^{\gamma}\left(e^{\alpha-1}+\frac{2}{T}\right)}\right)^2\right.$$
$$\left.+(s-t)^{2\tilde{\alpha}}\left(\int\limits_{\Lambda}^{\infty}\int\limits_{\Lambda}^{\infty}(u-\lambda))^{2\tilde{\alpha}}dF(\lambda)dF(u)+(1-F(\Lambda))\int\limits_{\Lambda}^{\infty}u^{2\tilde{\alpha}}dF(u)\right)\right)^{1/2}. \tag{4.54}$$

Доведення. Введемо позначення:

$$\omega_{k1}=\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t-\cos\lambda s+\cos\zeta_k s)d\eta_1(\lambda),$$

$$\omega_{k2}=\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t-\sin\lambda s+\sin\zeta_k s)d\eta_2(\lambda),$$

$$\omega_{M1}=\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t-\cos\lambda s+\cos\zeta_k s)d\eta_1(\lambda),$$

$$\omega_{M2}=\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t-\sin\lambda s+\sin\zeta_k s)d\eta_2(\lambda).$$

З (4.53) та властивості субгауссового стандарту випливає справедливість оцінок:

$$
\begin{aligned}
\tau(\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s)) &\leqslant \sum_{k=0}^{M-1}(\tau(\omega_{k1})+\tau(\omega_{k2}))^2+(\tau(\omega_{M1})+\tau(\omega_{M2}))^2\\
&\leqslant 2\sum_{k=0}^{M-1}\left(\tau^2(\omega_{k1})+\tau^2(\omega_{k2})\right)+2\tau^2(\omega_{M1})+2\tau^2(\omega_{M2}).
\end{aligned}
$$

Аналогічними до попередньої теореми оцінками, одержимо:

$$
\tau^2(\omega_{k1})\leqslant 16\sup_{m\geqslant 1}\left(\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\left|\sin\frac{(s-t)(\lambda-\zeta_k)}{4}\right|\right.\right.\right.
$$

$$
\left.\left.\left.+\left|\sin\frac{(s-t)\zeta_k}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{(s+t)(\lambda-\zeta_k)}{4}\right|\right)^2 dF(\lambda)\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}
$$

$$
\leqslant 16\left(\frac{\ln^\gamma(e^{\alpha-1}+\lambda_{k+1}-\lambda_k)}{\ln^\gamma\left(e^{\alpha-1}+\frac{2}{|s-t|}\right)}+\frac{\ln^\gamma(e^{\alpha-1}+\lambda_{k+1})}{\ln^\gamma\left(e^{\alpha-1}+\frac{2}{|s-t|}\right)}\frac{\ln^\gamma(e^{\alpha-1}+\lambda_{k+1}-\lambda_k)}{\ln^\gamma\left(e^{\alpha-1}+\frac{4}{s+t}\right)}\right)^2\times
$$

$$
\times\left(F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k)\right)
$$

$$
\leqslant 16(F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k))\frac{\ln^{2\gamma}(e^{\alpha-1}+\lambda_{k+1}-\lambda_k)}{\ln^{2\gamma}\left(e^{\alpha-1}+\frac{2}{|s-t|}\right)}\left(1+\frac{\ln^\gamma(e^{\alpha-1}+\lambda_{k+1})}{\ln^\gamma\left(e^{\alpha-1}+\frac{2}{T}\right)}\right)^2=J_k.
$$

Аналогічно $\tau^2(\omega_{k2})\leqslant J_k$.

$$
\tau^2(\omega_{M1})\leqslant\theta_1^2(\omega_{M1})\leqslant 16\sup_{m\geqslant 1}\left(\mathbf{E}\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\left(\left|\sin\frac{(s-t)(\lambda-\zeta_M)}{4}\right|\right.\right.\right.
$$

$$
\left.\left.\left.+\left|\sin\frac{(s-t)\zeta_M}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{(s+t)(\lambda-\zeta_M)}{4}\right|\right)^2 dF(\lambda)\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}
$$

$$\leqslant 16 \sup_{m\geqslant 1} \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} \int_{\lambda_M}^{\infty} \left(\left| \sin \frac{(s-t)(\lambda-u)}{4} \right| + \left| \sin \frac{(s-t)\zeta_M}{2} \right| \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left| \sin \frac{(s+t)(\lambda-u)}{4} \right| \right)^{2m} dF(\lambda)dF(u) \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\leqslant 16 \sup_{m\geqslant 1} \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} \int_{\lambda_M}^{\infty} \left(\frac{|s-t|^{\tilde{\alpha}}|\lambda-u|^{\tilde{\alpha}}}{2} + \frac{|u(s-t)|^{\tilde{\alpha}}}{2} \right)^{2m} dF(\lambda)dF(u) \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\leqslant 16 \int_{\lambda_M}^{\infty} \int_{\lambda_M}^{\infty} \frac{(s-t)^{2\tilde{\alpha}}}{2} \left(|\lambda-u|^{\tilde{\alpha}} + u^{\tilde{\alpha}} \right)^2 dF(\lambda)dF(u)$$

$$\leqslant 16(s-t)^{2\tilde{\alpha}} \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} \int_{\lambda_M}^{\infty} (\lambda-u)^{2\tilde{\alpha}} dF(\lambda)dF(u) + (1-F(\lambda_M)) \int_{\lambda_M}^{\infty} u^{2\tilde{\alpha}} dF(u) \right);$$

$$\tau^2(\omega_{M2}) \leqslant \theta_1^2(\omega_{M2})$$

$$\leqslant 16(s-t)^{2\tilde{\alpha}} \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} \int_{\lambda_M}^{\infty} (\lambda-u)^{2\tilde{\alpha}} dF(\lambda)dF(u) + (1-F(\lambda_M)) \int_{\lambda_M}^{\infty} u^{2\tilde{\alpha}} dF(u) \right).$$

Тоді

$$\tau(\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s)) \leqslant 4 \sum_{k=0}^{M-1} J_k +$$

$$+64(s-t)^{2\tilde{\alpha}} \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} \int_{\lambda_M}^{\infty} (\lambda-u)^{2\tilde{\alpha}} dF(\lambda)dF(u) + (1-F(\lambda_M)) \int_{\lambda_M}^{\infty} u^{2\tilde{\alpha}} dF(u) \right).$$

Якщо покласти $\lambda_{k+1}-\lambda_k = \frac{\Lambda}{M}$, то одержимо (4.54). $\square$

Приклад 4.5. Розглянемо частковий випадок: $F(\lambda) = 1 - e^{-\lambda}$, $\tilde{\alpha} = 0.5$, $\gamma = 0.5$, $\alpha = 1$.

Умови теореми 4.19 виконуються, отже,

$$\tau(\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s)) \leqslant 8\left((1-e^{-\Lambda})\frac{\ln(1+\frac{\Lambda}{M})}{\ln(1+\frac{2}{|s-t|})}\left(1+\sqrt{\frac{\ln(1+\Lambda)}{\ln(1+\frac{2}{T})}}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + |s-t|\left(\int\limits_\Lambda^\infty\int\limits_\Lambda^\infty |u-\lambda| e^{-\lambda}e^{-u}d\lambda du + e^{-\Lambda}\int\limits_\Lambda^\infty ue^{-u}du\right)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 8\left((1-e^{-\Lambda})\frac{\ln(1+\frac{\Lambda}{M})}{\ln(1+\frac{2}{|s-t|})}\left(1+\sqrt{\frac{\ln(1+\Lambda)}{\ln(1+\frac{2}{T})}}\right)^2 + |s-t|e^{-2\Lambda}(1+\Lambda)\right)^{\frac{1}{2}}. \quad \diamondsuit$$

Теорема 4.20. *Якщо випадковий процес $X_\Lambda^M(t)$ має розбиття Λ таке, що виконується нерівність:*

$$2exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}(\delta-\sqrt{8\delta I(\varepsilon_0)})^2\right\} \leqslant \beta \tag{4.55}$$

при $\delta > 8I(\varepsilon_0)$, де

$$I(\varepsilon_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\left(\ln\left[\frac{T}{4}\left(exp\left\{\left(\frac{64G}{\varepsilon^2-64K}\right)^{\frac{1}{2\gamma}}\right\}-e^{\alpha-1}\right)+1\right]\right)^{1/2} d\varepsilon$$

$$G = F(\Lambda)\ln^{2\gamma}(e^{\alpha-1}+\frac{\Lambda}{M})\left(1+\frac{\ln^\gamma(e^{\alpha-1}+\Lambda)}{\ln^\gamma(e^{\alpha-1}+\frac{2}{T})}\right)^2,$$

$$K = (s-t)^{2\tilde{\alpha}}\left(\int\limits_\Lambda^\infty\int\limits_\Lambda^\infty(\lambda-u)^{2\tilde{\alpha}}dF(\lambda)dF(u)+(1-F(\Lambda))\int\limits_\Lambda^\infty u^{2\tilde{\alpha}}dF(u)\right)^{1/2},$$

тоді модель наближатиметься до гауссового випадкового процесу $X(t)$ у просторі $C([0,T])$ з надійністю $1-\beta$, $0<\beta<1$ та точністю $\delta>0$.

Доведення. З ентропійної характеристики випадкових процесів матимемо:

$$P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|X(t)-X_\Lambda^M(t)\right| \geqslant \delta\right\} \leqslant 2exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}(\delta-\sqrt{8\delta I(\varepsilon_0)})^2\right\}$$

З теореми 4.19 випливає, що

$$\sigma(h) = \sup_{|t-s|<h} \tau(\eta_\Lambda(t) - \eta_\Lambda(s)) \leqslant 8 \left(\frac{G}{\ln^{2\gamma}(e^{\alpha-1} + \frac{2}{h})} + K \right)^{1/2},$$

де

$$G = F(\Lambda) \ln^{2\gamma}(e^{\alpha-1} + \frac{\Lambda}{M}) \left(1 + \frac{\ln^{\gamma}(e^{\alpha-1} + \Lambda)}{\ln^{\gamma}(e^{\alpha-1} + \frac{2}{T})} \right)^2,$$

$$K = (s-t)^{2\tilde{\alpha}} \left(\int\limits_{\Lambda}^{\infty} \int\limits_{\Lambda}^{\infty} (\lambda - u)^{2\tilde{\alpha}} dF(\lambda) dF(u) + (1 - F(\Lambda)) \int\limits_{\Lambda}^{\infty} u^{2\tilde{\alpha}} dF(u) \right)^{1/2}.$$

Тоді

$$\sigma^{(-1)}(h) = \frac{2}{exp\left\{ \left(\frac{64G}{h^2 - 64K} \right)^{\frac{1}{2\gamma}} \right\} - e^{\alpha-1}}.$$

А, отже,

$$I(\varepsilon_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\varepsilon_0} \left(\ln \left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} + 1 \right) \right)^{1/2} d\varepsilon,$$

де $\varepsilon_0 = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \tau(\eta_\Lambda(t))$ визначено у теоремі 4.18.

Згідно означення наближення моделі процесу з заданими точністю і надійнісю у нормі простору $C([0,T])$, модель $X_\Lambda^M(t)$ наближатиметься до гауссового випадкового процесу $X(t)$ у просторі $C([0,T])$ з надійністю $1-\beta$, $0 < \beta < 1$ та точністю $\delta > 0$, якщо виконуватиметься умова (4.55). □

Таким чином, в даному підрозділі, маючи оцінки субгауссового стандарту, одержані у теоремах 4.18 і 4.19, та використовуючи ентропійні характеристики випадкових процесів побудовано модель гауссового стаціонарного випадкового процесу з заданою точністю та надійністю в $C([0,T])$.

4.4.3. Оцінки моделювання гауссових стаціонарних процесів при невисокій точності

Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ – гауссів стаціонарний дійсний центрований неперервний в середньому квадратичному випадковий процес з коваріаційною функцією

$$\mathbf{E}X(t+\tau)X(t) = r(\tau) = \int\limits_0^\infty \cos\lambda\tau dF(\lambda),$$

де $F(\lambda)$ – неперервна спектральна функція процесу.

Випадковий процес $X(t)$ має зображення

$$X(t) = \int\limits_0^\infty \cos\lambda t d\eta_1(\lambda) + \int\limits_0^\infty \sin\lambda t d\eta_2(\lambda),$$

де $\eta_1(\lambda)$, $\eta_2(\lambda)$ такі незалежні центровані гауссові процеси, що

$$\mathbf{E}(\eta_i(\lambda_2) - \eta_i(\lambda_1))^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1), \quad \lambda_1 < \lambda_2,\ i = 1, 2.$$

$$X(t) = X_\Lambda(t) + X^\Lambda(t),$$

де $X_\Lambda(t) = \int\limits_0^\Lambda \cos\lambda t d\eta_1(\lambda) + \int\limits_0^\Lambda \sin\lambda t d\eta_2(\lambda)$

з коваріаційною функцією

$$r_\Lambda(\tau) = \mathbf{E}X_\Lambda(t+\tau)X_\Lambda(t) = \int\limits_0^\Lambda \cos\lambda\tau dF(\lambda),$$

$$X^\Lambda(t) = \int\limits_\Lambda^\infty \cos\lambda t d\eta_1(\lambda) + \int\limits_\Lambda^\infty \sin\lambda t d\eta_2(\lambda)$$

з коваріаційною функцією

$$r^\Lambda(\tau) = \mathbf{E}X^\Lambda(t+\tau)X^\Lambda(t) = \int\limits_\Lambda^\infty \cos\lambda\tau dF(\lambda).$$

За модель процесу $X(t)$ візьмемо модель типу (3.4), тобто

$$X_\Lambda^M(t) = \sum_{k=0}^M (\eta_{k1}\cos\zeta_k t + \eta_{k2}\sin\zeta_k t),$$

де $\Lambda = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_M\}$ таке розбиття множини $[0, \infty]$, що $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\lambda_{M+1} = \infty$, η_{k1}, η_{k2}, ζ_k – визначені у попередньому підрозділі.

Використовуючи дещо інші у порівнянні з попереднім підрозділом ймовірнісні оцінки, покажемо при яких умовах треба вибирати розбиття Λ, щоб для моделі X_Λ^M існував центрований гауссовий процес $X(t)$, який би вона наближала в просторі $C([0,T])$ із заданими точністю та надійністю.

Теорема 4.21. *Якщо випадковий процес $X_\Lambda^M(t)$ має розбиття Λ таке, що виконується ряд нерівностей:*

$$\int\limits_0^\infty \ln^{2\gamma}(1+\lambda)dF(\lambda) < \infty\ , 0<\gamma\leqslant 1,$$

при $\delta > 8\max\big(I_1(\varepsilon_{01}), I_2(\varepsilon_{02})\big)$,

$$2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_{01}^2}\left(\alpha_1\delta-\sqrt{8\alpha_1\delta I_1(\varepsilon_{01})}\right)^2\right\} + 2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_{02}^2}\left(\alpha_2\delta-\sqrt{8\alpha_2\delta I_2(\varepsilon_{02})}\right)^2\right\}$$
$$+\frac{1}{\alpha\alpha_3\delta\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\frac{(\alpha\alpha_3\delta)^2}{2b_M^2}\right\}+\frac{1}{(1-\alpha)\alpha_3\delta\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\frac{((1-\alpha)\alpha_3\delta)^2}{2b_M^2}\right\}\leqslant\beta \tag{4.56}$$

де $0<\alpha<1$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$, $\alpha_i>0$, $i=1,2,3$, $\varepsilon_{01}=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\tau(X_\Lambda(t)-X_\Lambda^{M-1}(t))$, $\varepsilon_{02}=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\tau(X^\Lambda(t))$,

$$I_1(\varepsilon_{01})=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_{01}}\left(\ln\left(\frac{T}{4}\exp\left\{\left(\frac{8\sqrt{F(\Lambda)}\ln^\gamma\left(1+\frac{\Lambda}{M}\right)\left(1+\frac{\ln^\gamma(1+\Lambda)}{\ln^\gamma\left(1+\frac{2}{T}\right)}\right)}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right\}-\frac{T}{4}+1\right)\right)^{\frac{1}{2}}d\varepsilon,$$

$$I_2(\varepsilon_{02})=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_{02}}\left(\ln\left(\frac{T}{4}\exp\left\{\left(\frac{2\int\limits_\Lambda^\infty\ln^{2\gamma}(1+\lambda)dF(\lambda)}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right\}-\frac{T}{4}+1\right)\right)^{\frac{1}{2}}d\varepsilon,$$

тоді існує гауссів випадковий процес $X(t)$, до якого ця модель $X_\Lambda^M(t)$

наближатиметься в просторі $C([0,T])$ *з надійністю* $1-\beta$, $0<\beta<1$ *та точністю* $\delta>0$.

Доведення. За теоремою 1.12 та прикладом 1.6 маємо

$$\begin{aligned}
&P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_\Lambda^M(t)-X(t)|\geqslant\delta\right\}\\
\leqslant\quad & P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_\Lambda^{M-1}(t)-X_\Lambda(t)|>\alpha_1\delta\right\}+P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X^\Lambda(t)|>\alpha_2\delta\right\}\\
+\quad & P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta_{M1}\cos\zeta_M t+\eta_{M2}\sin\zeta_M t|>\alpha_3\delta\right\}\\
\leqslant\quad & 2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_{01}^2}\left(\alpha_1\delta-\sqrt{8\alpha_1\delta I_1(\varepsilon_{01})}\right)^2\right\}\\
& +2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_{02}^2}\left(\alpha_2\sqrt{8\alpha_2\delta I_2(\varepsilon_{02})}\right)^2\right\}+P\left\{|\eta_{M1}|+|\eta_{M2}|>\alpha_3\delta\right\},
\end{aligned}$$

де $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$, $\alpha_i>0$, $i=1,2,3$. В розділі 4.4 у теоремі 4.17 величини ε_{01}, $I_1(\varepsilon_{01})$, ε_{02}, $I_2(\varepsilon_{02})$ оцінені, тому залишається оцінити третій доданок.

$$I_3=P\left\{|\eta_{M1}|+|\eta_{M2}|>\alpha_3\delta\right\}\leqslant P\left\{|\eta_{M1}|>\alpha\alpha_3\delta\right\}+P\left\{|\eta_{M2}|>(1-\alpha)\alpha_3\delta\right\},$$

де $0<\alpha<1$.

Оскільки η_{M1},η_{M2} – це гауссові випадкові величини з параметрами $(0,b_M)$, де $b_M^2=F(+\infty)-F(\lambda_M)$, $F(\lambda)$ – спектральна функція , тоді

$$\begin{aligned}
I_3 &\leqslant 2\frac{1}{b_M\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\alpha\alpha_3\delta}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2b_M^2}}\,dt+2\frac{1}{b_M\sqrt{2\pi}}\int\limits_{(1-\alpha)\alpha_3\delta}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2b_M^2}}\,dt\\
&\leqslant\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{b_M}\exp\left\{-\frac{(\alpha\alpha_3\delta)^2}{2b_M^2}\right\}\frac{b_M}{\alpha\alpha_3\delta\sqrt{2}}\\
&\quad+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{b_M}\exp\left\{-\frac{((1-\alpha)\alpha_3\delta)^2}{2b_M^2}\right\}\frac{b_M}{(1-\alpha)\alpha_3\delta\sqrt{2}}\\
&\leqslant\ \frac{1}{\alpha\alpha_3\delta\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\frac{(\alpha\alpha_3\delta)^2}{2b_M^2}\right\}+\frac{1}{(1-\alpha)\alpha_3\delta\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\frac{((1-\alpha)\alpha_3\delta)^2}{2b_M^2}\right\}.
\end{aligned}$$

З теореми 4.17 та останньої нерівності випливає твердження теореми.□

Розділ 5

МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ КОКСА

В даному розділі вводяться випадкові процеси Кокса та описуються два підходи до їхнього моделювання з певною точністю та надійністю, заданими неперед. Розглядається ряд випадків, а саме, коли інтенсивність випадкових процесів Кокса породжується логарифмічно гауссовими та квадратично гауссовими як однорідними так і неоднорідними процесами та полями.

5.1. Випадкові процеси Кокса

В підрозділі розглядаються випадкові процеси Кокса керовані випадковою інтенсивністю. Наведені всі необхідні означення та властивості, які використовуватимуться при їх моделюванні.

Розглянемо вимірний простір $\{\mathbf{T}, \mathfrak{B}, \mu\}$, $\mu(\mathbf{T}) < \infty$.

Означення 5.1. *[136] Нехай $\{Z(t), t \in \mathbf{T}\}$, $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$ – невід'ємний випадковий процес. Якщо $\{\nu(B), B \in \mathfrak{B}\}$ при фіксованій реалізації $Z(t)$ є пуассонівським процесом з функцією інтенсивності $\mu(B) = \int_B Z(\cdot, t)dt$, то $\nu(B)$ називається випадковим процесом Кокса керованим процесом $Z(t)$.*

Нехай $\{Y(t), t \in \mathbf{T}\}$, $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$ – стаціонарний, гауссовий, неперервний в середньому квадратичному випадковий процес, $\mathbf{E}Y(t) = 0$, $\mathbf{E}Y(t) \times Y(s) = B(t-s)$. Якщо $Z(t) = \exp\{Y(t)\}$, то $\nu(B)$ будемо називати логарифмічно гауссовим процесом Кокса або процесом Кокса керованим логарифмічно гауссовим процесом $\exp\{Y(t)\}$. Якщо ж $Z(t) = Y^2(t)$, то $\nu(B)$ будемо називати квадратично гауссовим процесом Кокса або процесом Кокса керованим квадратично гауссовим процесом $Y^2(t)$.

Якщо $\mathbf{T} \subset \mathbf{R^n}$, то $\nu(B)$ будемо називати випадковим процесом Кокса керованим полем.

Означення 5.2. *[97] Пуассонівським ансамблем N на $\{\mathbf{T}, \mathfrak{B}\}$ називається такий точковий процес, що для будь-яких $B_k \in \mathfrak{B}$, $k = \overline{1,m}$, $m \in \mathbf{N}$ таких, що $B_i \cap B_j = \varnothing$ якщо $i \neq j$, випадкові величини $N(B_k)$, $k = \overline{1,m}$ є незалежними в сукупності та мають пуассонівський розподіл* *з параметром* $\mu(B_k)$,

$$\mathbf{P}\{N(B_k)=l\}=\frac{(\mu(B_k))^l}{l!}\exp\{-\mu(B_k)\}.$$

Нехай ξ_i, $i=1,2,\ldots$ незалежні однаково розподілені випадкові елементи такі, що для будь-якої множини $B\in\mathfrak{B}$, $\mathbf{P}\{\xi_i\in B\}=\frac{\mu(B)}{\mu(\mathbf{T})}$.

Нехай Θ пуассонівська випадкова величина, що не залежить від ξ_i. Розглянемо сім'ю випадкових елементів $\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_\Theta$. Позначимо $\Pi(B)$ – число елементів з $\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_\Theta$, що попали в $B\in\mathfrak{B}$.

Теорема 5.1. $\Pi(B)$, $B\in\mathfrak{B}$ *є пуассонівським ансамблем з функцією інтенсивності* $\mu(B)$.

Доведення. Нехай $B_1,\,B_2,\,\ldots,\,B_m\in\mathfrak{B}$, $B_i\cap B_j=\varnothing$ коли $i\neq j$. Оскільки сумісний розподіл випадкових величин $\Pi(B_1),\,\Pi(B_2),\,\ldots,\,\Pi(B_m)$ за умови, що $\Theta=n$ є поліноміальним, то за формулою повної ймовірності

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\Pi(B_1)=k_1,\Pi(B_2)=k_2,\ldots,\Pi(B_m)=k_m\}\\
&=\sum_{n=\sum_{i=1}^m k_i}^{\infty}\mathbf{P}\{\Pi(B_1)=k_1,\Pi(B_2)=k_2,\ldots,\Pi(B_m)=k_m/\Theta=n\}\,\mathbf{P}\{\Theta=n\}\\
&=\sum_{n=\sum_{i=1}^m k_i}^{\infty}\frac{n!}{k_1!\ldots k_m!\,(n-\sum_{i=1}^m k_i)!}\prod_{i=1}^m\left(\frac{\mu(B_i)}{\mu(\mathbf{T})}\right)^{k_i}\\
&\quad\times\left(1-\frac{\sum_{i=1}^m\mu(B_i)}{\mu(\mathbf{T})}\right)^{n-\sum_{i=1}^m k_i}e^{-\mu(\mathbf{T})}\frac{(\mu(\mathbf{T}))^n}{n!}\\
&=\left(\prod_{i=1}^m\frac{(\mu(B_i))^{k_i}}{k_i!\,(\mu(\mathbf{T}))^{k_i}}\right)e^{-\mu(\mathbf{T})}\\
&\quad\times\sum_{n=\sum_{i=1}^m k_i}^{\infty}\frac{1}{(n-\sum_{i=1}^m k_i)!}\frac{(\mu(\mathbf{T})-\sum_{i=1}^m\mu(B_i))^{n-\sum_{i=1}^m k_i}}{(\mu(\mathbf{T}))^{n-\sum_{i=1}^m k_i}}(\mu(\mathbf{T}))^n\\
&=\left(\prod_{i=1}^m\frac{(\mu(B_i))^{k_i}}{k_i!}\right)e^{-\mu(\mathbf{T})}\sum_{n=\sum_{i=1}^m k_i}^{\infty}\frac{1}{(n-\sum_{i=1}^m k_i)!}\left(\mu(\mathbf{T})-\sum_{i=1}^m\mu(B_i)\right)^{n-\sum\limits_{i=1}^m k_i}\\
&=\left(\prod_{i=1}^m\frac{(\mu(B_i))^{k_i}}{k_i!}\right)e^{-\mu(\mathbf{T})}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\left(\mu(\mathbf{T})-\sum_{i=1}^m\mu(B_i)\right)^{s}
\end{aligned}$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \exp\left\{-\mu\left(B_i\right)\right\} \frac{\left(\mu\left(B_i\right)\right)^{k_i}}{k_i!}. \qquad \square$$

Таким чином, при фіксованій реалізації процесу $Y\left(t\right)$ логарифмічно гауссовий процес Кокса $\nu\left(B\right)$ є пуассонівським ансамблем. Цей результат суттєво використовуватиметься при моделюванні процесів Кокса.

