ISSN: 1810-3022

Донецький національний університет

Донецький національний університет
1937 - 2012

# ПРИКЛАДНА СТАТИСТИКА АКТУАРНА ТА ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

Заснований у 2000 році

**видається двічі на рік**

## 2012 рік

## №1

**Донецьк** 2012

Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика: Наук. журнал / Донецький нац. ун-т. – 2012. - №1. – 150 с.

Журнал "Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика" приймає оригінальні статті та короткі повідомлення про математичне моделювання та керування різноманітними процесами природознавства, техніки та економіки, страхування, інвестування, фінансування, особливо в тих галузях, що спираються на стохастичні методи. Чекаємо на теоретичні дослідження, а також на статті про практичні засоби та алгоритми розв'язування задач. Усі статті рецензуються.



Свідоцтво про реєстрацію серія КВ № 16146-4618 ПР

**Друкується за рішенням Вченої Ради Донецького національного університету**

**Адреса редколегії:** кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, ДонНУ, вул. Університетська 24, Донецьк 83055, Україна.

Тел.: +38 (0622) 302-92-45, 302-92-36

E-mail: artyombayev@rambler.ru



Applied statistics. Actuarial and financial mathematics: Scientific Journal / Donetsk National University. – 2012. - №1. – 150 p.

Journal "Applied statistics. Actuarial and financial mathematics" will accept for publication original articles and short reports devoted to mathematical modeling, control of different natural, economic, technical, insurance, investment and financial processes especially in the domains based on stochastic methods. You are most welcome to submit results theoretical studies as well as articles on practical methods and algorithms for solution of problems. All articles will be revised.



Registration series КВ № 16146-4618 ПР

**Printed by Authority of Academic Council of Donetsk National University**

**Contact Edit. Board at:** Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Donetsk National University, Universitetskaya st. 24, Donetsk 83055, Ukraine.

Call us: +38 (0622) 302-92-45, 302-92-36

E-mail: artyombayev@rambler.ru

# БАКСТЕРІВСЬКА ОЦІНКА КОЕФІЦІЄНТІВ РЕГРЕСІЇ ГАУССОВИХ ОДНОРІДНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ В ОДНІЙ МОДЕЛІ СПОСТЕРЕЖЕННЯ

УДК 519.21

*Синявська О. О.*

Резюме. Розглянуто задачу оцінювання коефіцієнтів регресії за спостереженнями лінійної комбінації гауссових випадкових полів. За допомогою бакстерівських статистик отримана сильно консистентна оцінка коефіцієнтів регресії та знайдені неасимптотичні довірчі області.

Резюме. Рассмотрена задача оценивания коэффициентов регрессии по наблюдению линейной комбинации гауссовских случайных полей. С помощью бакстеровских статистик получена сильно консистентная оценка коэффициентов регрессии и найдены неасимптотические доверительные области.

Abstract. We consider the problem of estimating the regression coefficient from the observation of a linear combination of Gaussian random fields. With account of Baxter statistics strongly consistent estimation of regression coefficients and non-asymptotic confidence region are obtained.

*Received / Надійшла до редакції 06.06.2012.*

**Ключові слова:** бакстерівські суми, гауссове випадкове поле, довірча область, коефіцієнт регресії, сильно консистентна оцінка.

**Ключевые слова:** бакстеровские суммы, гауссовское случайное поле, доверительная область, коэффициент регрессии, сильно консистентная оценка.

**Keywords:** Baxter sums, Gaussian random field, confidence region, regression coefficient, strongly consistent estimate.

**Вступ.** Як відомо,

$$\sum_{k=1}^{2^n}\left(W\left(\frac{k}{2^n}\right)-W\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right)^2 \to 1, n\to\infty$$

з ймовірністю одиниця, де $W(t), t\in[0,1]$ – стандартний броунівський рух. Цей результат встановив у 1940 р. французький математик П.Леві [13]. Г.Бакстер [8] узагальнив цю збіжність для певного класу гауссових випадкових процесів. Бакстерівські теореми для більш широкого класу випадкових процесів та полів досліджувалися багатьма авторами. Зокрема, в статтях Є. Г. Гладишева [3], С. М. Бермана [9], С. М. Краснитського [4], Т. Кавади [11], Ю. В. Козаченка, О. О. Курченка [12], в монографії В. В. Булдигіна, Ю. В. Козаченка [2] та інших.

В ряді робіт бакстерівські теореми застосовували в статистиці параметричного оцінювання. О. В. Бесклінська та Р. Є. Майборода [1], використовуючи бакстерівські статистики, побудували оцінки та довірчі інтервали для параметрів коваріаційних функцій деяких гауссових випадкових процесів. О. О. Курченко [5] застосував бакстерівський підхід для побудови сильно консистентної оцінки параметра Хюрста дробового броунівського руху. Дж-Кр. Бретон, І. Нурдін, Дж. Пецаті [10] за допомогою бакстерівських статистик побудували довірчі області для параметру Хюрста дробового броунівського руху із застосуванням нерівності концентрацій.

Статистичне оцінювання *параметрів випадкових функцій широко застосовується в* різних областях фізики, прикладної та фінансової математики, при дослідженнях в галузі радіотехніки, метеорології, гідромеханіці, в різних моделях гідрології, астрономії тощо.

