УДК 519.21

О. Погоріляк
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Email: Alex_Pogorilyak@ukr.net

МОДЕЛЮВАННЯ ЛОГГАУССОВИХ ПРОЦЕСІВ КОКСА

Розглядаються випадкові процеси Кокса керовані випадковою інтенсивністю, а саме коли логарифм інтенсивності є гауссовим, стаціонарним, сепарабельним випадковим процесом. Будуються моделі логгауссових процесів Кокса, що наближають їх з певною точністю та надійністю.

A. Pogorilyak, Simulation Log Gaussian Cox Processes*. In this article are considered Cox processes directed by a random intensity when the logarithm of the intensity is a Gaussian, stationary, separable process. Models of Log Gaussian Cox Processes are constructed which approach this processes with the certain accuracy and reliability.*

1. Вступ

Робота присвячена побудові моделей так-званих подвійно стохастичних процесів Пуассона, або ще як їх називають процесів Кокса керованих випадковою інтенсивністю. Зокрема, розглянуто випадок коли інтенсивність є логгауссовим випадковим процесом. Логгауссові процеси Кокса та їх моделі, коли інтенсивність є випадковим полем вивчались в роботах [6, 7]. На відміну від них в даній роботі пропонується метод моделювання випадкових процесів Кокса з наперед заданою точністю та надійністю. У вступі розглядаються всі необхідні означення та постановка задачі моделювання. Друга частина статті присвячена задачі вибору розбиття. В третій частині будується сама модель процесу а також даються достатні умови наближення нею процесу з певною точністю та надійністю.

Нехай $\{\Omega, \Im, \mathbf{P}\}$ – стандартний ймовірнісний простір, $\Im$ – σ-алгебра борелівських множин, $\{Y(t), t \in \mathbf{T}\}$, $\mathbf{T} = [0, T]$ – стаціонарний, гауссовий, неперервний в середньому квадратичному випадковий процес, $EY(t) = 0$, $EY(t)Y(s) = B(t-s)$.

Означення 1. Випадковим процесом Кокса, керованим логгаусовим процесом $\exp\{Y(t)\}$, або просто логгауссовим процесом Кокса, називається процес $\{\nu(B), B \in \Im\}$, визначений у такий спосіб:

1. Якщо $B \bigcap C = \varnothing$, $B, C \in \Im$, то випадкові величини $\nu(B)$ та $\nu(C)$ незалежні;
2. $\{\nu(B), B \in \Im\}$ приймає значення $0, 1, 2, \ldots$ та

$$\mathbf{P}\{\nu(B) = k / Y(t), t \in \mathbf{T}\} = \frac{\exp\{-\mu(B)\}(\mu(B))^k}{k!},$$

де $\mu(B) = \int\limits_B \exp\{Y(t,\cdot)\}dt$, $Y(t,\cdot)$ – реалізація процесу $Y(t)$.

Модель логгауссового процесу Кокса будуємо наступним чином: розглянемо розбиття відрізку $\mathbf{T} = [0, T]$ на k відрізків довжиною $d = \frac{T}{k}$. Нехай $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$, $t_{i+1} - t_i = d$, $i = \overline{0, k-1}$. Позначимо $B_i = [t_i, t_{i+1}]$. Модель процесу $Y(t)$ позначимо $\widetilde{Y}(t)$. Нехай $\widetilde{\mu}(B_i) = \int\limits_{B_i} \exp\{\widetilde{Y}(t)\}dt$ і для кожного $i = \overline{0, k-1}$ будуємо модель логгауссового процесу Кокса $\widetilde{\nu}(B_i)$, тобто модель пуассонівської випадкової величини з середнім $\widetilde{\mu}(B_i)$.

Оскільки $\widetilde{\nu}(B_i)$ це число точок моделі, що належать множині B_i, то розміщуємо ці точки в B_i довільно. Якщо $\widetilde{\nu}(B_i) = 1$, то точку розміщуємо в центрі відрізку.

Зрозуміло, що модель можна вважати допустимою, якщо по-перше умовні ймовірності $p_{kY}(B_i) = \mathbf{P}\{\nu(B_i) = k / Y(t), t \in \mathbf{T}\}$ та $\widetilde{p}_{kY}(B_i) = \mathbf{P}\{\widetilde{\nu}(B_i) = k / \widetilde{Y}(t), t \in \mathbf{T}\}$ відрізняються мало, а по-друге, ймовірність того, що число точок $\nu(B_i)$ (відповідно і $\widetilde{\nu}(B_i)$) буде більше одиниці також мала. Отже, задача моделювання логгауссового процесу Кокса розбивається на дві задачі, а саме вибору розбиття відрізку $\mathbf{T}$ та побудову моделі процесу $Y(t)$.

