

УДК 539.12.01
PACS 21.45.Bc, 13.75.Cs

Апроксимація хвильової функції та поляризаційні характеристики дейтрона для потенціалу Argonne v18

В.І. Жаба

*Ужгородський національний університет
вул. Волошина, 54, 88000 Ужгород, Україна
e-mail: viktorzh@meta.ua*

Чисельно розраховано коефіцієнти аналітичних форм для хвильової функції дейтрона в координатному представленні для потенціалів Неймегенської групи. Отримані хвильові функції не містять надлишкових вузлів. Розраховані параметри дейтрона добре узгоджуються з експериментальними і теоретичними даними. Розраховані за хвильовими функціями поляризаційні характеристики дейтрона T_{20} і A_{yy} співмірні з раніше опублікованими. Вперше одержано поляризаційні характеристики K_0 і K_{yy} для потенціалу Argonne v18.

Ключові слова: хвильова функція, апроксимація, дейтрон, поляризація, формфактор.

1 Вступ

Дейтрон є найпростішим ядром, яке складається з двох сильно взаємодіючих частинок (протона і нейтрона). Простота будови дейтрона робить його зручною лабораторією для вивчення нуклон-нуклонних сил. На даний час дейтрон добре вивчений як експериментально, так і теоретично.

Розрахунки статичних характеристик дейтрона (енергія зв'язку, магнітний момент, електричний квадрупольний момент та ін.) добре узгоджуються з експериментальними даними [1]. Але, незважаючи на це, існують певні теоретичні неузгодженості. Наприклад, в деяких теоретичних роботах [2] одна (Боннський потенціал) або обидві (Московський потенціал) [3] компоненти хвильової функції мають вузли поблизу початку координат. Така поведінка хвильової функції суперечить загальній математичній теоремі про число вузлів власних функцій крайових задач [4]. Основному стану системи відповідає функція без вузлів в середині інтервалу крайової задачі. Наявність вузлів у хвильових функціях основного і єдиного стану дейтрона може вказувати на існування певних неузгодженостей в реалізації чисельних алгоритмів, які застосовуються у подібних задачах. У роботі [5] показано, що асимптотика компонент розв'язку системи рівнянь вже не визначається одним орбітальним

моментом L , як у випадку з розв'язками одного рівняння Шредингера, а обумовлюється повним орбітальним моментом J і асимптотичною поведінкою тензорного потенціалу на малих відстанях, який забезпечує зв'язування рівнянь Шредингера в систему. Вплив вибору чисельних алгоритмів на розв'язки задачі наведено в роботах [5–7].

Такі потенціали нуклон-нуклонної взаємодії, як Боннський [2], Московський [3], потенціали Неймегенської групи (NijmI, NijmII, Nijm93 [8]), Argonne v18 [9] чи Парижський потенціал [10] мають досить непросту структуру і громіздкий запис. Оригінальний потенціал Рейда Reid68 був параметризований на основі фазового аналізу Неймегенською групою і отримав назву Reid93. Параметризація була проведена для 50 параметрів потенціалу, причому $\chi^2/N_{data}=1.03$ [8].

Крім того, хвильова функція дейтрона може бути представлена таблично: через відповідні масиви значень радіальних хвильових функцій. Іноді при чисельних розрахунках оперувати такими масивами чисел доволі складно. І текст програм для чисельних розрахунків є перевантажений. Тому доцільно отримати прості аналітичні форми представлення хвильових функцій дейтрона.

2 Аналітична форма хвильової функції дейтрона

Відомі чисельні значення радіальної хвильової функції дейтрона в координатному представленні можна апроксимувати за допомогою зручних розкладів [11] в аналітичній формі:

$$\begin{cases} u_a(r) = \sum_{i=1}^{N_a} A_i \exp(-a_i r^2), \\ w_a(r) = r^2 \sum_{i=1}^{N_a} B_i \exp(-b_i r^2), \end{cases} \quad (1)$$

або асиметричного подвійного сигмоїдала [7]:

$$R_l = C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{r-C_2+C_3/2}{C_4}\right)} \left(1 - \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{r-C_2-C_3/2}{C_5}\right)}\right). \quad (2)$$

У формулі (2) параметр C_0 не завжди є додатнім числом, тому виникає надлишковий вузол.