## 1. Постановка задачі оцінювання.

Нехай $X_1(t_1,t_2,\ldots,t_m), X_2(t_1,t_2,\ldots,t_m),\ldots, X_m(t_1,t_2,\ldots,t_m), \eta(t_1,t_2,\ldots,t_m)$, де $t=(t_1,t_2,\ldots,t_m)\in[0,1]^m$ – незалежні однорідні гауссові випадкові поля з нульовими середніми та коваріаційними функціями $r_j(t), 1\le j\le m, r_\eta(t),\ t\in[0,1]^m$.

За спостереженнями випадкового поля

$$Y(t_1,t_2,\ldots,t_m)=\theta_1 X_1(t_1,t_2,\ldots,t_m)+\theta_2 X_2(t_1,t_2,\ldots,t_m)+\ldots\theta_m X_m(t_1,t_2,\ldots,t_m)+ \\ +\eta(t_1,t_2,\ldots,t_m),\ (t_1,t_2,\ldots,t_m)\in[0,1]^m \qquad (1)$$

в точках $\left\{\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{k}{a_n},1,\ldots,1\right), 0\le k\le a_n, 1\le i\le m\right\}$, де $a_n\in\mathrm{N}, n\ge 1;\quad a_n\to\infty, n\to\infty$, потрібно побудувати консистентну оцінку коефіцієнта регресії $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)\in[0,d]^m$, $d>0$ – відома стала, та знайти довірчі області. Випадкове поле $\eta(t),\ t\in[0,1]^m$ має більшу гладкість, ніж поля $X_j(t),\ t\in[0,1]^m, 1\le j\le m$. Така задача оцінювання коефіцієнта регресії для гауссових випадкових процесів розглядалась в роботі О. О. Курченка та О. О. Синявської [6].

Припустимо, що для коваріаційних функцій $r_j(t), 1\le j\le m, r_\eta(t),\ t\in[0,1]^m$ виконуються наступні умови:

(i) існують сталі $c_{j,l}>0, q_{j,l}>0, \delta_{j,l}>0, 1\le j,l\le m$ та $H_{jl}\in(0,1)$, $H_{jj}<H_{lj}, 1\le j,l\le m,\ j\ne l$, такі, що

$$\left| r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{l-1},0,1,\ldots,1\right)-r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{l-1},h,1,\ldots,1\right)-c_{j,l}h^{2H_{jl}}\right|\le q_{j,l}h^{2H_{jl}+\delta_{j,l}}, h\in(0,1];$$

(ii) звуження $r_j$ на $l$- ту координатну вісь задовольняє умову $L_{j,l}>0, 1\le j,l\le m$:

$$\left|\frac{\partial^2 r_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{l-1},\tau,1,\ldots,1\right)}{\partial\tau^2}\right|\le\frac{L_{j,l}}{\tau^{2-2H_{jl}}},\ \text{де}\ L_{j,l}>0, 1\le j,l\le m, \tau\in(0,1];$$

(iii) існують сталі $\beta_j>2H_{jj}$ та $b_j\ge 0, 1\le j\le m$ такі, що

$$\left| r_\eta\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{j-1},0,1,\ldots,1\right) - r_\eta\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{j-1},h,1,\ldots,1\right)\right|\le b_j h^{\beta_j}, h\in(0,1], 1\le j\le m.$$

Розглянемо наступні послідовності бакстерівських сум для $1\le i\le m, n\ge 1$:

$$\widehat{S}_n^{(i)}=a_n^{2H_{ii}-1}\sum_{k=1}^{a_n}\left(Y\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{k}{a_n},1,\ldots,1\right)-Y\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{k-1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right)^2. \qquad (2)$$

Для скорочення записів введемо наступні позначення:

$$\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(j)} = X_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{k}{a_n},1,\ldots,1\right) - X_j\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{k-1}{a_n},1,\ldots,1\right), 1\le i,j\le m,$$

$$\Delta_{(i)}\eta_{k,n} = \eta\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{k}{a_n},1,\ldots,1\right) - \eta\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{k-1}{a_n},1,\ldots,1\right), 1\le i\le m,$$

$$Y_{k,n}^{(i)} = Y\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{k}{a_n},1,\ldots,1\right) - Y\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{k-1}{a_n},1,\ldots,1\right), 1\le i\le m, 1\le k\le a_n.$$

Умови (i), (ii) забезпечують збіжність бакстерівських сум з $\Delta_{(i)}X_{k,n}^{(j)}, 1\le i,j\le m$ за ймовірністю, а (iii) – більшу гладкість поля $\eta(t), t\in[0,1]^m$ .

**Теорема 1.** Статистика $\widehat{\theta}_n = \left(\widehat{\theta}_n^{(1)},\widehat{\theta}_n^{(2)},\ldots,\widehat{\theta}_n^{(m)}\right) = \left(\sqrt{\frac{\widehat{S}_n^{(1)}}{2c_{1,1}}},\sqrt{\frac{\widehat{S}_n^{(2)}}{2c_{2,2}}},\ldots,\sqrt{\frac{\widehat{S}_n^{(m)}}{2c_{m,m}}}\right)$ – конзистентна оцінка коефіцієнта регресії $\theta = (\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$ за спостереженнями (1).