2. Задача вибору розбиття області $\mathbf{T}$

Розбиття області $\mathbf{T}$ (тобто d або k) вибираємо так, щоб виконувалась нерівність

$$\mathbf{P}\{\nu(B_i) > 1\} < \delta, \tag{1}$$

де δ певне наперед задане число (наприклад, $\delta = 0{,}01$). Оскільки $\mathbf{P}\{\nu(B_i) > 1\} = E(1 - \exp\{-\mu(B_i)\} - \mu(B_i)\exp\{-\mu(B_i)\})$, то потрібно знайти таке розбиття, щоб виконувалась нерівність $E(1 - \exp\{-\mu(B_i)\} - \mu(B_i)\exp\{-\mu(B_i)\}) < \delta$.

Оскільки при $x > 0$ $1 - \exp\{-x\}(1 + x) \le \frac{x^2}{2}$, то для виконання попередньої нерівності досить щоб виконувалась нерівність

$$E[\mu(B_i)]^2 < 2\delta . \quad (2)$$

Теорема 1. Для того, щоб виконувалась нерівність $\mathbf{P}\{\nu(B_i) > 1\} < \delta$ досить вибрати $d = \frac{T}{k}$ так, щоб виконувалась нерівність

$$d \le \left[2\delta \exp\{-2B(0)\}\right]^{1/2} . \quad (3)$$

Доведення. Оскільки для центрованих гауссових випадкових величин $\xi = N(0, \sigma^2)$ має місце формула $E \exp\{\lambda\xi\} = \exp\left\{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\}$, то

$$E[\mu(B_i)]^2 = E\left[\int_{B_i} \exp\{Y(t)\}dt\right]^2 = E\int_{B_i} \exp\{Y(t)\}dt \int_{B_i} \exp\{Y(s)\}ds = \iint_{B_i \times B_i} E\exp\{Y(t) + Y(s)\}dtds$$

$$= \iint_{B_i \times B_i} \exp\left\{\frac{E(Y(t)+Y(s))^2}{2}\right\}dtds = \iint_{B_i \times B_i} \exp\left\{\frac{E(Y(t))^2}{2} + EY(t)Y(s) + \frac{E(Y(s))^2}{2}\right\}dtds$$

$$= \iint_{B_i \times B_i} \exp\{B(0) + B(t-s)\}dtds = \exp\{B(0)\}\iint_{B_i \times B_i} \exp\{B(t-s)\}dtds \le d^2 \exp\{2B(0)\}. \quad (4)$$

Отже, для того щоб виконувалась нерівність (2), а отже і (1), досить щоб виконувалась (3). □

Зауваження 1. Для конкретної коваріаційної функції, не оцінюючи, а порахувавши останній інтеграл в (4) а також розв'язавши відповідну нерівність, оцінку (3) можна дещо покращити. В таблиці 1 наведені покращені оцінки довжини d проміжку B_i для конкретних коваріаційних функцій.

$B(x)$	$\delta =$	$d \le$	$\delta =$	$d \le$
$\exp\{-\lvert x\rvert\}$	0,01	0,052014	0,03	0,090050
$\exp\{-x^2\}$	0,01	0,052037	0,03	0,090172
$\frac{1}{1-\lvert x\rvert},\ \lvert x\rvert < 1$	0,01	0,052008	0,03	0,090019
$\frac{\sin x}{x}$	0,01	0,052027	0,03	0,090121

Таблиця 1. Покращені оцінки d для конкретних коваріаційних функцій.

3. Побудова моделі процесу $Y(t)$

Оскільки потрібно будувати модель процесу $Y(t)$, а саме $\widetilde{Y}(t)$ так, щоб умовні ймовірності $p_{kY}(B_i) = \mathbf{P}\{\nu(B_i) = k / Y(t), t \in \mathbf{T}\}$ та $\widetilde{p}_{kY}(B_i) = \mathbf{P}\{\widetilde{\nu}(B_i) = k / \widetilde{Y}(t), t \in \mathbf{T}\}$, $i = \overline{0, k-1}$ з ймовірністю близькою до одиниці відрізнялись мало, то природнім є наступне означення.