5.2. Моделювання логарифмічно гауссового процесу Кокса як процесу надходження вимог в актуарній математиці

В даному підрозділі описується один з можливих методів моделювання процесу Кокса, інтенсивність якого є породженою логарифмічно гауссовим процесом ($\mu(B) = \int\limits_{B} \exp\left\{Y\left(t\right)\right\} dt$, $\left\{Y\left(t\right), t \in \mathbf{T}\right\}$ – центрований, стаціонарний, гауссовий). Цей метод може бути використаний як метод моделювання процесу надходження вимог в актуарній математиці, оскільки надходження вимог [145] часто можна вважати логарифмічно гауссовим процесом Кокса. Модель будується на певному скінченному проміжку, тобто $\mathbf{T} = \left[0, T\right], T \in \mathbf{R}$.

Модель логгауссового процесу Кокса будуємо в три кроки. На першому кроці моделюємо центрований, стаціонарний, гауссовий випадковий процес $Y\left(t\right)$. На другому кроці пуассонівську випадкову величину з інтенсивністю $\widetilde{\mu}\left(\mathbf{T}\right) = \int\limits_{0}^{T} \exp\left\{\widetilde{Y}\left(t\right)\right\}$, де $\widetilde{Y}\left(t\right)$ – модель $Y\left(t\right)$. В результаті отримаємо значення $\widetilde{\nu}\left(\mathbf{T}\right)$. Оскільки, в силу теореми 5.1, при реалізації процесу, який породжує інтенсивність, логгауссовий процес Кокса $\widetilde{\nu}\left(\mathbf{T}\right)$ є пуассонівським ансамблем, то на третьому кроці нам потрібно змоделювати $\widetilde{\nu}\left(\mathbf{T}\right)$ незалежних випадкових величин з функцією розподілу $\widetilde{G}\left(x\right) = \frac{\int_0^x \exp\left\{\widetilde{Y}(t)\right\} dt}{\int_{\mathbf{T}} \exp\left\{\widetilde{Y}(u)\right\} du}$.

Оскільки, моделлю неперервної випадкової величини з функцією розподілу $G\left(x\right)$ є $G^{-1}\left(\zeta\right)$, де $G^{-1}\left(\cdot\right)$ – узагальнена обернена до $G\left(\cdot\right)$ функція, ζ – рівномірно розподілена на $\left[0,1\right]$ випадкова величина, а модель логарифмічно гауссового процесу Кокса потрібно будувати таким чином, щоб вона якомога менше відрізнялася від справжнього процесу, то зрозуміло, що модель процесу буде "хорошою", якщо різниця $\left|G^{(-1)}\left(\zeta\right) - \widetilde{G}^{(-1)}\left(\zeta\right)\right|$ при будь-якому значенні ζ буде якомога меншою. Іншими словами розміщення кожної окремої точки логарифмічно гауссового процесу від її змодельованого аналога повинно мало відрізнятись.

Означення 5.3. *Скажемо, що модель процесу Кокса* $\{\nu(B), B \in \mathfrak{B}\}$, *керованого логарифмічно гауссовим процесом* $\exp\{Y(t)\}$, *наближає його з точністю* α, $0 < \alpha < 1$ *та надійністю* $1-\gamma$, $0 < \gamma < 1$, *якщо виконується нерівність*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leqslant \zeta \leqslant 1}\left|G^{(-1)}(\zeta) - \widetilde{G}^{(-1)}(\zeta)\right| > \alpha\right\} < \gamma.$$

Лема 5.1. *Нехай* $Y(t)$ *стаціонарний, центрований, неперервний в середньому квадратичному, гауссовий процес зі спектральною функцією* $F(\lambda)$, *а розбиття* D_Λ *відрізку* $[0, \Lambda]$, $\Lambda \in \mathbf{R}$ *таке, що* $\lambda_{k+1} - \lambda_k = \frac{\Lambda}{N}$, $N \in \mathbf{N}$, *тоді для будь-якого* $p > 1$ *має місце оцінка*

$$\left(\boldsymbol{E}\left|\int\limits_0^T e^{Y(u)-Y(t)}du - \int\limits_0^T e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}du\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 2^{\frac{1}{p}}\sqrt{v_1}A_{N,t}p^{\frac{1}{2}}\exp\left\{2pv_2B(0) - \frac{1}{2}\right\},$$

де

$$A_{N,t} = \left(\frac{T^2}{2} + Tt\right)\sqrt{2F(\Lambda)\frac{\Lambda}{N}} + 2T\sqrt{2(F(\infty) - F(\Lambda))},$$

v_1 *та* v_2 *такі додатні числа, що* $\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} = 1$.

Доведення. В силу узагальненої нерівності Мінковського

$$\left(\mathbf{E}\left|\int\limits_0^T e^{Y(u)-Y(t)}du - \int\limits_0^T e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}du\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int\limits_0^T\left(\mathbf{E}\left|e^{Y(u)-Y(t)} - e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}du. \quad (5.1)$$

Застосовуючи спочатку нерівність $|e^x - e^y| \leqslant |x-y|\,e^{\max(x,y)}$, а потім нерівність Гельдера

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left|e^{Y(u)-Y(t)}-e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}\right|^p \\
&\quad\leqslant \mathbf{E}\left(\left|Y(u)-Y(t)-\widetilde{Y}(u)+\widetilde{Y}(t)\right|^p e^{p\max\left(Y(u)-Y(t),\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)\right)}\right) \\
&\qquad\leqslant \left(\mathbf{E}\left|Y(u)-Y(t)-\widetilde{Y}(u)+\widetilde{Y}(t)\right|^{pv_1}\right)^{\frac{1}{v_1}} \\
&\qquad\qquad \left(\mathbf{E}e^{pv_2\max\left(Y(u)-Y(t),\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)\right)}\right)^{\frac{1}{v_2}}, \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}=1$, $v_1>1$. Оцінимо окремо кожен із множників правої частини останньої нерівності. Для оцінки першого множника доведемо допоміжне співвідношення. Нехай ξ нормально розподілена випадкова величина з параметрами 0 і σ^2, тоді

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}|\xi|^p =&\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|^p\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}dx=\left|\frac{x}{\sigma}=t,\, dx=\sigma dt\right| \\
=&\sigma^p\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|t|^p\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt=c_p\left(\sigma^2\right)^{\frac{p}{2}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_p&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}u^p\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}du=\left|\frac{u^2}{2}=v,\, du=\frac{dv}{\sqrt{2v}}\right| \\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}(2v)^{\frac{p}{2}}\exp\{-v\}\frac{1}{\sqrt{2v}}dv \\
&=\frac{2^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}v^{\frac{p+1}{2}-1}\exp\{-v\}dv=\frac{2^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Використовуючи формулу Стірлінга, $0<\theta<1$

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)=&\sqrt{2\pi}\left(\frac{p+1}{2}\right)^{\frac{p+1}{2}-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{p+1}{2}\right\}\exp\left\{\frac{\theta}{12\frac{p+1}{2}}\right\} \\
&\leqslant\sqrt{2\pi}\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{2}}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{p}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{6(p+1)}\right\}\exp\left\{-\frac{p}{2}\right\}.
\end{aligned}
$$

Дослідивши $\ln f(p)$, де $f(p)=\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\frac{p}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{6(p+1)}\right\}$ на максимум, можна переконатись, що при $p > 1$ $f(p) < 1$. Отже, для гауссової випадкової величини маємо

$$\mathbf{E}|\xi|^p = c_p \left(\sigma^2\right)^{\frac{p}{2}}, \tag{5.3}$$

причому

$$c_p \leqslant \sqrt{2} p^{\frac{p}{2}} \exp\left\{-\frac{p}{2}\right\}. \tag{5.4}$$

За допомогою щойно отриманого співвідношення, можемо записати

$$\mathbf{E}\left|Y(u) - Y(t) - \widetilde{Y}(u) + \widetilde{Y}(t)\right|^{pv_1} = c_{pv_1}\left(\mathbf{E}\left|Y(u) - Y(t) - \widetilde{Y}(u) + \widetilde{Y}(t)\right|^2\right)^{\frac{pv_1}{2}}.$$

Враховуючи зображення (3.3) процесу $Y(t)$ та (3.8) його моделі, маємо

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left|Y(u) - Y(t) - \widetilde{Y}(u) + \widetilde{Y}(t)\right|^2 \\
=&\mathbf{E}\left|\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda u - \cos\lambda_k u - \cos\lambda t + \cos\lambda_k t)\, d\xi(\lambda)\right. \\
&+ \sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda u - \sin\lambda_k u - \sin\lambda t + \sin\lambda_k t)\, d\eta(\lambda) \\
&\left.+ \int_{\Lambda}^{\infty} (\cos\lambda u - \cos\lambda t)\, d\xi(\lambda) + \int_{\Lambda}^{\infty} (\sin\lambda u - \sin\lambda t)\, d\eta(\lambda)\right|^2 \\
=& \sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda u - \cos\lambda_k u - \cos\lambda t + \cos\lambda_k t)^2\, dF(\lambda) \\
&+ \sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda u - \sin\lambda_k u - \sin\lambda t + \sin\lambda_k t)^2\, dF(\lambda) + \\
&+ \int_{\Lambda}^{\infty} (\cos\lambda u - \cos\lambda t)^2\, dF(\lambda) + \int_{\Lambda}^{\infty} (\sin\lambda u - \sin\lambda t)^2\, dF(\lambda)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 4\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\left|\sin\frac{u(\lambda+\lambda_k)}{2}\sin\frac{u(\lambda-\lambda_k)}{2}\right|\right.\\
&\quad\left.+\left|\sin\frac{t(\lambda_k+\lambda)}{2}\sin\frac{t(\lambda-\lambda_k)}{2}\right|\right)^2 dF(\lambda)\\
&\quad+4\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\left|\sin\frac{u(\lambda-\lambda_k)}{2}\cos\frac{u(\lambda+\lambda_k)}{2}\right|\right.\\
&\quad\left.+\left|\sin\frac{t(\lambda-\lambda_k)}{2}\sin\frac{t(\lambda_k+\lambda)}{2}\right|\right)^2 dF(\lambda)+\\
&\quad+4\int\limits_{\Lambda}^{\infty}\left(\sin\frac{\lambda(u+t)}{2}\sin\frac{\lambda(u-t)}{2}\right)^2 dF(\lambda)\\
&\quad+4\int\limits_{\Lambda}^{\infty}\left(\sin\frac{\lambda(u-t)}{2}\cos\frac{\lambda(u+t)}{2}\right)^2 dF(\lambda)\\
&\leqslant 8\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\frac{u(\lambda-\lambda_k)}{2}+\frac{t(\lambda-\lambda_k)}{2}\right)^2 dF(\lambda)+8\left(F(\infty)-F(\Lambda)\right)\\
&\leqslant 2\frac{\Lambda^2}{N^2}(u+t)^2F(\Lambda)+8\left(F(\infty)-F(\Lambda)\right),
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

оскільки на кожному проміжку $[\lambda_k,\lambda_{k+1}]$, $\lambda-\lambda_k\leqslant\lambda_{k+1}-\lambda_k=\frac{\Lambda}{N}$. Отже,

$$
\left(\mathbf{E}\left|Y(u)-Y(t)-\widetilde{Y}(u)+\widetilde{Y}(t)\right|^{pv_1}\right)^{\frac{1}{v_1}}\leqslant c_{pv_1}^{\frac{1}{v_1}}A_{N,u,t}^{\frac{p}{2}},\tag{5.6}
$$

де

$$
A_{N,u,t}=2\frac{\Lambda^2}{N^2}(u+t)^2F(\Lambda)+8\left(F(\infty)-F(\Lambda)\right).\tag{5.7}
$$

Оцінимо $\mathbf{E}e^{pv_2\max\left(Y(u)-Y(t),\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)\right)}$. Відзначимо, що для гауссової випадкової величини $\xi=N(0,\sigma^2)$ має місце рівність $\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi\}=\exp\left\{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\}$. Використовуючи цей факт, можемо записати

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\exp\left\{pv_2\max\left(Y(u)-Y(t),\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)\right)\right\}\\
&\qquad\leqslant\mathbf{E}\exp\left\{pv_2\left(Y(u)-Y(t)\right)\right\}+\mathbf{E}\exp\left\{pv_2\left(\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)\right)\right\}\\
&\quad=\exp\left\{\frac{(pv_2)^2}{2}\mathbf{E}\left(Y(u)-Y(t)\right)^2\right\}+\left\{\frac{(pv_2)^2}{2}\mathbf{E}\left(\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)\right)^2\right\}.
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{E}\left(Y\left(u\right)-Y\left(t\right)\right)^{2}=B\left(0\right)-2\mathbf{E}Y\left(u\right)Y\left(t\right)+B\left(0\right)$$

$$=2B\left(0\right)-2B\left(t-u\right)=2\int\limits_{0}^{\infty}\left(1-\cos\lambda\left(t-u\right)\right)dF\left(\lambda\right)$$

$$=4\int\limits_{0}^{\infty}\sin^{2}\frac{\lambda\left(t-u\right)}{2}dF\left(\lambda\right)\leqslant 4B\left(0\right).$$

Не важко переконатися, що й $\mathbf{E}\left|\widetilde{Y}\left(u\right)-\widetilde{Y}\left(t\right)\right|^{2}\leqslant 4B\left(0\right)$. Тоді

$$\mathbf{E}e^{pv_{2}\max\left(Y(u)-Y(t),\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)\right)}\leqslant 2e^{2(pv_{2})^{2}B(0)}.$$

Таким чином, використовуючи оцінку (5.6) та останню нерівність із (5.2) випливає, що

$$\mathbf{E}\left|e^{Y(u)-Y(t)}-e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}\right|^{p}\leqslant c_{pv_{1}}^{\frac{1}{v_{1}}}A_{N,\,u,\,t}^{\frac{p}{2}}2^{\frac{1}{v_{2}}}e^{2p^{2}v_{2}B(0)},$$

де $A_{N,\,u,\,t}$ визначено в (5.7). Тепер беручи до уваги щойно отриману, наведену в (5.4) для c_p оцінки

$$\int\limits_{0}^{T}\left(\mathbf{E}\left|e^{Y(u)-Y(t)}-e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}du$$

$$\leqslant\int\limits_{0}^{T}\left(\sqrt{2}\left(pv_{1}\right)^{\frac{pv_{1}}{2}}\exp\left\{-\frac{pv_{1}}{2}\right\}\right)^{\frac{1}{pv_{1}}}A_{N,\,u,\,t}^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{pv_{2}}}e^{2pv_{2}B(0)}du.$$

Оцінивши підінтегральний вираз з допомогою нерівності $\sqrt{x+y}\leqslant\sqrt{x}+\sqrt{y}$, потім проінтегрувавши та виконавши елементарні перетворення, легко бачити, що твердження леми випливає із (5.1). □

Лема 5.2. *Нехай $Y\left(t\right)$ стаціонарний, центрований, неперервний в середньому квадратичному, гауссовий процес зі спектральною функцією $F\left(\lambda\right)$, існує спектральний момент $\int\limits_{0}^{\infty}\lambda^{2\beta}dF\left(\lambda\right)$, $0<\beta\leqslant 1$, а розбиття D_{Λ} відрізку $\left[0,\Lambda\right]$, $\Lambda\in\mathbf{R}$ таке, що $\lambda_{k-1}-\lambda_{k}=\frac{\Lambda}{N}$, $N\in\mathbf{N}$, тоді для* *будь-якого $p>1$ має місце оцінка*

$$\left(\boldsymbol{E}\left|\int\limits_0^T e^{Y(u)-Y(t+h)}du-\int\limits_0^T e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t+h)}du\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int\limits_0^T e^{Y(u)-Y(t)}du+\int\limits_0^T e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}du\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant h^\beta G_{N,t,p},$$

де

$$G_{N,t,p}=2^{\frac{1}{p}}\left(T\sqrt{2P_{N,t}}+\left(2^{7-2\beta}\Lambda^{2\beta}B\left(0\right)\right)^{\frac{1}{2}}A_{N,\,t}\right)p\,e^{16pB(0)-\frac{1}{2}},$$

$$P_{N,t}=2^{5-4\beta}\left(\left(\frac{\Lambda}{N}\right)^\beta+2^{\beta-1}t\frac{\Lambda^{\beta+1}}{N}\right)^2F\left(\Lambda\right)+2^{3-2\beta}\int\limits_\Lambda^\infty\lambda^{2\beta}dF\left(\lambda\right),$$

$$A_{N,\,t}=\left(\frac{T^2}{2}+Tt\right)\sqrt{2F\left(\Lambda\right)}\frac{\Lambda}{N}+2T\sqrt{2\left(F\left(\infty\right)-F\left(\Lambda\right)\right)}.$$

Доведення.

$$\left(\mathbf{E}\left|\int\limits_0^T e^{Y(u)-Y(t+h)}du-\int\limits_0^T e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t+h)}du\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int\limits_0^T e^{Y(u)-Y(t)}du+\int\limits_0^T e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}du\right|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\mathbf{E}\left|\int\limits_0^T e^{Y(u)-Y(t)}du e^{Y(t)-Y(t+h)}-\int\limits_0^T e^{Y(u)-Y(t)}du e^{\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)}\right.\right.$$

$$+\int\limits_0^T e^{Y(u)-Y(t)}du e^{\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)}-\int\limits_0^T e^{Y(u)-Y(t)}du$$

$$\left.\left.-\int\limits_0^T e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}du e^{\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)}+\int\limits_0^T e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}du\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$
= \left(\mathbf{E} \left| \int_0^T e^{Y(u)-Y(t)} du \left(e^{Y(t)-Y(t+h)} - e^{\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)} \right) \right.\right.
$$

$$
\left.\left. + \int_0^T e^{Y(u)-Y(t)} du \left(e^{\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)} - 1 \right) - \int_0^T e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)} du \left(e^{\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)} - 1 \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}
$$

$$
\leqslant \left(\mathbf{E} \left| \int_0^T e^{Y(u)-Y(t)} du \left(e^{Y(t)-Y(t+h)} - e^{\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)} \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}
$$

$$
+ \left(\mathbf{E} \left| \left(e^{\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)} - 1 \right) \int_0^T \left(e^{Y(u)-Y(t)} - e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)} \right) du \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} . \qquad (5.8)
$$

Будемо оцінювати окремо кожен із двох доданків правої частини (5.8). Застосуємо до першого послідовно узагальнену нерівність Мінковського, нерівність $|e^x - e^y| \leqslant |x - y|\, e^{\max(x,y)}$ та нерівність Гельдера.

$$
\left(\mathbf{E} \left| \int_0^T e^{Y(u)-Y(t)} du \left(e^{Y(t)-Y(t+h)} - e^{\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)} \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}
$$

$$
\leqslant \int_0^T \left(\mathbf{E} \left| e^{Y(u)-Y(t)} du \left(e^{Y(t)-Y(t+h)} - e^{\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)} \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} du
$$

$$
\leqslant \int_0^T \left(\mathbf{E} \left| e^{Y(u)-Y(t)} \left| Y(t) - Y(t+h) - \widetilde{Y}(t) + \widetilde{Y}(t+h) \right| \right.\right. \qquad (5.9)
$$

$$
\left.\left. \times e^{\max\left(Y(t)-Y(t+h), \widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)\right)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} du
$$

$$
\leqslant \int_0^T \left(\left(\mathbf{E} \left| \Delta_1(Y) \right|^{pr_1} \right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\mathbf{E} \left| \Delta_2(Y) \right|^{pr_2} \right)^{\frac{1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{p}} du,
$$

де

$$
\Delta_1(Y) = Y(t) - Y(t+h) - \widetilde{Y}(t) + \widetilde{Y}(t+h),
$$

$$
\Delta_2(Y) = e^{Y(u)-Y(t)} e^{\max\left(Y(t)-Y(t+h), \widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)\right)},
$$

$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=1$, $r_1>1$. В силу (5.3)

$$\left(\mathbf{E}\left|\Delta_1(Y)\right|^{pr_1}\right)=\left(\mathbf{E}\left|\Delta_1(Y)\right|^2\right)^{\frac{pr_1}{2}}c_{pr_1}.$$

Скориставшись зображеннями (3.3) та (3.8) процесу $Y(t)$ та його моделі $\widetilde{Y}(t)$ а також нерівністю $|\sin x|\leqslant|x|^{\beta}$, $0\leqslant\beta\leqslant1$, матимемо

$$\mathbf{E}\left|\Delta_1(Y)\right|^2=\mathbf{E}\left|Y(t+h)-\widetilde{Y}(t+h)-Y(t)+\widetilde{Y}(t)\right|^2$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\cos\lambda(t+h)-\cos\lambda_k(t+h)-\cos\lambda t+\cos\lambda_k t\right)^2\,dF(\lambda)$$

$$+\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\sin\lambda(t+h)-\sin\lambda_k(t+h)-\sin\lambda t+\sin\lambda_k t\right)^2\,dF(\lambda)$$

$$+\int_{\Lambda}^{\infty}\left(\cos\lambda(t+h)-\cos\lambda t\right)^2\,dF(\lambda)+\int_{\Lambda}^{\infty}\left(\sin\lambda(t+h)-\sin\lambda t\right)^2\,dF(\lambda)$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}4\left(\left|\sin\frac{(t+h)(\lambda+\lambda_k)}{2}\right|\left|\sin\frac{(t+h)(\lambda-\lambda_k)}{2}-\sin\frac{(\lambda-\lambda_k)t}{2}\right|\right.$$

$$\left.+\left|\sin\frac{(\lambda-\lambda_k)t}{2}\right|\left|\sin\frac{(t+h)(\lambda+\lambda_k)}{2}-\sin\frac{(\lambda+\lambda_k)t}{2}\right|\right)^2dF(\lambda)$$

$$+\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}4\left(\left|\sin\frac{(t+h)(\lambda-\lambda_k)}{2}\right|\left|\cos\frac{(t+h)(\lambda+\lambda_k)}{2}-\cos\frac{(\lambda+\lambda_k)t}{2}\right|\right.$$

$$\left.+\left|\cos\frac{(\lambda+\lambda_k)t}{2}\right|\left|\sin\frac{(t+h)(\lambda-\lambda_k)}{2}-\sin\frac{(\lambda-\lambda_k)t}{2}\right|\right)^2dF(\lambda)$$

$$+\int_{\Lambda}^{\infty}4\left|\sin\frac{\lambda(2t+h)}{2}\right|^2\left|\sin\frac{\lambda h}{2}\right|^2dF(\lambda)+\int_{\Lambda}^{\infty}4\left|\cos\frac{\lambda(2t+h)}{2}\right|^2\left|\sin\frac{\lambda h}{2}\right|^2dF(\lambda)$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}4\left(\left|2\cos\frac{(2t+h)(\lambda-\lambda_k)}{4}\sin\frac{(\lambda-\lambda_k)h}{4}\right|\right.$$

$$\left.+\left|\sin\frac{(\lambda-\lambda_k)t}{2}\right|\left|2\cos\frac{(2t+h)(\lambda+\lambda_k)}{4}\sin\frac{(\lambda+\lambda_k)h}{4}\right|\right)^2dF(\lambda)$$

$$+\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}4\left(\left|\sin\frac{(t+h)(\lambda-\lambda_k)}{2}\right|\left|2\sin\frac{(2t+h)(\lambda+\lambda_k)}{4}\sin\frac{(\lambda+\lambda_k)h}{4}\right|\right.$$

$$\left.+\left|2\cos\frac{(2t+h)(\lambda-\lambda_k)}{4}\sin\frac{(\lambda-\lambda_k)h}{4}\right|\right)^2 dF(\lambda)$$

$$+2^{3-2\beta}h^{2\beta}\int\limits_{\Lambda}^{\infty}\lambda^{2\beta}dF(\lambda)$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}16\left(\frac{(\lambda-\lambda_k)^{\beta}h^{\beta}}{4^{\beta}}+\frac{(\lambda-\lambda_k)t}{2}\frac{(\lambda+\lambda_k)^{\beta}h^{\beta}}{4^{\beta}}\right)^2 dF(\lambda)$$

$$+\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}16\left(\frac{(t+h)(\lambda-\lambda_k)}{2}\frac{(\lambda+\lambda_k)^{\beta}h^{\beta}}{4^{\beta}}+\frac{(\lambda-\lambda_k)^{\beta}h^{\beta}}{4^{\beta}}\right)^2 dF(\lambda)$$

$$+2^{3-2\beta}h^{2\beta}\int\limits_{\Lambda}^{\infty}\lambda^{2\beta}dF(\lambda)$$

$$\leqslant 32\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\left(\frac{\Lambda}{N}\frac{h}{4}\right)^{\beta}+\frac{\Lambda}{N}\frac{t}{2}\left(2\Lambda\frac{h}{4}\right)^{\beta}\right)^2 dF(\lambda)+2^{3-2\beta}h^{2\beta}\int\limits_{\Lambda}^{\infty}\lambda^{2\beta}dF(\lambda),$$

$0<\beta\leqslant 1$. Отже,

$$\mathbf{E}\left|\Delta_1(Y)\right|^2\leqslant h^{2\beta}P_{N,t}, \tag{5.10}$$

де $P_{N,t}=2^{5-4\beta}\left(\left(\frac{\Lambda}{N}\right)^{\beta}+2^{\beta-1}t\frac{\Lambda^{\beta+1}}{N}\right)^2F(\Lambda)+2^{3-2\beta}\int\limits_{\Lambda}^{\infty}\lambda^{2\beta}dF(\lambda)$, $0<\beta\leqslant 1$. Таким чином

$$\left(\mathbf{E}\left|\Delta_1(Y)\right|^{pr_1}\right)^{\frac{1}{r_1}}\leqslant c_{pr_1}^{\frac{1}{r_1}}h^{p\beta}P_{N,t}^{\frac{p}{2}}. \tag{5.11}$$

Оцінимо далі $\mathbf{E}\left|\Delta_2(Y)\right|^{pr_2}$. Внаслідок нерівності Гельдера маємо

$$\mathbf{E}\left|\Delta_2(Y)\right|^{pr_2}\leqslant\left(\mathbf{E}\exp\left\{pr_2f_1\left(Y(u)-Y(t)\right)\right\}\right)^{\frac{1}{f_1}}$$

$$\times\left(\mathbf{E}\exp\left\{pr_2f_2\max\left(Y(t)-Y(t+h),\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)\right)\right\}\right)^{\frac{1}{f_2}}, \tag{5.12}$$

$\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=1, f_1>1$. Так як для нормально розподіленої випадкової величини $\xi=N(0,\sigma^2)$ має місце співвідношення $\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi\}=\exp\left\{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\}$, а також, як було показано в процесі доведення леми 5.1, $\mathbf{E}\left|Y(u)-Y(t)\right|^2$