Незважаючи на громіздкі і довготривалі розрахунки і мінімізації χ^2 (до величини менших за 10^{-4}), доводилося апроксимувати чисельні значення хвильових функцій дейтрона для потенціалу Argonne v18 [9], масиви чисел яких становили 1500×4 значень в інтервалі $r=0-15$ fm. Значення коефіцієнтів розкладу A_i , a_i , B_i , b_i згідно формул (1) наведено в таблиці 1 ($N_a=17$).

Є ще одна аналітична форма хвильової функції дейтрона [2, 10, 12]:

$$\begin{cases} u_b(r) = \sum_{j=1}^{N_b} C_j \exp(-m_j r), \\ w_b(r) = \sum_{j=1}^{N_b} D_j \exp(-m_j r) \left[1 + \frac{3}{m_j r} + \frac{3}{(m_j r)^2}\right], \end{cases} \quad (3)$$

де $m_j = \beta + (j - 1)m_0$, $\beta = \sqrt{ME_d}$, $m_0 = 0.9 \text{ fm}^{-1}$. M – нуклонна маса, E_d – енергія зв'язку дейтрона.

Таблиця 1. Коефіцієнти аналітичної форми (1) для потенціалу Argonne v18

i	A_i	a_i	B_i	b_i
1	0.3783013555646	4.5159833495753	0.0004509482937	0.0202568987599
2	0.0527547473362	0.0047927056383	-0.776185299780	2.8877752388645
3	0.0588462112765	0.0402241853372	-0.154192735684	1.8739405193787
4	0.0394988587740	0.1108640062189	0.0315895933411	0.8758471678717
5	-0.098338625849	0.9027821990206	0.614607552944	2.0531580005636
6	0.0602079746429	0.0129223751842	0.0190358031863	0.8868757916254
7	0.0583622013041	0.0395882632030	-0.154192735684	1.8739405193787
8	0.0395335071155	0.1114996980444	-0.154192735684	1.8739405193786
9	-0.098338625850	0.9027821990164	0.1226950521493	0.6009934905685
10	0.0562850174854	0.0281322414743	-0.021649229102	0.9298786971677
11	0.0579689851075	0.0389768962179	0.0218535866021	0.2200515117714
12	0.0395253229419	0.1113533264535	-0.002842154828	0.9083871302579
13	-0.098338625849	0.9027821990207	0.6146075529440	2.0531580005636
14	0.0579715002134	0.0132941966586	-0.154192735684	1.8739405193796
15	0.0586185592993	0.0129874336769	0.0402612413538	0.8681178930282
16	0.0395035424701	0.1109524942994	0.0218416604388	0.2230021637536
17	-0.697262968741	2.5872139841691	0.0066681257541	0.0733951960776

Крайові умови при $r \rightarrow 0$:

$$u_b(r) \rightarrow r, \quad w_b(r) \rightarrow r^3.$$

Асимптотики хвильової функції дейтрона при $r \rightarrow \infty$ є такими:

$$\begin{aligned} u(r) &\sim A_S \exp(-\beta r), \\ w(r) &\sim A_D \exp(-\beta r) \left[1 + \frac{3}{\beta r} + \frac{3}{(\beta r)^2} \right], \end{aligned}$$

де A_S і A_D – асимптотики нормування S - і D - станів.

Коефіцієнти аналітичної форми (3) при $N_b > 11$ визначаються за формулами [12]

$$\left\{ \begin{aligned} C_n &= - \sum_{j=1}^{n-1} C_j \\ D_{n-2} &= \frac{m_{n-2}^2}{(m_n^2 - m_{n-2}^2)(m_{n-1}^2 - m_{n-2}^2)} \left[-m_{n-1}^2 m_n^2 \sum_{j=1}^{n-3} \frac{D_j}{m_j^2} + (m_{n-1}^2 + m_n^2) \sum_{j=1}^{n-3} D_j - \sum_{j=1}^{n-3} D_j m_j^2 \right] \end{aligned} \right. \quad (4)$$