Означення 2. Скажемо, що модель логгауссового процесу Кокса $\{\widetilde{\nu}(B), B \in \Im\}$ наближає його з точністю α, $0 < \alpha < 1$ та надійністю $1-\gamma$, $0 < \gamma < 1$, якщо виконується нерівність

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_i \in \Im,\ i=\overline{0,k-1}} \left| p_{kY}(B_i) - \widetilde{p}_{kY}(B_i)\right| > \alpha\right\} < \gamma .$$

Оцінимо різницю $\left| p_{kY}(B_i) - \widetilde{p}_{kY}(B_i)\right|$ застосувавши формулу Лагранжа скінчених приростів.

$$\left| p_{kY}(B_i) - \widetilde{p}_{kY}(B_i)\right| = \left|\frac{\exp\{-\mu(B_i)\}(\mu(B_i))^k}{k!} - \frac{\exp\{-\widetilde{\mu}(B_i)\}(\widetilde{\mu}(B_i))^k}{k!}\right|$$

$$= \left|\mu(B_i) - \widetilde{\mu}(B_i)\right| \frac{1}{k!} \exp\{-\widehat{\mu}(B_i)\}(\widehat{\mu}(B_i))^{k-1}\left|k - \widehat{\mu}(B_i)\right|$$

$$= \begin{cases} \left|\mu(B_i) - \widetilde{\mu}(B_i)\right| \frac{1}{(k-1)!} \exp\{-\widehat{\mu}(B_i)\}(\widehat{\mu}(B_i))^{k-1} \le \left|\mu(B_i) - \widetilde{\mu}(B_i)\right|, & k \ge \widehat{\mu}(B_i); \\ \left|\mu(B_i) - \widetilde{\mu}(B_i)\right| \frac{1}{k!} \exp\{-\widehat{\mu}(B_i)\}(\widehat{\mu}(B_i))^{k} \le \left|\mu(B_i) - \widetilde{\mu}(B_i)\right|, & k < \widehat{\mu}(B_i). \end{cases}$$

При $k = 0$

$$\left|p_{0Y}(B_i)-\widetilde{p}_{0Y}(B_i)\right|=\left|\exp\{-\mu(B_i)\}-\exp\{-\widetilde{\mu}(B_i)\}\right|=\left|\mu(B_i)-\widetilde{\mu}(B_i)\right|\left|\exp\{-\widehat{\mu}(B_i)\}\right|\le\left|\mu(B_i)-\widetilde{\mu}(B_i)\right|.$$

Таким чином оцінка $\left|p_{kY}(B_i)-\widetilde{p}_{kY}(B_i)\right|$ зводиться до оцінки $\left|\mu(B_i)-\widetilde{\mu}(B_i)\right|$ і виконується нерівність

$$\mathbf{P}\left\{\left|p_{kY}(B_i)-\widetilde{p}_{kY}(B_i)\right|>\alpha\right\}\le\mathbf{P}\left\{\left|\mu(B_i)-\widetilde{\mu}(B_i)\right|>\alpha\right\},\quad i=\overline{0,k-1}. \tag{5}$$

Не складно переконатись, що справедливою є наступна низка нерівностей:

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_i\in\Im,\,i=\overline{0,k-1}}\left|\mu(B_i)-\widetilde{\mu}(B_i)\right|>\alpha\right\}=\mathbf{P}\left\{\max_{B_i\in\Im,\,i=\overline{0,k-1}}\left|\int_{B_i}\exp\{Y(t)\}dt-\int_{B_i}\exp\{\widetilde{Y}(t)\}dt\right|>\alpha\right\}$$

$$\le\mathbf{P}\left\{\max_{B_i\in\Im,\,i=\overline{0,k-1}}\int_{B_i}\sup_{t\in\mathbf{T}}\left|\exp\{Y(t)\}-\exp\{\widetilde{Y}(t)\}\right|dt>\alpha\right\}$$

$$=\mathbf{P}\left\{\max_{B_i\in\Im,\,i=\overline{0,k-1}}\int_{B_i}dt\cdot\sup_{t\in\mathbf{T}}\left|\exp\{Y(t)\}-\exp\{\widetilde{Y}(t)\}\right|>\alpha\right\}$$

$$=\mathbf{P}\left\{d\cdot\sup_{t\in\mathbf{T}}\left|\exp\{Y(t)\}-\exp\{\widetilde{Y}(t)\}\right|>\alpha\right\}=\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}}\left|\exp\{Y(t)\}-\exp\{\widetilde{Y}(t)\}\right|>\frac{\alpha}{d}\right\}. \tag{6}$$

Отже, оцінку $\max_{B_i\in\Im,\,i=\overline{0,k-1}}\left|\mu(B_i)-\widetilde{\mu}(B_i)\right|$ ми звели до оцінки $\sup_{t\in\mathbf{T}}\left|\exp\{Y(t)\}-\exp\{\widetilde{Y}(t)\}\right|$.

Наведемо теорему яка нам буде потрібна в подальшому.