$\leqslant 4B(0)$, $\mathbf{E}\left|\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)\right|^2 \leqslant 4B(0)$, то

$$\mathbf{E}\exp\{pr_2 f_1(Y(u)-Y(t))\}$$
$$=\exp\left\{\frac{(pr_2 f_1)^2}{2}\mathbf{E}(Y(u)-Y(u))^2\right\}\leqslant \exp\left\{2(pr_2 f_1)^2 B(0)\right\}.$$

$$\mathbf{E}\exp\left\{pr_2 f_2 \max\left(Y(t)-Y(t+h), \widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)\right)\right\}$$
$$\leqslant \exp\left\{\frac{(pr_2 f_2)^2}{2}\mathbf{E}(Y(t)-Y(t+h))^2\right\}$$
$$+\exp\left\{\frac{(pr_2 f_2)^2}{2}\mathbf{E}\left(\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)\right)^2\right\}$$
$$\leqslant 2\exp\left\{2(pr_2 f_2)^2 B(0)\right\}.$$

Поклавши $f_1 = f_2 = 2$, за допомогою двох останніх нерівностей та (5.12) легко бачити, що

$$\left(\mathbf{E}\left|\Delta_2(Y)\right|^{pr_2}\right)^{\frac{1}{r_2}} \leqslant 2^{\frac{1}{2r_2}}\exp\left\{8p^2 r_2 B(0)\right\}.$$

Отже, враховуючи (5.11), останню нерівність, із (5.9) випливає наступна оцінка

$$\left(\mathbf{E}\left|\int_0^T e^{Y(u)-Y(t)}du\left(e^{Y(t)-Y(t+h)}-e^{\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \int_0^T\left(\left(\sqrt{2}(pr_1)^{\frac{pr_1}{2}}\exp\left\{-\frac{pr_1}{2}\right\}\right)^{\frac{1}{r_1}} h^{p\beta}P_{N,t}^{\frac{p}{2}}2^{\frac{1}{2r_2}}e^{8p^2 r_2 B(0)}\right)^{\frac{1}{p}}du$$
$$\leqslant h^{\beta}2^{\frac{1}{2p}}T\sqrt{r_1 P_{N,t}}p^{\frac{1}{2}}\exp\left\{8pr_2 B(0)-\frac{1}{2}\right\}. \quad (5.13)$$

Перейдемо до оцінювання другого доданку правої частини (5.8).

$$\left(\mathbf{E}\left|\left(e^{\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)}-1\right)\int\limits_0^T\left(e^{Y(u)-Y(t)}-e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}\right)du\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\int\limits_0^T\left(\mathbf{E}\left|\left(e^{\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)}-1\right)\left(e^{Y(u)-Y(t)}-e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}du$$

$$\leqslant\int\limits_0^T\left(\left(\mathbf{E}\left|e^{\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)}-1\right|^{ps_1}\right)^{\frac{1}{s_1}}\right.$$

$$\left.\left(\mathbf{E}\left|\left(e^{Y(u)-Y(t)}-e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}\right)\right|^{ps_2}\right)^{\frac{1}{s_2}}\right)^{\frac{1}{p}}du, \quad (5.14)$$

$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}=1$. Застосовуючи спочатку нерівність $|\exp(x)-1|\leqslant|x|\exp\{|x|\}$, а потім знову нерівність Гельдера

$$\mathbf{E}\left|e^{\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)}-1\right|^{ps_1}\leqslant\mathbf{E}\left(\left|\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)\right|e^{\left|\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)\right|}\right)^{ps_1}$$

$$\leqslant\mathbf{E}\left(\left|\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)\right|^{ps_1l_1}\right)^{\frac{1}{l_1}}\left(\mathbf{E}e^{ps_1l_2\left|\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)\right|}\right)^{\frac{1}{l_2}},$$

$\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}=1$. Далі, оскільки

$$\mathbf{E}\left|\Delta_2(Y)\right|^2=\mathbf{E}\left|\widetilde{Y}(t+h)-\widetilde{Y}(t)\right|^2$$

$$=\mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\cos\lambda_k(t+h)\;d\xi(\lambda)+\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\sin\lambda_k(t+h)\;d\eta(\lambda)\right.$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\cos\lambda_k t\,d\xi(\lambda)-\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\sin\lambda_k t d\eta(\lambda)\right)^2$$

$$=\mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}-2\sin\frac{\lambda_k(2t+h)}{2}\sin\frac{\lambda_k h}{2}d\xi(\lambda)+\right.$$

$$+\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} 2\sin\frac{\lambda_k h}{2}\cos\frac{\lambda_k\left(2t+h\right)}{2}d\eta\left(\lambda\right)\Bigg)^2$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} 4\sin^2\frac{\lambda_k\left(2t+h\right)}{2}\sin^2\frac{\lambda_k h}{2}dF\left(\lambda\right)$$

$$+\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} 4\sin^2\frac{\lambda_k h}{2}\cos^2\frac{\lambda_k\left(2t+h\right)}{2}dF\left(\lambda\right)$$

$$\leqslant 8\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \sin^2\frac{\lambda_k h}{2}dF\left(\lambda\right)$$

$$\leqslant 8\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\frac{\lambda_k h}{2}\right)^{2\beta}dF\left(\lambda\right)\leqslant 2^{3-2\beta}\Lambda^{2\beta}h^{2\beta}F\left(\Lambda\right), \quad 0<\beta\leqslant 1,$$

то

$$\left(\mathbf{E}\left|\widetilde{Y}\left(t\right)-\widetilde{Y}\left(t+h\right)\right|^{ps_1l_1}\right)^{\frac{1}{l_1}}\leqslant c_{ps_1l_1}^{\frac{1}{l_1}}\left(2^{3-2\beta}\Lambda^{2^{\beta}}h^{2\beta}B\left(0\right)\right)^{\frac{ps_1}{2}}.$$

Крім того,

$$\left(\mathbf{E}e^{ps_1l_2\left|\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)\right|}\right)^{\frac{1}{l_2}}\leqslant 2^{\frac{1}{l_2}}e^{2(ps_1)^2l_2B(0)}.$$

Таким чином

$$\mathbf{E}\left|e^{\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)}-1\right|^{ps_1}\leqslant c_{ps_1l_1}^{\frac{1}{l_1}}\left(2^{3-2\beta}\Lambda^{2^{\beta}}h^{2\beta}B\left(0\right)\right)^{\frac{ps_1}{2}}2^{\frac{1}{l_2}}e^{2(ps_1)^2l_2B(0)}. \tag{5.15}$$

Далі оцінюватимемо $\mathbf{E}\left|e^{Y(u)-Y(t)}-e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}\right|^{ps_2}$.

$$\mathbf{E}\left|e^{Y(u)-Y(t)}-e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}\right|^{ps_2}$$

$$\leqslant\mathbf{E}\left(\left|Y\left(u\right)-Y\left(t\right)-\widetilde{Y}\left(u\right)+\widetilde{Y}\left(t\right)\right|e^{\max\left(Y(u)-Y(t),\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)\right)}\right)^{ps_2}$$

$$\leqslant\left(\mathbf{E}\left|Y\left(u\right)-Y\left(t\right)-\widetilde{Y}\left(u\right)+\widetilde{Y}\left(t\right)\right|^{ps_2m_1}\right)^{\frac{1}{m_1}}$$

$$\left(\mathbf{E}e^{ps_2m_2\max\left(Y(u)-Y(t),\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)\right)}\right)^{\frac{1}{m_2}},$$

$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}=1$. Оскільки, як було показано в лемі 5.1,

$$\mathbf{E}\left|Y(u)-Y(t)-\widetilde{Y}(u)+\widetilde{Y}(t)\right|^2\leqslant A_{N,\,u,\,t},$$
$$A_{N,\,u,\,t}=2\frac{\Lambda^2}{N^2}(u+t)^2F(\Lambda)+8\left(F(\infty)-F(\Lambda)\right),$$

то

$$\left(\mathbf{E}\left|Y(u)-Y(t)-\widetilde{Y}(u)+\widetilde{Y}(t)\right|^{ps_2m_1}\right)^{\frac{1}{m_1}}\leqslant c_{ps_2m_1}^{\frac{1}{m_1}}A_{N,\,u,\,t}^{\frac{ps_2}{2}}.$$

$$\left(\mathbf{E}e^{ps_2m_2\max\left(Y(u)-Y(t),\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)\right)}\right)^{\frac{1}{m_2}}\leqslant 2^{\frac{1}{m_2}}e^{2(ps_2)^2m_2B(0)}.$$

Із двох останніх нерівностей випливає, що

$$\mathbf{E}\left|e^{Y(u)-Y(t)}-e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}\right|^{ps_2}\leqslant c_{ps_2m_1}^{\frac{1}{m_1}}A_{N,\,u,\,t}^{\frac{ps_2}{2}}2^{\frac{1}{m_2}}e^{2(ps_2)^2m_2B(0)}$$

Використовуючи (5.15) і попередню нерівність та поклавши $s_1=s_2=l_1=l_2=m_1=m_2=2$ із (5.14) отримаємо

$$\left(\mathbf{E}\left|\left(e^{\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)}-1\right)\int\limits_0^T\left(e^{Y(u)-Y(t)}-e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}\right)du\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant\int\limits_0^T\Bigg(c_{ps_1l_1}^{\frac{1}{l_1s_1}}\left(2^{3-2\beta}\Lambda^{2\beta}h^{2\beta}B(0)\right)^{\frac{p}{2}}2^{\frac{1}{l_2s_1}}e^{2p^2s_1l_2B(0)}$$
$$c_{ps_2m_1}^{\frac{1}{m_1s_2}}A_{N,\,u,\,t}^{\frac{p}{2}}2^{\frac{1}{m_2s_2}}e^{2p^2s_2m_2B(0)}\Bigg)^{\frac{1}{p}}du$$
$$\leqslant\int\limits_0^T\Bigg(\left(\sqrt{2}\,(ps_1l_1)^{\frac{ps_1l_1}{2}}e^{-\frac{ps_1l_1}{2}}\right)^{\frac{1}{l_1s_1}}\left(2^{3-2\beta}\Lambda^{2\beta}h^{2\beta}B(0)\right)^{\frac{p}{2}}2^{\frac{1}{l_2s_1}}e^{2p^2s_1l_2B(0)}$$
$$\times\left(\sqrt{2}\,(ps_2m_1)^{\frac{ps_2m_1}{2}}e^{-\frac{ps_2m_1}{2}}\right)^{\frac{1}{m_1s_2}}A_{N,\,u,\,t}^{\frac{p}{2}}2^{\frac{1}{m_2s_2}}e^{2p^2s_2m_2B(0)}\Bigg)^{\frac{1}{p}}du$$
$$\leqslant h^\beta\int\limits_0^T\left(2^{\frac{3}{4p}}4A_{N,\,u,\,t}^{\frac{1}{2}}\left(2^{3-2\beta}\Lambda^{2\beta}B(0)\right)^{\frac{1}{2}}p\,e^{16pB(0)-1}\right)du.$$

Оцінивши підінтегральний вираз, а потім обчисливши інтеграл, будемо мати

$$\left(\mathbf{E}\left|\left(e^{\widetilde{Y}(t)-\widetilde{Y}(t+h)}-1\right)\int\limits_0^T\left(e^{Y(u)-Y(t)}-e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}\right)du\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant h^\beta 2^{\frac{3}{4p}}4A_{N,\,t}\left(2^{3-2\beta}\Lambda^{2^\beta}B\left(0\right)\right)^{\frac{1}{2}}p\,e^{16pB(0)-1},$$

де $A_{N,\,t}=\left(\frac{T^2}{2}+Tt\right)\sqrt{2F\left(\Lambda\right)\frac{\Lambda}{N}}+2T\sqrt{2\left(F\left(\infty\right)-F\left(\Lambda\right)\right)}$. Поклавши $r_1=r_2=1$ та врахувавши (5.13) і останню нерівність, твердження леми випливає з (5.8). $\square$

Лема 5.3. *Нехай $Y\left(t\right)$ стаціонарний, центрований, сепарабельний, неперервний в середньому квадратичному, гауссовий процес зі спектральною функцією $F\left(\lambda\right)$, існує спектральний момент $\int\limits_0^\infty\lambda^{2\beta}dF\left(\lambda\right)$, $0<\beta\leqslant 1$, а розбиття D_Λ відрізку $\left[0,\Lambda\right]$, $\Lambda\in\mathbf{R}$ таке, що $\lambda_{k-1}-\lambda_k=\frac{\Lambda}{N}$, $N\in\mathbf{N}$. Тоді, якщо $S_N<\alpha\exp\left\{-\frac{64B(0)}{\beta}\right\}$, то*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant\zeta\leqslant1}\left|G^{(-1)}\left(\zeta\right)-\widetilde{G}^{(-1)}\left(\zeta\right)\right|>\alpha\right\}$$
$$\leqslant\left(\left(\frac{\ln\frac{\alpha}{S_N}}{32B\left(0\right)}\right)^{\frac{\ln\frac{\alpha}{S_N}}{64B(0)}}+\left(\frac{3\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}T\left(\frac{\ln\frac{\alpha}{S_N}}{32B\left(0\right)}\right)^{\frac{\ln\frac{\alpha}{S_N}}{32B(0)}+\frac{1}{\beta}}\right)\exp\left\{-\frac{\ln^2\frac{\alpha}{S_N}}{64B\left(0\right)}\right\},\tag{5.16}$$

де

$$S_N=\max\left\{S_{N,1},S_{N,2}\right\}\quad S_{N,1}=\frac{4\sqrt{2}A_{N,\,0}}{\sqrt{7e}},$$
$$S_{N,2}=\frac{6\left(T\sqrt{2P_N}+\left(2^{7-2\beta}\Lambda^{2\beta}B\left(0\right)\right)^{\frac{1}{2}}A_{N,\,T}\right)}{\sqrt{e}},$$

$$A_{N,0}=\frac{T^2}{2}\sqrt{2F(\Lambda)}\frac{\Lambda}{N}+2T\sqrt{2\left(F(\infty)-F(\Lambda)\right)},$$

$$A_{N,T}=\frac{3T^2}{2}\sqrt{2F(\Lambda)}\frac{\Lambda}{N}+2T\sqrt{2\left(F(\infty)-F(\Lambda)\right)},$$

$$P_N=2^{5-4\beta}\left(\left(\frac{\Lambda}{N}\right)^{\beta}+2^{\beta-1}T\frac{\Lambda^{\beta+1}}{N}\right)^2F(\Lambda)+2^{3-2\beta}\int\limits_{\Lambda}^{\infty}\lambda^{2\beta}dF(\lambda).$$

Доведення. Відмітимо, що $\left(G^{-1}(\zeta)\right)'=\frac{1}{G'(G^{-1}(\zeta))}=\int\limits_0^T e^{Y(u)}du e^{-Y\left(G^{-1}(\zeta)\right)}$. Тоді, згідно формули Лагранжа

$$\begin{aligned}\sup_{0\leqslant\zeta\leqslant1}&\left|G^{(-1)}(\zeta)-\widetilde{G}^{(-1)}(\zeta)\right|\\&=\sup_{0\leqslant\zeta\leqslant1}\left|G^{-1}(0)-\widetilde{G}^{-1}(0)+\zeta\left(\left(G^{-1}\left(\hat{\zeta}\right)\right)'-\left(\widetilde{G}^{-1}\left(\hat{\zeta}\right)\right)'\right)\right|\\&\qquad\leqslant\sup_{0\leqslant\hat{\zeta}\leqslant1}\left|\left(G^{(-1)}\left(\hat{\zeta}\right)\right)'-\left(\widetilde{G}^{(-1)}\left(\hat{\zeta}\right)\right)'\right|\\&\qquad\qquad=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int\limits_0^T e^{Y(u)-Y(t)}du-\int\limits_0^T e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}du\right|.\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}&\left\{\sup_{0\leqslant\zeta\leqslant1}\left|G^{(-1)}(\zeta)-\widetilde{G}^{(-1)}(\zeta)\right|>\alpha\right\}\\&\qquad\leqslant\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int\limits_0^T e^{Y(u)-Y(t)}du-\int\limits_0^T e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}du\right|>\alpha\right\}.\end{aligned}$$

Скориставшись лемою 5.1, матимемо

$$\inf_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\mathbf{E}\left|\int\limits_0^T e^{Y(u)-Y(t)}du-\int\limits_0^T e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}du\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant 2^{\frac{1}{p}}\sqrt{v_1}A_{N,\,0}p^{\frac{1}{2}}\exp\left\{2pv_2B\left(0\right)-\frac{1}{2}\right\}, \qquad (5.17)$$

де $A_{N,\,0} = A_{N,\,t}\big|_{t=0}$. Скориставшись лемою 5.2, оцінимо ентропійний інтеграл, який фігурує в висновках наслідку 1.4.

$$\int\limits_0^{\theta\varepsilon_0}\left(\frac{T}{\varphi^{(-1)}\left(\varepsilon\right)}\right)^{\frac{1}{p}}d\varepsilon\leqslant\int\limits_0^{\theta\varepsilon_0}\left(T\left(\frac{G_{N,p}}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\frac{1}{p}}d\varepsilon=\frac{\theta^{1-\frac{1}{p\beta}}T^{\frac{1}{p}}G_{N,p}}{1-\frac{1}{p\beta}},$$

$1-\frac{1}{p\beta}>0$, $G_{N,p}=G_{N,t,p}\big|_{t=T}$. Враховуючи, що функція $f\left(\theta\right)=\frac{1}{\theta^{\frac{1}{p\beta}}\left(1-\theta\right)}$ набуває мінімального значення в точці $\theta_0=\frac{1}{p\beta+1}$, а також $\theta_0<\frac{\varphi\left(\frac{T}{2}\right)}{\varepsilon_0}$, після елементарних обчислень матимемо

$$\inf_{0<\theta<1}\frac{1}{\theta^{\frac{1}{p\beta}}\left(1-\theta\right)}\frac{T^{\beta}G_{N,p}}{1-\frac{1}{p\beta}}\leqslant T^{\frac{1}{p}}G_{N,p}\frac{\left(p\beta+1\right)^{1+\frac{1}{p\beta}}}{p\beta-1}.$$

Взявши до уваги (5.17), щойно отриману оцінку та нерівність $(a+b)^p\leqslant 2^{p-1}\left(a^p+b^p\right)$, на основі наслідку 1.4 можемо записати

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int\limits_0^T e^{Y(u)-Y(t)}du-\int\limits_0^T e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}du\right|>\alpha\right\}$$
$$\leqslant\frac{2^{p-1}\left(2^{\frac{1}{p}}\sqrt{v_1}A_{N,\,0}p^{\frac{1}{2}}\exp\left\{2pv_2B\left(0\right)-\frac{1}{2}\right\}\right)^p}{\alpha^p}+\frac{2^{p-1}\left(T^{\frac{1}{p}}G_{N,p}\frac{\left(p\beta+1\right)^{1+\frac{1}{p\beta}}}{\left(p\beta-1\right)}\right)^p}{\alpha^p}.$$

Розписавши $G_{N,p}$, а також врахувавши, що при $p\beta\geqslant 2$ $\left(\frac{p}{p\beta-1}\right)^p\leqslant\frac{2^p}{\beta^p}$ і $\left(p\beta+1\right)^{p+\frac{1}{\beta}}\leqslant\left(p\beta\right)^{p+\frac{1}{\beta}}\left(\frac{3}{2}\right)^{p+\frac{1}{\beta}}$ та поклавши $v_2=8$, після елементарних перетворень отримаємо наступну оцінку

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int\limits_0^T e^{Y(u)-Y(t)}du-\int\limits_0^T e^{\widetilde{Y}(u)-\widetilde{Y}(t)}du\right|>\alpha\right\}$$

$$\leqslant \frac{S_{N,1}^{p} p^{\frac{p}{2}} \exp\left\{2p^{2} v_{2} B\left(0\right)\right\}}{\alpha^{p}} + \frac{T S_{N,2}^{p} \left(\frac{3\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}} p^{p+\frac{1}{\beta}} e^{16p^{2}B(0)}}{\alpha^{p}}$$

$$\leqslant \frac{S_{N}^{p}\left(p^{\frac{p}{2}} + \left(\frac{3\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}} T p^{p+\frac{1}{\beta}}\right) \exp\left\{16p^{2} B\left(0\right)\right\}}{\alpha^{p}},$$

де $S_N = \max\left\{S_{N,1}, S_{N,2}\right\}$, $S_{N,1} = \frac{4\sqrt{2}A_{N,\,0}}{\sqrt{7e}}$, $S_{N,2} = \frac{6\left(\left(2^{7-2\beta}\Lambda^{2\beta}B(0)\right)^{\frac{1}{2}}A_{N,\,T}\right)}{\sqrt{e}}$ $+\frac{6\left(T\sqrt{2P_N}\right)}{\sqrt{e}}$, $P_N = P_{N,t}\left|_{t=T}\right.$, $A_N = A_{N,t}\left|_{t=T}\right.$. Обчисливши значення правої частини останньої оцінки в точці $p_0 = \frac{\ln\frac{\alpha}{S_N}}{32B(0)}$, близькій до точки мінімуму функції $\frac{S_N^p\left(p^{\frac{p}{2}}+\left(\frac{3\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}Tp^{p+\frac{1}{\beta}}\right)\exp\left\{16p^2B(0)\right\}}{\alpha^p}$ і врахувавши, що умова $p\beta > 2$ забезпечує виконання умови $1-\frac{1}{p\beta} > 0$, в силу наслідку 1.4 отримаємо (5.16), що й доводить лему. $\square$

Теорема 5.2. *Нехай $Y\left(t\right)$ стаціонарний, центрований, сепарабельний, неперервний в середньому квадратичному, гауссовий процес зі спектральною функцією $F\left(\lambda\right)$. Нехай існує спектральний момент $\int\limits_0^\infty \lambda^{2\beta} dF\left(\lambda\right)$, $0 < \beta \leqslant 1$, а розбиття D_Λ відрізку $\left[0, \Lambda\right]$, $\Lambda \in \mathbf{R}$ таке, що $\lambda_{k-1} - \lambda_k = \frac{\Lambda}{N}$, $N \in \mathbf{N}$, тоді модель процесу Кокса $\left\{\widetilde{\nu}\left(B\right),\ B \in \mathfrak{B}\right\}$, керованого логарифмічно гауссовим процесом $\exp\left\{\widetilde{Y}\left(t\right)\right\}$, наближає його з точністю α та надійністю $1-\gamma$ якщо виконуються умови:*

$$S_N < \alpha \exp\left\{-\frac{64B\left(0\right)}{\beta}\right\},$$

$$\left(\left(\frac{\ln\frac{\alpha}{S_N}}{32B\left(0\right)}\right)^{\frac{\ln\frac{\alpha}{S_N}}{64B(0)}} + \left(\frac{3\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}} T \left(\frac{\ln\frac{\alpha}{S_N}}{32B\left(0\right)}\right)^{\frac{\ln\frac{\alpha}{S_N}}{32B(0)}+\frac{1}{\beta}}\right) \exp\left\{-\frac{\ln^2\frac{\alpha}{S_N}}{64B\left(0\right)}\right\} \leqslant \gamma,$$

де S_N визначено в умові леми 5.3.

Доведення. Твердження теореми є очевидним наслідком означення 5.3 та леми 5.3. $\square$

5.3. Спрощений метод моделювання логарифмічно гауссових процесів Кокса

Метод моделювання, розглянутий в попередньому підрозділі, з точки зору його технічної реалізації на комп'ютері може викликати труднощі. Якщо модель логарифмічно гауссового процесу Кокса наближатиме його при досить великих N(як це часто буває при хорошій точності та великій надійності), то моделювання випадкових величини з функцією розподілу $\widetilde{G}(x) = \frac{\int_0^x \exp\left\{\widetilde{Y}(t)\right\}dt}{\int_T \exp\left\{\widetilde{Y}(u)\right\}du}$ (якщо не вдається знайти аналітичне задання оберненої) є досить трудомісткий за часом процес. Тому, в даному підрозділі пропонується дещо інший підхід до моделювання, який не вимагатиме моделювати випадкові величини з вище згаданою функцією розподілу.

Модель логгауссового процесу Кокса будуємо в два кроки. Спочатку моделюємо гауссовий процес $Y(t)$. Далі розглядаємо розбиття відрізку $\mathbf{T} = [0, T]$ на k відрізків довжиною $d = \frac{T}{k} : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T,\ t_{i+1} - t_i = d,\ i = \overline{0, k-1}$. Нехай $B_i = [t_i,\ t_{i+1}]\,,\ \widetilde{\mu}(B_i) = \int\limits_{B_i} \exp\left\{\widetilde{Y}(t)\right\}dt$, $\widetilde{Y}(t)$ – модель $Y(t)$. На другому кроці для кожного $i = \overline{0, k-1}$ будуємо модель логгауссового процесу Кокса $\widetilde{\nu}(B_i)$, тобто модель пуассонівської випадкової величини з середнім $\widetilde{\mu}(B_i)$. Оскільки $\widetilde{\nu}(B_i)$ це число точок моделі, що належать області B_i, а ми не знаємо справжнього їхнього розташування, то розміщуємо їх в B_i довільно. Якщо ж $\widetilde{\nu}(B_i) = 1$, то точку розміщуємо в центрі області.

Зрозуміло, що модель можна вважати допустимою, якщо умовні ймовірності $p_{kY}(B_i) = \mathbf{P}\left\{\nu(B_i) = k/\,Y(t)\,,\ t \in \mathbf{T}\right\}$ та $\widetilde{p}_{kY}(B_i) = \mathbf{P}\left\{\widetilde{\nu}(B_i) = k/\widetilde{Y}(t)\,,\ t \in \mathbf{T}\right\}$ відрізняються мало, а також ймовірність того, що число точок $\nu(B_i)$ (відповідно і $\widetilde{\nu}(B_i)$) буде більше одиниці також мала. Отже, задача моделювання логгауссового процесу Кокса полягає в виборі розбиття області моделювання та побудови самої моделі на вже вибраному розбитті.

Розбиття області $\mathbf{T}$ (тобто d або k) вибираємо так, щоб виконувалась нерівність

$$\mathbf{P}\left\{\nu(B_i) > 1\right\} < \delta, \tag{5.18}$$

де δ певне наперед задане число (наприклад, $\delta = 0,01$).