або

$$\sum_{j=1}^{N_b} C_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{N_b} D_j = \sum_{j=1}^{N_b} D_j m_j^2 = \sum_{j=1}^{N_b} \frac{D_j}{m_j^2} = 0.$$

Точність параметризації (3) характеризується сумою квадратів відхилень

$$I_S = \left(\int_0^{\infty} [u(r) - u_b(r)]^2 dr \right)^{1/2} = 2.5 \times 10^{-4}$$

i

$$I_D = \left(\int_0^{\infty} [w(r) - w_b(r)]^2 dr \right)^{1/2} = 1.7 \times 10^{-4}.$$

Коефіцієнти аналітичної форми (3) для потенціалу Argonne v18 наведено в таблиці 2. Аналогічний пошук коефіцієнтів аналітичної форми (3) був здійснений для Боннського [2] і Парижського потенціалів [10] при $N_b=11$.

Таблиця 2. Коефіцієнти аналітичної форми (3) для потенціалу Argonne v18

j	C_j	D_j
1	0.8847587688515	0.0221308246405
2	-0.240190789478	-0.479945725957
3	0.1201160553288	0.6722981664772
4	-16.41658769826	-16.07802653128
5	82.053808872563	109.84624628026
6	-189.8389209575	-412.8292172373
7	44.608166244296	880.48536497129
8	600.91716892700	-1051.412411755
9	-1096.657863547	676.92565746522
10	776.60707625763	-205.9872828312
11	-202.0404838894	18.833954745050
12	(4)	(4)
13	(4)	(4)
14	(4)	(4)

Розраховані радіальні хвильові функції дейтрона $u(r)$ і $w(r)$ за аналітичними формами (1) і (3) в конфігураційному представленні не містять надлишкових вузлів (Рис. 1 і 2). Отримані хвильові функції дейтрона добре корелюють із даними роботи [9].

3 Параметри дейтрона

За відомими хвильовими функціями (1) і (3) в координатному представленні можна розрахувати параметри дейтрона [2, 6]:

- радіус дейтрона r_d :

$$r_d = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\infty} r^2 [u^2(r) + w^2(r)] dr \right\}^{1/2};$$

- електричний квадрупольний момент Q_d :

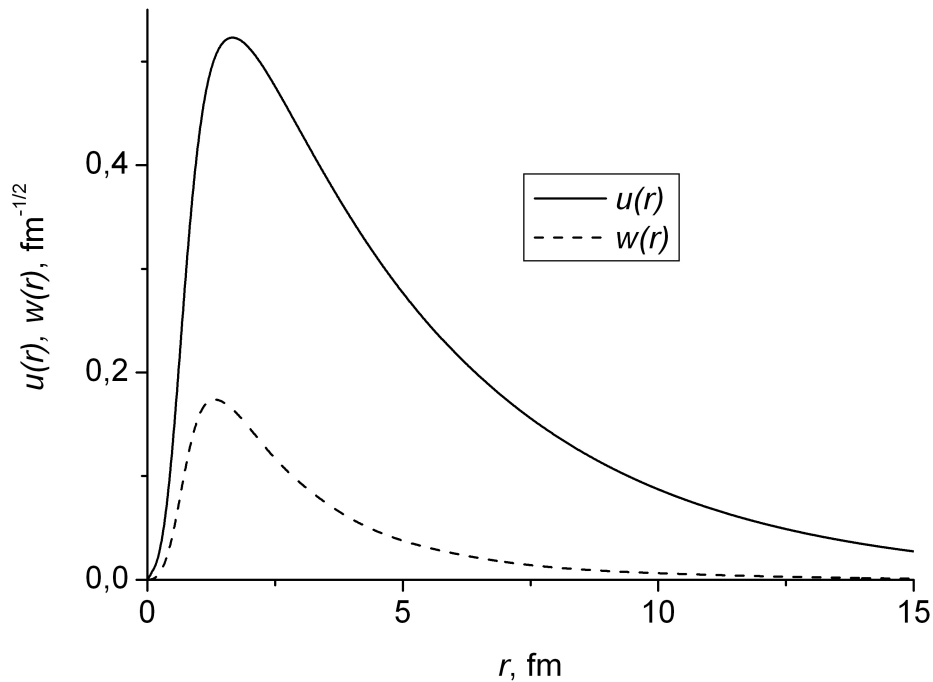


Рис. 1: Хвильові функції дейтрона $u(r)$ і $w(r)$, розраховані за аналітичною формою (1).