*Доведення.* Обчислимо математичне сподівання $\widehat{S}_n^{(1)}$:

$$E\widehat{S}_n^{(1)} = a_n^{2H_{11}-1}\sum_{k=1}^{a_n} E\left(\theta_1\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(1)} + \theta_2\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(2)} + \ldots + \theta_m\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(m)} + \Delta_{(1)}\eta_{k,n}\right)^2 =$$

$$= a_n^{2H_{11}-1}\sum_{k=1}^{a_n}\left(2\theta_1^2\left(r_1(0,1,\ldots,1) - r_1\left(\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right) + 2\theta_2^2\left(r_2(0,1,\ldots,1) - r_2\left(\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right) + \ldots +\right.$$

$$\left. + 2\theta_m^2\left(r_m(0,1,\ldots,1) - r_m\left(\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right) + 2\left(r_\eta(0,1,\ldots,1) - r_\eta\left(\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right)\right).$$

Тоді внаслідок умов (i), (ii) маємо:

$$a_n^{2H_{11}-1}\theta_1^2\sum_{k=1}^{a_n} E\left(\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(1)}\right)^2 = 2\theta_1^2 a_n^{2H_{11}}\left(r_1(0,1,\ldots,1) - r_1\left(\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right) \to$$

$$\to 2c_{1,1}\theta_1^2, n\to\infty;$$

$$a_n^{2H_{11}-1}\theta_j^2\sum_{k=1}^{a_n} E\left(\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(j)}\right)^2 = 2\theta_j^2 a_n^{2H_{11}}\left(r_j(0,1,\ldots,1) - r_j\left(\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right) \to 0,$$

$$n\to\infty, 2\le j\le m;$$

$$a_n^{2H_{11}-1}\sum_{k=1}^{a_n} E\left(\Delta_{(1)}\eta_{k,n}\right)^2 = 2a_n^{2H_{11}}\left(r_\eta(0,1,\ldots,1) - r_\eta\left(\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right) \le \frac{2b_1}{a_n^{\beta_1-2H_{11}}} \to 0, n\to\infty.$$

Таким чином, одержимо $E\widehat{S}_n^{(1)} \to 2c_{1,1}\theta_1^2, n\to\infty$.

Аналогічно знаходяться границі $E\widehat{S}_n^{(i)}, 2\le i\le m$:

$$E\widehat{S}_n^{(i)} = a_n^{2H_{ii}-1}E\sum_{k=1}^{a_n}\left(Y\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{k}{a_n},1,\ldots,1\right) - Y\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},\frac{k-1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right)^2 \to 2c_{i,i}\theta_i^2, n\to\infty.$$

Тепер перейдемо до оцінки дисперсії $D\widehat{S}_n^{(1)} = E\left(\widehat{S}_n^{(1)}\right)^2 - \left(E\widehat{S}_n^{(1)}\right)^2, n \geq 1$. Для обчислення дисперсії застосуємо формулу [7, с. 29]:

$$E(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4) = E(\xi_1\xi_2)E(\xi_3\xi_4) + E(\xi_1\xi_3)E(\xi_2\xi_4) + E(\xi_1\xi_4)E(\xi_2\xi_3),$$

де випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ мають сумісний гауссовий розподіл з нульовим середнім значенням. Тоді

$$E\left(\widehat{S}_n^{(1)}\right)^2 = a_n^{2(2H_{11}-1)} E\left(\sum_{k=1}^{a_n}\left(Y_{k,n}^{(1)}\right)^2\right)^2 = a_n^{2(2H_{11}-1)} \sum_{k,j=1}^{a_n} E\left(\left(Y_{k,n}^{(1)}\right)^2 \left(Y_{j,n}^{(1)}\right)^2\right) =$$

$$= a_n^{2(2H_{11}-1)} \sum_{k,j=1}^{a_n}\left(E\left(Y_{k,n}^{(1)}\right)^2 E\left(Y_{j,n}^{(1)}\right)^2 + 2\left(EY_{k,n}^{(1)}Y_{j,n}^{(1)}\right)^2\right);$$

$$D\widehat{S}_n^{(1)} = E\left(\widehat{S}_n^{(1)}\right)^2 - \left(E\widehat{S}_n^{(1)}\right)^2 = 2 \cdot a_n^{2(2H_{11}-1)}\left(\sum_{k=1}^{a_n}\left(E\left(Y_{k,n}^{(1)}\right)^2\right)^2 + 2\sum_{\substack{k,j=1\\k<j}}^{a_n}\left(E\left(Y_{k,n}^{(1)}\right)\left(Y_{j,n}^{(1)}\right)\right)^2\right). \quad (2)$$

Оцінимо $E\left(Y_{k,n}^{(1)}\right)^2$ та $E\left(Y_{k,n}^{(1)}\right)\left(Y_{j,n}^{(1)}\right)$. Для $E\left(Y_{k,n}^{(1)}\right)^2$ маємо:

$$E\left(Y_{k,n}^{(1)}\right)^2 = E\left(\theta_1\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(1)} + \ldots + \theta_m\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(m)} + \Delta_{(1)}\eta_{k,n}\right)^2 =$$

$$= E\left(\theta_1^2\left(\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(1)}\right)^2 + \ldots + \theta_m^2\left(\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(m)}\right)^2 + \left(\Delta_{(1)}\eta_{k,n}\right)^2\right).$$

