УДК 519.21

Т. В. Гудивок, О. О. Погоріляк (Ужгородський національний університет)

ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ДЕЯКИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ІЗ ЗАДАНОЮ КОРЕЛЯЦІЙНОЮ ФУНКЦІЄЮ

1. Вступ

Моделювання випадкових процесів, оцінювання їх спектральних та кореляційних функцій та побудова критеріїв для ідентифікації цих характеристик були і залишаються актуальним напрямком в теорії випадкових процесів. Інтенсивне вивчення цих проблем в першу чергу пов'язане з широким застосуванням отриманих результатів при розв'язанні різноманітних задач статистики випадкових процесів. Таке оцінювання можливо здійснювати за допомогою побудованих раніше критеріїв, але використання цих критеріїв вимагає, щоб проводилось спостереження за траєкторією процесу.

В роботі розглядається сепарабельний дійсний стаціонарний гауссів випадковий процес $\xi(t)$ із заданою спектральною щільністю, для якого побудовано модель його траєкторії із заданою точністю та надійністю. По спостереженням за змодельованою траєкторією процесу, протестовано критерій перевірки гіпотези про кореляційну функцію даного випадкового процесу. Результатом роботи є обчислені значення критерію за спостереженнями процесу на проміжках різної довжини та перевірка гіпотези про кореляційну функцію процесу за даними спостереженнями.

2. Побудова моделі гауссового випадкового процесу

В даній роботі розглядаються центровані, стаціонарні в широкому розумінні, неперервні в середньому квадратичному випадкові процеси. Як відомо(див. наприклад [1]), такі процеси зображаються у вигляді:

$$Y(t) = \int_0^\infty \cos\lambda t \, d\xi(\lambda) + \int_0^\infty \sin\lambda t \, d\eta(\lambda),$$

де $\xi(\lambda)$ та $\eta(\lambda)$ центровані випадкові процеси з некорельованими приростами такі, що $\forall\,\lambda_1 < \lambda_2$ $\mathbf{E}\left(\xi(\lambda_2) - \xi(\lambda_1)\right)^2 = \mathbf{E}\left(\eta(\lambda_2) - \eta(\lambda_1)\right)^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1)$, $F(\lambda)$ — спектральна функція.

Моделлю такого процесу назвемо суму $\widetilde{Y}(t)$ виду

$$\widetilde{Y}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\cos\lambda_k t\, \Delta_k\xi(\lambda) + \sin\lambda_k t\, \Delta_k\eta(\lambda)\right), \tag{1}$$

де $\Delta_k\xi(\lambda) = \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} d\xi(\lambda)$, $\Delta_k\eta(\lambda) = \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} d\eta(\lambda)$, λ_k – точки розбиття $D_\Lambda:\ 0 = \lambda_0 < < \lambda_1 < \ldots < \lambda_N = \Lambda$.

Якщо процес $Y(t)$ гауссовий, то процеси $\xi(\lambda)$ та $\eta(\lambda)$ також гауссові (це випливає з теореми Карунена).

Означення 1. *Скажемо, що модель $\widetilde{Y}(t)$ випадкового процесу $Y(t)$ наближає його з надійністю $1-\alpha$, $0<\alpha<1$ та точністю $\delta>0$ в просторі $L_p[0,T]$, $p\geq 1$, якщо для цієї моделі виконується нерівність*

$$\mathbf{P}\left\{\|Y(t)-\widetilde{Y}(t)\|>\delta\right\}\leq\alpha.$$

Теорема 1. *Нехай $Y(t)$ центрований, стаціонарний, регулярний, гауссовий, неперервний в середньому квадратичному випадковий процес зі спектральною функцією $F(\lambda)$, розбиття D_Λ інтервалу $[0,\Lambda]$ таке, що $\lambda_{i+1}-\lambda_i=\frac{\Lambda}{N}$, $i=\overline{0,N}$ та $\frac{T\Lambda}{N}\leq 1$. Тоді випадковий процес (1), де $\Delta_k\xi\left(\lambda\right)$ та $\Delta_k\eta\left(\lambda\right)$ – незалежні гауссові випадкові величини такі, що $\forall\,\lambda_1<\lambda_2$ $\mathbf{E}\left(\Delta_k\xi\left(\lambda\right)\right)^2=\mathbf{E}\left(\Delta_k\xi\left(\lambda\right)\right)^2=F\left(\lambda_2\right)-F\left(\lambda_1\right)$ наближає процес $Y(t)$ з надійністю $1-\alpha$, $0<\alpha<1$ та точністю $\delta>0$ в просторі $L_p[0,T]$ якщо для чисел Λ та n виконуються нерівності:*

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\right\}\frac{\delta}{\left(D_{n,\Lambda}\right)^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{p}}}\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2D_{n,\Lambda}T^{\frac{2}{p}}}\right\}\leq\alpha,$$

$$\left(D_{n,\Lambda}\right)^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{p}}\ \textit{при}\ 1\leq p\leq 2,$$

$$\left(D_{n,\Lambda}\right)^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{p}}\left(p+1\right)^{\frac{1}{2}}\leq\delta\ \textit{при}\ p>2,$$

де

$$D_{n,\Lambda}=\frac{T^2\Lambda^2}{N^2}F(\Lambda)+F(\infty)-F(\Lambda).$$

Доведення див. в [2].