$$Q_d = \frac{1}{20} \int_0^{\infty} r^2 w(r) [\sqrt{8}u(r) - w(r)] dr;$$

- магнітний момент:

$$\mu_d = \mu_s - \frac{3}{2}(\mu_s - \frac{1}{2})P_D;$$

- вклад D - стану:

$$P_D = \int_0^{\infty} w^2(r) dr;$$

- асимптотика D/S - стану:

$$\eta = A_D/A_S.$$

Використовуючи хвильові функції дейтрона (1) і (3), розраховано параметри дейтрона (таблиця 3). Вони добре узгоджуються з експериментальними і теоретичними результатами [1, 9].

Таблиця 3. Параметри дейтрона

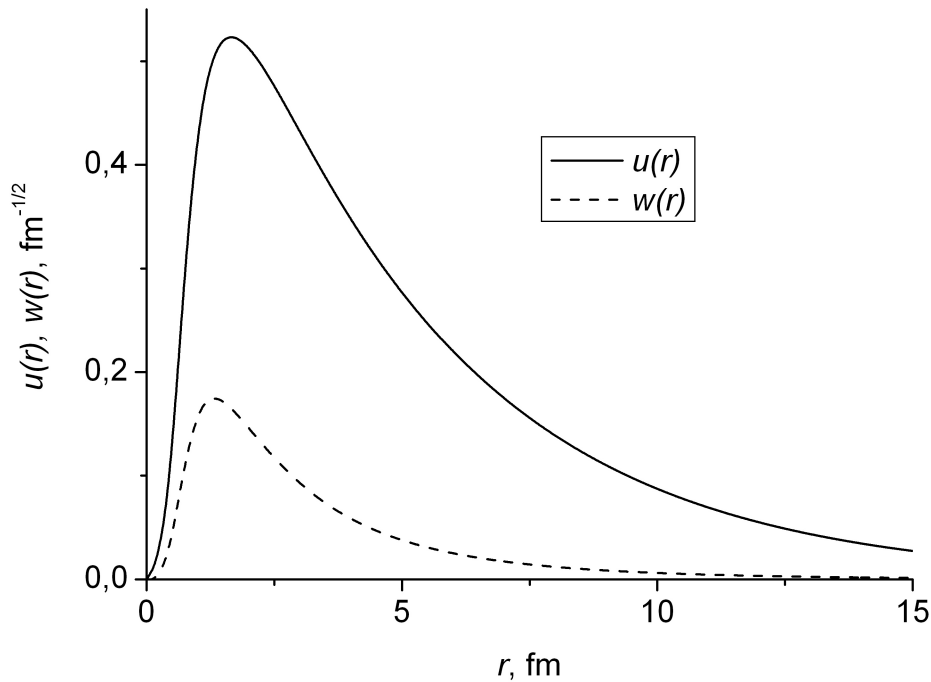


Рис. 2: Хвильові функції дейтрона $u(r)$ і $w(r)$, розраховані за аналітичною формою (3).

	P_D (%)	r_m (fm)	Q_d (fm ²)	μ_d	η
Argonne v18 (1)	5.75949	1.96737	0.267685	0.846988	0.0260866
Argonne v18 (3)	5.75841	1.96756	0.269694	0.841437	0.0250208
Argonne v18 [9]	5.76	1.967	0.270	0.847	0.0250

4 Поляризаційні характеристики дейтрона

За отриманими хвильовими функціями доцільно розрахувати поляризаційні характеристики дейтрона [13, 14].