Теорема 2. Нехай $X=\{X(t), t\in\mathbf{T}\}$ випадковий процес з простору $\mathbf{L_p}(\Omega)$ такий, що $\sup_{t\in\mathbf{T}}\|X(t)\|_{\mathbf{L_p}}<+\infty$ а також простір $(\mathbf{T},\rho_X)$, $\rho_X(t,s)$ – псевдо метрика породжена процесом, і сам процес $X(t)$ сепарабельні і нехай $\int_0^\infty N(\varepsilon)^{1/p}d\varepsilon<+\infty$, де $N(\varepsilon)$ метрична ентропія простору $(\mathbf{T},\rho_X)$, $\varepsilon_0=\sup_{t,s\in\mathbf{T}}\rho_X(t,s)$, тоді

$\left(E\left[\sup_{t\in\mathbf{T}}|X(t)|\right]^p\right)^{1/p}\le V_p$ і для всіх $x>0$ $\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}}|X(t)|\ge x\right\}\le V_p^p/x^p$,

де $V_p=\inf_{t\in\mathbf{T}}\left(E|X(t)|^p\right)^{1/p}+\inf_{0<\theta<1}\frac{1}{\theta(1-\theta)}\int_0^{\theta\varepsilon_0}N^{1/p}(\varepsilon)d\varepsilon$.

Доведення цієї теореми а також обгрунтування деяких фактів, що будуть використані далі, можна знайти в [1].

Нехай $\mathbf{T}=[0,T]$, $\sup_{t\in\mathbf{T}}\|X(t+\varepsilon)-X(t)\|_{\mathbf{L_p}}\le\varphi(\varepsilon)$, де $\varphi(\varepsilon), \varepsilon>0$ монотонно не спадна функція така, що $\varphi(0)=0$, тоді $N(\varepsilon)\le T/2\varphi^{(-1)}(\varepsilon)+1\le T/\varphi^{(-1)}(\varepsilon)$. Оскільки $\varepsilon_0=\sup_{t,\,s\in\mathbf{T}}\rho_X(t,s)=\sup_{t,\,s\in\mathbf{T}}\|X(t)-X(s)\|_{\mathbf{L_p}}$ $\le\sup_{t\in\mathbf{T}}\|X(t)\|_{\mathbf{L_p}}+\sup_{s\in\mathbf{T}}\|X(s)\|_{\mathbf{L_p}}\le 2\sup_{t\in\mathbf{T}}\left(E|X(t)|^p\right)^{1/p}$, то при $p=2$ з теореми 2 випливає наступний результат.

Наслідок 1. Нехай випадковий процес $\{X(t), t\in\mathbf{T}\}$, $\mathbf{T}=[0,T]$ задовольняє умови теореми 2 при $p=2$, тоді $\forall x>0$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}}|X(t)|\ge x\right\}\le V_2^2/x^2, \tag{7}$$

де

$$V_2=\inf_{t\in\mathbf{T}}\left(E|X(t)|^2\right)^{1/2}+\inf_{0<\theta<1}\frac{1}{\theta(1-\theta)}\int_0^{\theta\cdot 2G}\left(T/\varphi^{(-1)}(\varepsilon)\right)^{1/2}d\varepsilon, \tag{8}$$

$$G=\sup_{t\in\mathbf{T}}\left(E\left|X(t)^2\right|\right)^{1/2},\quad \sup_{t\in\mathbf{T}}\left(E|X(t+\varepsilon)-X(t)|^2\right)^{1/2}\le\varphi(\varepsilon).$$

Поскільки ми розглядаємо центровані, стаціонарні в широкому розумінні, неперервні в середньому квадратичному випадкові процеси, то як відомо, коваріаційна функція $B(\tau)$ таких процесів може бути зображена у вигляді інтегралу $B(\tau)=\int\limits_0^\infty \cos\lambda\tau\, dF(\lambda)$, де $F(\lambda)$, $\lambda\in[0,+\infty]$ монотонно неспадна, неперервна зліва функція $F(0)=0$, $F(+\infty)=B(0)$. Тоді за теоремою Карунена стаціонарний, центрований процес $Y(t)$ може бути зображений у вигляді

$$Y(t)=\int\limits_0^\infty \cos\lambda t\, d\xi(\lambda)+\int\limits_0^\infty \sin\lambda t\, d\eta(\lambda),$$

де $\xi(\lambda)$ та $\eta(\lambda)$ центровані некорельовані процеси такі, що $\forall\lambda_1<\lambda_2$ $E(\xi(\lambda_2)-\xi(\lambda_1))^2$ $= E(\eta(\lambda_2)-\eta(\lambda_1))^2 = F(\lambda_2)-F(\lambda_1)$, $F(\lambda)$ – спектральна функція визначена вище.