Теорема 5.3. *Нехай* $\{\nu(B)\,, B \subset \mathfrak{B}\}$ *процес Кокса, керований логарифмічно гауссовим стаціонарним процесом* $\exp\{Y(t)\}$. *Для того, щоб* *виконувалась нерівність* (5.18) *досить вибрати* $d = \frac{T}{k}$ *так, щоб виконувалась нерівність*

$$d \leqslant \left[2\delta \exp\left\{-2B\left(0\right)\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.19}$$

Доведення. Оскільки

$$\mathbf{P}\left\{\nu\left(B_i\right) > 1\right\} = \mathbf{E}\left(1 - \exp\left\{\,-\mu\left(B_i\right)\right\} - \mu\left(B_i\right)\exp\left\{\,-\mu\left(B_i\right)\right\}\,\right),$$

то потрібно знайти таке розбиття, щоб виконувалась нерівність

$$\mathbf{E}\left(1 - \exp\left\{\,-\mu\left(B_i\right)\right\} - \mu\left(B_i\right)\exp\left\{\,-\mu\left(B_i\right)\right\}\,\right) < \delta.$$

Так як при $x > 0 \quad 1 - \exp\left\{-x\right\}\left(1 + x\right) \leqslant \frac{x^2}{2}$, то для виконання попередньої нерівності досить щоб виконувалась нерівність

$$\mathbf{E}\left[\mu\left(B_i\right)\right]^2 < 2\delta. \tag{5.20}$$

Як вже було зазначено, для випадкових величин $\xi = N\left(0,\, \sigma^2\right)$ має місце співвідношення $\mathbf{E}\exp\left\{\lambda\xi\right\} = \exp\left\{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\}$, тому

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\mu\left(B_i\right)\right]^2 &= \mathbf{E}\left[\int\limits_{B_i} \exp\left\{Y\left(t\right)\right\}\,dt\right]^2 \\
&= \mathbf{E}\int\limits_{B_i} \exp\left\{Y\left(t\right)\right\}\,dt \int\limits_{B_i} \exp\left\{Y\left(s\right)\right\}\,ds \\
&= \iint\limits_{B_i\times B_i} E\exp\left\{Y\left(t\right) + Y\left(s\right)\right\}\,dtds \\
&= \iint\limits_{B_i\times B_i} \exp\left\{\frac{\mathbf{E}\left(Y\left(t\right) + Y\left(s\right)\right)^2}{2}\right\}dtds \\
&= \iint\limits_{B_i\times B_i} \exp\left\{\frac{\mathbf{E}\left(Y\left(t\right)\right)^2}{2} + \mathbf{E}Y\left(t\right)Y\left(s\right) + \frac{\mathbf{E}\left(Y\left(s\right)\right)^2}{2}\right\}dtds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint\limits_{B_i \times B_i} \exp\{B(0) + B(t-s)\}\, dtds \\
&= \exp\{B(0)\} \iint\limits_{B_i \times B_i} \exp\{B(t-s)\}\, dtds \\
&\leqslant d^2 \exp\{2B(0)\}.
\end{aligned}
$$

Отже, для того щоб виконувалась нерівність (5.20), а як наслідок і (5.18), досить щоб виконувалась нерівність (5.19). □

Оскільки потрібно будувати модель процесу $Y(t)$ так, щоб умовні ймовірності p_{kY} та $\widetilde{p}_{kY}$ для будь-якого $i = \overline{0, k-1}$ з ймовірністю близькою до одиниці відрізнялись мало, то природнім є наступне означення.

Означення 5.4. *Скажемо, що модель процесу Кокса* $\{\widetilde{\nu}(B),\ B \in \mathfrak{B}\}$, *керованого логарифмічно гауссовим процесом* $\exp\left\{\widetilde{Y}(t)\right\}$, *наближає його з точністю* α, $0 < \alpha < 1$ *та надійністю* $1-\gamma$, $0 < \gamma < 1$, *якщо виконується нерівність*

$$
\mathbf{P}\left\{ \max_{B_i \in \mathfrak{B}\ i=\overline{0,\, k-1}} |\, p_{kY}(B_i) - \widetilde{p}_{kY}(B_i)\,| > \alpha \right\} < \gamma.
$$

Лема 5.4. *Нехай* $Y(t)$ *стаціонарний, центрований, неперервний в середньому квадратичному, гауссовий процес зі спектральною функцією* $F(\lambda)$, *а розбиття* D_Λ *відрізку* $[0, \Lambda]$, $\Lambda \in \mathbf{R}$ *таке, що* $\lambda_{k-1} - \lambda_k = \frac{\Lambda}{N}$, $N \in \mathbf{N}$, *тоді для будь-якого* $p > 1$ *має місце оцінка*

$$
\left(\boldsymbol{E}\left|\exp\{Y(t)\} - \exp\left\{\widetilde{Y}(t)\right\}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 2^{\frac{1}{p}} \widehat{A}_{N,t}^{\frac{1}{2}} (pv_1)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{pv_2}{2} B(0) - \frac{1}{2}\right\},
$$

де

$$
\widehat{A}_{N,t} = B(0) - F(\Lambda) + 2^{2-2b} t^{2b} \left(\frac{\Lambda}{N}\right)^{2b} F(\Lambda),
$$

$b \in [0, 1]$, v_1 *та* v_2 *такі числа, що* $\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} = 1$.

Доведення. Використовуючи послідовно нерівності $|\exp\{x\} - \exp\{y\}|$

$\leqslant |x-y| \exp\{\max(x, y)\}$ та Гельдера, матимемо

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{E}\left|\exp\{Y(t)\}-\exp\left\{\widetilde{Y}(t)\right\}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad\leqslant\left(\mathbf{E}\left|Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right|^{p}\exp\left\{p\max\left(Y(t), \widetilde{Y}(t)\right)\right\}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant\left(\mathbf{E}\left|Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right|^{pv_1}\right)^{\frac{1}{pv_1}}\left(\mathbf{E}\exp\left\{pv_2\max\left(Y(t), \widetilde{Y}(t)\right)\right\}\right)^{\frac{1}{pv_2}},
\end{aligned} \tag{5.21}$$

$\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}=1$. В силу співвідношення (5.3), доведеного в лемі 5.1

$$\mathbf{E}\left|Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right|^{pv_1}=\left(\mathbf{E}\left|Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right|^{2}\right)^{\frac{pv_1}{2}}c_{pv_1}.$$

Оскільки для гауссових, стаціонарних, центрованих випадкових процесів мають місце рівності $\mathbf{E}(Y(t))^2=B(0)$, $\mathbf{E}\left(\widetilde{Y}(t)\right)^2=F(\Lambda)$, то

$$\mathbf{E}\left|Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right|^{2}=B(0)+F(\Lambda)-2EY(t)\widetilde{Y}(t).$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}Y(t)\widetilde{Y}(t)=&\mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\cos\lambda t\,d\xi(\lambda)+\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\sin\lambda t\,d\eta(\lambda)\right. \\
&\left.+\int_{\Lambda}^{\infty}\cos\lambda t\,d\xi(\lambda)+\int_{\Lambda}^{\infty}\sin\lambda t\,d\eta(\lambda)\right) \\
&\times\left(\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\cos\lambda_k t\,d\xi(\lambda)+\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\sin\lambda_k t\,d\eta(\lambda)\right) \\
=&\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\cos\lambda t\cos\lambda_k t\,dF(\lambda)+\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\sin\lambda t\sin\lambda_k t\,dF(\lambda) \\
=&\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\cos\ t(\lambda-\lambda_k)\,dF(\lambda).
\end{aligned}$$

Тому

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left|Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right|^2\\
&=B(0)-F(\Lambda)+2F(\Lambda)-2\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\cos\ t(\lambda-\lambda_k)\,dF(\lambda)\\
&=B(0)-F(\Lambda)+2\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}2\sin^2\left(\frac{t(\lambda-\lambda_k)}{2}\right)dF(\lambda)\\
&\leqslant B(0)-F(\Lambda)+4\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\frac{t^{2b}(\lambda-\lambda_k)^{2b}}{2^{2b}}\,dF(\lambda), \quad 0<b<1.
\end{aligned}
$$

Так як $\lambda-\lambda_k \leqslant \lambda_{k+1}-\lambda_k=\frac{\Lambda}{N}$, $k=\overline{0,\ N-1}$, то

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left|Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right|^2 \leqslant \widehat{A}_{N,t},\\
&\widehat{A}_{N,t}=B(0)-F(\Lambda)+2^{2-2b}t^{2b}\left(\frac{\Lambda}{N}\right)^{2b}F(\Lambda), \quad b\in[0,1].
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

Таким чином

$$
\left(\mathbf{E}\left|Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right|^{pv_1}\right)^{\frac{1}{pv_1}} \leqslant \widehat{A}_{N,t}^{\frac{1}{2}}c_{pv_1}^{\frac{1}{pv_1}}. \tag{5.23}
$$

Оцінимо $\exp\left\{p\,v_2\ \max\left(Y(t)\,,\ \widetilde{Y}(t)\right)\right\}$. Враховуючи, що для випадкової величини $\xi=N\left(0,\,\sigma^2\right)$ виконується рівність $\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi\}=\exp\left\{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\}$,

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\exp\left\{p\,v_2\max\left(Y(t)\,,\widetilde{Y}(t)\right)\right\}\leqslant \mathbf{E}\exp\{p\,v_2Y(t)\}+\mathbf{E}\exp\left\{p\,v_2\widetilde{Y}(t)\right\}\\
&=\exp\left\{\frac{(p\,v_2)^2}{2}B(0)\right\}+\exp\left\{\frac{(p\,v_2)^2}{2}F(\Lambda)\right\}\leqslant 2\exp\left\{\frac{(p\,v_2)^2}{2}B(0)\right\}.
\end{aligned}
$$

Таким чином, використовуючи останню нерівність, (5.23) а також оцінку (5.4) для c_p, твердження леми випливає із (5.21). $\square$

Лема 5.5. *Нехай $Y(t)$ стаціонарний, центрований, неперервний в середньому квадратичному, гауссовий процес зі спектральною функцією $F(\lambda)$,* *існує спектральний момент* $\int\limits_0^\infty \lambda^{2\beta} dF(\lambda)$, $0 < \beta \leqslant 1$, *а розбиття* D_Λ *відрізку* $[0, \Lambda]$, $\Lambda \in \mathbf{R}$ *таке, що* $\lambda_{k-1} - \lambda_k = \frac{\Lambda}{N}$, $N \in \mathbf{N}$, *тоді для будь-якого* $p > 1$ *має місце оцінка*

$$\left(\boldsymbol{E}\left|\exp\{Y(t+h)\} - \exp\left\{\widetilde{Y}(t+h)\right\}\right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(\exp\{Y(t)\} - \exp\left\{\widetilde{Y}(t)\right\}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant h^\beta \widehat{G}_{N,t,p},$$

де

$$\widehat{G}_{N,t,p} = 2^{\frac{1}{p}} p \exp\left\{\frac{pr_2}{2}\left(f_1 \widehat{A}_{N,t} + f_2 B(0)\right) - \frac{1}{2}\right\} \widehat{K}_{N,t},$$
$$\widehat{K}_{N,t} = \sqrt{r_1 \widehat{P}_{N,t}} + \sqrt{2^{3-2\beta} s_1 s_2 \Lambda^{2\beta} F(\Lambda)\, \widehat{A}_{N,t}},$$
$$\widehat{P}_{N,t} = 2^{5-4\beta}\left(\left(\frac{\Lambda}{N}\right)^\beta + 2^{\beta-1} t \frac{\Lambda^{\beta+1}}{N}\right)^2 F(\Lambda) + 2^{3-2\beta}\int\limits_\Lambda^\infty \lambda^{2\beta} dF(\lambda),$$
$$\widehat{A}_{N,t} = B(0) - F(\Lambda) + 2^{2-2b} t^{2b}\left(\frac{\Lambda}{N}\right)^{2b} F(\Lambda),$$

$b \in [0, 1]$, f_1, f_2, s_1, s_2, s_3, r_1, r_2 *такі числа, що* $r_2 = s_3$, $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = 1$, $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} = 1$, $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1$.

Доведення. Легко бачити, що

$$\left(\mathbf{E}\left| e^{Y(t+h)} - e^{\widetilde{Y}(t+h)} - \left(e^{Y(t)} - e^{\widetilde{Y}(t)}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left(\mathbf{E}\left|\left(e^{Y(t+h)-\widetilde{Y}(t+h)} - e^{Y(t)-\widetilde{Y}(t)}\right) e^{\widetilde{Y}(t+h)}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(e^{\widetilde{Y}(t+h)} - e^{\widetilde{Y}(t)}\right)\left(e^{Y(t)-\widetilde{Y}(t)} - 1\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \left(\mathbf{E}\left|\Delta_1(Y)\, V_1\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\mathbf{E}\left|\Delta_2(Y)\, \Delta_3(Y)\, V_2\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

де

$$\Delta_1(Y) = \left| Y(t+h) - \widetilde{Y}(t+h) - Y(t) + \widetilde{Y}(t)\right|,$$
$$V_1 = \exp\left\{\max\left(Y(t+h) - \widetilde{Y}(t+h),\, Y(t) - \widetilde{Y}(t)\right)\right\}\exp\left\{\widetilde{Y}(t+h)\right\},$$

$$
\begin{aligned}
&\Delta_2(Y) = \left|\widetilde{Y}(t+h) - \widetilde{Y}(t)\right|, \\
&\Delta_3(Y) = \left|Y(t) - \widetilde{Y}(t)\right|, \\
&V_2 = \exp\left\{\max\left(\widetilde{Y}(t+h), \widetilde{Y}(t)\right)\right\}\exp\left\{\left|Y(t) - \widetilde{Y}(t)\right|\right\}.
\end{aligned}
$$

Нехай $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1$, $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} = 1$, застосовуючи нерівність Гельдера

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left|\Delta_1(Y)\, V_1\right|^p \leqslant \left(\mathbf{E}\left|\Delta_1(Y)\right|^{pr_1}\right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\mathbf{E}\left|V_1\right|^{pr_2}\right)^{\frac{1}{r_2}}, \\
&\mathbf{E}\left|\Delta_2(Y)\, \Delta_3(Y)\, V_2\right|^p \leqslant \left(\mathbf{E}\left|\Delta_2(Y)\right|^{ps_1}\right)^{\frac{1}{s_1}} \left(\mathbf{E}\left|\Delta_3(Y)\right|^{ps_2}\right)^{\frac{1}{s_2}} \left(\mathbf{E}\left|V_2\right|^{ps_3}\right)^{\frac{1}{s_3}}.
\end{aligned}
$$

В силу (5.3) $\mathbf{E}\left|\Delta_1(Y)\right|^{pr_1} = \left(\mathbf{E}\left|\Delta_1(Y)\right|^2\right)^{\frac{pr_1}{2}} c_{pr_1}$. Як було показано при доведенні леми 5.2

$$
\mathbf{E}\left|\Delta_1(Y)\right|^2 = \mathbf{E}\left|Y(t+h) - \widetilde{Y}(t+h) - Y(t) + \widetilde{Y}(t)\right|^2 \leqslant h^{2\beta}\widehat{P}_{N,t},
$$

де

$$
\widehat{P}_{N,t} = 2^{5-4\beta}\left(\left(\frac{\Lambda}{N}\right)^{\beta} + 2^{\beta-1}t\frac{\Lambda^{\beta+1}}{N}\right)^2 F(\Lambda) + 2^{3-2\beta}\int\limits_{\Lambda}^{\infty}\lambda^{2\beta}dF(\lambda),
$$

$0 < \beta \leqslant 1$. Таким чином

$$
\mathbf{E}\left|\Delta_1(Y)\right|^{pr_1} \leqslant h^{pr_1\beta}\,\widehat{P}_{N,t}^{\frac{pr_1}{2}}\, c_{pr_1}. \tag{5.24}
$$

Оцінимо $\mathbf{E}\left|V_1\right|^{p\,r_2}$. Нехай $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = 1$, використовуючи нерівність Гельдера

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left|V_1\right|^{pr_2} =& \mathbf{E}\left|e^{\max\left(Y(t+h)-\widetilde{Y}(t+h),\, Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right)}\exp\left\{\widetilde{Y}(t+h)\right\}\right|^{pr_2} \\
&\leqslant \left(\mathbf{E}\exp\left\{p\,r_2 f_1\max\left(Y(t+h) - \widetilde{Y}(t+h),\, Y(t) - \widetilde{Y}(t)\right)\right\}\right)^{\frac{1}{f_1}} \\
&\quad\times\left(\mathbf{E}\exp\left\{p\,r_2 f_2\,\widetilde{Y}(t+h)\right\}\right)^{\frac{1}{f_2}}.
\end{aligned} \tag{5.25}
$$

$$\mathbf{E}\exp\left\{p\,r_2 f_1 \max\left(Y(t+h)-\widetilde{Y}(t+h)\,,\,Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right)\right\}$$
$$\leqslant \exp\left\{\frac{(p\,r_2 f_1)^2}{2}\mathbf{E}\left|Y(t+h)-\widetilde{Y}(t+h)\right|^2\right\}$$
$$+\exp\left\{\frac{(p\,r_2 f_1)^2}{2}\mathbf{E}\left|Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right|^2\right\}.$$

Повторивши міркування застосовані для отримання формули (5.22), легко бачити, що

$$\mathbf{E}\left|Y(t+h)-\widetilde{Y}(t+h)\right|^2 \leqslant \widehat{A}_{N,t},$$

де $\widehat{A}_{N,t}$ визначається в (5.22). Тоді

$$\left(\mathbf{E}\exp\left\{p\,r_2 f_1 \max\left(Y(t+h)-\widetilde{Y}(t+h)\,,\,Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right)\right\}\right)^{\frac{1}{f_1}}$$
$$\leqslant 2^{\frac{1}{f_1}}\exp\left\{\frac{(p\,r_2)^2 f_1}{2}\widehat{A}_{N,t}\right\}.$$

$$\left(\mathbf{E}\exp\left\{p\,r_2 f_2 \widetilde{Y}(t+h)\right\}\right)^{\frac{1}{f_2}} \leqslant \left(\exp\left\{\frac{(p\,r_2 f_2)^2}{2}F(\lambda)\right\}\right)^{\frac{1}{f_2}}$$
$$=\exp\left\{\frac{(p\,r_2)^2 f_2}{2}F(\lambda)\right\}.$$

Враховуючи дві попередні нерівності, із (5.25) отримуємо

$$\mathbf{E}\left|V_1\right|^{pr_2} \leqslant 2^{\frac{1}{f_1}}\exp\left\{\frac{(p\,r_2)^2}{2}\left(f_1\widehat{A}_{N,t}+f_2 B(0)\right)\right\}. \qquad (5.26)$$

Оцінимо $\mathbf{E}\left|\Delta_2(Y)\right|^{ps_1}$. Внаслідок (5.3)

$$\left|\Delta_2(Y)\right|^{ps_1} = \left(\mathbf{E}\left|\Delta_2(Y)\right|^2\right)^{\frac{ps_1}{2}} c_{ps_1}.$$

Як було показано при доведенні леми 5.2

$$\mathbf{E}\left|\Delta_2(Y)\right|^2=\mathbf{E}\left|\widetilde{Y}(t+h)-\widetilde{Y}(t)\right|^2\leqslant 2^{3-2\beta}\Lambda^{2\beta}h^{2\beta}F(\Lambda), \quad 0<\beta\leqslant 1.$$

Отже,

$$\mathbf{E}\left|\Delta_2(Y)\right|^{ps_1}\leqslant\left(2^{3-2\beta}\Lambda^{2\beta}h^{2\beta}F(\Lambda)\right)^{\frac{ps_1}{2}}c_{ps_1}. \tag{5.27}$$

Оцінимо $\mathbf{E}\left|\Delta_3(Y)\right|^{ps_2}$. Так як $\mathbf{E}\left|\Delta_3(Y)\right|^2=\mathbf{E}\left|Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right|^2\leqslant\widehat{A}_{N,t}$, а $\mathbf{E}\left|\Delta_3(Y)\right|^{ps_2}=\left(\mathbf{E}\left|\Delta_3(Y)\right|^2\right)^{\frac{ps_2}{2}}c_{ps_2}$, то

$$\mathbf{E}\left|\Delta_3(Y)\right|^{ps_2}\leqslant\widehat{A}_{N,t}^{\frac{ps_2}{2}}c_{ps_2}. \tag{5.28}$$

Оцінимо $\mathbf{E}\left|V_2\right|^{ps_3}$. Нехай $\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}=1$, використовуючи нерівність Гельдера

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left|V_2\right|^{ps_3}=&\mathbf{E}\left|\exp\left\{\max\left(\widetilde{Y}(t+h),\widetilde{Y}(t)\right)\right\}\exp\left\{\left|Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right|\right\}\right|^{ps_3}\\ \leqslant&\left(\mathbf{E}\exp\left\{ps_3e_1\max\left(\widetilde{Y}(t+h),\widetilde{Y}(t)\right)\right\}\right)^{\frac{1}{e_1}}\\ &\times\left(\mathbf{E}\exp\left\{ps_3e_2\left|Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right|\right\}\right)^{\frac{1}{e_2}}.\end{aligned}$$

$$\mathbf{E}\exp\left\{ps_3e_1\max\left(\widetilde{Y}(t+h),\widetilde{Y}(t)\right)\right\}\leqslant 2\exp\left\{\frac{(ps_3e_1)^2}{2}F(\Lambda)\right\}.$$

Оскільки для нормально розподіленої випадкової величини ξ з параметрами 0, σ^2 $\mathbf{E}\exp\{\lambda|\xi|\}\leqslant\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi\}+\mathbf{E}\exp\{-\lambda\xi\}=2\exp\left\{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\}$, то

$$\mathbf{E}\exp\left\{ps_3e_2\left|Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right|\right\}\leqslant 2\exp\left\{\frac{(ps_3e_2)^2}{2}\widehat{A}_{N,t}\right\}.$$

Отже,

$$\mathbf{E}\left|V_2\right|^{ps_3}\leqslant 2\exp\left\{\frac{(ps_3)^2}{2}\left(e_2\widehat{A}_{N,t}+e_1B(0)\right)\right\}. \tag{5.29}$$

Таким чином, використовуючи (5.24), (5.26) – (5.29), (5.4), отримаємо

$$\left(\mathbf{E}\left|\exp\{Y(t+h)\}-\exp\left\{\widetilde{Y}(t+h)\right\}-\left(\exp\{Y(t)\}-\exp\left\{\widetilde{Y}(t)\right\}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant\left(\mathbf{E}\left|\Delta_1(Y)\right|^{pr_1}\right)^{\frac{1}{pr_1}}\left(\mathbf{E}\left|V_1\right|^{pr_2}\right)^{\frac{1}{pr_2}}$$
$$+\left(\mathbf{E}\left|\Delta_2(Y)\right|^{ps_1}\right)^{\frac{1}{ps_1}}\left(\mathbf{E}\left|\Delta_3(Y)\right|^{ps_2}\right)^{\frac{1}{ps_2}}\left(\mathbf{E}\left|V_2\right|^{ps_3}\right)^{\frac{1}{ps_3}}$$
$$\leqslant h^{\beta}\,\widehat{P}_{N,t}^{\frac{1}{2}}\,c_{pr_1}^{\frac{1}{pr_1}}\,2^{\frac{1}{pr_2 f_1}}\exp\left\{\frac{p\,r_2}{2}\left(f_1\widehat{A}_{N,t}+f_2B(0)\right)\right\}$$
$$+\left(2^{3-2\beta}\Lambda^{2\beta}h^{2\beta}F(\Lambda)\right)^{\frac{1}{2}}\;c_{ps_1}^{\frac{1}{ps_1}}\;\widehat{A}_{N,t}^{\frac{1}{2}}\,c_{ps_2}^{\frac{1}{ps_2}}\,2^{\frac{1}{ps_3}}\exp\left\{\frac{ps_3}{2}\left(e_2\widehat{A}_{N,t}+e_1B(0)\right)\right\}$$
$$=h^{\beta}\left[\widehat{P}_{N,t}^{\frac{1}{2}}\,2^{\frac{1}{2pr_1}}\,(pr_1)^{\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{pr_2 f_1}}\exp\left\{\frac{pr_2}{2}\left(f_1\widehat{A}_{N,t}+f_2B(0)\right)\right\}\right.$$
$$+\left(2^{3-2\beta}\Lambda^{2\beta}F(\Lambda)\;\widehat{A}_{N,t}\right)^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2ps_1}}\,(ps_1)^{\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2ps_2}}\,(ps_2)^{\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}}\,2^{\frac{1}{ps_3}}$$
$$\left.\times\exp\left\{\frac{ps_3}{2}\left(e_2\widehat{A}_{N,t}+e_1B(0)\right)\right\}\right].$$

Поклавши $f_1=e_2$, $f_2=e_1$, $r_2=s_3$, а також врахувавши, що $2^{\frac{1}{2pr_1}}\times 2^{\frac{1}{pr_2 f_1}}\leqslant 2^{\frac{1}{p}}$, $2^{\frac{1}{2ps_1}}\,2^{\frac{1}{2ps_2}}\,2^{\frac{1}{ps_3 e_1}}\leqslant 2^{\frac{1}{p}}$, будемо мати

$$\left(\mathbf{E}\left|\exp\{Y(t+h)\}-\exp\left\{\widetilde{Y}(t+h)\right\}-\left(\exp\{Y(t)\}-\exp\left\{\widetilde{Y}(t)\right\}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant h^{\beta}\left[\widehat{P}_{N,t}^{\frac{1}{2}}\,2^{\frac{1}{p}}\,(pr_1)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{pr_2}{2}\left(f_1\widehat{A}_{N,t}+f_2B(0)\right)-\frac{1}{2}\right\}\right.$$
$$+\left(2^{3-2\beta}\Lambda^{2\beta}F(\Lambda)\;\widehat{A}_{N,t}\right)^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{p}}\,(ps_1)^{\frac{1}{2}}\,(ps_2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left.\times\exp\left\{\frac{pr_2}{2}\left(f_1\widehat{A}_{N,t}+f_2B(0)\right)-1\right\}\right],$$

звідки після деяких елементарних перетворень і випливає твердження леми. □

Лема 5.6. *Нехай $Y(t)$ стаціонарний, центрований, сепарабельний, неперервний в середньому квадратичному, гауссовий процес зі спектральною функцією $F(\lambda)$, існує спектральний момент $\int\limits_0^\infty \lambda^{2\beta}dF(\lambda)$, $0<\beta\leqslant 1$, а розбиття D_Λ відрізку $[0,\Lambda]$, $\Lambda\in\mathbf{R}$ таке, що $\lambda_{k-1}-\lambda_k=\frac{\Lambda}{N}$,*

$N \in \mathbf{N}$. *Тоді, якщо*

$$\widehat{S}_N < \alpha \exp\left\{-\frac{2r_2\left(f_1\widehat{A}_N + f_2 B(0)\right)}{\beta}\right\},$$

то

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_i \in \mathfrak{B}\ \overline{i=0,\,k-1}} |\, p_{kY}(B_i) - \widetilde{p}_{kY}(B_i)\,| > \alpha\right\}$$

$$\leqslant \left(p^{\frac{p}{2}} + T\left(\frac{3\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}} p^{p+\frac{1}{\beta}}\right)\exp\left\{-\frac{r_2\left(f_1\widehat{A}_N + f_2 B(0)\right)}{2}p^2\right\}, \quad (5.30)$$

де

$$p = \frac{\ln\frac{\alpha}{\widehat{S}_N}}{r_2\left(f_1\widehat{A}_N + f_2 B(0)\right)}, \quad \widehat{S}_N = \max\left\{\widehat{S}_{N,1}, \widehat{S}_{N,2}\right\},$$

$$\widehat{S}_{N,1} = \frac{2d\sqrt{v_1}\,(B(0) - F(\Lambda))}{\sqrt{e}},$$

$$\widehat{S}_{N,2} = \frac{6d}{\sqrt{e}}\left(\sqrt{r_1\widehat{P}_N} + \sqrt{2^{3-2\beta}s_1 s_2 \Lambda^{2\beta} F(\Lambda)\,\widehat{A}_N}\right),$$

$$\widehat{P}_N = 2^{5-4\beta}\left(\left(\frac{\Lambda}{N}\right)^{\beta} + 2^{\beta-1}T\frac{\Lambda^{\beta+1}}{N}\right)^2 F(\Lambda) + 2^{3-2\beta}\int_{\Lambda}^{\infty}\lambda^{2\beta}dF(\lambda),$$

$$\widehat{A}_N = B(0) - F(\Lambda) + 2^{2-2b}T^{2b}\left(\frac{\Lambda}{N}\right)^{2b} F(\Lambda),$$

$b \in [0,1]$, $f_1,\ f_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ r_1,\ r_2$ *такі числа, що* $r_2 = s_3 = v_2$, $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = 1$, $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} = 1$, $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1$.