Із припущень (i), (iii) випливає, що для $1 \leq j \leq m$

$$E\left(\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(j)}\right)^2 = 2\left(r_j(0,1,\ldots,1) - r_j\left(\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right) \leq \frac{2\left(c_{j,1} + q_{j,1}\right)}{a_n^{2H_{j1}}}, \quad (3)$$

$$E\left(\Delta_{(1)}\eta_{k,n}\right)^2 = 2\left(r_\eta(0,1,\ldots,1) - r_\eta\left(\frac{1}{a_n},1,\ldots,1\right)\right) \leq \frac{2b_1}{a_n^{\beta_1}}. \quad (4)$$

Отже, з нерівності Коші-Буняковського одержимо

$$2 \cdot a_n^{2(2H_{11}-1)}\sum_{k=1}^{a_n}\left(E\left(Y_{k,n}^{(1)}\right)^2\right)^2 \leq 2 \cdot a_n^{2(2H_{11}-1)} a_n \left(\theta_1^2 \frac{2\left(c_{1,1} + q_{1,1}\right)}{a_n^{2H_{11}}} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \theta_m^2 \frac{2\left(c_{m,1} + q_{m,1}\right)}{a_n^{2H_{m1}}} + \frac{2b_1}{a_n^{\beta_1}}\right)^2 \leq 8(m+1) \cdot a_n^{4H_{11}-1} \times$$

$$\times \left(\theta_1^4 \frac{\left(c_{1,1} + q_{1,1}\right)^2}{a_n^{4H_{11}}} + \ldots + \theta_m^4 \frac{\left(c_{m,1} + q_{m,1}\right)^2}{a_n^{4H_{m1}}} + \frac{b_1^2}{a_n^{2\beta_1}}\right) =$$

$$= 8(m+1)\left(\theta_1^4 \frac{\left(c_{1,1} + q_{1,1}\right)^2}{a_n} + \ldots + \theta_m^4 \frac{\left(c_{m,1} + q_{m,1}\right)^2}{a_n^{4H_{m1}-4H_{11}+1}} + \frac{b_1^2}{a_n^{2\beta_1-4H_{11}+1}}\right). \quad (5)$$

Далі, при $k < j$

$$E\left(Y_{k,n}^{(1)}Y_{j,n}^{(1)}\right) = E\left(\theta_1\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(1)} + \ldots + \theta_m\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(m)} + \Delta_{(1)}\eta_{k,n}\right)\left(\theta_1\Delta_{(1)}X_{j,n}^{(1)} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \theta_m\Delta_{(1)}X_{j,n}^{(m)} + \Delta_{(1)}\eta_{j,n}\right) = \theta_1^2 E\left(\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(1)}\Delta_{(1)}X_{j,n}^{(1)}\right) + \ldots +$$

$$+\theta_m^2 E\left(\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(m)}\Delta_{(1)}X_{j,n}^{(m)}\right)+E\left(\Delta_{(1)}\eta_{k,n}\Delta_{(1)}\eta_{j,n}\right);$$

$$\left(E\left(Y_{k,n}^{(1)}Y_{j,n}^{(1)}\right)\right)^2 \le (m+1)\left(\theta_1^4\left(E\left(\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(1)}\Delta_{(1)}X_{j,n}^{(1)}\right)\right)^2+\ldots+\theta_m^4\left(E\left(\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(m)}\Delta_{(1)}X_{j,n}^{(m)}\right)\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(E\left(\Delta_{(1)}\eta_{k,n}\Delta_{(1)}\eta_{j,n}\right)\right)^2\right). \tag{6}$$

Останній доданок правої частини нерівності (6) оцінимо за допомогою нерівності Коші-Буняковського та припущення (iii):

$$\left(E\left(\Delta_{(1)}\eta_{k,n}\Delta_{(1)}\eta_{j,n}\right)\right)^2 \le E\left(\Delta_{(1)}\eta_{k,n}\right)^2 E\left(\Delta_{(1)}\eta_{j,n}\right)^2 \le \frac{4b_1^2}{a_n^{2\beta_1}}. \tag{7}$$

Тоді відповідні складові дисперсії $D\widehat{S}_n^{(1)}$ оцінюються так:

$$2\cdot a_n^{2(2H_{11}-1)}\cdot 2\sum_{\substack{k,j=1,\\ k<j}}^{a_n}(m+1)E\left(\Delta_{(1)}\eta_{k,n}\right)^2 E\left(\Delta_{(1)}\eta_{j,n}\right)^2 \le 4(m+1)\cdot a_n^{2(2H_{11}-1)}\times$$
$$\times\frac{a_n(a_n-1)}{2}\frac{4b_1^2}{a_n^{2\beta_1}}=8(m+1)\cdot a_n^{2(2H_{11}-\beta_1)}b_1^2\,\frac{a_n-1}{a_n}. \tag{8}$$

Доданки $\left(E\left(\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(i)}\Delta_{(1)}X_{j,n}^{(i)}\right)\right)^2, 1\le i\le m$ *при* $k<j$ *оцінюються наступним чином:*

$$\left(E\left(\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(i)}\Delta_{(1)}X_{j,n}^{(i)}\right)\right)^2=\left(r_i\left(\frac{j-k-1}{a_n},1,\ldots,1\right)+r_i\left(\frac{j-k+1}{a_n},1,\ldots,1\right)-2r_i\left(\frac{j-k}{a_n},1,\ldots,1\right)\right)^2.$$