Моделлю такого процесу назвемо суму $\widetilde{Y}(t)$ виду

$$\widetilde{Y}(t)=\sum_{k=0}^{N-1}\left(\cos\lambda_k t\,\Delta_k\xi(\lambda)+\sin\lambda_k t\,\Delta_k\eta(\lambda)\right), \tag{9}$$

де $\Delta_k\xi(\lambda)=\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} d\xi(\lambda)$, $\Delta_k\eta(\lambda)=\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} d\eta(\lambda)$, λ_k – точки розбиття $D_\Lambda: 0=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_N=\Lambda$.

Зауваження 2. Оскільки процес $Y(t)$ гауссовий, то процеси $\xi(\lambda)$ та $\eta(\lambda)$ також гауссові (це випливає з теореми Карунена).

Теорема 3. Нехай $Y(t)$ стаціонарний, центрований, сепарабельний, неперервний в середньому квадратичному, гауссовий $\mathbf{L_2}(\Omega)$ процес зі спектральною функцією $F(\lambda)$ та для деякого $1/2<l\le 1$ існують спектральні моменти $\int\limits_0^\infty \lambda^{2l}dF(\lambda)=C_l$. Розглянемо розбиття $D_\Lambda: \lambda_{k-1}-\lambda_k=\Lambda/N$, $\Lambda\in\mathbf{R}$, $N\in\mathbf{N}$, тоді модель логгауссового процесу Кокса $\{\widetilde{\nu}(B), B\in\Im\}$, де $\widetilde{Y}(t), t\in\mathbf{T}$ визначається із (9), наближає його з точністю α та надійністю $1-\gamma$ якщо виконуються умови

$$V_2\le\frac{\gamma^{1/2}\alpha}{d}, \tag{10}$$

де

$$V_2=\left[\left(B(0)-F(\Lambda)\right)^2\exp\{2B(0)\}+\exp\{2B(0)\}\left(B(0)-F(\Lambda)\right)\exp\left\{\frac{B(0)-F(\Lambda)}{2}\right\}\right]^{1/2}$$

$$+T^{1/2}K^{1/2l}\frac{(2l+1)^{\frac{2l+1}{2l}}}{2l-1}(2G)^{\frac{2l-1}{2l}},\quad 1/2<l\le 1,$$

$$G=\left[\left(B(0)-F(\Lambda)\right)^2\exp\{2B(0)\}+2\exp\{2B(0)\}R_G\exp\{R_G\}\right]^{1/2},$$

$$R_G=\frac{T^{2a}\Lambda^{2a}F(\Lambda)}{2^{2a-1}N^{2a}}+\frac{B(0)-F(\Lambda)}{2},\ 0<a\le 1,$$

$$K=\frac{C_l^{1/2}\exp\{B(0)\}}{2^{l-2}}.$$

Доведення. Доводити теорему будемо наступним чином: знайдемо оцінки для величин які фігурують в висновках наслідку 1, а потім скориставшись ним отримаємо потрібний результат.

Оцінимо спочатку математичне сподівання квадрату різниці логгауссового процесу та його моделі. Оскільки для гауссових центрованих випадкових процесів $\xi(t)$ мають місце рівності $E(\xi(t))^2=B(0)$, $E\left(\widetilde{\xi}(t)\right)^2=F(\Lambda)$, $E\exp\{\lambda\xi(t)\}=\exp\left\{\frac{\lambda^2E(\xi(t))^2}{2}\right\}$, то

$$E\left|\exp\{Y(t)\}-\exp\{\widetilde{Y}(t)\}\right|^2=E\exp\{2Y(t)\}-2E\exp\{Y(t)+\widetilde{Y}(t)\}+E\exp\{2\widetilde{Y}(t)\}$$

$$=e^{2E(Y(t))^2}-2e^{\frac{E\left(Y(t)+\widetilde{Y}(t)\right)^2}{2}}+e^{2E\left(\widetilde{Y}(t)\right)^2}+2e^{B(0)+F(\Lambda)}-2e^{B(0)+F(\Lambda)}$$

$$= \left(e^{B(0)} - e^{F(\Lambda)}\right)^2 + 2\exp\{B(0)+F(\Lambda)\}\left(1-\exp\left\{EY(t)\widetilde{Y}(t) - \frac{B(0)+F(\Lambda)}{2}\right\}\right). \qquad (11)$$