Доведення. Оцінимо різницю $|\, p_{kY}(B_i) - \widetilde{p}_{kY}(B_i)\,|$ застосувавши формулу Лагранжа скінченних приростів.

$$|\, p_{kY}(B_i) - \widetilde{p}_{kY}(B_i)\,| = \left|\frac{\exp\{-\mu(B_i)\}\,(\mu(B_i))^k}{k!} - \frac{\exp\{-\widetilde{\mu}(B_i)\}\,(\widetilde{\mu}(B_i))^k}{k!}\right|$$

$$= \left|\mu\left(B_i\right) - \widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right| \frac{1}{k!} \exp\left\{-\hat{\mu}\;\left(B_i\right)\right\} \left(\hat{\mu}\;\left(B_i\right)\right)^{k-1} \left|k - \hat{\mu}\left(B_i\right)\right|$$

$$= \begin{cases} \left|\mu\left(B_i\right) - \widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right| \dfrac{1}{(k-1)!} e^{-\hat{\mu}\left(B_i\right)} \left(\hat{\mu}\left(B_i\right)\right)^{k-1} \leqslant \left|\mu\left(B_i\right) - \widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right|, \; k \geqslant \hat{\mu}(B_i); \\ \left|\mu\left(B_i\right) - \widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right| \dfrac{1}{k!} e^{-\hat{\mu}\left(B_i\right)} \left(\hat{\mu}\;\left(B_i\right)\right)^{k} \leqslant \left|\mu\left(B_i\right) - \widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right|, \;\; k < \hat{\mu}\;\left(B_i\right). \end{cases}$$

При $k = 0$

$$\left|p_{0Y}\left(B_i\right) - \widetilde{p}_{0Y}\left(B_i\right)\right| = \left|\exp\left\{-\mu\left(B_i\right)\right\} - \exp\left\{-\widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right\}\right|$$
$$\leqslant \left|\mu\left(B_i\right) - \widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right| \left|\exp\left\{-\hat{\mu}\;\left(B_i\right)\right\}\right| \leqslant \left|\mu\left(B_i\right) - \widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right|.$$

Таким чином оцінка $|p_{kY}(B_i) - \widetilde{p}_{kY}(B_i)|$ зводиться до оцінки $|\mu(B_i) - \widetilde{\mu}(B_i)|$ і виконується нерівність

$$\mathbf{P}\left\{\left|p_{kY}\left(B_i\right) - \widetilde{p}_{kY}\left(B_i\right)\right| > \alpha\right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{\left|\mu\left(B_i\right) - \widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right| > \alpha\right\}, \tag{5.31}$$

$i = \overline{0, k-1}$. Не складно переконатись, що справедливою є наступна нерівність

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_i \in \mathfrak{B},\; i=\overline{0,k-1}} \left|\mu\left(B_i\right) - \widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right| > \alpha\right\}$$
$$= \mathbf{P}\left\{\max_{B_i \in \mathfrak{B},\; i=\overline{0,k-1}} \left|\int_{B_i} \exp\left\{Y(t)\right\} dt - \int_{B_i} \exp\left\{\widetilde{Y}(t)\right\} dt\right| > \alpha\right\}$$
$$\leqslant \mathbf{P}\left\{\max_{B_i \in \mathfrak{B},\; i=\overline{0,k-1}} \int_{B_i} \sup_{t \in \mathbf{T}} \left|\exp\left\{Y(t)\right\} - \exp\left\{\widetilde{Y}(t)\right\}\right| dt > \alpha\right\}$$
$$= \mathbf{P}\left\{\max_{B_i \in \mathfrak{B},\; i=\overline{0,k-1}} \int_{B_i} dt \cdot \sup_{t \in \mathbf{T}} \left|\exp\left\{Y(t)\right\} - \exp\left\{\widetilde{Y}(t)\right\}\right| > \alpha\right\}$$
$$= \mathbf{P}\left\{\sup_{t \in \mathbf{T}} \left|\exp\left\{Y(t)\right\} - \exp\left\{\widetilde{Y}(t)\right\}\right| > \frac{\alpha}{d}\right\}. \tag{5.32}$$

В силу леми 5.4

$$\inf_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\mathbf{E}\left|\exp\left\{Y\left(t\right)\right\}-\exp\left\{\widetilde{Y}\left(t\right)\right\}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant 2^{\frac{1}{p}}\left(B\left(0\right)-F\left(\Lambda\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left(pv_1\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{pv_2}{2}B\left(0\right)-\frac{1}{2}\right\}. \quad (5.33)$$

За допомогою леми 5.5 оцінимо ентропійний інтеграл, який фігурує в висновках наслідку 1.4.

$$\int\limits_0^{\theta\varepsilon_0}\left(\frac{T}{\varphi^{(-1)}\left(\varepsilon\right)}\right)^{\frac{1}{p}}d\varepsilon\leqslant\int\limits_0^{\theta\varepsilon_0}\left(T\left(\frac{\widehat{G}_{N,p}}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\frac{1}{p}}d\varepsilon=\frac{\theta^{1-\frac{1}{p\beta}}T^{\frac{1}{p}}\widehat{G}_{N,p}}{1-\frac{1}{p\beta}},$$

$1-\frac{1}{p\beta}>0$, $\widehat{G}_{N,p}=\widehat{G}_{N,t,p}\Big|_{t=T}$. Не важко переконатись, що функція $f\left(\theta\right)=\frac{1}{\theta^{\frac{1}{p\beta}}\left(1-\theta\right)}$ набуває мінімального значення в точці $\theta_0=\frac{1}{p\beta+1}$ та $\theta_0<\frac{\varphi\left(\frac{T}{2}\right)}{\varepsilon_0}$. Після елементарних обчислень матимемо

$$\inf_{0<\theta<1}\frac{1}{\theta^{\frac{1}{p\beta}}\left(1-\theta\right)}\frac{T^{\beta}\widehat{G}_{N,p}}{1-\frac{1}{p\beta}}\leqslant T^{\frac{1}{p}}\widehat{G}_{N,p}\frac{\left(p\beta+1\right)^{1+\frac{1}{p\beta}}}{p\beta-1}.$$

Взявши до уваги (5.32), (5.33), щойно отриману оцінку та нерівність $\left(a+b\right)^{p}\leqslant 2^{p-1}\left(a^{p}+b^{p}\right)$, на основі наслідку 1.4 можемо записати

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_i\in\mathfrak{B},\ i=\overline{0,\,k-1}}\left|\mu\left(B_i\right)-\widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right|>\alpha\right\}$$
$$\frac{2^{p}\left(B\left(0\right)-F\left(\Lambda\right)\right)^{p}p^{\frac{p}{2}}v_1^{\frac{p}{2}}\exp\left\{\frac{pv_2}{2}B\left(0\right)-\frac{p}{2}\right\}}{\left(\frac{\alpha}{d}\right)^{p}}+\frac{2^{p-1}T\widehat{G}^{p}_{N,p}\frac{\left(p\beta+1\right)^{p+\frac{1}{\beta}}}{\left(p\beta-1\right)^{p}}}{\left(\frac{\alpha}{d}\right)^{p}}.$$

Розписавши $\widehat{G}_{N,p}$, а також врахувавши, що при $p\beta\geqslant 2$ $\left(\frac{p}{p\beta-1}\right)^{p}\leqslant\frac{2^{p}}{\beta^{p}}$, $\left(p\beta+1\right)^{p+\frac{1}{\beta}}\leqslant\left(p\beta\right)^{p+\frac{1}{\beta}}\left(\frac{3}{2}\right)^{p+\frac{1}{\beta}}$ та поклавши $v_2=r_2$, після елементарних перетворень отримаємо наступну оцінку

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_i\in\mathfrak{B},\ i=\overline{0,k-1}}\left|\mu\left(B_i\right)-\widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right|>\alpha\right\}$$

$$\leqslant \frac{\widehat{S}_{N,1}^{p}p^{\frac{p}{2}}\exp\left\{\frac{pv_2}{2}B\left(0\right)\right\}}{\alpha^p}+\frac{T\widehat{S}_{N,2}^{p}\left(\frac{3\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}p^{p+\frac{1}{\beta}}\exp\left\{\frac{p^2r_2}{2}\left(f_1\widehat{A}_N+f_2B\left(0\right)\right)\right\}}{\alpha^p}$$

$$\leqslant \frac{\widehat{S}_{N}^{p}\left(p^{\frac{p}{2}}+T\left(\frac{3\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}p^{p+\frac{1}{\beta}}\right)\exp\left\{\frac{p^2r_2}{2}\left(f_1\widehat{A}_N+f_2B\left(0\right)\right)\right\}}{\alpha^p},$$

де $\widehat{S}_N=\max\left\{\widehat{S}_{N,1},\widehat{S}_{N,2}\right\}$, $\widehat{S}_{N,1}=\frac{2d\sqrt{v_1}(B(0)-F(\Lambda))}{\sqrt{e}}$, $\widehat{S}_{N,2}=\frac{6d}{\sqrt{e}}\sqrt{r_1\widehat{P}_N}+\frac{6d}{\sqrt{e}}\sqrt{2^{3-2\beta}s_1s_2\Lambda^{2\beta}F\left(\Lambda\right)\widehat{A}_N}$. Обчисливши значення правої частини останньої оцінки в точці $p_0=\frac{\ln\frac{\alpha}{\widehat{S}_N}}{r_2\left(f_1\widehat{A}_N+f_2B(0)\right)}$, близькій до точки мінімуму функції $\frac{\widehat{S}_N^p\left(p^{\frac{p}{2}}+T\left(\frac{3\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}p^{p+\frac{1}{\beta}}\right)\exp\left\{\frac{p^2r_2}{2}\left(f_1\widehat{A}_{N,t}+f_2B(0)\right)\right\}}{\alpha^p}$ та врахувавши, що умова $p\beta\geqslant 2$ забезпечує виконання умови $1-\frac{1}{p\beta}>0$, в силу наслідку 1.4 отримаємо (5.30), що й доводить лему. □

Теорема 5.4. *Нехай $Y\left(t\right)$ стаціонарний, центрований, сепарабельний, неперервний в середньому квадратичному, гауссовий процес зі спектральною функцією $F\left(\lambda\right)$. Нехай існує спектральний момент $\int\limits_0^\infty\lambda^{2\beta}dF\left(\lambda\right)$, $0<\beta\leqslant 1$, а розбиття D_Λ відрізку $\left[0,\Lambda\right]$, $\Lambda\in\mathbf{R}$ таке, що $\lambda_{k-1}-\lambda_k=\frac{\Lambda}{N}$, $N\in\mathbf{N}$, тоді модель процесу Кокса $\left\{\widetilde{\nu}\left(B\right),\ B\in\mathfrak{B}\right\}$, керованого логарифмічно гауссовим процесом $\exp\left\{\widetilde{Y}\left(t\right)\right\}$, наближає його з точністю α та надійністю $1-\gamma$ якщо виконуються умови:*

$$\widehat{S}_N<\alpha\exp\left\{-\frac{2r_2\left(f_1\widehat{A}_N+f_2B\left(0\right)\right)}{\beta}\right\},$$

$$\left(p^{\frac{p}{2}}+T\left(\frac{3\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}p^{p+\frac{1}{\beta}}\right)\exp\left\{-\frac{r_2\left(f_1\widehat{A}_N+f_2B\left(0\right)\right)}{2}p^2\right\}<\gamma,$$

де $p = \frac{\ln \frac{\alpha}{\widehat{S}_N}}{r_2\left(f_1 \widehat{A}_N + f_2 B(0)\right)}$, $\widehat{S}_N, \widehat{A}_N$ *визначено в умовах леми 5.6,* $b \in [0,1]$, f_1, f_2, s_1, s_2, s_3, r_1, r_2 *такі числа, що* $r_2 = s_3$, $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = 1$, $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} = 1$, $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1$.

Доведення. Твердження теореми випливає з означення 5.4 та леми 5.6.□

Запропонований метод побудови моделей логарифмічно гауссових процесів Кокса з технічної сторони є простішим в порівнянні з попереднім. Зрозуміло, що він є дещо "гіршим" в розумінні точності, особливо якщо в деяку з областей B_i попадає більше однієї точки, але його використання прийнятніше в силу швидкості отримання моделі.

5.4. Моделювання процесу Кокса у випадку коли його інтенсивність породжена однорідним логарифмічно гауссовим полем

В даному підрозділі, метод моделювання випадкових процесів Кокса, що був запропонований в попередньому, поширюється на випадок, коли його інтенсивність породжується однорідним випадковим полем.

Нехай $\left\{Y\left(\vec{t}\right), \vec{t} \in \mathbf{T}\right\}$ – центроване, однорідне, гауссове поле, траєкторії якого є вимірними на $\mathbf{T}$. Аналогічно, як і в попередньому підрозділі, спочатку моделюємо поле $Y\left(\vec{t}\right)$, далі розглядаємо деяке розбиття $D_{\mathbf{T}}$ області $\mathbf{T}$ і на кожному елементі розбиття $D_{\mathbf{T}}$ будуємо модель пуассонівської випадкової величини з відповідним середнім.

Нехай $\mathbf{T} = [0, T] \times \ldots \times [0, T]$, $T \in \mathbf{R}_+$, розбиття $D_{\mathbf{T}}$ вибираємо наступним чином:

$$B_{i_1,\ldots,i_n} = \left\{ \left[t_1^{i_1}, t_1^{i_1+1}\right) \times \ldots \times \left[t_n^{i_n}, t_n^{i_n+1}\right) \,\middle|\, t_m^{i_m} < t_m^{i_m+1}, \right.$$
$$\left. t_m^{i_m+1} - t_m^{i_m} = d = \frac{T}{k}, k \in \mathbf{N},\, m = \overline{1,n},\, i_m = \overline{0, k-1} \right\}.$$

Позначимо $\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)$ – модель поля $Y\left(\vec{t}\right)$, $\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) = \int\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}} \exp\left\{\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right\} d\vec{t}$, $\widetilde{\nu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)$ – модель $\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)$, тобто модель пуассонівської випадкової величини з середнім $\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)$.

Оскільки $\widetilde{\nu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)$ це число точок моделі, що належать області $B_{i_1,\ldots,i_n}$, то розміщуємо ці точки в $B_{i_1,\ldots,i_n}$ довільно. Якщо $\widetilde{\nu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) = 1$, то точку розміщуємо в центрі області.

Розбиття області $\mathbf{T}$ (тобто d або k) вибираємо так, щоб виконувалась нерівність

$$\mathbf{P}\left\{\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) > 1\right\} < \delta, \tag{5.34}$$

де δ, певне наперед задане число.

Теорема 5.5. *Нехай* $\left\{\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right), B_{i_1,\ldots,i_n} \subset \mathfrak{B}\right\}$ *процес Кокса, керований логарифмічно гауссовим однорідним полем* $\exp\left\{Y\left(\vec{t}\right)\right\}$. *Для того, щоб виконувалась нерівність* (5.34) *досить вибрати* $d = \frac{T}{k}$ *так, щоб виконувалась нерівність*

$$d \leqslant \left[2\delta \exp\left\{-2B(\vec{0})\right\}\right]^{\frac{1}{2n}}.$$

Доведення. Повністю повторює доведення теореми 5.3. □

Означення 5.5. *Скажемо, що модель процесу Кокса* $\left\{\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right),\right.$ $\left.B_{i_1,\ldots,i_n} \subset \mathfrak{B}\right\}$, *керованого логарифмічно гауссовим однорідним полем* $\exp\left\{Y\left(\vec{t}\right)\right\}$, *наближає його з точністю* α, $0 < \alpha < 1$ *та надійністю* $1-\gamma$, $0 < \gamma < 1$, *якщо виконується нерівність*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n} \in \mathfrak{B}} \left| p_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) - \widetilde{p}_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right| > \alpha\right\} < \gamma.$$

Лема 5.7. *Нехай* $Y\left(\vec{t}\right)$ *– однорідне, центроване, неперервне в середньому квадратичному гауссове поле, тоді* $\forall p > 1$ *має місце оцінка*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n} \in \mathfrak{B}} \left|\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) - \widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right| > \alpha\right\} \leqslant \frac{2k^n W_N^p p^{\frac{p}{2}} \exp\left\{\frac{p^2 v_2}{2} B\left(\vec{0}\right) - \frac{p}{2}\right\}}{\alpha^p},$$

де

$$W_N = \sqrt{v_1} d^n J_N^{\frac{1}{2}},$$

$$J_N = 2^{2-2a} n^{2a} \frac{d^{2a}\Lambda^{2a}}{N^{2a}} \nu\left(\Lambda^n\right) + B\left(\vec{0}\right) - \nu\left(\Lambda^n\right),$$

$v_2 = \frac{v_1}{v_1 - 1}$, v_1 *– будь-яке додатне дійсне число більше одиниці,* $a \in [0, 1]$.

Доведення.

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\dots,i_n}\in\mathfrak{B}}\left|\mu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}$$

$$\leqslant\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{k}\mathbf{P}\left\{\left|\mu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}$$

$$\leqslant k^n\max_{B_{i_1,\dots,i_n}\in\mathfrak{B}}\mathbf{P}\left\{\left|\mu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}.$$

Використовуючи нерівність Чебишева

$$\mathbf{P}\left\{\left|\mu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}\leqslant\frac{\mathbf{E}\left|\mu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)\right|^p}{\alpha^p}.$$

В силу узагальненої нерівності Мінковського

$$\mathbf{E}\left|\mu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)\right|^p$$

$$\leqslant\mathbf{E}\left(\int\limits_{B_{i_1,\dots,i_n}}\left|\exp\left\{Y\left(\vec{t}\right)\right\}-\exp\left\{\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right\}\right|d\vec{t}\right)^p$$

$$\leqslant\left(\int\limits_{B_{i_1,\dots,i_n}}\left(\mathbf{E}\left|\exp\left\{Y\left(\vec{t}\right)\right\}-\exp\left\{\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right\}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}d\vec{t}\right)^p$$

Таким чином, із останніх трьох нерівностей випливає наступна

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\dots,i_n}\in\mathfrak{B}}\left|\mu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}$$

$$\leqslant\frac{k^n\left(\int\limits_{B_{i_1,\dots,i_n}}\left(\mathbf{E}\left|\exp\left\{Y\left(\vec{t}\right)\right\}-\exp\left\{\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right\}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}d\vec{t}\right)^p}{\alpha^p}. \tag{5.35}$$

Оцінимо $\mathbf{E}\left|\exp\left\{Y\left(\vec{t}\right)\right\}-\exp\left\{\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right\}\right|^p$. Нехай $\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}=1$, використовуючи спочатку нерівність $\left|\exp\left\{x\right\}-\exp\left\{y\right\}\right|\leqslant|x-y|\exp\left\{\max\left(x,\,y\right)\right\}$, а потім нерівність Гельдера, отримаємо

$$\mathbf{E}\left|\exp\left\{Y\left(\vec{t}\right)\right\}-\exp\left\{\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right\}\right|^{p}$$
$$\leqslant \mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{p}\exp\left\{p\,\max\left(Y\left(\vec{t}\right),\,\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right)\right\}$$
$$\leqslant\left(\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_1}\right)^{\frac{1}{v_1}}\left(\mathbf{E}\exp\left\{p\,v_2\,\max\left(Y\left(\vec{t}\right),\,\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right)\right\}\right)^{\frac{1}{v_2}}. \tag{5.36}$$

В силу співвідношення (5.3)

$$\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_1}=c_{pv_1}\left(\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{2}\right)^{\frac{pv_1}{2}}.$$

Оскільки для гауссових, однорідних, центрованих випадкових полів мають місце рівності $\mathbf{E}\left(Y\left(\vec{t}\right)\right)^2=B\left(\vec{0}\right)$, $\mathbf{E}\left(\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right)^2=\Phi\left(\Lambda^n\right)$, то

$$\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{2}=B\left(\vec{0}\right)+\Phi\left(\Lambda^n\right)-2\,\mathbf{E}\,Y\left(\vec{t}\right)\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right).$$

Скориставшись зображенням (3.9) поля $Y\left(\vec{t}\right)$ та його моделі (3.10)

$$\mathbf{E}Y\left(\vec{t}\right)\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)=\mathbf{E}\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta(i_1,\ldots,i_n)}\cos\left(\vec{t},\vec{\lambda}\right)dZ_1\left(\vec{\lambda}\right)\right.$$
$$+\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta(i_1,\ldots,i_n)}\sin\left(\vec{t},\vec{\lambda}\right)dZ_2\left(\vec{\lambda}\right)$$
$$\left.+\int\limits_{\mathbf{R}^n\setminus\Lambda^n}\cos\left(\vec{t},\vec{\lambda}\right)dZ_1\left(\vec{\lambda}\right)+\int\limits_{\mathbf{R}^n\setminus\Lambda^n}\sin\left(\vec{t},\vec{\lambda}\right)dZ_2\left(\vec{\lambda}\right)\right)$$
$$\times\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta(i_1,\ldots,i_n)}\cos\left(\vec{t},\vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1},\ldots,\lambda_n^{i_n}\right)\right)dZ_1\left(\vec{\lambda}\right)\right.$$

$$
\left. + \sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1} \int\limits_{\Delta(i_1,\dots,i_n)} \sin\left(\vec{t}, \vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1},\dots,\lambda_n^{i_n}\right)\right) dZ_2\left(\vec{\lambda}\right)\right)
$$

$$
= \sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1} \int\limits_{\Delta(i_1,\dots,i_n)} \cos\left(\vec{t}, \vec{\lambda}\right) \cos\left(\vec{t}, \vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1},\dots,\lambda_n^{i_n}\right)\right) d\Phi\left(\vec{\lambda}\right)
$$

$$
+ \sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1} \int\limits_{\Delta(i_1,\dots,i_n)} \sin\left(\vec{t}, \vec{\lambda}\right) \sin\left(\vec{t}, \vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1},\dots,\lambda_n^{i_n}\right)\right) d\Phi\left(\vec{\lambda}\right)
$$

$$
= \sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1} \int\limits_{\Delta(i_1,\dots,i_n)} \cos\left(\vec{t}, \vec{\lambda} - \vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1},\dots,\lambda_n^{i_n}\right)\right) d\Phi\left(\vec{\lambda}\right).
$$

Таким чином, беручи до уваги щойно отримане співвідношення

$$
\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right) - \widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^2 = 2\,\Phi\left(\Lambda^n\right) - 2\,\mathbf{E}\,Y\left(\vec{t}\right)\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right) + B\left(\vec{0}\right) - \Phi\left(\Lambda^n\right)
$$

$$
= 2 \sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1} \int\limits_{\Delta(i_1,\dots,i_n)} \left(1 - \cos\left(\vec{t}, \vec{\lambda} - \vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1},\dots,\lambda_n^{i_n}\right)\right)\right) d\Phi\left(\vec{\lambda}\right) + B\left(\vec{0}\right) - \Phi\left(\Lambda^n\right)
$$

$$
= 4 \sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1} \int\limits_{\Delta(i_1,\dots,i_n)} \sin^2 \frac{\left(\vec{t}, \vec{\lambda} - \vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1},\dots,\lambda_n^{i_n}\right)\right)}{2} d\Phi\left(\vec{\lambda}\right) + B\left(\vec{0}\right) - \Phi\left(\Lambda^n\right)
$$

$$
\leqslant 4 \sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1} \int\limits_{\Delta(i_1,\dots,i_n)} \left(\frac{\vec{t}, \vec{\lambda} - \vec{\lambda}\left(\lambda_1^{i_1},\dots,\lambda_n^{i_n}\right)}{2}\right)^{2a} d\Phi\left(\vec{\lambda}\right) + B\left(\vec{0}\right) - \Phi\left(\Lambda^n\right),
$$

$a \in [0,\, 1]$. Використовуючи нерівність $\left(\vec{e},\, \vec{f}\right) \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} e_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} f_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ а також врахувавши, що $\lambda_m - \lambda_m^{i_m} \leqslant \lambda_m^{i_m+1} - \lambda_m^{i_m} = \frac{\Lambda}{N}$,

$$\mathbf{E}\left| Y\left(\vec{t}\right) - \widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^2$$

$$\leqslant 4\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta(i_1,\ldots,i_n)} \frac{\left(\sum\limits_{m=1}^{n} t_m^2\right)^a\left(\sum\limits_{m=1}^{n}\left(\lambda_m - \lambda_m^{i_m}\right)^2\right)^a}{2^{2a}} d\Phi\left(\vec{\lambda}\right) + B\left(\vec{0}\right) - \Phi\left(\Lambda^n\right)$$

$$= 2^{2-2a}\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1}\int\limits_{\Delta(i_1,\ldots,i_n)} \left(nd^2\right)^a\left(n\frac{\Lambda^2}{N^2}\right)^a d\Phi\left(\vec{\lambda}\right) + B\left(\vec{0}\right) - \Phi\left(\Lambda^n\right)$$

$$= 2^{2-2a}n^{2a}\frac{d^{2a}\Lambda^{2a}}{N^{2a}}\Phi\left(\Lambda^n\right) + B\left(\vec{0}\right) - \Phi\left(\Lambda^n\right).$$