3. Критерій перевірки гіпотези про вигляд кореляційної функції гауссового випадкового процесу

Нехай випадковий процес $Y=\{Y(t),t\in[0,T+B],0<B<\infty\}$ – задовольняє умовам теореми 1 та є сепарабельний. Його кореляційна функція

$$\rho(\tau)=\mathbf{E}Y(t+\tau)Y(t),\quad 0\leq\tau\leq B,$$

є неперервною.

Нехай $Y(t)$ – траєкторія стаціонарного процесу. Розглядатимемо стандартні оцінки кореляційних функцій, а саме, корелограми

$$\widehat{\rho}_T(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T Y(t+\tau)Y(t)dt,\quad T\geq 0 \tag{2}$$

Нехай H – гіпотеза, яка полягає в тому, що при $0\leq\tau\leq B$ кореляційна функція сепарабельного дійсного центрованого стаціонарного гауссового випадкового процесу Y дорівнює $\rho(\tau)$, при цьому за оцінку $\rho(\tau)$ вибираємо $\widehat{\rho}_T(\tau)$. Для перевірки гіпотези пропонується наступний критерій.

Критерій 1. *Для заданого рівня довіри α, знайдемо такі додатні x_α та y_α, що*

$$s(x_\alpha, u) + f(y_\alpha) = \alpha, \tag{3}$$

де

$$s(x,u) = g(u)\exp\left\{\frac{u^2x}{2}\right\},\ u>0,\ f(x) = \frac{2^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}}{\cosh\left(\sqrt{\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}\right)}.$$

Гіпотеза H приймається, якщо

$$x_\alpha < \frac{\int_0^B \left(\widehat{\rho}_T(\tau)-\rho(\tau)\right)^2 d\tau}{E\int_0^B \left(\widehat{\rho}_T(\tau)-\rho(\tau)\right)^2 d\tau} < y_\alpha$$

і відкидається в протилежному випадку.

Обгрунтування дивись в [3].

Зауваження 1. *При використанні наведеного критерію помилка першого роду не перевищує α.*

Приклад 1. *Нехай $Y(t)$ – гауссовий, стаціонарний, центрований, неперервний у середньому квадратичному випадковий процесу з спектральною щільністю $f(\lambda) = \exp\left\{-C\lambda^2\right\}$. Тоді кореляційна функція $\rho(\tau)$ процесу $Y(t)$ має вигляд*

$$\rho(\tau) = A\exp\left\{-a\tau^2\right\},$$

де $A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{C}}$, $a = \frac{1}{4C}$.

Перевіримо роботу критерію за спостереженнями за змодельованою траєкторією цього процесу. Для використання критерію необхідно обчислити значення виразу

$$\frac{\int_0^B \left(\widehat{\rho}_T(\tau)-\rho(\tau)\right)^2 d\tau}{E\int_0^B \left(\widehat{\rho}_T(\tau)-\rho(\tau)\right)^2 d\tau} \tag{4}$$

та перевірити, чи потрапляє воно в інтервал (x_α, y_α).

Нехай $\alpha = 0.05$. Тоді з рівняння (3) отримаємо $x_\alpha = 0.0014$ та $y_\alpha = 76$. Врахувавши, що при

$$\rho(\tau) = A\exp\left\{-a\tau^2\right\},$$

знаменник в (4) дорівнює (див. [3])

$$\frac{2A^2}{T^2}\left(B+\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\Phi(2B\sqrt{a})\right)\left(T\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\Phi(2T\sqrt{a})+\frac{1}{4a}\left(e^{-2T^2}-1\right)\right)$$

та підставивши замість сталих A, a, C, T, B їх значення, отримаємо наступні результати, зведені в таблицю (значення константи $C = 1000$ покладено для забезпечення спрощень обчислень для моделювання гауссового випадкового процесу, хоча це не впливає на значимість результату).

№	T	B	*Значення критерію*
1.	$T = 150$	$B = \frac{T}{3}$	*3,15096*
2.	$T = 100$	$B = \frac{T}{3}$	*3,8064*
3.	$T = 50$	$B = \frac{T}{3}$	*4,35939*
4.	$T = 150$	$B = 5$	*40,4267*
5.	$T = 150$	$B = 10$	*21,7541*
6.	$T = 150$	$B = 20$	*10,5839*
7.	$T = 150$	$B = 40$	*4,43171*
8.	$T = 150$	$B = 100$	*0,574658*

Отже, як видно з таблиці, при достатньо великих T*, значення критерію потрапляє в інтервал* (x_α, y_α)*, а це означає, що гіпотеза про вигляд кореляційної функції приймаєтьcя. Слід зауважити також, що при* $\alpha = 0.2$*,* $\alpha = 0.1$ *та* $\alpha = 0.01$ *значення критерію також потрапляють у проміжок* (x_α, y_α)*.*

Зауваження 2. *При обчисленні значень критерію та при моделюванні траєкторії процесу було використано програмну систему Mathematica.*

1. *Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.* Теория вероятостей и математическая статистика. – Киев: Выща школа, 1988. – 439с.
2. *Козаченко Ю.В., Пашко А.О.* Моделювання випадкових процесів. – К.: Київський університет, 1999. – 223 с.
3. *Федорянич Т.В.* Критерії для перевірки гіпотез про вигляд кореляційної функції гауссових випадкових процесів і полів: дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.05 / Федорянич Тетяна Василівна. – К., 2005. –141с.