В силу нерівностей $\left|\exp\{x\}-\exp\{y\}\right| \le |x-y|\exp\{\max(x,\, y)\}$ та $\left|1-\exp\{x\}\right| \le |x|\exp\{|x|\}$ із (11) отримаємо:

$$E\left|\exp\{Y(t)\}-\exp\{\widetilde{Y}(t)\}\right|^2 \le (B(0)-F(\Lambda))^2 \exp\{2\max(B(0),\ F(\Lambda))\}$$
$$+2\exp\{B(0)+F(\Lambda)\}\left|EY(t)\widetilde{Y}(t)-\frac{B(0)+F(\Lambda)}{2}\right|\exp\left\{\left|EY(t)\widetilde{Y}(t)-\frac{B(0)+F(\Lambda)}{2}\right|\right\}. \qquad (12)$$

$$EY(t)\widetilde{Y}(t) = E\left(\sum_{k=0}^{N-1}\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\cos\lambda t\, d\xi(\lambda)+\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\sin\lambda t\, d\eta(\lambda)+\int_{\Lambda}^{\infty}\cos\lambda t\, d\xi(\lambda)+\int_{\Lambda}^{\infty}\sin\lambda t\, d\eta(\lambda)\right)\right)$$
$$\times\left(\sum_{k=0}^{N-1}\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\cos\lambda_k\, t\, d\xi(\lambda)+\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\sin\lambda_k\, t\, d\eta(\lambda)\right)\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{N-1}\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\cos\lambda t\cos\lambda_k\, t\, dF(\lambda)+\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\sin\lambda t\sin\lambda_k\, t\, dF(\lambda)\right)=\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\cos t(\lambda-\lambda_k)dF(\lambda). \qquad (13)$$

Далі, використовуючи (13), для $0<a\le 1$ можна записати

$$\left|EY(t)\widetilde{Y}(t)-\frac{B(0)+F(\Lambda)}{2}\right| = \left|\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\cos t(\lambda-\lambda_k)dF(\lambda)-\frac{B(0)+F(\Lambda)}{2}\right|$$
$$\le\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left|1-\cos t(\lambda-\lambda_k)\right|dF(\lambda)+\frac{B(0)-F(\Lambda)}{2} = \sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}2\sin^2\frac{t(\lambda-\lambda_k)}{2}dF(\lambda)+\frac{B(0)-F(\Lambda)}{2}$$
$$\le\sum_{k=0}^{N-1}2\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\frac{t}{2}(\lambda-\lambda_k)\right)^{2a}dF(\lambda)+\frac{B(0)-F(\Lambda)}{2} \le \sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\frac{t^{2a}}{2^{2a-1}}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)^{2a}dF(\lambda)+\frac{B(0)-F(\Lambda)}{2}$$
$$\le\frac{t^{2a}\Lambda^{2a}F(\Lambda)}{2^{2a-1}N^{2a}}+\frac{B(0)-F(\Lambda)}{2}. \qquad (14)$$

Використовуючи (14) із (12) отримуємо

$$E\left|\exp\{Y(t)\}-\exp\{\widetilde{Y}(t)\}\right|^2 \le (B(0)-F(\Lambda))^2\exp\{2B(0)\}+2\exp\{2B(0)\}R_N\exp\{R_N\}, \qquad (15)$$

де $R_N=\dfrac{t^{2a}\Lambda^{2a}F(\Lambda)}{2^{2a-1}N^{2a}}+\dfrac{B(0)-F(\Lambda)}{2}$, $0<a\le 1$.

За властивістю напівадитивності норми

$$\left(E\left|e^{Y(t+h)}-e^{\widetilde{Y}(t+h)}-\left(e^{Y(t)}-e^{\widetilde{Y}(t)}\right)\right|^2\right)^{1/2}=\left(E\left|e^{Y(t+h)}-e^{Y(t)}-\left(e^{\widetilde{Y}(t+h)}-e^{\widetilde{Y}(t)}\right)\right|^2\right)^{1/2}$$
$$\le\left(E\left(e^{Y(t+h)}-e^{Y(t)}\right)^2\right)^{1/2}+\left(E\left(e^{\widetilde{Y}(t+h)}-e^{\widetilde{Y}(t)}\right)^2\right)^{1/2}=E_1^{1/2}+E_2^{1/2}. \qquad (16)$$

$$E_1=E\left(e^{Y(t+h)}-e^{Y(t)}\right)^2=Ee^{2Y(t+h)}-2Ee^{Y(t+h)+Y(t)}+Ee^{2Y(t)}$$
$$=e^{2B(0)}-2e^{\frac{E(Y(t+h)+Y(t))^2}{2}}+e^{2B(0)}=2e^{2B(0)}-2e^{B(0)+EY(t+h)Y(t)}$$
$$=2e^{B(0)}\left(e^{B(0)}-e^{EY(t+h)Y(t)}\right)\le 2e^{B(0)}\left|B(0)-EY(t+h)Y(t)\right|\exp\{\max(B(0),EY(t+h)Y(t))\}$$
$$\le 2\exp\{2B(0)\}(B(0)-B(h)). \qquad (17)$$

При $0<l\le 1$

$$B(0)-B(h)=\int_0^\infty dF(\lambda)-\int_0^\infty\cos h\lambda\, dF(\lambda)=\int_0^\infty(1-\cos h\lambda)dF(\lambda)=\int_0^\infty 2\sin^2\frac{h\lambda}{2}dF(\lambda)$$
$$\le\int_0^\infty\frac{2h^{2l}\lambda^{2l}}{2^{2l}}dF(\lambda)=\frac{h^{2l}}{2^{2l-1}}\int_0^\infty\lambda^{2l}dF(\lambda)=\frac{h^{2l}}{2^{2l-1}}\cdot C_l, \qquad (18)$$

де $C_l=\int_0^\infty\lambda^{2l}dF(\lambda)$.