Отже,

$$\mathbf{E}\left| Y\left(\vec{t}\right) - \widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_1} \leqslant c_{pv_1} J_N^{\frac{pv_1}{2}},$$

$$J_N = 2^{2-2a}n^{2a}\frac{d^{2a}\Lambda^{2a}}{N^{2a}}\Phi\left(\Lambda^n\right) + B\left(\vec{0}\right) - \Phi\left(\Lambda^n\right). \quad (5.37)$$

Далі оцінимо $\mathbf{E}\exp\left\{p\,v_2\,\max\left(Y\left(\vec{t}\right), \widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right)\right\}$.

$$\mathbf{E}\exp\left\{p\,v_2\max\left(Y\left(\vec{t}\right), \widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right)\right\}$$

$$\leqslant \mathbf{E}\exp\left\{p\,v_2 Y\left(\vec{t}\right)\right\} + \mathbf{E}\exp\left\{p\,v_2\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{\left(p\,v_2\right)^2}{2}B\left(\vec{0}\right)\right\} + \exp\left\{\frac{\left(p\,v_2\right)^2}{2}\Phi\left(\Lambda^n\right)\right\}$$

$$\leqslant 2\exp\left\{\frac{\left(p\,v_2\right)^2}{2}B\left(\vec{0}\right)\right\}. \quad (5.38)$$

Беручи до уваги (5.37), (5.38), із (5.36) матимемо

$$\mathbf{E}\left|\exp\left\{Y\left(\vec{t}\right)\right\} - \exp\left\{\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right\}\right|^p \leqslant c_{pv_1}^{\frac{1}{v_1}} J_N^{\frac{p}{2}} 2^{\frac{1}{v_2}} \exp\left\{\frac{p^2 v_2}{2}B\left(\vec{0}\right)\right\}. \quad (5.39)$$

Враховуючи оцінки (5.39), (5.4) після елементарних перетворень твердження леми випливає із (5.35). $\square$

Лема 5.8. *Нехай* $Y\left(\vec{t}\right)$ *– однорідне, центроване, неперервне в середньому квадратичному гауссове поле. Якщо* $W_N < \alpha\exp\left\{\frac{1}{2} - v_2 B\left(\vec{0}\right)\right\}$, *то має місце наступна оцінка*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n}\in\mathfrak{B}} |\, p_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) - \widetilde{p}_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)| > \alpha\right\}$$
$$\leqslant 2k^n\left(\frac{\frac{1}{2}-\ln\frac{W_N}{\alpha}}{v_2 B\left(\vec{0}\right)}\right)^{\frac{\frac{1}{2}-\ln\frac{W_N}{\alpha}}{2v_2B\left(\vec{0}\right)}}\exp\left\{-\frac{\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{W_N}{\alpha}\right)^2}{2v_2B\left(\vec{0}\right)}\right\},$$

де W_N *визначено в умові леми 5.7,* $v_2 = \frac{v_1}{v_1-1}$, v_1 *– будь-яке додатне дійсне число більше одиниці.*

Доведення. Як було показано при доведенні леми 5.6

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n}\in\mathfrak{B}} |p_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)-\widetilde{p}_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)| > \alpha\right\}$$
$$\leqslant \mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n}\in\mathfrak{B}} |\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)| > \alpha\right\}.$$

В силу леми 5.7

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n}\in\mathfrak{B}} |p_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)-\widetilde{p}_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)| > \alpha\right\}$$
$$\leqslant \frac{2k^n W_N^p p^{\frac{p}{2}}\exp\left\{\frac{p^2v_2}{2}B\left(\vec{0}\right)-\frac{p}{2}\right\}}{\alpha^p}.$$

Знайшовши значення правої частини останньої нерівності в точці $p_0 = \frac{\frac{1}{2}-\ln\frac{W_N}{\alpha}}{v_2B\left(\vec{0}\right)}$ близькій до її точки мінімуму та забезпечивши, що p_0 повинно бути більше одиниці, отримаємо твердження леми. $\square$

Теорема 5.6. *Нехай* $Y\left(\vec{t}\right)$ *– однорідне, центроване, неперервне в середньому квадратичному випадкове поле, тоді модель процесу Кокса* $\left\{\widetilde{\nu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right),\ \ B_{i_1,\ldots,i_n}\subset\mathfrak{B}\right\}$, *керованого логгауссовим однорідним полем* $\exp\left\{\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right\}$, *наближає його з точністю* α *та надійністю* $1-\gamma$, *якщо виконуються умови:*

$$W_N < \alpha \exp\left\{\frac{1}{2} - v_2 B\left(\vec{0}\right)\right\},$$

$$2k^n \left(\frac{\frac{1}{2} - \ln\frac{W_N}{\alpha}}{v_2 B\left(\vec{0}\right)}\right)^{\frac{\frac{1}{2} - \ln\frac{W_N}{\alpha}}{2v_2 B\left(\vec{0}\right)}} \exp\left\{-\frac{\left(\frac{1}{2} - \ln\frac{W_N}{\alpha}\right)^2}{2v_2 B\left(\vec{0}\right)}\right\} < \gamma,$$

де W_N визначається в умові леми 5.7, $v_2 = \frac{v_1}{v_1 - 1}$, v_1 – будь-яке додатне дійсне число більше одиниці.

Доведення. Теорема є прямим наслідком означення 5.5 та леми 5.8. □

Приклад 5.1. Нехай випадкове поле $\left\{Y\left(\vec{t}\right), \vec{t} \in \mathbf{T}\right\}$, $\mathbf{T} = [0, T] \times [0, T]$, $T \in \mathbf{R}$ задовольняє умовам теореми 5.6 і має спектральну щільність $f(\lambda_1, \lambda_2) = \exp\left\{-\beta\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right)\right\}$. В таблиці 6.1 наведені знайдені значення N для такого процесу при заданих точності α та надійності $1 - \gamma$. Всі моделі будуються в області $\mathbf{T} = [0, 10] \times [0, 10]$.

Таблиця 6.1

Числові результати моделювання логгауссового процесу Кокса

δ	α	$1-\gamma$	β	d	N
0.01	0.01	0.99	1	0,253928	12386
0.01	0.01	0.97	1	0,253928	9736
0.01	0.03	0.97	1	0,253928	3015
0.01	0.05	0.95	1	0,253928	1552
0.01	0.03	0.97	10	0,361579	95
0.01	0.05	0.95	10	0,361579	54
0.02	0.03	0.97	10	0.429992	156
0.02	0.05	0.95	10	0.429992	87

♢

На рис. 6.1 зображено реалізації моделей гауссового поля $Y\left(\vec{t}\right)$ та керованого ним логгауссового процесу $\nu(B)$ при δ, α, $1 - \gamma$ заданих в останніх чотирьох рядках таблиці 1.

Рис. 6.1. Реалізації моделей гауссового поля та керованого ним лог-гауссового процесу Кокса.

5.5. Моделювання логарифмічно гауссового процесу Кокса у випадку коли його інтенсивність породжена неоднорідним полем

В даному підрозділі спрощений метод моделювання поширюється на випадок, коли інтенсивність є не обов'язково однорідним полем. Таким чином, від випадку однорідності поля, процес моделювання відрізнятиметься лише способом побудови моделі поля $Y\left(\vec{t}\right)$. Тому, не описуючи повторно процедуру моделювання, перейдемо до формулювання результатів. Нехай $\left\{Y\left(\vec{t}\right), \vec{t} \in \mathbf{T}\right\}$ – центроване, гауссове поле, траєкторії якого є вимірними на $\mathbf{T}$. Розбиття області $\mathbf{T}$ та всі позначення залишаються такі самі як і в попередньому підрозділі.

Теорема 5.7. *Нехай* $\{\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right), B_{i_1,\ldots,i_n} \subset \mathfrak{B}\}$ *процес Кокса, керований логарифмічно гауссовим неоднорідним полем* $\exp\left\{Y\left(\vec{t}\right)\right\}$, *власні функції інтегрального рівняння* (3.11) *обмежені,*

$$\left|\phi_k\left(\vec{t}\right)\right| \leqslant L, \quad \forall \vec{t} \in \mathbf{T}, \forall k \in \mathbf{N}.$$

Для того, щоб виконувалась нерівність

$$\mathbf{P}\left\{\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) > 1\right\} < \delta, \tag{5.40}$$

досить вибрати $d = \frac{T}{k}$ *так, щоб виконувалась нерівність*

$$d \leqslant \left[2\delta \exp\left\{-2L^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\right\}\right]^{\frac{1}{2n}}.$$

Доведення. Оскільки

$$\mathbf{P}\{\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) > 1\}$$
$$= \mathbf{E}\left(1 - \exp\{-\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\} - \mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\exp\{-\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\}\right)$$

та при $x > 0 \quad 1 - \exp\{-x\}(1+x) \leqslant \frac{x^2}{2}$, то для виконання (5.40) досить щоб виконувалась нерівність

$$\mathbf{E}\left[\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right]^2 < 2\delta.$$

В силу того, що для $\xi = N\left(0,\sigma^2\right)$ має місце співвідношення $\mathbf{E}\exp\left\{\lambda\xi\right\} = \exp\left\{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\}$, то

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)]^2 &= \mathbf{E}\int\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}} \exp\left\{Y\left(\vec{t}\right)\right\}d\vec{t}\int\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}} \exp\left\{Y\left(\vec{s}\right)\right\}d\vec{s} \\
&= \iint\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}\times B_{i_1,\ldots,i_n}} \mathbf{E}\exp\left\{Y\left(\vec{t}\right)+Y\left(\vec{s}\right)\right\}d\vec{t}d\vec{s} \\
&= \iint\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}\times B_{i_1,\ldots,i_n}} \exp\left\{\frac{\mathbf{E}\left(Y\left(\vec{t}\right)+Y\left(\vec{s}\right)\right)^2}{2}\right\}d\vec{t}d\vec{s} \\
&= \iint\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}\times B_{i_1,\ldots,i_n}} \exp\left\{\frac{\mathbf{E}\left(Y\left(\vec{t}\right)\right)^2}{2}+\mathbf{E}Y\left(\vec{t}\right)Y\left(\vec{s}\right)+\frac{\mathbf{E}\left(Y\left(\vec{s}\right)\right)^2}{2}\right\}d\vec{t}d\vec{s}.
\end{aligned}$$

Використовуючи зображення (3.12) коваріаційної функції поля $Y\left(\vec{t}\right)$,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)]^2 \\
&\leqslant \iint\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}\times B_{i_1,\ldots,i_n}} \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\left(\varphi_k^2\left(\vec{t}\right)+2\varphi_k\left(\vec{t}\right)\varphi_k\left(\vec{s}\right)+\varphi_k^2\left(\vec{s}\right)\right)\right\}d\vec{t}\vec{s} \\
&= \iint\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}\times B_{i_1,\ldots,i_n}} \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\left(\varphi_k\left(\vec{t}\right)+\varphi_k\left(\vec{s}\right)\right)^2\right\}d\vec{t}\vec{s} \\
&\leqslant d^{2n}\exp\left\{2L^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right\}.
\end{aligned}$$

Остання нерівність й доводить теорему. □

Лема 5.9. *Нехай* $Y\left(\vec{t}\right)$ *– гауссове, центроване, неперервне в середньому квадратичному випадкове поле, власні функції інтегрального рів-*

няння (3.11) *обмежені*

$$\left|\phi_k\left(\vec{t}\right)\right| \leqslant L \quad \forall \vec{t} \in \mathbf{T},\, k \in \mathbf{N},$$

тоді $\forall p > 1$ *має місце оцінка*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n} \in \mathfrak{B}} \left|\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) - \widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right| > \alpha\right\} \leqslant \frac{2k^n \widehat{W}_N^p p^{\frac{p}{2}} \exp\left\{-\frac{p}{2} + \frac{p^2 v_2 L^2}{2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\right\}}{\alpha^p},$$

де

$$\widehat{W}_N = L\, d^n\, v_1^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$v_2 = \frac{v_1}{v_1 - 1}$, v_1 *– будь-яке додатне дійсне число більше одиниці.*

Доведення. Як вже було показано при доведенні леми 5.7

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n} \in \mathfrak{B}} \left|\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) - \widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right| > \alpha\right\} \leqslant \frac{k^n \left(\int\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}} \left(\mathbf{E}\left|\exp\left\{Y\left(\vec{t}\right)\right\} - \exp\left\{\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right\}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} d\vec{t}\right)^p}{\alpha^p}. \tag{5.41}$$

$$\mathbf{E}\left|\exp\left\{Y\left(\vec{t}\right)\right\} - \exp\left\{\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right\}\right|^p \leqslant \left(\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right) - \widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_1}\right)^{\frac{1}{v_1}} \left(\mathbf{E}\exp\left\{p\, v_2 \max\left(Y\left(\vec{t}\right),\, \widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right)\right\}\right)^{\frac{1}{v_2}}, \tag{5.42}$$

$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_1} = 1$. В силу співвідношення (5.4)

$$\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right) - \widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_1} = c_{pv_1}\left(\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right) - \widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^2\right)^{\frac{pv_1}{2}}.$$

Врахувавши, що в зображенні (3.13) поля $Y\left(\vec{t}\right)$ $\mathbf{E}\xi_k\xi_l = \delta_{kl}$, де δ_{kl} – символ Кронекера, матимемо

$$\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^2=\mathbf{E}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\,\phi_k\left(\vec{t}\right)-\sum_{k=1}^{N}\frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\,\phi_k\left(\vec{t}\right)\right|^2$$
$$=\mathbf{E}\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\,\phi_k\left(\vec{t}\right)\right|^2=\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\phi_k^2\left(\vec{t}\right)}{\lambda_k}\leqslant L^2\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}.$$

Отже,

$$\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_1}\leqslant c_{pv_1}\,L^{pv_1}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)^{\frac{pv_1}{2}}$$

Далі оцінимо $\mathbf{E}\exp\left\{p\,v_2\,\max\left(Y\left(\vec{t}\right),\,\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right)\right\}$.

$$\mathbf{E}\exp\left\{pv_2\max\left(Y\left(\vec{t}\right),\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right)\right\}\leqslant\exp\left\{\frac{(pv_2)^2}{2}\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\,\phi_k\left(\vec{t}\right)\right)^2\right\}$$
$$+\exp\left\{\frac{(p\,v_2)^2}{2}\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\,\phi_k\left(\vec{t}\right)\right)^2\right\}$$
$$\leqslant 2\exp\left\{\frac{(pv_2)^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\phi_k^2\left(\vec{t}\right)}{\lambda_k}\right\}\leqslant 2\exp\left\{\frac{(pv_2L)^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right\}.$$

Беручи до уваги дві останні нерівності, із (5.42) матимемо

$$\mathbf{E}\left|\exp\left\{Y\left(\vec{t}\right)\right\}-\exp\left\{\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right\}\right|^p$$
$$\leqslant c_{pv_1}^{\frac{1}{v_1}}\,L^p\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)^{\frac{p}{2}}2^{\frac{1}{v_2}}\exp\left\{\frac{p^2v_2L^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right\}.$$

Враховуючи оцінку (5.4), твердження леми випливає із (5.41). $\square$

Лема 5.10. *Нехай $Y\left(\vec{t}\right)$ – гауссове, центроване, неперервне в середньому квадратичному випадкове поле, власні функції інтегрального рівняння* (3.11) *обмежені*

$$\left|\phi_k\left(\vec{t}\right)\right| \leqslant L \quad \forall\, \vec{t} \in \mathbf{T},\, k \in \mathbf{N}.$$

Якщо $\widehat{W}_N < \alpha \exp\left\{\frac{1}{2} - v_2\, L^2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\right\}$, *тоді*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n} \in \mathfrak{B}} \left|p_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) - \widetilde{p}_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right| > \alpha\right\}$$

$$\leqslant \quad 2k^n \left(\frac{1 - 2\ln\frac{\widehat{W}_N}{\alpha}}{2v_2 L^2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}}\right)^{\frac{1-2\ln\frac{\widehat{W}_N}{\alpha}}{4v_2 L^2 \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}}} \exp\left\{-\frac{\left(1 - 2\ln\frac{\widehat{W}_N}{\alpha}\right)^2}{8v_2 L^2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}}\right\},$$

де $\widehat{W}_N$ *визначено в умові леми 5.9,* $v_2 = \frac{v_1}{v_1 - 1}$, v_1 *– будь-яке додатне дійсне число більше одиниці.*

Доведення. Оскільки, як вже було показано в процесі доведення леми 5.6

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n} \in \mathfrak{B}} \left|p_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) - \widetilde{p}_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right| > \alpha\right\}$$
$$\leqslant \mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n} \in \mathfrak{B}} \left|\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) - \widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right| > \alpha\right\},$$

то в силу леми 5.9

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n}\in\mathfrak{B}}\left|p_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)-\widetilde{p}_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}$$
$$\leqslant\frac{2k^n\widehat{W}_N^p p^{\frac{p}{2}}\exp\left\{-\frac{p}{2}+\frac{p^2v_2L^2}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right\}}{\alpha^p}$$

Знайшовши значення правої частини отриманої оцінки в точці $p_0 = \frac{1-2\ln\frac{\widehat{W}_N}{\alpha}}{2v_2\,L^2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}}$ близькій до її точки мінімуму та забезпечивши, що p_0 повинно бути більше одиниці, отримаємо твердження леми. □

Теорема 5.8. *Нехай $Y\left(\vec{t}\right)$ – гауссове, центроване, неперервне в середньому квадратичному випадкове поле, власні функції інтегрального рівняння* (3.11) *обмежені*

$$\left|\phi_k\left(\vec{t}\right)\right|\leqslant L\quad\forall\vec{t}\in\mathbf{T},\,k\in\mathbf{N},$$

тоді модель процесу Кокса $\{\widetilde{\nu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right),\,B_{i_1,\ldots,i_n}\subset\mathfrak{B}\}$, керованого логарифмічно гауссовим однорідним полем $\exp\left\{\widetilde{Y}(\vec{t})\right\}$, наближає його з точністю α та надійністю $1-\gamma$, якщо виконуються умови:

$$\widehat{W}_N<\alpha\exp\left\{\frac{1}{2}-v_2\,L^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right\},$$

$$2k^n\left(\frac{1-2\ln\frac{\widehat{W}_N}{\alpha}}{2v_2L^2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}}\right)^{\frac{1-2\ln\frac{\widehat{W}_N}{\alpha}}{4v_2L^2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}}}\exp\left\{-\frac{\left(1-2\ln\frac{\widehat{W}_N}{\alpha}\right)^2}{8v_2L^2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}}\right\}<\gamma,$$

де $\widehat{W}_N$ визначено в умові леми 5.9, $v_2=\frac{v_1}{v_1-1}$, v_1 – будь-яке додатне дійсне число більше одиниці.

Доведення. Легко бачити, що твердження тереми є наслідком леми 5.10, та означення 5.5. □

5.6. Моделювання процесу Кокса у випадку коли його інтенсивність породжена квадратично гауссовим випадковим процесом

Даний підрозділ є логічним продовженням підрозділу 5.3. Використовується спрощений підхід до моделювання. Відмінність полягає в тому, що інтенсивність процесу Кокса $\mu(\cdot)$ в даному випадку породжується випадковим квадратично гауссовим процесом, тобто $\mu(B) = \int_B Y^2(t)\,dt$, де $Y(t)$ – центрований, стаціонарний, гауссовий випадковий процес.

Оскільки процедура моделювання вже була описана в підрозділі 5.3, сформулюємо зразу результати. Всі позначення та розбиття області $\mathbf{T}$ залишаються такі самі.

Теорема 5.9. *Нехай $\{\nu(B_i), B_i \in \mathfrak{B}\}$ процес Кокса, керований квадратично гауссовим процесом $Y^2(t)$. Для того, щоб виконувалась нерівність*

$$\mathbf{P}\{\nu(B_i) > 1\} < \delta,$$

досить вибрати $d = \frac{T}{k}$ так, щоб виконувалась нерівність

$$d \leqslant \left(\frac{2\delta}{3B^2(0)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доведення. Як було вже показано при доведенні теореми 5.3,

$$\mathbf{P}\{\nu(B_i) > 1\} \leqslant \frac{\mathbf{E}[\mu(B_i)]^2}{2}. \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\mu(B_i)]^2 &= \mathbf{E}\left[\int\limits_{B_i} Y^2(t)\,dt\right]^2 = \mathbf{E}\int\limits_{B_i} Y^2(t)\,dt \int\limits_{B_i} Y^2(s)\,ds \\ &= \mathbf{E}\iint\limits_{B_i\times B_i} Y^2(t)\,Y^2(s)\,dtds = \iint\limits_{B_i\times B_i} \mathbf{E}Y^2(t)\,Y^2(s)\,dtds.\end{aligned} \tag{5.44}$$

В силу формул Іссерліса

$$\mathbf{E}Y^2(t)\,Y^2(s) = \mathbf{E}Y^2(t)\,\mathbf{E}Y^2(s) + 2\left(\mathbf{E}Y(t)\,Y(s)\right)^2$$
$$= B^2(0) + 2B^2(t-s) \leqslant 3B^2(0)\,.$$

Беручи до уваги останню оцінку, твердження теореми випливає з (5.43) та (5.44). □

Лема 5.11. *Нехай $Y(t)$ стаціонарний, центрований, неперервний в середньому квадратичному, гауссовий процес зі спектральною функцією $F(\lambda)$, а розбиття D_Λ відрізку $[0,\Lambda]$, $\Lambda \in \mathbf{R}$ таке, що $\lambda_{k-1}-\lambda_k = \frac{\Lambda}{N}$, $N \in \mathbf{N}$, тоді*

$$\left(\mathrm{Var}\left(Y^2(t) - \widetilde{Y}^2(t)\right)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 8\sqrt[4]{2}\exp\{-1\}\,B^{\frac{1}{2}}(0)\,\widehat{A}^{\frac{1}{2}}_{N,t},$$

де

$$\widehat{A}_{N,t} = B(0) - F(\Lambda) + 2^{2-2b}t^{2b}\left(\frac{\Lambda}{N}\right)^{2b} F(\Lambda)\,, \quad b \in [0,1]\,.$$

Доведення. Використовуючи нерівність Гельдера,

$$\left(\mathrm{Var}\left(Y^2(t) - \widetilde{Y}^2(t)\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\mathbf{E}\left|Y^2(t) - \widetilde{Y}^2(t)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\mathbf{E}\left|Y(t) - \widetilde{Y}(t)\right|^2\left|Y(t) + \widetilde{Y}(t)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant \left(\mathbf{E}\left|Y(t) - \widetilde{Y}(t)\right|^{2v_1}\right)^{\frac{1}{2v_1}}\left(\mathbf{E}\left|Y(t) + \widetilde{Y}(t)\right|^{2v_2}\right)^{\frac{1}{2v_2}}, \quad (5.45)$$

$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} = 1$. В силу співвідношення (5.3) доведеного в лемі 5.1

$$\mathbf{E}\left|Y(t) - \widetilde{Y}(t)\right|^{2v_1} = c_{2v_1}\left(\mathbf{E}\left|Y(t) - \widetilde{Y}(t)\right|^2\right)^{v_1},$$
$$\mathbf{E}\left|Y(t) + \widetilde{Y}(t)\right|^{2v_2} = c_{2v_2}\left(\mathbf{E}\left|Y(t) + \widetilde{Y}(t)\right|^2\right)^{v_2}$$

В процесі доведення леми 5.4 було показано, що

$$\mathbf{E}\left|Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right|^2 \leqslant \widehat{A}_{N,t},$$

де $\widehat{A}_{N,t}=B(0)-F(\Lambda)+2^{2-2b}t^{2b}\left(\frac{\Lambda}{N}\right)^{2b}F(\Lambda)\,,\ b\in[0,1]\,.$ Повторивши хід міркувань, застосованих для отримання останньої нерівності, не важко переконатись, що

$$\mathbf{E}\left|Y(t)+\widetilde{Y}(t)\right|^2 \leqslant 4B(0)\,.$$

Таким чином, оцінюючи c_{2v_1} та c_{2v_2} за допомогою співвідношення 5.4 із (5.45) випливає, що

$$\left(\mathrm{Var}\left(Y^2(t)-\widetilde{Y}^2(t)\right)\right)^{\frac{1}{2}}=\left(c_{2v_1}\widehat{A}_{N,t}^{v_1}\right)^{\frac{1}{2v_1}}\left(c_{2v_2}\left(4B(0)\right)^{v_2}\right)^{\frac{1}{2v_2}}$$

$$\leqslant\left(\sqrt{2}\,(2v_1)^{v_1}\exp\{-v_1\}\right)^{\frac{1}{2v_1}}\widehat{A}_{N,t}^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2}\,(2v_2)^{v_2}\exp\{-v_2\}\right)^{\frac{1}{2v_2}}2\sqrt{B(0)}$$

$$=4\sqrt[4]{2}\,(v_1v_2B(0))^{\frac{1}{2}}\exp\{-1\}\,\widehat{A}_{N,t}^{\frac{1}{2}}.$$

Поклавши $v_1=v_2=2$, отримаємо твердження леми. □

Лема 5.12. *Нехай $Y(t)$ стаціонарний, центрований, неперервний в середньому квадратичному, гауссовий процес зі спектральною функцією $F(\lambda)$, існує спектральний момент $\int\limits_0^\infty \lambda^{2\beta}dF(\lambda)$, $0<\beta\leqslant 1$, а розбиття D_Λ відрізку $[0,\Lambda]\,,\ \Lambda\in\mathbf{R}$ таке, що $\lambda_{k-1}-\lambda_k=\frac{\Lambda}{N}$, $N\in\mathbf{N}$, тоді має місце наступна оцінка*

$$\left(\mathrm{Var}\left(Y^2(t+h)-\widetilde{Y}^2(t+h)-\left(Y^2(t)-\widetilde{Y}^2(t)\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant H_{N,t}h^{\beta},$$