Покладемо $j-k=l,\ 1\le l\le a_n-1$. Вираз

$$r_{l,n}^{(i)}=\left(r_i\left(\frac{l-1}{a_n},1,\ldots,1\right)+r_i\left(\frac{l+1}{a_n},1,\ldots,1\right)-2r_i\left(\frac{l}{a_n},1,\ldots,1\right)\right)$$

є приростом другого порядку функції $r_i(\cdot,1,\ldots,1), 1\le i\le m$ на $\left[\frac{l-1}{a_n},\frac{l+1}{a_n}\right]$. Тому з формули для приросту 2-го порядку функції слідує, що існує $\tau_{l,n}=\left(\tau_{l,n}^{(1)},1,\ldots,1\right)\in\left(\frac{l-1}{a_n},\frac{l+1}{a_n}\right)$:

$$r_{l,n}^{(i)}=r_i''\left(\tau_{l,n}\right)\cdot\frac{1}{a_n^2}.$$

При цьому відповідна складова дисперсії $D\widehat{S}_n^{(1)}$ оцінюється так:

$$4\cdot a_n^{2(2H_{11}-1)}\left((m+1)\theta_1^4\sum_{\substack{k,j=1,\\ k<j}}^{a_n}\left(E\left(\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(1)}\Delta_{(1)}X_{j,n}^{(1)}\right)\right)^2+\ldots+(m+1)\theta_m^4\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{\substack{k,j=1,\\ k<j}}^{a_n}\left(E\left(\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(m)}\Delta_{(1)}X_{j,n}^{(m)}\right)\right)^2\right)=4(m+1)\cdot a_n^{2(2H_{11}-1)}\left(\theta_1^4\sum_{l=1}^{a_n-1}(a_n-l)\left(r_{l,n}^{(1)}\right)^2+\ldots+\right.$$
$$\left.+\theta_m^4\sum_{l=1}^{a_n-1}(a_n-l)\left(r_{l,n}^{(m)}\right)^2\right)\le 4(m+1)\cdot a_n^{2(2H_{11}-1)}\left(\theta_1^4\left((a_n-1)r_{1,n}^2+\sum_{l=2}^{a_n-1}(a_n-l)\times\right.\right.$$

$$\times\left(\frac{L_{1,1}}{\left(\tau_{l,n}^{(1)}\right)^{2-2H_{11}}}\frac{1}{a_n^2}\right)^2\Bigg)+\ldots+\theta_m^4\left((a_n-1)r_{m,n}^2+\sum_{l=2}^{a_n-1}(a_n-l)\left(\frac{L_{m,1}}{\left(\tau_{l,n}^{(m)}\right)^{2-2H_{m1}}}\frac{1}{a_n^2}\right)^2\right)\Bigg)\Bigg)\le$$

$$\le 4(m+1)a_n^{2(2H_{11}-1)}\left(\theta_1^4\left(a_n\left(4(c_{1,1}+q_{1,1})^2\frac{1}{a_n^{4H_{11}}}+2(c_{1,1}+q_{1,1})^2\frac{2^{4H_{11}}}{a_n^{4H_{11}}}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+a_n\sum_{l=2}^{a_n-1}\frac{L_{1,m}^2}{\left(\frac{l-1}{a_n}\right)^{2(2-2H_{11})}}\frac{1}{a_n^4}\right)+\ldots+\theta_m^4\left(a_n\left(4(c_{m,1}+q_{m,1})^2\frac{1}{a_n^{4H_{m1}}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2(c_{m,1}+q_{m,1})^2\frac{2^{4H_{m1}}}{a_n^{4H_{m1}}}\right)+a_n\sum_{l=2}^{a_n-1}\frac{L_{m,1}^2}{\left(\frac{l-1}{a_n}\right)^{2(2-2H_{m1})}}\frac{1}{a_n^4}\right)\Bigg)\le 8(m+1)\theta_1^4(c_{1,1}+q_{1,1})^2a_n^{-1}\times$$

$$\times\left(2+2^{4H_{11}}\right)+4(m+1)\theta_1^4\cdot a_n^{2(2H_{11}-1)}a_n\sum_{l=2}^{a_n-1}\frac{L_{1,1}^2a_n^{-4H_{11}}}{(l-1)^{2(2-2H_{11})}}+\ldots+8(m+1)\theta_m^4(c_{m,1}+q_{m,1})^2\times$$

$$\times a_n^{-1}\left(2+2^{4H_{m1}}\right)+4(m+1)\theta_m^4\cdot a_n^{2(2H_{m1}-1)}a_n\sum_{l=2}^{a_n-1}\frac{L_{m,1}^2a_n^{-4H_{m1}}}{(l-1)^{2(2-2H_{m1})}}. \tag{9}$$

Для оцінки сум, що входять в нерівність (9) зауважимо, що:

$$\sum_{l=1}^{a_n-1}\frac{1}{l^{2(2-2H_{i1})}}\le\begin{cases}\zeta\left(2(2-2H_{i1})\right), \text{ якщо } H_{i1}<\frac{3}{4},\\ 1+\ln a_n, \text{ якщо } H_{i1}=\frac{3}{4},\\ 1+\frac{a_n^{4H_{i1}-3}}{4H_{i1}-3}, \text{ якщо } H_{i1}\in\left(\frac{3}{4},1\right)\end{cases},1\le i\le m,$$

де $\zeta(\cdot)$ – дзета-функція Рімана.