Використовуючи (18) із (17) маємо:

$$E_1 \le \frac{C_l}{2^{2l-2}} \exp\{2B(0)\} h^{2l} . \tag{19}$$

$$E_2 = E\left(e^{\widetilde{Y}(t+h)} - e^{\widetilde{Y}(t)}\right)^2 = Ee^{2\widetilde{Y}(t+h)} - 2Ee^{\widetilde{Y}(t+h)+\widetilde{Y}(t)} + Ee^{2\widetilde{Y}(t)} = 2e^{2F(\Lambda)} - 2e^{F(\Lambda)+E\widetilde{Y}(t+h)\widetilde{Y}(t)}$$

$$= 2e^{F(\Lambda)}\left(e^{F(\Lambda)} - e^{E\widetilde{Y}(t+h)\widetilde{Y}(t)}\right) \le 2e^{F(\Lambda)}\left|F(\Lambda) - E\widetilde{Y}(t+h)\widetilde{Y}(t)\right| \exp\left\{\max\left(F(\Lambda),\ E\widetilde{Y}(t+h)\widetilde{Y}(t)\right)\right\}$$

$$\le 2\exp\{2F(\Lambda)\}\left|F(\Lambda) - E\widetilde{Y}(t+h)\widetilde{Y}(t)\right| . \tag{20}$$

$$\left|F(\Lambda) - E\widetilde{Y}(t+h)\widetilde{Y}(t)\right| = \sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} dF(\lambda) - E\left(\sum_{k=0}^{N-1}\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \cos\lambda_k(t+h)\, d\xi(\lambda)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \sin\lambda_k(t+h)\, d\eta(\lambda)\right)\sum_{k=0}^{N-1}\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \cos\lambda_k t\, d\xi(\lambda) + \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \sin\lambda_k t\, d\eta(\lambda)\right)\right)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} dF(\lambda) - \sum_{k=0}^{N-1}\left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \cos\lambda_k(t+h)\cos\lambda_k t\, dF(\lambda) + \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \sin\lambda_k(t+h)\sin\lambda_k t\, dF(\lambda)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (1 - \cos\lambda_k h)\, dF(\lambda) = \sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} 2\sin^2\frac{\lambda_k h}{2}\, dF(\lambda)$$

$$\le 2\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+h}} \frac{\lambda_k^{2l} h^{2l}}{2^{2l}} dF(\lambda) \le \frac{h^{2l}}{2^{2l-1}}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+h}} \lambda^{2l} dF(\lambda) \le \frac{h^{2l}}{2^{2l-1}}\int_0^{\infty} \lambda^{2l} dF(\lambda) = \frac{h^{2l}}{2^{2l-1}} \cdot C_l . \tag{21}$$

Використовуючи (21) із (20) маємо:

$$E_2 \le \frac{C_l}{2^{2l-2}} \exp\{2B(0)\} h^{2l} . \tag{22}$$

Враховуючи (19) та (22) із (16) отримаємо, що

$$\left(E\left|e^{Y(t+h)} - e^{\widetilde{Y}(t+h)} - \left(e^{Y(t)} - e^{\widetilde{Y}(t)}\right)\right|^2\right)^{1/2} \le E_1^{1/2} + E_2^{1/2} \le \frac{C_l^{1/2}}{2^{l-1}} \exp\{B(0)\} h^l + \frac{C_l^{1/2}}{2^{l-1}} \exp\{B(0)\} h^l$$

$$\le \frac{C^{1/2}}{2^{l-2}} \exp\{B(0)\} h^l = K \cdot h^l , \quad 1/2 < l \le 1 , \text{ де } K = \frac{C^{1/2}}{2^{l-2}} \exp\{B(0)\} .$$

Порахуємо інтеграл який фігурує в правій частині формули (8).