де

$$H_{N,t} = 2^{3\frac{1}{4}} \exp\{-1\} \sqrt{B(0)} \left(\sqrt{P_{N,t}} + \left(\frac{\Lambda}{2}\right)^{\beta} \sqrt{R_N} \right),$$

$$P_{N,t} = 2^{5-4\beta} \left(\left(\frac{\Lambda}{N}\right)^{\beta} + 2^{\beta-1} t \frac{\Lambda^{\beta+1}}{N} \right)^2 F(\Lambda) + 2^{3-2\beta} \int\limits_{\Lambda}^{\infty} \lambda^{2\beta} dF(\lambda),$$

$$R_N = 8T^2 \frac{\Lambda^2}{N^2} F(\Lambda) + 8\left(F(\infty) - F(\Lambda)\right).$$

Доведення.

$$\left(\mathrm{Var}\left(Y^2(t+h) - \widetilde{Y}^2(t+h) - \left(Y^2(t) - \widetilde{Y}^2(t)\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\mathbf{E}\Big|(Y(t+h) - Y(t))(Y(t+h) + Y(t))\right.$$

$$\left. - \left(\widetilde{Y}(t+h) - \widetilde{Y}(t)\right)\left(\widetilde{Y}(t+h) + \widetilde{Y}(t)\right)\Big|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\mathbf{E}\Big|\Big[\, Y(t+h) - Y(t) - \left(\widetilde{Y}(t+h) - \widetilde{Y}(t)\right)\Big](Y(t+h) + Y(t))\right.$$

$$+ \left(\widetilde{Y}(t+h) - \widetilde{Y}(t)\right)(Y(t+h) + Y(t))$$

$$\left. - \left(\widetilde{Y}(t+h) - \widetilde{Y}(t)\right)\left(\widetilde{Y}(t+h) + \widetilde{Y}(t)\right)\Big|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left(\mathbf{E}\Big|\left(Y(t+h) - \widetilde{Y}(t+h) - \left(Y(t) - \widetilde{Y}(t)\right)\right)\Big[Y(t+h) + Y(t)\Big]\Big|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \left(\mathbf{E}\Big|\left(Y(t+h) - \widetilde{Y}(t+h) + \left(Y(t) - \widetilde{Y}(t)\right)\right)\Big[\widetilde{Y}(t+h) - \widetilde{Y}(t)\Big]\Big|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.46}$$

Оцінимо по черзі кожен з двох доданків правої частини щойно отриманого співвідношення. Для v_1, v_2 таких, що $\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}=1$ маємо

$$\mathbf{E}\left|\left(Y(t+h)-\widetilde{Y}(t+h)-\left(Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right)\right)\left[Y(t+h)+Y(t)\right]\right|^2$$
$$\leqslant\left(\mathbf{E}\left|Y(t+h)-\widetilde{Y}(t+h)-\left(Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right)\right|^{2v_1}\right)^{\frac{1}{v_1}}$$
$$\times\left(\mathbf{E}\left|Y(t+h)+Y(t)\right|^{2v_2}\right)^{\frac{1}{v_2}}. \quad (5.47)$$

Оскільки, як було показано при доведенні леми 5.2

$$\mathbf{E}\left|Y(t+h)-\widetilde{Y}(t+h)-\left(Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right)\right|^2\leqslant h^{2\beta}P_{N,t},$$

де $P_{N,t}=2^{5-4\beta}\left(\left(\frac{\Lambda}{N}\right)^{\beta}+2^{\beta-1}t\frac{\Lambda^{\beta+1}}{N}\right)^2F\left(\Lambda\right)+2^{3-2\beta}\int\limits_{\Lambda}^{\infty}\lambda^{2\beta}dF\left(\lambda\right),\ 0<\beta\leqslant 1$, тому

$$\left(\mathbf{E}\left|Y(t+h)-\widetilde{Y}(t+h)-\left(Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right)\right|^{2v_2}\right)^{\frac{1}{v_1}}\leqslant c_{2v_1}^{\frac{1}{v_1}}h^{2\beta}P_{N,t} \quad (5.48)$$

Так як $\mathbf{E}\left|Y(t+h)+Y(t)\right|^2\leqslant 4B\left(0\right)$, тому

$$\left(\mathbf{E}\left|Y(t+h)+Y(t)\right|^{2v_2}\right)^{\frac{1}{v_2}}\leqslant c_{2v_2}^{\frac{1}{v_2}}4B\left(0\right). \quad (5.49)$$

Поклавши $v_1=v_2=2$ та взявши до уваги (5.48), (5.49) із (5.47) після деяких спрощень матимемо

$$\mathbf{E}\left|\left(Y(t+h)-\widetilde{Y}(t+h)-\left(Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right)\right)\left[Y(t+h)+Y(t)\right]\right|^2$$
$$\leqslant 2^{6\frac{1}{2}}B\left(0\right)\exp\left\{-2\right\}P_{N,t}h^{2\beta}. \quad (5.50)$$

Провівши міркування аналогічні до тих, які були застосовані для отримання формули (5.5), не важко переконатися, що

$$\mathbf{E}\left|Y(t+h)-\widetilde{Y}(t+h)+\left(Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right)\right|^2\leqslant R_N,$$
$$R_N=8T^2\frac{\Lambda^2}{N^2}F\left(\Lambda\right)+8\left(F\left(\infty\right)-F\left(\Lambda\right)\right).$$

Використовуючи зображення процеса $Y\,(t)$, легко також бачити, що

$$\mathbf{E}\left|\widetilde{Y}(t+h)-\widetilde{Y}(t)\right|^2 = 2F\,(\Lambda) - 2\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\cos\lambda_k h\,dF\,(\lambda)$$

$$= 4\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\sin^2\frac{\lambda_k h}{2}dF\,(\lambda) \leqslant 2^{2-2\beta}\Lambda^{2\beta}F\,(\Lambda)\;h^{2\beta}, \quad 0<\beta\leqslant 1.$$

В силу двох останніх нерівностей можемо стверджувати, що

$$\mathbf{E}\left|\Big(\,Y(t+h)-\widetilde{Y}(t+h)+\Big(Y(t)-\widetilde{Y}(t)\Big)\Big)\left[\widetilde{Y}(t+h)-\widetilde{Y}(t)\right]\right|^2$$

$$\leqslant 2^{6\frac{1}{2}-2\beta}\exp\{-2\}\,\Lambda^{2\beta}F\,(\Lambda)\,R_N\,h^{2\beta}. \quad (5.51)$$

Враховуючи (5.50) і (5.51), твердження леми випливає із (5.46). □

Лема 5.13. *Нехай $Y\,(t)$ стаціонарний, центрований, сепарабельний, неперервний в середньому квадратичному, гауссовий процес зі спектральною функцією $F\,(\lambda)$, існує спектральний момент $\int\limits_0^\infty \lambda^{2\beta}dF\,(\lambda)$, $\frac{1}{2}<\beta\leqslant 1$, а розбиття D_Λ відрізку $[0,\Lambda]$, $\Lambda\in\mathbf{R}$ таке, що $\lambda_{k-1}-\lambda_k=\frac{\Lambda}{N}$, $N\in\mathbf{N}$, тоді*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_i\in\mathfrak{B}\; i=\overline{0,\,k-1}}|\,p_{kY}\,(B_i)-\widetilde{p}_{kY}\,(B_i)\,|>\alpha\right\}$$

$$\leqslant\frac{2^{4+\frac{1}{2\beta}}\beta^2}{(2\beta-1)^2}\left(1-\frac{(\sqrt{2}-1)\alpha}{U_N}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2\alpha^2}{2d\max\left(\delta_{0,N},t_{0,N}\right)U_N}-\frac{(\sqrt{2}-1)\alpha}{2U_N}\right\},$$

де

$$U_N = d\max\left(\delta_{0,N}, t_{0,N}\right) + (\sqrt{2}-1)\alpha,$$

$$\delta_{0,N} = 8\sqrt[4]{2}\exp\left\{-1\right\} B^{\frac{1}{2}}\left(0\right)\widehat{A}_N^{\frac{1}{2}},$$

$$t_{0,N} = 2^{3\frac{1}{4}-\beta}T^{\beta}\exp\left\{-1\right\}\sqrt{B\left(0\right)}\left(\sqrt{P_{N,\frac{T}{2}}} + \left(\frac{\Lambda}{2}\right)^{\beta}\sqrt{R_N}\right),$$

$$\widehat{A}_N = B\left(0\right) - F\left(\Lambda\right) + 2^{2-2b}T^{2b}\left(\frac{\Lambda}{N}\right)^{2b}F\left(\Lambda\right), \quad b\in\left[0,1\right],$$

$$P_{N,\frac{T}{2}} = 2^{5-4\beta}\left(\left(\frac{\Lambda}{N}\right)^{\beta} + 2^{\beta-2}T\frac{\Lambda^{\beta+1}}{N}\right)^{2}F\left(\Lambda\right) + 2^{3-2\beta}\int\limits_{\Lambda}^{\infty}\lambda^{2\beta}dF\left(\lambda\right),$$

$$R_N = 8T^2\frac{\Lambda^2}{N^2}F\left(\Lambda\right) + 8\left(F\left(\infty\right) - F\left(\Lambda\right)\right).$$

Доведення. Як було показано при доведенні леми 5.6

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_i\in\mathfrak{B}\ i=\overline{0,\,k-1}}\left|p_{kY}\left(B_i\right) - \widetilde{p}_{kY}\left(B_i\right)\right| > \alpha\right\}$$
$$\leqslant \mathbf{P}\left\{\max_{B_i\in\mathfrak{B}\ i=\overline{0,\,k-1}}\left|\mu\left(B_i\right) - \widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right| > \alpha\right\},$$

отже, для квадратично гауссового процесу Кокса матимемо

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_i\in\mathfrak{B}\ i=\overline{0,\,k-1}}\left|p_{kY}\left(B_i\right) - \widetilde{p}_{kY}\left(B_i\right)\right| > \alpha\right\}$$
$$\leqslant \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}}\left|Y^2\left(t\right) - \widetilde{Y}^2\left(t\right)\right| > \frac{\alpha}{d}\right\}. \quad (5.52)$$

Оцінимо ентропійний інтеграл, що фігурує в висновках наслідку 2.1. Оскільки $N\left(\varphi^{(-1)}\left(\varepsilon\right)\right) \leqslant \frac{T}{\varphi^{(-1)}\left(\varepsilon\right)}$, то поклавши $r(x)=\sqrt{x}$ та скориставшись лемою 5.12

$$\int\limits_0^{t_0p} r\left(N\left(\varphi^{(-1)}(v)\right)\right)dv \leqslant \int\limits_0^{t_0p}\left(T\frac{H_N^{\frac{1}{\beta}}}{v^{\frac{1}{\beta}}}\right)^{\frac{1}{2}}dv = \frac{T^{\frac{1}{2}}H_N^{\frac{1}{2\beta}}\left(t_0p\right)^{-\frac{1}{2\beta}+1}}{-\frac{1}{2\beta}+1},$$

$-\frac{1}{2\beta}+1>0$, $H_N = H_{N,t}\big|_{t=\frac{T}{2}}$. Таким чином, після елементарних перетворень отримаємо

$$r^{(-1)}\left(\frac{1}{t_0p}\int_0^{t_0p} r\left(N\left(\varphi^{(-1)}(v)\right)\right)dv\right)\leqslant\frac{8\beta^2}{(2\beta-1)^2p^{\frac{1}{\beta}}},$$

$\beta>\frac{1}{2}$. Взявши до уваги лему 5.11, лему 5.12 (оцінки для δ_0 і t_0), останню нерівність та поклавши $p=\frac{1}{\sqrt{2}}$, твердження леми випливає із співвідношення 5.52 та наслідку 2.1. □

Теорема 5.10. *Нехай $Y(t)$ стаціонарний, центрований, сепарабельний, неперервний в середньому квадратичному, гауссовий процес зі спектральною функцією $F(\lambda)$. Існує спектральний момент $\int\limits_0^\infty \lambda^{2\beta}dF(\lambda)$, $\frac{1}{2}<\beta\leqslant 1$, а розбиття D_Λ відрізку $[0,\Lambda]$, $\Lambda\in\mathbf{R}$ таке, що $\lambda_{k-1}-\lambda_k=\frac{\Lambda}{N}$, $N\in\mathbf{N}$, тоді модель процесу Кокса $\{\widetilde{\nu}(B),\ B\in\mathfrak{B}\}$, керованого квадратично гауссовим процесом $\widetilde{Y}^2(t)$, наближає його з точністю α та надійністю $1-\gamma$ якщо*

$$\frac{2^{4+\frac{1}{2\beta}}\beta^2}{(2\beta-1)^2}\left(1-\frac{(\sqrt{2}-1)\alpha}{U_N}\right)^{-\frac{1}{2}} \times\exp\left\{-\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2\alpha^2}{2d\max\left(\delta_{0,N},t_{0,N}\right)U_N}-\frac{(\sqrt{2}-1)\alpha}{2U_N}\right\}<\gamma, \quad (5.53)$$

де U_N, $\delta_{0,N}$, $t_{0,N}$, визначаються в умові леми 5.13.

Доведення. Твердження теореми випливає з означення 5.4 та леми 5.13. □

5.7. Моделювання квадратично гауссового процесу Кокса, коли його інтенсивність породжена однорідним полем

В даному підрозділі розглядаються квадратично гауссові процеси Кокса коли інтенсивність $\mu(\cdot)$ породжується однорідним випадковим полем $\left(\mu(B)=\int_B Y^2\left(\vec{t}\right)d\vec{t},\right.$ де $Y\left(\vec{t}\right)$ – гауссове, однорідне випадкове поле$\left.\right)$. Використовується спрощений метод моделювання описаний в підрозділі 5.3. Перейдемо до формулювання результатів.

Теорема 5.11. *Нехай* $\{\nu(B_{i_1,\ldots,i_n}), B_{i_1,\ldots,i_n} \subset \mathfrak{B}\}$ *процес Кокса, керований квадратично гауссовим однорідним полем* $Y^2(\vec{t})$. *Для того, щоб виконувалась нерівність*

$$\mathbf{P}\{\nu(B_{i_1,\ldots,i_n}) > 1\} < \delta,$$

досить вибрати $d = \frac{T}{k}$ *так, щоб виконувалась нерівність*

$$d \leqslant \left(\frac{2\delta}{3B^2\left(\vec{0}\right)}\right)^{\frac{1}{2n}}.$$

Доведення. Повністю повторює доведення теореми 5.9. □

Лема 5.14. *Нехай* $Y(\vec{t})$ *– однорідне, центроване, неперервне в середньому квадратичному гауссове поле, тоді* $\forall p > 1$ *має місце оцінка*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n}\in\mathfrak{B}} |\mu(B_{i_1,\ldots,i_n}) - \widetilde{\mu}(B_{i_1,\ldots,i_n})| > \alpha\right\} \leqslant \frac{\sqrt{2}k^n d^{np}\left(4B\left(\vec{0}\right)v_1 v_2\right)^{\frac{p}{2}} J_N^{\frac{p}{2}} p^p \exp\{-p\}}{\alpha^p},$$

де

$$J_N = 2^{2-2a} n^{2a} \frac{d^{2a}\Lambda^{2a}}{N^{2a}} \Phi(\Lambda^n) + B\left(\vec{0}\right) - \Phi(\Lambda^n),$$

$a \in [0,1]$, v_1, v_2 *– такі числа, що* $\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} = 1$.

Доведення. Повторивши міркування, застосовані в лемі 5.7 для отримання співвідношення (5.35), отримаємо нерівність

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n}\in\mathfrak{B}} |\mu(B_{i_1,\ldots,i_n}) - \widetilde{\mu}(B_{i_1,\ldots,i_n})| > \alpha\right\} \leqslant \frac{k^n\left(\int\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}}\left(\mathbf{E}\left|Y^2(\vec{t}) - \widetilde{Y}^2(\vec{t})\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} d\vec{t}\right)^p}{\alpha^p}. \quad (5.54)$$

В силу нерівності Гельдера для v_1 і v_2 таких, що $\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}=1$,

$$\mathbf{E}\left|Y^2\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}^2\left(\vec{t}\right)\right|^p \leqslant \left(\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_1}\right)^{\frac{1}{v_1}}\left(\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)+\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_2}\right)^{\frac{1}{v_2}}. \tag{5.55}$$

Оскільки $\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_1}=c_{pv_1}\left(\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^2\right)^{\frac{pv_1}{2}}$, то використавши вже отриману нами в лемі 5.7 оцінку для $\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^2$, матимемо

$$\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_1}\leqslant c_{pv_1}J_N^{\frac{pv_1}{2}},$$

$$J_N=2^{2-2a}n^{2a}\frac{d^{2a}\Lambda^{2a}}{N^{2a}}\Phi\left(\Lambda^n\right)+B\left(\vec{0}\right)-\Phi\left(\Lambda^n\right), \tag{5.56}$$

$a\in[0,1]$. Провівши міркування аналогічні до тих, які були застосовані для отримання останньої нерівності, не важко переконатися, що

$$\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)+\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_2}\leqslant c_{pv_2}\left(4B\left(\vec{0}\right)\right)^{\frac{pv_2}{2}}. \tag{5.57}$$

Враховуючи (5.56) та (5.57) а також оцінку (5.4) для c_{pv_1} і c_{pv_2} після елементарних перетворень із (5.55) випливає, що

$$\mathbf{E}\left|Y^2\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}^2\left(\vec{t}\right)\right|^p\leqslant\sqrt{2}\left(4B\left(\vec{0}\right)v_1v_2\right)^{\frac{p}{2}}p^p\exp\{-p\}J_N^{\frac{p}{2}}.$$

Взявши до уваги щойно отримане співвідношення, твердження леми випливає із (5.54). □

Лема 5.15. *Нехай $Y\left(\vec{t}\right)$ – однорідне, центроване, неперервне в середньому квадратичному гауссове поле, тоді якщо $\alpha>2d^n\left(B\left(\vec{0}\right)J_N\right)^{\frac{1}{2}}$, то має місце оцінка*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\dots,i_n}\in\mathfrak{B}}\left|p_{kY}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)-\widetilde{p}_{kY}\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}$$

$$\leqslant \sqrt{2}k^n \exp\left\{-\frac{\alpha}{2d^n\left(B\left(\vec{0}\right)J_N\right)^{\frac{1}{2}}}\right\},$$

де J_N визначено в умові леми 5.14.

Доведення. Спочатку скористаємось вже доведеною нами в лемі 5.6 нерівністю

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n}\in\mathfrak{B}}\left|p_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)-\widetilde{p}_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}$$
$$\leqslant \mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n}\in\mathfrak{B}}\left|\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}. \quad (5.58)$$

Далі, мінімізувавши функцію $\frac{\sqrt{2}k^n d^{np}(4B(\vec{0})v_1v_2)^{\frac{p}{2}}J_N^{\frac{p}{2}}p^p\exp\{-p\}}{\alpha^p}$ по змінній p та поклавши $v_1 = v_2 = 2$, легко бачити, що дана лема є наслідком леми 5.14. □

Теорема 5.12. *Нехай $Y\left(\vec{t}\right)$ – однорідне, центроване, неперервне в середньому квадратичному гауссове поле, тоді модель випадкового процесу Кокса $\left\{\nu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right), B_{i_1,\ldots,i_n}\subset\mathfrak{B}\right\}$, керованого квадратично гауссовим однорідним полем $\widetilde{Y}^2\left(\vec{t}\right)$, наближає його з точністю α та надійністю $1-\gamma$, якщо виконуються умови:*

$$\alpha > 2d^n\left(B\left(\vec{0}\right)J_N\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sqrt{2}k^n \exp\left\{-\frac{\alpha}{2d^n\left(B\left(\vec{0}\right)J_N\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}<\gamma,$$

де J_N визначається в умові леми 5.14.

Доведення. Очевидно, що теорема є прямим наслідком означення 5.5 та леми 5.15. □

5.8. Моделювання квадратично гауссового процесу Кокса коли його інтенсивність породжена неоднорідним полем

В даному випадку алгоритм моделювання квадратично гауссового процесу Кокса відрізнятиметься лише способом побудови моделі неоднорідного поля $\left\{Y\left(\vec{t}\right), \vec{t}\in\mathbf{T}\right\}$.

Теорема 5.13. *Нехай* $\{\nu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right), B_{i_1,\dots,i_n}\subset\mathfrak{B}\}$ *процес Кокса, породжений квадратично гауссовим неоднорідним полем* $Y^2\left(\vec{t}\right)$*, власні функції інтегрального рівняння* (3.11) *обмежені,*

$$\left|\phi_k\left(\vec{t}\right)\right|\leqslant L,\quad \forall\vec{t}\in\mathbf{T},\forall k\in\mathbf{N}.$$

Для того, щоб виконувалась нерівність

$$\mathbf{P}\left\{\nu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)>1\right\}<\delta,$$

досить вибрати $d=\frac{T}{k}$ *так, щоб виконувалась нерівність*

$$d\leqslant\left(\frac{\delta\exp\{2\}}{8\sqrt{2}\left(L^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2n}}.$$

Доведення. При доведенні теореми 5.9 для квадратично гауссового процесу Кокса нами була отримана оцінка

$$\mathbf{P}\left\{\nu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)>1\right\}\leqslant\iint\limits_{B_{i_1,\dots,i_n}\times B_{i_1,\dots,i_n}}\frac{\mathbf{E}Y^2\left(\vec{t}\right)\mathbf{E}Y^2\left(\vec{s}\right)}{2}d\vec{t}d\vec{s}.$$

Внаслідок нерівності Гельдера для u_1, u_2 таких, що $\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}=1$

$$\mathbf{P}\left\{\nu\left(B_{i_1,\dots,i_n}\right)>1\right\}\leqslant\iint\limits_{B_{i_1,\dots,i_n}\times B_{i_1,\dots,i_n}}\frac{\left(\mathbf{E}Y^{2u_1}\left(\vec{t}\right)\right)^{\frac{1}{u_1}}\left(\mathbf{E}Y^{2u_2}\left(\vec{s}\right)\right)^{\frac{1}{u_2}}}{2}d\vec{t}d\vec{s}. \tag{5.59}$$

Оскільки, скориставшись зображенням (3.14),

$$\mathbf{E}Y^2\left(\vec{t}\right) = \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k\left(\vec{t}\right)\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\phi_k^2\left(\vec{t}\right)}{\lambda_k} \leqslant L^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k},$$

то в силу (5.3),

$$\mathbf{E}Y^{2u_1}\left(\vec{t}\right) = c_{2u_1}\left(L^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)^{u_1}.$$

Аналогічно й $\mathbf{E}Y^{2u_2}\left(\vec{s}\right) = c_{2u_2}\left(L^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)^{u_2}$. Розписавши c_{2u_1} та c_{2u_2} за допомогою співвідношення (5.4), та поклавши $u_1 = u_2 = 2$, твердження теореми випливає з (5.59). □

Лема 5.16. *Нехай $Y\left(\vec{t}\right)$ – центроване, неперервне в середньому квадратичному випадкове поле, власні функції інтегрального рівняння* (3.11) *обмежені,*

$$\left|\phi_k\left(\vec{t}\right)\right| \leqslant L, \quad \forall\vec{t}\in\mathbf{T}, \forall k\in\mathbf{N}.$$

тоді $\forall p > 1$ має місце оцінка

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n}\in\mathfrak{B}}\left|\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) - \widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right| > \alpha\right\}$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{2}k^n d^{np}(v_1v_2)^{\frac{p}{2}}\left(2L^2\sqrt{\left(\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)}\right)^p p^p\exp\{-p\}}{\alpha^p},$$

де v_1, v_2 – такі числа, що $\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}=1$.

Доведення. В процесі доведення леми 5.14 для v_1, v_2 таких, що $\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2} = 1$, ми обгрунтували наступне співвідношення

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n}\in\mathfrak{B}}\left|\mu\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right) - \widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right| > \alpha\right\}$$

$$\leqslant \frac{k^n\left(\int\limits_{B_{i_1,\ldots,i_n}}\left(\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right) - \widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_1}\right)^{\frac{1}{pv_1}}\left(\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right) + \widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_2}\right)^{\frac{1}{pv_2}}d\vec{t}\right)^p}{\alpha^p}. \tag{5.60}$$

Так як $\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_1} = c_{pv_1}\left(\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{2}\right)^{\frac{pv_1}{2}}$, то використавши вже отриману в лемі 5.9 оцінку $\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{2} \leqslant L^2 \sum\limits_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}$, матимемо

$$\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)-\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_1} \leqslant c_{pv_1}L^{pv_1}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)^{\frac{pv_1}{2}}. \tag{5.61}$$

Використовуючи зображення (3.13) і (3.14) поля та його моделі,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)+\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{2} &= \mathbf{E}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k\left(\vec{t}\right)+\sum_{k=1}^{N}\frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k\left(\vec{t}\right)\right|^{2}\\
&= \mathbf{E}\left|2\sum_{k=1}^{N}\frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k\left(\vec{t}\right)+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k\left(\vec{t}\right)\right|^{2}\\
&= 4\sum_{k=1}^{N}\frac{\phi_k^2\left(\vec{t}\right)}{\lambda_k}+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\phi_k^2\left(\vec{t}\right)}{\lambda_k} \leqslant 4L^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}.
\end{aligned}$$

Беручи до уваги останню нерівність,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)+\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{pv_2} &= c_{pv_2}\left(\mathbf{E}\left|Y\left(\vec{t}\right)+\widetilde{Y}\left(\vec{t}\right)\right|^{2}\right)^{\frac{pv_2}{2}}\\
&\leqslant c_{pv_2}\left(2L\right)^{pv_2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)^{\frac{pv_2}{2}}.
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Враховуючи (5.61) та (5.62) а також оцінку (5.4) для c_{pv_1} і c_{pv_2} після елементарних перетворень твердження леми випливає із (5.60). □

Лема 5.17. *Нехай* $Y\left(\vec{t}\right)$ *– центроване, неперервне в середньому квадратичному випадкове поле, власні функції інтегрального рівняння* (3.11) *обмежені*

$$\left|\phi_k\left(\vec{t}\right)\right| \leqslant L \quad \forall\vec{t}\in\mathbf{T},\, k\in\mathbf{N}.$$

Якщо $\alpha > 4d^n L^2 \sqrt{\left(\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\right)}$, *тоді*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_{i_1,\ldots,i_n}\in\mathfrak{B}} \left|p_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)-\widetilde{p}_{kY}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right| > \alpha\right\}$$
$$\leqslant \sqrt{2}k^n \exp\left\{-\frac{\alpha}{4d^n L^2\sqrt{\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)}}\right\}.$$

Доведення. Мінімізуючи $\frac{\sqrt{2}k^n d^{np}(v_1v_2)^{\frac{p}{2}}\left(2L^2\sqrt{\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)}\right)^p}{\alpha^p}$ $\times p^p \exp\{-p\}$ по змінній p та поклавши $v_1 = v_2 = 2$, легко бачити, що дана лема є наслідком співвідношення (5.58) та леми 5.16. □

Теорема 5.14. *Нехай* $Y\left(\vec{t}\right)$ *– центроване, неперервне в середньому квадратичному гауссове поле, власні функції інтегрального рівняння* (3.11) *обмежені*

$$\left|\phi_k\left(\vec{t}\right)\right| \leqslant L \quad \forall\vec{t}\in\mathbf{T},\, k\in\mathbf{N},$$

тоді модель процесу Кокса $\{\widetilde{\nu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right), B_{i_1,\ldots,i_n}\subset\mathfrak{B}\}$, *керованого квадратично гауссовим неоднорідним полем* $\widetilde{Y}^2\left(\vec{t}\right)$, *наближає його з точністю* α *та надійністю* $1-\gamma$, *якщо виконуються умови:*

$$\alpha > 4d^n L^2\sqrt{\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)},$$
$$\sqrt{2}k^n \exp\left\{-\frac{\alpha}{4d^n L^2\sqrt{\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)}}\right\} < \gamma.$$

Доведення. Твердження теореми є наслідком леми 5.17 та означення 5.5. □

Список використаних джерел

1. *Анваров С.Р., Пригарин С.М.* Численное моделирование пространственно-временной структуры поверхности морского волнения для решения оптических задач // Вычислительная математика и статистическое моделирование.- Новосибирск, 1994.- С.17–29.