Вимірювання поляризаційних характеристик реакції фрагментації дейтрона $A(d, p)X$ при проміжкових і високих енергіях залишається одним з основних інструментів для дослідження структури дейтрона. У рамках імпульсного представлення імпульсна залежність компонента тензора чутливості до поляризації дейтронів T_{20} повністю визначається хвильовою функцією, яка залежить тільки від імпульсу p [15],

$$T_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}u(p)w(p) - w(p)^2}{u(p)^2 + w(p)^2}, \quad (5)$$

де $u(p)$ і $w(p)$ – хвильові функції дейтрона в імпульсному представленні, які отримують з $u(r)$ і $w(r)$ за допомогою перетворення Ханкеля:

$$u(p) = \int_0^{\infty} u(r)j_0(pr)dr;$$

$$w(p) = \int_0^{\infty} w(r)j_2(pr)dr,$$

де $j_0(pr)$ і $j_2(pr)$ – функції Бесселя нульового і другого порядку.

Формула для T_{20} така ж сама, як і в моделі одноклонного обміну [15], а також і в роботі [16]. Експериментально компонента T_{20} визначається через перерізи, що відповідають проекціям спіну (+, 0, -1) початкового дейтрона на вісь [15]:

$$T_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_+ + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_- - 2\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_+ + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_- + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0}$$

Розрахована за формулою (5) величина T_{20} (Рис. 3) для потенціалу Argonne v18 добре корелює з результатами роботи [17]. Крім компоненти тензора чутливості до поляризації дейтронів T_{20} , хвильовою функцією дейтрона в імпульсному представленні визначається поляризаційна передача K_0 (Рис. 3):

$$K_0 = \frac{u(p)^2 - w(p)^2 - u(p)w(p)/\sqrt{2}}{u(p)^2 + w(p)^2}. \quad (6)$$

Експериментально саму величину тензорної аналізуючої здатності A_{yy} отримують з чисел протонів n^+ , n^- і n^0 , зареєстрованих для різних мод поляризації пучка після поправки на мертвий час установки за допомогою виразу [18]:

$$A_{yy} = 2 \frac{p_z^-(n^+/n^0 - 1) - p_z^+(n^-/n^0 - 1)}{p_z^- p_{zz}^+ - p_z^+ p_{zz}^-}. \quad (7)$$

Тензорна аналізуюча здатність A_{yy} і тензор-тензорна передача поляризації K_{yy} в імпульсному представленні теоретично розраховуються за такими формулами [14]:

$$A_{yy} = \frac{T_{00}^2 - T_{11}^2 + 4P^2 T_{10}^2}{T_{00}^2 + 2T_{11}^2 + 4P^2 T_{10}^2}, \quad (8)$$

$$K_{yy} = \frac{5T_{11}^2 + T_{00}^2 - 8P^2 T_{10}^2}{T_{00}^2 + 2T_{11}^2 + 4P^2 T_{10}^2}, \quad (9)$$

де $T_{ij}(p/2)$ – амплітуди, які визначаються за допомогою хвильових функцій $u(r)$ і $w(r)$ таким чином:

$$T_{00} = S_0(p/2) + \sqrt{2}S_2(p/2), T_{11} = S_0(p/2) - \frac{1}{\sqrt{2}}S_2(p/2),$$

$$T_{10} = \frac{i}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \left(u^2(r) - \frac{w^2(r)}{2}\right) j_0(rp/2)dr + \frac{i}{2} \int_0^{\infty} w(r) \left(u(r) + \frac{w(r)}{\sqrt{2}}\right) j_2(rp/2)dr. \quad (10)$$

Тут S_0 і S_2 – сферичний і квадрупольний формфактори дейтрона:

$$\begin{aligned}
 S_0(p/2) &= \int_0^{\infty} (u^2(r) + w^2(r)) j_0(rp/2) dr, \\
 S_2(p/2) &= \int_0^{\infty} 2w(r) \left(u(r) - \frac{1}{2\sqrt{2}} w(r) \right) j_2(rp/2) dr.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

У формулах (8) і (9) введено параметр $P = 0.4p$. Розрахована величина A_{yy} (Рис. 3) для потенціалу Argonne v18 співмірна з результатами [19] для Боннського потенціалу.