$$\int_0^{\theta\cdot 2G}\left(\frac{T}{\varphi^{(-1)}(\varepsilon)}\right)^{1/2} d\varepsilon = \int_0^{\theta\cdot 2G}\left(\frac{T}{\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)^{1/l}}\right)^{1/2} d\varepsilon = \int_0^{\theta\cdot 2G}\frac{\left(TK^{1/l}\right)^{1/2}}{\varepsilon^{1/2l}} d\varepsilon = \left(TK^{1/l}\right)^{1/2} \left.\frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2l}+1}}{-\frac{1}{2l}+1}\right|_0^{\theta\cdot 2G}$$

$$= \frac{\left(TK^{1/l}\right)^{1/2} 2l}{2l-1}\theta^{\frac{2l-1}{2l}}(2G)^{\frac{2l-1}{2l}} , \quad 1/2 < l \le 1 .$$

Оскільки функція $f(\theta) = \dfrac{\theta^{\frac{2l-1}{2l}}}{\theta(1-\theta)}$ приймає мінімальне значення при $\theta_0 = \dfrac{1}{2l+1}$, то

$$\inf_{0<\theta<1}\frac{1}{\theta(1-\theta)}\int_0^{\theta\cdot 2G}\left(\frac{T}{\varphi^{(-1)}(\varepsilon)}\right)^{1/2} d\varepsilon = \frac{\left(TK^{1/l}\right)^{1/2} 2l}{2l-1}(2G)^{\frac{2l-1}{2l}}\frac{(2l+1)^{\frac{2l+1}{2l}}}{2l} = \left(TK^{1/l}\right)^{1/2}\frac{(2l+1)^{\frac{2l+1}{2l}}}{2l-1}(2G)^{\frac{2l-1}{2l}} ,$$ де

$$G = \sup_{t\in\mathbf{T}}\left(E\left(e^{Y(t)} - e^{\widetilde{Y}(t)}\right)^2\right)^{1/2} = \left[(B(0) - F(\Lambda))^2 \exp\{2B(0)\} + 2\exp\{2B(0)\} R_G \exp\{R_G\}\right]^{1/2} ,$$

$$R_G = \frac{T^{2a}\Lambda^{2a}F(\Lambda)}{2^{2a-1}N^{2a}} + \frac{B(0) - F(\Lambda)}{2} , \quad 0 < a \le 1 .$$

Таким чином, використовуючи наслідок 1 а також враховуючи що $\inf\limits_{t\in T}\left(E\left(e^{Y(t)}-e^{\widetilde{Y}(t)}\right)^2\right)^{1/2}=\left[\left(B(0)-F(\Lambda)\right)^2\exp\{2B(0)\}+\exp\{2B(0)\}\left(B(0)-F(\Lambda)\right)\exp\left\{\frac{B(0)-F(\Lambda)}{2}\right\}\right]^{1/2}$, отримуємо, що як тільки виконається нерівність (12), то зразу ж виконаються нерівності (6) і (5) що й доводить теорему. □

Зауваження 3. В означенні 2 умову $\mathbf{P}\left\{\max\limits_{B_i\in\Im,\, i=\overline{0,k-1}}\left|p_{kY}(B_i)-\widetilde{p}_{kY}(B_i)\right|>\alpha\right\}<\gamma$ можна замінити на більш сильну, а саме $\mathbf{P}\left\{\sup\limits_{B\in\Im}\left|p_{kY}(B)-\widetilde{p}_{kY}(B)\right|>\alpha\right\}<\gamma$. В цьому випадку всі попередні викладки залишаються вірними, а формула (10) матиме вигляд $V_2\le\frac{\gamma^{1/2}\alpha}{T}$.

Зрозуміло, що при такій постановці задачі на практиці моделювання ускладнюється тим, що модель наближатиме процес при набагато більшому N.

4. Висновки

В даній роботі описано метод моделювання логгаусових процесів Кокса з наперед заданою точністю та надійністю коли логарифм інтенсивності є гауссовим, стаціонарним, сепарабельним випадковим процесом. Основний результат статті – теорема 3 дає достатні умови наближення логгаусових процесів Кокса їх моделями.

1. *Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В.* Метрические характеристики случайных величин и процессов / За ред. В.В. Булдыгина. – К., 1998. 2. *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Курс статистического моделирования / За ред. В.А. Абрамова, И.М. Овчинникова. – М., 1976. 3. *Козаченко Ю.В., Пашко А.О.* Моделювання випадкових процесів / За ред. В.Р Філя. – К., 1999. 4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения / За ред. А.А. Бряндинской, Т.А. Денисовой. – М., 1954. 5. *Brix A., Moller J.* Space-time Multi Log Gaussian Cox Processes with a View to Modelling Weeds //Scandinavian Journal of Statistics – 2001. – Vol. 28, № 3. 6. *Moller J., Syversveen A.R., Waagepetersen R.P.* Log gaussian Cox Processes // Scandinavian Journal of Statistics – 1998. – Vol. 25, № 4.

Надійшла до редколегії 10.06.2004.