2. *Артемьев С.С.* Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений.- Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1992.

3. *Бендат Дж. и Пирсол А.* Приложения корреляционного и спектрального анализа.- М.: "Мир 1983.

4. *Быков В.В.* Цифровое моделирование в статистической радиотехнике.- М.: Сов.радио, 1978.

5. *Бриллинджер Д.* Временные ряды. Обработка данных и теория.- М:Мир, 1980.

6. *Булдыгин В.В.* Субгауссовские процессы и сходимость случайных рядов в функциональных пространствах // Укр. матем. журнал.- 1977.- **29**, № 4.- С.443–454.

7. *Булдыгин В.В.* Сходимость случайных элементов в топологических пространствах.- К.: Наукова думка, 1980.

8. *Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В.* О локальных свойствах реализаций некоторых случайных процессов и полей // Теория вероят. и матем.статист.- 1974.- **10**.- С.39–47.

9. *Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В.* Субгауссовские случайные векторы и процессы // Теория вероят. и матем. статист.- 1987.- Вып.36.- С.10–22.

10. *Булдигін В.В., Козаченко Ю.В.* Функціонали Бернштейна й експоненційні нерівності для розподілів сум випадкових величин // Математика сегодня.- 1994.- С.55–79.

11. *Бусленко Н.П.* Моделирование сложных систем.- Москва, 1978.

12. *Василик О.І., Козаченко Ю.В., Ямненко Р.Є.* φ-Субгауссові випадкові процеси: монографія. - К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2008. - 231с.

13. *Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А.* Распределения в банаховых просторанствах.- М.: "Наука 1985.

14. Владимиров В. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1967.– 436 с.

15. *Войтишек А.В.* Рандомизированная численная спектральная модель стационарной случайной функции //Математические имитационные модели систем.- Новосибирск, 1978.- С.17–25.

16. *Войтишек А.В.*Исследование слабой сходимости моделей гауссовских случайных полей с заданным спектральным разложением корреляционной функции //Моделирование на вычислительных системах.- Новосибирск, 1982.- С.119–129.

17. *Войтишек А.В., Пригарин С.М.* Моментные условия функциональной сходимости численной рандомизированной спектральной модели однородных гауссовских полей // Теория и приложения статистического моделирования.- Новосибирск, 1988.- С.41–46.

18. *Войтишек А.В.* Рандомизированная численная спектральная модель стационарной случайной функции // Математические и имитационные модели систем.- Новосибирск, 1983.- С.17–25.

19. *Войтишек А.В.* Исследование слабой сходимости моделей гаусовских случайных полей с заданным спектральным разложением корреляционной функции // Моделирование на вычислительных системах.- Новосибирск, 1982.- С.119–129.

20. *Гихман И.И.,Скороход А.В., Ядренко М.И.* Теория вероятностей и математическая статистика.- К.: "Вища школа 1988.- 439 с.

21. *Дергалин Н.Л., Романцев В.В.* О моделировании случайных полей // Тр. X Всесоюз. симпозиума, Секция 4. Методы представления и аппаратурный анализ случайных прцессов и полей.- Л., 1978.- С.60–64.

22. *Дженкинс Г., Ваттс Д.* Спектральный анализ и его приложения.- т.**1**.- М.: "Мир 1971.

23. *Довгай Б.В., Козаченко Ю.В., Розора І.В.* Моделювання випадкових процесів у фізичних системах: Навчальний посібник.- К.: ВПЦ “Задруга”, 2010. - 230с.

24. *Джуліано Антоніні Р., Козаченко Ю.В., Тегза А.М.* Нерівності для норм субгауссових векторів та точність моделювання випадкових процесів // Теор. ймовірност. та матем.статист.- Вип.**66**.- 2002.- С.58–66.

25. *Джуліано Антоніні Р., Козаченко Ю.В., Тегза А.М.* Точність моделювання в L_p гауссових випадкових процесів // Вісник Київського університету, Сер. Фіз.-мат. науки.- Вип.**5**.- 2002.- С.7–14.

26. *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Статистическое моделирование.- М.: "Наука 1982.

27. *Зелепугина И.Н., Козаченко Ю.В.* Об оценках точности моделирования случайных полей в пространствах L_p // Исследование операций и АСУ.- № 32, 1988.- С.10–14.

28. *Ибрагимов И.А.* Об условиях гладкости траекторий случайных функций // Теория вероятн. и ее применен.- 1983.- **28**, № 2.- С.229–250.

29. *Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.* Независимые и стационарно связанные величины.- М.: "Наука 1965.- 524 с.

30. *Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А.* Гауссовские случайные процессы.- М.: "Наука 1970.

31. *Кантер Р.Р., Пригарин С.М.* Численное моделирование морского ветрового волнения для иследования поля отраженного оптического излучения.- Новосибирск, 1989.- 25 с. (Препринт АН СССР, Сиб. от-ние. ВЦ, 829).

32. *Каргин Б.А., Пригарин С.М.* О численном моделировании оптических характеристик взволнованной поверхности моря // Методы стохастического моделирования.- Новосибирск, 1990.- С.95–102.

33. *Каргин Б.А., Пригарин С.М.* Имитация поверхности морского волнения и исследование ее оптических свойств методом Монте-Карло // Оптика атмосферы и океана.- 1992.- Т.**5**, № 3.- С.285–291.

34. *Дж.Кляйнен* Статистические методы в имитационном моделировании.- Москва, 1978.- Т.**1,2**.

35. *Кнут Д.Е.* Искусство програмирования.- Москва-Киев, "Вильямс 2000.- Т.**1–3**.

36. *Колмогоров А.Н.* О некоторых асимптотических характетистиках вполне ограниченных метрических пространств // Докл. АН ССCP , 1956.- **108**, № 3.- С.385–388.

37. *Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М.* ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах.- Успехи матем. наук.- 1959.- **14**, № 2.- С.3–86.

38. *Козаченко Ю.В.* Достатні умови неперервності з ймовірністю одиниця субгауссовських випадкових процесів // Доповіді АН УРСР, 1968.- № 2.- С.113–115.

39. *Козаченко Ю.В.* Случайные процессы в пространствах Орлича I // Теория вероятн. и матем.статист.- 1984, Вып.30.- С.92–107.

40. *Козаченко Ю.В.* Случайные процессы в пространствах Орлича II // Теория вероятн. и матем.статист.- 1984, Вып.31.- С.44–50.

41. *Козаченко Ю.В., Козаченко Л.Ф.* О точности моделирования в $L_2(0,T)$ гауссовских случайных процессов // Вычисл.и прикладн. математика.- 1991, № 75.- С.108–115.

42. *Козаченко Ю.В., Козаченко Л.Ф.* О точности моделирования в $L_2(0,T)$ гауссовских случайных процессов // Вычисл.и прикладн. математика.- 1992, № 74.- С.88–93.

43. *Козаченко Ю.В., Козаченко Л.Ф.* Моделювання гауссових ізотропних випадкових полів на сфері // Обчисл.та прикладна математика.- 1998, № 1(83).- С.57–64.

44. *Козаченко Ю.В., Островский Е.И.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских // Теор.вероятностей и математическая статистика.- 1985, № 32.- С.42–53.

45. *Козаченко Ю.В., Пашко А.О.* Моделювання випадкових процесів.- К.: "Київський університет 1999.- 223 с.

46. *Козаченко Ю.В., Пашко А.О.*, Точність моделювання випадкових прцесів в нормах просторів Орлича I // Теор.ймовірн. та матем.стат.: 1988, № 58.- С.45–60.

47. *Козаченко Ю.В., Пашко А.О.* Про моделювання випадкових полів I // Теорія ймовірн. та матем. стат.- 1999.- № 61.- С.59–71.

48. *Козаченко Ю.В., Пашко А.О.* Про моделювання випадкових полів II // Теорія ймовірн. та матем. стат.- 2000.- № 62.- С.48–60.

49. *Козаченко Ю.В., Пашко А.О., Розора І.В.* Моделювання випадкових процесів та полів: Монографія.- К.: ВПЦ "Задруга", 2007.- 230с.

50. *Козаченко Ю.В., Погоріляк О.О.* Моделювання процесів Кокса керованих випадковим полем // Доповіді НАН України. – 2006. – №10. – С. 20-23.

51. *Козаченко Ю.В., Погоріляк О.О.* Моделювання логарифмічно гауссових процесів Кокса з заданою надійністю та точністю // ТВіМС. – 2007. – №76. – С. 58-71.

52. *Козаченко Ю.В., Погоріляк О.О.* Про один з методів моделювання логарифмічно гауссових процесів Кокса // ТВіМС. – 2007. – №77. – С. 82-95.

53. *Козаченко Ю.В., Островский Е.И.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских // Теор.вероятностей и математическая статистика.- 1985, № 32.- С.42–53.

54. *Козаченко Ю.В., Тегза А.М.* Застосування теорії $Sub_{\varphi}(\Omega)$ просторів випадкових величин до знаходження точності моделювання стаціонарних гауссових процесів // Теор. ймовірност. та матем.статист.- Вип.**67**.- 2002.- С.71–87.

55. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы.- М.: "Мир 1969.- 400 с.

56. *Красносельский М.А, Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и прстранства Орлича.- М.: "Физматгиз 1958.- 271 с.

57. *Курбанмурадов О.А., Сабельфельд К.К., Чопанов Г.* Статистическое моделлирование диффузии примеси в случайных полях скоростей. Моделирование случайных полей.- Новосибирск, 1988.– 28 с., (Препринт/АН СССР. Сиб.отд-ние, ВЦ:775).

58. *Леоненко Н.Н., Иванов А.В.* Статистический анализ случайных полей.- К.: "Вища школа 1986.

59. *Лифшиц М.А.* Гауссовские случайные функции.- К.: ТВіМС, 1995.- 246 с.

60. *Лоэв М.* Теория вероятностей.- Москва, 1962.

61. *Мацак И.К., Пличко А.Н.* Некоторые неравенства для сумм независимых случайных величин в банаховых пространствах // Теория вероятностей и математическая статистика.- № 38 ,1988.- С.81–86.

62. *Михайлов Г.А.* О методе "повторения"для моделирования случайных векторов и процессов (рандомизация корреляционных матриц) // Теория вероятностей и ее применения.- 1974.- Т.**19**, № 4.- С.873–878.

63. *Михайлов Г.А.* Численное построение случайного поля с заданной спектральной плотностью // Докл. АН СССР.- 1982.- Т.**238**, № 4.- С.793–795.

64. *Михайлов Г.А.* Моделирование случайных процессов и полей на основе точечных потоков Пальма // Докл. АН СССР.- 1982.- Т.**262**, № 3.- С.531–535.

65. *Михайлов Г.А.* Приближенные модели случайных процессов и полей // Журн. вычисл. математики и мат. физики.- 1983.- Т.**23**, № 3. - С.558–566.

66. *Михайлов Г.А., Сабельфельд К.К.* О численном моделировании диффузии примеси в стохастических полях скоростей // Изв. АН СССР, Сер. ФАО.- 1980.- Т.**16**, № 3.- С.229–235.

67. *Островский Е.И.* Обобщение нормы Булдыгина-Козаченко и центральная предельная теорема в банаховых пространствах // Теория вероятн. и ее применение.- 1982.- **27**, № 3.- С.618.

68. *Островский Е.И.* Экспоненциальные оценки распределение максимума негауссовского случайного поля // Теория вероятн. и ее применение.- 1990.- **35**, № 3.- С.482–493.

69. *Петров В.В.* Суммы независимых случайных величин.- М.: "Наука 1972.

70. *Питербарг В.И.* Некоторые направления в исследовании свойств траекторий гауссовских случайных функций, случайных процессов. Выборочные функции и пересечения.- М.: "Мир 1978.- С.258–280.

71. *Питербарг В.И.* Лекции по теории гауссовских процессов.- М.: Изд-во Московского университета, 1986.

72. *Питербарг В.И.* Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей.- М.: Изд-во Московского университета, 1988.

73. *Погоріляк О.О.* Моделювання квадратично гауссових процесів Кокса у випадку коли інтенсивність породжена однорідним полем // Наук. вісн. Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2007. – № 14. – С. 95-102.

74. *Погоріляк О.О.* Моделювання подвійно стохастичних процесів Пуассона з певною точністю та надійністю // Вісник Київ. ун-ту ім. Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. – 2007. – № 2. – С. 29-32.

75. *Погоріляк О.О.* Моделювання випадкових процесів Кокса: дис. на здобуття наукового ступеня канд. наук: 01.01.05; – Ужгород, 2007. – 130 с.

76. *Погоріляк О.О.* Моделювання випадкових процесів Кокса керованих квадратично гауссовим випалковим полем // Наук. вісн. Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2009. – № 18. – С. 113-120.

77. *Погоріляк О.О., Тегза А.М.* Про один із методів моделювання квадратично гауссових процесів Кокса // Наук. вісн. Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2011. – № 22. – С. ?-?.

78. *Пригарин С.М.* Некоторые задачи теории численного моделирования случайных процессов и полей.- Новосибирск, РАН, Сиб.отд., выч.центр, 1994.

79. *Пригарин С.М.* О слабой сходимости приближенных моделей гауссовских случайных полей // Теория и приложения статист.моделирования.- Новосибирск, 1988.- С.31–39.

80. *Пригарин С.М.* Спектральные модели векторных однородных полей.- Новосибирск, 1989.- 36 с.(Препринт/АН СССР, Сиб.отд. ВЦ:945).

81. *Пригарин С.М.* Исследование одного класса численных моделей случайных полей // Теория и приложения статист.моделирования.- Новосибирск, 1991.- С.29–32.

82. *Пригарин С.М.* Слабая сходимость вероятностных мер в пространствах непрерывно дифференцируемых функций // Сиб.мат.журн.- 1993.- Т.**34**, № 1.- С.140–144.

83. *Рахімов Г., Ядренко Ю.М.* Статистичне моделювання однорідного та ізотропного випадкового поля на площині.- Київ, ТВіМС.- № 49, 1993.- С.245–251.

84. *Скороход А.В.* Замечание о гауссовских мерах в банаховых пространствах // Теория вероятн. и ее примен.- 1970.- **15**, № 4.- С.519–520.

85. *Скороход А.В.* Теорема о непрерывности случайной функции на компакте в гильбертовом пространстве // Теория вероятн. и ее примен.- 1973.- **18**, № 4.- С.809–811.

86. *Тегза А.М.* Про точність та надійність деяких моделей гауссових процесів з обмеженим спектром // Науковий вісник Ужгородського університету.- Вип.**6**.- 2001.- С.125-131.

87. *Тегза А.М.* Знаходження точності та надійності моделі гауссових процесів з неперервним спектром // Вісник Київського університету, Сер. Фіз.-мат. науки.- Вип.**4**.- 2002.- С.38–43.

88. *Тегза А.М.* Обгрунтування оцінок точності і надійності моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів: дис. на здобуття наукового ступеня канд. наук: 01.01.05; – Ужгород, 2003. – 169 с.

89. *Antonina Tegza.* Simulating of Gaussian stationary process with given accuracy in $C([0,T])$. // Theory of Stochastic Processes.- vol. 10(26). – 2004. – p.172-177.

90. *Тегза А.М.* Моделі гауссового стаціонарного випадкового процесу у просторах $L_p([0,T])$, $p > 1$. // Вісник Київського університету, Сер. Фіз.-мат. науки. - Вип.4. - 2004. - С.17–21.

91. *Тегза А.М.* Моделювання гауссового стаціонарного випадкового процесу з обмеженим спектром у просторі $C([0,T])$ // Thesis of International conference. Modern problems and new trends in probability theory. - 19-26 june, 2005, Chernivtsi. – p.110-111.

92. *Тегза А.М.* Побудова моделі гауссового однорідного ізотропного випадкового поля з заданими точністю і надійністю в L_p, $1 \leqslant p \leqslant 2$..// Вісник Київського університету, Сер. Фіз.-мат. науки.- Вип.2.- 2007.- 33-35с.

93. *Тегза А.М.* Точність та надійність моделі гауссового однорідного ізотропного випадкового поля у просторі L_p, $p \geqslant 1$..// Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. Ужгород: УжНУ, 2008. - Вип.16. -С.184-187.

94. *Тегза А.М.* Деякі оцінки для побудови узагальненої моделі гауссових стаціонарних процесів.// Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. Ужгород: УжНУ, 2010. - Вип.21. -С.137-145.

95. *Товстик Т.М.* Моделирование однородного гауссовского поля // Тр. X Всесоюз. симпозиума. Секция 4. Методы представления и апаратурный анализ случайных процессов и полей.- Ленинград, 1978.- С.75–77.

96. *Тройников В.С.* Численное моделирование случайных процессов и полей на основе точечных потоков Пальма в задачах переноса излучения в облачной среде // Изв. АН СССР, Сер ФАО, 1984.- Т.**20**, № 4.- С.274–279.

97. *Феллер* В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984. – Т. 2. – 744 с.

98. *Хамитов Г.П.* Имитация случайных процессов.- Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1983.

99. *Шалыгин А.С., Палагин Ю.И.* Прикладные методы статистического моделирования.- Л.:Машиностроение, 1986.

100. *Ядренко М.Й.* Локальні властивості вибіркових функцій випадкових полів // Вісник Київського університету. Сер. Мат. та мех.- 1967, № 9.

101. *Ядренко М.И.* Спектральная теория случайных полей.- К.: "Вища школа 1980.- С.270.

102. *Яглом А.М.* Корреляционная теория стационарных случайных функций.- Л.: "Гидрометеоиздат 1981.

103. *Adler R.J.* An introduction to continuity, extrema and related topics for general Gaussian processes.- 1990, Lecture Notes – Monograph Series.- vol.**12**, Institute of Mathematical Statistics, Hayward.

104. *Rita Giuliano Antonini*, exponential bounds for the distribution of the norm of scalar subgaussian random vectors // Preprint Dipartamento di Mathematica Universita di Pisa, 2.240 957, (May 1996)

105. *Belyaev Yu.K.* Continuity and Holder's conditions for samle functions of stationary Gaussian processes // Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probability.- 1961.- vol.**2**.- P.23–33.

106. *Berman S.M.* Excursions of stationary Gaussian processes above high moving barriers.- 1973.- Ann. Probab. **1**, № 3.- P.365–387.

107. *Borell C.* Tail probabilities in gauss space / Vector space measures. Appl.I // Proc. Conf.Dublin., 1977.- Lect.Notes Math., 1978, № 644. P.73–82.

108. *Brix A.* Generalized gamma measures and shot-noise Cox processes // Advances in applied probability. – 1999. – Vol. 31, № 3, – P. 929-953.

109. *Buldygin V.V. and Kozachenko Yu.V.* Metric characterisation of random variables and random processes.- Amer. Math. Soc. Providence RI,2000.

110. *Cramer H. and Lidbetter M.* Stationary and Related Stochastic Process.- J.Willey, New York, 1967.

111. *Delport J.* Fonctions aleatores presque surement continues sur un intervalle ferme //Theres presentes a la faculte des sciences d l'universite de Lill.- Paris, 1967.- 215p. **1**.- P.290–330.

112. *Dudley R.M.* Distances of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes.- 1967.- J. Funct. Anal. **1**.- P.290–330.

113. *Dudley R.M.* Sample function of the Gaussian processes.- 1973.- Ann. Probab. **1**, № 1, P.3–68.

114. *Dudley R.M.* Gaussian processes on several parameters // Ann.Math. Statist.- 1965.- **36**, № 3.- P.771–788.

115. *Dudley R.M.* The series of compact subsets of hilbert space and continuity of Gaussian processes // J.Func.Anal.- 1967.- vol.**1**, № 2.- P.290–330.

116. *Fernique X.* Integrabilite des vecteurs gaussiens // C.R.Acad.Sci.A 270.- 1970, № 7.- P.1698–1699.

117. *Fernique X.* Regularite des trajectoires des fonction aleatories gaussiennes // Lecture Notes Math. 480.- 1975.- Springer-Verlag, Berlin.- P.1–96.

118. *Fernique X.* Régularité de fonctions aléatoires non gaussiennes, Ecole d'Eté de Probabilités de St-Flour.- 1983.- Lecture Notes in Mathematics, vol.**976**, Springer, Berlin, Heidelberg.- P.1–74.

119. *Fukuda R.* Exponential integrability of sub-Gaussian vectors // Probab. Theory Related Fields.- 1990.- **85**, № 4.- P.505–521.

120. *Grich Z.A., Yadrenko O.M.* On the approximation theorems and statistical simulation of isotropic random fields.- Random operators and Stochastic Equations.- 1993, № 1.- P.37–43.

121. *Hahn M., Klass M.* Sampla continuity of square integrable processes // Amer. Math. Soc.- 1951.- **71**.- P.38–69.

122. *Hunt G.A.*, Random Fourie transforms.- Trans. Amer. Math. Soc. 71.- 1951.- P.38–69.

123. *Jain N.C., Marcus M.B.* Continuity of sub-GAussian processes // Adv. Probab.- 1978.- vol.**4**.- P.81–196.

124. *Kahane J.P.* Propertietes lacales des fonctions a series de Fouries aleatories //Studia Math.- 1960.- **19**, № 1.- P.1–25.

125. *Kahane J.P.* Some random seriesof functions.- Heath Mathematical Monographs. Lexington, Mass.: D.C. Heath and Company.- 1968.- 184 p.

126. *Kôno N.* Sample path properties of stochastic processes.- J. Math. Kyoto Univ..- 1980.- **20**, № 2.- P.295–313.

127. *Kozachenko Yu.V., Vasilik O.I.* On the distribution of suprema of $Sub_\varphi(\Omega)$ random processes.- Theory of Stochastic Processes.- 1988.- **4(20)**, № 1-2.- P.147–160.

128. Kozachenko Yu., Moklyachuk O. Large deviation probabilities for square-Gaussian stochastic processes // Extremes. – 1999. – № 11. – P. 269-293

129. *Landau H.J., Shepp L.A.* On the supremum of Gaussian processes // Sankhya, Ser. A.- 1970.- vol.**32**, № 4.- P.369–378.

130. *Ledoux M. and Talagrand M.* Probability in Banach spaces, Springer-Verlag, Berlin-New York., 1991.- 480 p.

131. *Leadbetter M.R., Lindgren G., Rootzen H.* Extremes and related properties of random sequances and processes.- Springer, Berlin.- 1983.

132. *Lindgren G.* Extreme values of stationary normal processes // Z.Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.- 1971.- **17**.- P.39–47.

133. *Lorentz G.G.* Metric entropy and appriximation.- Bull. Amer. Math. Soc.- 1966.- **72**.- P.903–937.

134. *Marcus M.B., Pisier G.* Random Fourier series with applications to harmonic analysis.- Vol.101.,Prinston, Prinston University Press.- 1981.

135. *Moller J.* Shot noise Cox processes // Advances in applied probability. – 2003. – Vol. 35, № 3. – P. 614-640.

136. *Moller J., Syversveen A.R., Waagepetersen R.P.* Log gaussian Cox Processes // Scandinavian Journal of Statistics. – 1998. – Vol. 25, № 4.– P. 451-482.

137. *Moller J., Waagepetersen R.P.* An introduction to simulation-based inference for spatial point processes, in J.Moller(ed.). // Spatial Statistics and Computational Methods, Lecture Notes in Statistics 173. – NewYork: Springer-Verlag, 2003. – P. 143–198.

138. *Ogorodnikov V.A.* Statistical simulation of discrete random processes and fields // Soviet journal of numerical analysis and mathematical modelling.- 1990.- vol.**5**, № 6.- P.489–509.

139. *Pisier G.* Conditions d'entropie assurant la continuite de certains processus et aplications l'analyse harmonique.- 1979–1980.- Seminaire d'Analyse Fonctionelles, Ecole Polytechnique, № 13–14.- P.1–42.

140. *Pisier G.* Some applications of the metric entropy condition to harmonic analysis.- Lectures Notes in Mathematics.- 1983.- vol.**995**, Springer, Berlin-Heidelberg.- P.123–154.

141. *Prigarin S.M.* Convergence of numerical models of random fields in Monte-Carlo methods // Russian journal of numerical analysis and mathematical modelling.- 1992.- vol.**7**, № 5.- P.441–456.

142. *Sabelfeld K.K. and Kurbanmuradov O.A.* Numerical statistical model of classical incompressible isotropic turbulence // Soviet journal of numerical analysis and mathematical modelling.- 1990.- vol.**5**, № 3.- P.251–263.

143. *Slutsky E.* Alcuno propozitioni sulla teoria delle funzioni aleatorie // Gionrn. Inst.Italiano degli Attuari.- 1937.- № 8.- P.193–199.

144. *Talagrand M.* Ragularity of Gaussian processes // Acta Math.- 1987.- № 159.- P.99–149.

145. Teugels Jozef L., Sundt Bjorn. Poisson Processes // Encyclopedia of actuarial science. – Wiley, 2004. – Vol. 3: O – Z. – P. 1296-1301.

ПОКАЖЧИК ТЕРМІНІВ