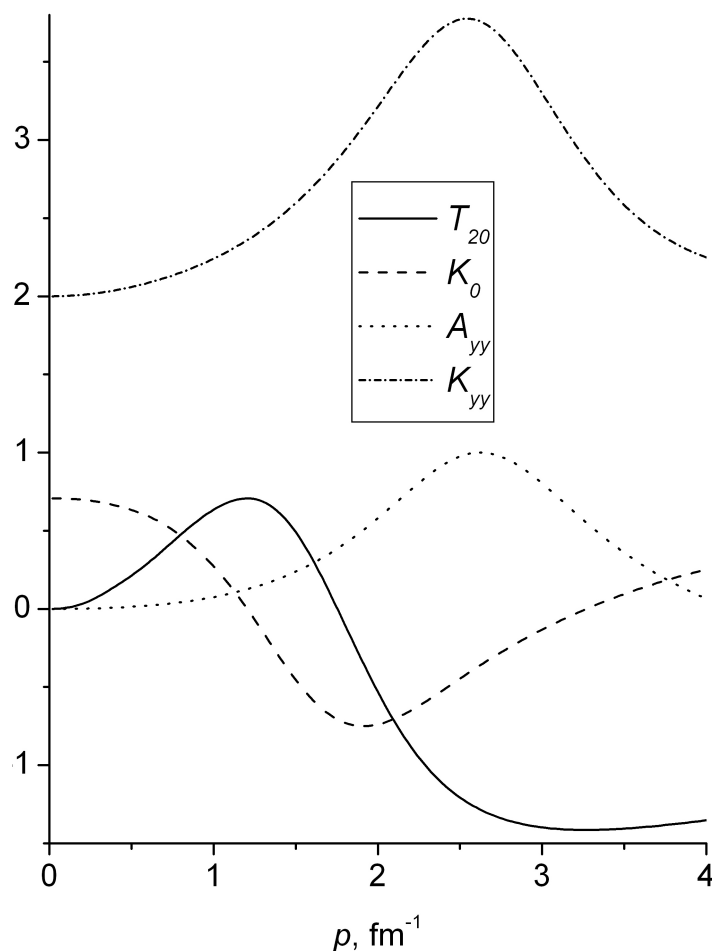


Рис. 3: Поляризаційні характеристики T_{20} , K_0 , A_{yy} і K_{yy} .

Слід відзначити, що величини поляризаційних характеристик T_{20} і A_{yy} для потенціалу Argonne v18 в даній роботі майже збігаються зі значеннями цих характеристик для потенціалів Reid93 і Argonne v18 при їх визначенні в роботі [6], де хвильові функції дейтрона в координатному та імпульсному представленнях також не

містять надлишкових вузлів. Відхилення становлять 1-2% для проміжку великих значень імпульсу.

Отримані результати для тензорної аналізуючої здатності A_{yy} добре узгоджуються з результатами в рамках моделі імпульсного наближення плоских хвиль [14] та експериментальними даними [20] реакції непружного розсіяння на вуглеці, отримані при початковому імпульсі дейтрона 9 GeV/c та куті детектування вторинних дейтронів 85 мрад в області збудження резонансу з масою 2190 MeV/c².

Розрахунки поляризаційних характеристик K_0 і K_{yy} для потенціалу Argonne v18 проведено вперше.

Висновки

Чисельно розраховано коефіцієнти двох апроксимаційних залежностей в аналітичній формі для чисельних значень хвильової функції дейтрона в координатному представленні для реалістичного феноменологічного потенціалу Argonne v18. Отримані за цими формами хвильові функції не містять надлишкових вузлів.

Використовуючи хвильові функції дейтрона в координатному та імпульсному представленнях, розраховано параметри дейтрона та компоненту тензора чутливості до поляризації дейтронів T_{20} , поляризаційну передачу K_0 , тензорну аналізуючу здатність A_{yy} і тензор-тензорну передачу поляризації K_{yy} . Отримані результати порівнюються з опублікованими експериментальними і теоретичними даними.