Тоді для $1\le i\le m$

$$4(m+1)\theta_i^4\cdot L_{i,1}^2a_n^{-1}\sum_{l=2}^{a_n-1}\frac{1}{(l-1)^{2(2-2H_{i1})}}\le 4(m+1)\theta_i^4\cdot L_{i,1}^2\begin{cases}a_n^{-1}\zeta\left(2(2-2H_{i1})\right), \text{ якщо } H_{i1}<\frac{3}{4},\\ a_n^{-1}(1+\ln a_n), \text{ якщо } H_{i1}=\frac{3}{4},\\ a_n^{-1}+\frac{a_n^{-(4-4H_{i1})}}{4H_{i1}-3}, \text{ якщо } H_{i1}\in\left(\frac{3}{4},1\right)\end{cases}. \tag{10}$$

Враховуючи співвідношення (2), (5), (8), (9), (10) та $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)\in[0,d]^m$, одержимо оцінку для дисперсії $\widehat{S}_n^{(1)}$:

$$D\widehat{S}_n^{(1)} \le 8(m+1)\left( d^4 \frac{\left(c_{1,1}+q_{1,1}\right)^2}{a_n} + \ldots + d^4 \frac{\left(c_{m,1}+q_{m,1}\right)^2}{a_n^{4H_{m1}-4H_{11}+1}} + \frac{b_1^2}{a_n^{2\beta_1-4H_{11}+1}} \right) +$$

$$+8(m+1)\cdot a_n^{2(2H_{11}-\beta_1)} b_1^2 \frac{a_n-1}{a_n} + 8(m+1) d^4 a_n^{-1}\left(c_{1,1}+q_{1,1}\right)^2\left(2+2^{4H_{11}}\right) + 4(m+1)d^4 \times$$

$$\times L_{1,1}^2 \begin{cases} a_n^{-1}\zeta\left(2\left(2-2H_{11}\right)\right), \text{ якщо } H_{11} < \frac{3}{4}, \\ a_n^{-1}\left(1+\ln a_n\right), \text{ якщо } H_{11} = \frac{3}{4}, \\ a_n^{-1} + \frac{a_n^{-(4-4H_{11})}}{4H_{11}-3}, \text{ якщо } H_{11} \in \left(\frac{3}{4},1\right) \end{cases} + \ldots + 8(m+1)d^4\left(c_{m,1}+q_{m,1}\right)^2 \times$$

$$\times a_n^{-1}\left(2+2^{4H_{m1}}\right) + 4(m+1)d^4 L_{m,1}^2 \begin{cases} a_n^{-1}\zeta\left(2\left(2-2H_{m1}\right)\right), \text{ якщо } H_{m1} < \frac{3}{4}, \\ a_n^{-1}\left(1+\ln a_n\right), \text{ якщо } H_{m1} = \frac{3}{4}, \\ a_n^{-1} + \frac{a_n^{-(4-4H_{m1})}}{4H_{m1}-3}, \text{ якщо } H_{m1} \in \left(\frac{3}{4},1\right) \end{cases}. \qquad (11)$$

Аналогічно отримаємо оцінки для $D\widehat{S}_n^{(j)}, 2 \le j \le m$:

$$D\widehat{S}_n^{(j)} \le 8(m+1)\left( \sum_{i=1}^m d^4 \frac{\left(c_{i,j}+q_{i,j}\right)^2}{a_n^{4H_{ij}-4H_{jj}+1}} + \frac{b_j^2}{a_n^{2\beta_j-4H_{jj}+1}} \right) +$$

$$+8(m+1)\cdot a_n^{2\left(2H_{jj}-\beta_j\right)} b_j^2 \frac{a_n-1}{a_n} + 8(m+1)\left(2+2^{4H_{jj}}\right) a_n^{-1} \sum_{i=1}^m d^4\left(c_{i,j}+q_{j,j}\right)^2 +$$

$$+4(m+1)\sum_{i=1}^m d^4 L_{i,j}^2 \begin{cases} a_n^{-1}\zeta\left(2\left(2-2H_{ij}\right)\right), \text{ якщо } H_{ij} < \frac{3}{4}, \\ a_n^{-1}\left(1+\ln a_n\right), \text{ якщо } H_{ij} = \frac{3}{4}, \\ a_n^{-1} + \frac{a_n^{-(4-4H_{ij})}}{4H_{ij}-3}, \text{ якщо } H_{ij} \in \left(\frac{3}{4},1\right) \end{cases}. \qquad (12)$$

Таким чином, $D\widehat{S}_n^{(j)} \to 0, 1 \le j \le m, n \to \infty$.

Зауважимо, що із збіжності $E\left(\widehat{S}_n^{(j)} - 2c_{j,j}\theta_j^2\right)^2 \to 0, n \to \infty$ випливає збіжність $E\left(\sqrt{\widehat{S}_n^{(j)}} - \sqrt{2c_{j,j}\theta_j^2}\right)^2 \to 0, n \to \infty$ для $1 \le j \le m$. Теорема доведена.