Список використаної літератури

1. *R. Machleidt*, Nucl. Phys. A **689**, 11 (2001).
2. *R. Machleidt*, Phys. Rev. C **63**, 024001 (2001).
3. *V.I. Kukulin, V.N. Pomerantsev, A. Faessler et al.*, Phys. Rev. C **57**, 535 (1998).
4. *R. Courant, D. Hilbert* Methods of Mathematical Physics (New York: Interscience, 1953).
5. *І. Гайсак, В. Жаба*, Вісник Львів. ун-ту. Серія фізична **44**, 8 (2009).
6. *І.І. Гайсак, В.І. Жаба*, Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія Фізика **36**, 100 (2014).
7. *В.С. Бохінюк, В.І. Жаба, О.М. Парлаз*, Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія Фізика **31**, 111 (2012).
8. *V.G.J. Stoks, R.A.M. Klomp, C.P.F. Terheggen et al.*, Phys. Rev. C **49**, 2950 (1994).
9. *R.B. Wiringa, V.G.J. Stoks, R. Schiavilla*, Phys. Rev. C **51**, 38 (1995).
10. *M. Lacombe, B. Loiseau, R. Vinh Mau et al.*, Phys. Lett. B **101**, 139 (1981).
11. *С.Б. Дубовиченко* Свойства легких атомных ядер в потенциальной кластерной модели (Алматы : Данекер, 2004).
12. *A.F. Krutov, V.E. Troitsky*, Phys. Rev. C **76**, 017001 (2007).
13. *A.K. Kurilkin, T. Saito, V.P. Ladygin et al.*, Phys. Rev. C **87**, 051001 (2013).
14. *В.П. Ладыгин, Н.Б. Ладыгина*, ЯФ **65**, 188 (2002).
15. *В.А. Карманов*, ЯФ **34**, 1020 (1981).
16. *S.S. Vasan*, Phys. Rev. D **8**, 4092 (1973).
17. *V.P. Ladygin, T. Uesaka, T. Saito et al.*, Phys. Lett. B **598**, 47 (2004).

18. *L.S. Azhgirey, S.V. Afanasiev, A.Yu. Isupov et al.*, Phys. Atom. Nucl. **68**, 991 (2005).
19. *V.P. Ladygin, L.S. Azhgirey, S.V. Afanasiev et al.*, arXiv:nucl-ex/0412020.
20. *Л.С. Азгирей, В.В. Архипов, С.В. Афанасьев и др.*, ЯФ **62**, 1796 (1999).

Стаття надійшла до редакції 25.02.2016
прийнята до друку 17.06.2016

Approximation of the deuteron wave functions and polarizing characteristics for potential Argonne v18

V.I. Zhaba

*Uzhgorod National University
Voloshyna St., 54, 88000 Uzhgorod, Ukraine
e-mail: viktorzh@meta.ua*

Numerical coefficients of analytical forms for deuteron wave function in configuration representation for potential Argonne v18 are designed. The obtained wave functions do not contain superfluous knots. The designed parameters of a deuteron well agree with the experimental and theoretical data. The polarization characteristics of the deuteron T_{20} and A_{yy} designed on wave functions are proportionate with earlier published. For the first time it is obtained polarization characteristics K_0 and K_{yy} for potential Argonne v18.

Key words: wave functions, approximation, deuteron, polarization, form factor.

Аппроксимация волновой функции и поляризационные характеристики дейтрона для потенциала Argonne v18

В.И. Жаба

*Ужгородский национальный университет
ул. Волошина, 54, 88000 Ужгород, Украина
e-mail: viktorzh@meta.ua*

Численно рассчитаны коэффициенты аналитических форм для волновой функции дейтрона в координатном представлении для потенциала Argonne v18. Полученные волновые функции не содержат лишних узлов. Рассчитанные параметры дейтрона хорошо согласовываются с экспериментальными и теоретическими данными. Рассчитанные по волновым функциям поляризационные характеристики дейтрона T_{20} и A_{yy} соразмерны с ранее опубликованными. Впервые получено поляризационные характеристики K_0 и K_{yy} для потенциала Argonne v18.

Ключевые слова: волновая функция, аппроксимация, дейтрон, поляризация, формфактор.