**Зауваження 1.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} D\widehat{S}_n^{(j)}$ збігається за умови, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln a_n}{a_n^{\mu}}$, де $\mu = \min_{1\le j\le m}\min_{1\le l\le m}\left(2\beta_j - 4H_{jj}, 4-4H_{lj}, 1, 2\beta_j - 4H_{jj}, 4-4H_{lj}\right)$, – збіжний, а тому

$\widehat{S}_n^{(j)} - E\widehat{S}_n^{(j)} \to 0, 1 \le j \le m$ з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$, тобто оцінка $\widehat{\theta}_n$ буде сильно консистентною оцінкою коефіцієнтів регресії $(\theta_1, \ldots, \theta_m) \in [0, d]^m$.

**2.Довірчі області.**

**Теорема 2.** Нехай виконуються припущення (i)-(iii). Тоді область

$$\left(\sqrt{\alpha_n^{(1)}(p)}, \sqrt{\beta_n^{(1)}(p)}\right) \times \ldots \times \left(\sqrt{\alpha_n^{(m)}(p)}, \sqrt{\beta_n^{(m)}(p)}\right),$$

де

$$\alpha_n^{(j)}(p) = \max\left(0, \frac{\widehat{S}_n^{(j)} - \gamma_n^{(j)}}{2c_{j,j}}\right),\ \beta_n^{(j)}(p) = \min\left(\frac{\widehat{S}_n^{(j)} + \gamma_n^{(j)}}{2c_{j,j}}, d^2\right),$$

$$\gamma_n^{(j)} = 2\max\left(u_n^{(j)}, \sqrt{\frac{v_n^{(j)}}{p/m}}\right), 1 \le j \le m, p \in (0,1),$$

$$u_n^{(1)} = \frac{2q_{1,1}d^2}{a_n^{\delta_{1,1}}} + \frac{2d^2(c_{2,1} + q_{2,1})}{a_n^{2H_{21} - 2H_{11} + \delta_{2,1}}} + \ldots + \frac{2d^2(c_{m,1} + q_{m,1})}{a_n^{2H_{m1} - 2H_{11} + \delta_{m,1}}} + \frac{2b_1}{a_n^{\beta_1 - 2H_{11}}}, \ldots,$$

$$u_n^{(m)} = \frac{2d^2(c_{1,m} + q_{1,m})}{a_n^{2H_{1m} - 2H_{mm} + \delta_{1,m}}} + \frac{2d^2(c_{2,m} + q_{2,m})}{a_n^{2H_{21} - 2H_{mm} + \delta_{2,m}}} + \ldots + \frac{2d^2(c_{m-1,m} + q_{m-1,m})}{a_n^{2H_{(m-1)m} - 2H_{mm} + \delta_{m-1,m}}} +$$

$$+ \frac{2q_{m,m}d^2}{a_n^{\delta_{m,m}}} + \frac{2b_m}{a_n^{\beta_m - 2H_{mm}}},$$

$v_n^{(j)}$ – права частина оцінки дисперсії $D\widehat{S}_n^{(j)}, 1 \le j \le m$, є довірчою областю для коефіцієнта регресії $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ з рівнем довіри $1 - p$.

*Доведення.* Оцінимо спочатку $\left|E\widehat{S}_n^{(1)} - 2c_{1,1}\theta_1^2\right|, n \ge 1$:

$$\left|E\widehat{S}_n^{(1)} - 2c_{1,1}\theta_1^2\right| = \left|a_n^{2H_{11}-1}\sum_{k=1}^{a_n} E\left(\theta_1\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(1)} + \ldots + \theta_m\Delta_{(1)}X_{k,n}^{(m)} + \Delta_{(1)}\eta_{k,n}\right)^2 -\right.$$

$$\left. - 2c_{1,1}\theta_1^2\right| = \left|a_n^{2H_{11}-1}a_n\left(2\theta_1^2\left(r_1(0,1,\ldots,1) - r_1\left(\frac{1}{a_n}, 1, \ldots, 1\right) - \frac{c_{1,1}}{a_n^{2H_{11}}}\right) + \ldots +\right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\theta_m^2\left(r_m(0,1,\ldots,1) - r_m\left(\frac{1}{a_n}, 1, \ldots, 1\right)\right) + 2\left(r_\eta(0,1,\ldots,1) - r_\eta\left(\frac{1}{a_n}, 1, \ldots, 1\right)\right)\right)\right| \le$$

$$\le \frac{2q_{1,1}d^2}{a_n^{\delta_{1,1}}} + \frac{2d^2(c_{2,1} + q_{2,1})}{a_n^{2H_{21} - 2H_{11} + \delta_{2,1}}} + \ldots + \frac{2d^2(c_{m,1} + q_{m,1})}{a_n^{2H_{m1} - 2H_{11} + \delta_{m,1}}} + \frac{2b_1}{a_n^{\beta_1 - 2H_{11}}} := u_n^{(1)}.$$

Аналогічно одержимо, що

$$u_n^{(j)} = \frac{2q_{j,j}d^2}{a_n^{\delta_{j,j}}} + \sum_{i=1}^{m}\frac{2d^2(c_{i,j} + q_{i,j})}{a_n^{2H_{ij} - 2H_{jj} + \delta_{i,j}}} + \frac{2b_j}{a_n^{\beta_j - 2H_j}}, 2 \le j \le m.$$

Для заданого рівня довіри $1 - p, p \in (0,1)$ визначимо $\gamma_n^{(1)}$ так, щоб виконувалась нерівність $P\left\{\left|\widehat{S}_n^{(1)} - 2c_{1,1}\theta_1^2\right| > \gamma_n^{(1)}\right\} \le \frac{p}{m}$. Тоді:

$$P\left\{\left|\widehat{S}_n^{(1)}-2c_{1,1}\theta_l^2\right|>\gamma_n^{(1)}\right\}\le P\left\{\left|\widehat{S}_n^{(1)}-E\widehat{S}_n^{(1)}\right|>\frac{\gamma_n^{(1)}}{2}\right\}+I_B,$$

де $B=\left|E\widehat{S}_n^{(1)}-2c_{1,1}\theta_n^2\right|>\frac{\gamma_n^{(1)}}{2}$, $I_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\notin A\end{cases}$. Якщо $\gamma_n^{(1)}\ge 2u_n^{(1)}$, то $I_B=0$.

Внаслідок нерівності Чебишова одержимо, що

$$P\left\{\left|\widehat{S}_n^{(1)}-E\widehat{S}_n^{(1)}\right|>\frac{\gamma_n^{(1)}}{2}\right\}\le\frac{4D\widehat{S}_n^{(1)}}{\left(\gamma_n^{(1)}\right)^2}.$$

Розглянемо нерівність $\frac{4D\widehat{S}_n^{(1)}}{\left(\gamma_n^{(1)}\right)^2}\le\frac{p}{m}$, звідки маємо: $\gamma_n^{(1)}\ge 2\sqrt{\frac{D\widehat{S}_n^{(1)}}{p/m}}$. Аналогічно одержимо, що

$$\gamma_n^{(j)}\ge 2\sqrt{\frac{D\widehat{S}_n^{(m)}}{p/m}},\ 2\le j\le m.$$

Отже, можна покласти $\gamma_n^{(j)}=2\max\left(u_n^{(j)},\sqrt{\frac{v_n^{(j)}}{p/m}}\right)$, $1\le j\le m$, де $v_n^{(j)}$ – права частина оцінки для дисперсії $D\widehat{S}_n^{(j)}, 1\le j\le m$.

Таким чином, нерівності

$$\left|\widehat{S}_n^{(j)}-2c_{j,j}\theta_j^2\right|\le\gamma_n^{(j)}, 1\le j\le m$$

виконуються з ймовірністю, не меншою рівня довіри $1-p$. Теорему доведено.

**Висновки.** В роботі застосовано бакстерівський підхід для знаходження сильно консистентної оцінки коефіцієнта регресії $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$ в моделі спостереження (1). Також побудовано неасимптотичні довірчі області.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Бесклинская Е. П. О скорости сходимости некоторых оценок параметров стационарных гауссовских случайных процессов / Е. П. Бесклинская, Р. Е. Майборода // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1990. – Вып. 43. – с. 13-19.
2. Булдыгин В. В. Метрические характеристики случайных величин и процессов. / В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко. К.: ТВіМС, 1998. – 289 с.
3. Гладышев Е. Г. Новая предельная теорема для случайных процессов с гауссовскими приращениями / Е. Г. Гладышев // Теория вероятностей и ее приминения. – 1961. – Том 1, вып. 6. – с. 57-66.
4. Краснитский С. М. О некоторых предельных теоремах для случайных полей с гауссовскими разностями m-го порядка. / С. М. Краснитский // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1971. – Вып. 5. – с. 71-80.
5. Курченко О. О. Одна сильно консистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху / О. О. Курченко // Теорія ймовірностей і математична статистика. – 2002. – Вип. 67. – с. 45-54.
6. Курченко О. О. Бакстерівська оцінка коефіцієнта регресії в одній моделі / О. О.

Курченко, О. О. Синявська // Вісник Київського університету. Серія: Фіз.-мат. науки . – 2011. – Вип. 3. – с. 40-45.
7. Ибрагимов И. А. Гауссовские случайные процессы. / И. А Ибрагимов, Ю. А Розанов – М.: Наука, 1970. – 384 с.
8. Baxter G. A strong limit theorem for Gaussian processes / G. Baxter // Proc. Amer. Math. Soc. – 1956. – Vol. 7, No 6. – pp. 522–527.
9. Berman S. M. A version of Levy-Baxter theorem for Gaussian processes / S. Berman // Proc. Amer. Math. Soc. – 1967. – Vol. 18. – pp. 1051–1055.
10. Breton J-C. Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion / J-C. Breton, I. Nourdin, G. Peccati // Electronic Journal of Statistics. – 2009. – Vol. 3. – pp. 416-425.
11. Kawada T. The Levy-Baxter theorem for Gaussian random fields / T. Kawada // Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – Vol. 53. – pp. 463–469.
12. Kozachenko Y. V. Levy-Baxter theorems for one class of non-Gaussian stochastic processes / Y. V. Kozachenko, O. O. Kurchenko // Random Oper. Stoch. Equ. – 2011. – Vol. 4. – pp. 313–326.
13. Levy P. Le mouvement Brownian plan / P. Levy // Amer. J. Math. – 1940 – Vol. 62. – pp. 487-550.

Підписано до друку 26.06.2012 р.
Формат 60x84/8. Папір офсетний.
Друк – цифровий.Умовн.-друк. арк 27,9.
Тираж 100 прим.зам. №367.

Донецький національний університет
83001, м. Донецьк, вул. Університетська, 24.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК №1854 від 24.06.2004 р