Міністерство освіти і науки України
Ужгородський національний університет

К. В. Маринець

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

з курсу "Диференціальні рівняння"

Частина II

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Ужгород—2017

УДК 517.9 (075.8)

ББК В161.6я73–1

Навчальний посібник є довідниковим посібником з основ теорії звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків та систем рівнянь першого порядку. Розглянуто основні типи диференціальних рівнянь n–го порядку зі змінними та сталими коефіцієнтами, рівняння, які до них зводяться, а також системи звичайних диференціальних рівнянь і методи їх інтегрування. Посібник містить задачі для самостійної та індивідуальної роботи студентів.

Рецензенти: канд. фіз.–мат. наук, доц. Глебена М. І.

канд. фіз.–мат. наук, доц. Погоріляк О. О.

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ "Ужгородський національний університет"від 23 лютого 2017 року, протокол № 3.

Рекомендовано до друку Редакційно–видавничою радою ДВНЗ "Ужгородський національний університет"від 21 лютого 2017 року, протокол № 1.

Розділ 1

Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків

1.1 Загальні поняття та означення

Рівняння
$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$
де x—незалежна змінна, y—шукана функція, а функція F визначена й неперервна в деякій області $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$, $n \geq 1$ та залежна від y^n, називають *звичайним диференціальним рівнянням* n*–го порядку.*

Диференціальне рівняння n–го порядку, *розв'язане відносно старшої похідної*, має вигляд
$$y^n = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \tag{1.2}$$
де функція f також неперервна в деякій області $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ зміни своїх аргументів.

Розв'язком рівняння (1.2) на інтервалі $I = (a, b)$ називають функцію $y(x)$, яка задовольняє такі умови:

- $y(x)$ неперервно диференційовна n разів на I;
- $(x, y(x), y', \dots, y^{(n-1)}) \in D$, $\forall x \in I$;
- $y(x)$ перетворює рівняння (1.2) на тотожність, тобто
$$y^n \equiv f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \forall x \in I.$$

Аналогічно дається означення розв'язку рівняння (1.1).

Задачею Коші, або *початковою задачею, для рівняння (1.2)* називають задачу відшукання розв'язку $y(x)$ рівняння (1.2), який задовольняє такі початкові умови:
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{1.3}$$
де $x_0 \in I, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — задані числа.

Теорема Пеано. *Якщо функція f неперервна в області D, то для будь–якої точки $(x, y(x), y', \dots, y^{(n-1)}) \in D$ існує розв'язок рівняння (1.2), визна-*

чений у деякому околі точки $x_0 \in I$, котрий задовольняє початкові умови (1.3).

Існування та єдиність розв'язку задачі Коші гарантує наступна теорема.

Теорема Коші–Пікара. *Якщо функція f неперервна в області D і задовольняє умову Ліпшиця по змінних $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, то для будь–якої точки $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$ існує єдиний розв'язок рівняння (1.2), визначений у деякому околі точки $x_0 \in I$, котрий задовольняє початкові умови (1.3).*

Умови теореми Коші–Пікара виконуються, зокрема, якщо функція f неперервна на D і має в околі точки $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ обмежені частинні похідні по $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$.

Нехай D — область, у кожній точці якої задача Коші для рівняння (1.2) має єдиний розв'язок. Функцію

$$y = \phi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{1.4}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — довільні сталі, називають *загальним розв'язком рівняння (1.2) в області D,* якщо:

- функція ϕ має неперервні частинні похідні по x до n–го порядку включно;
- система рівнянь

$$\begin{cases} y = \phi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y' = \phi'(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \qquad \cdots \\ y^{n-1} = \phi^{n-1}(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \end{cases}$$

  є розв'язною в області D відносно довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$ так, що

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1(x, y, y', \ldots, y^{n-1}), \\ C_2 = \psi_2(x, y, y', \ldots, y^{n-1}), \\ \qquad \cdots \\ C_n = \psi_n(x, y, y', \ldots, y^{n-1}); \end{cases} \tag{1.5}$$

- функція (1.4) є розв'язком рівняння (1.2) при всіх значеннях довільних сталих (1.5), коли точка $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ пробігає область D.

Якщо загальний розв'язок (1.4) рівняння (1.2) задано в неявному вигляді

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

то він називається *загальним інтегралом* цього рівняння.

Якщо функція (1.4), що задає загальних розв'язок рівняння (1.2), представлена у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = \phi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y = \psi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \end{cases} \tag{1.6}$$

то (1.6) називається *загальним розв'язком* рівняння (1.2) *у параметричній формі.*

Розв'язок $y = y(x)$ рівняння (1.2) називається *частинним*, якщо він одержується із загального при конкретному наборі довільних сталих $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

1.2 Способи зниження порядку диференціальних рівнянь. Інтегровні типи рівнянь n-го порядку

1.2.1 Рівняння, які не містять шуканої функції та кількох її перших похідних

Розглянемо диференціальне рівняння n–го порядку:

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right) = 0.$$

Для пониження його порядку на k одиниць введемо заміну змінних:

$$y^{(k)} = z(x), \tag{1.7}$$

$$y^{(k+1)} = z^{'},$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Тоді рівняння запишеться у вигляді:

$$F\left(x, z, z^{'}, ..., z^{(n-k)}\right) = 0. \tag{1.8}$$

Зінтегрувавши диференціальне рівняння (1.8), одержимо розв'язок

$$z(x) = \phi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}).$$

Підставивши останній у заміну (1.7) будемо мати:

$$y^{(k)} = \phi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}).$$

Розв'язок даного рівняння одержується шляхом його послідовного інтегрування k разів.

Приклад 1.1. Проінтегрувати диференціальне рівняння:

$$x^2 y^{'} = y^{''}.$$

Введемо заміну змінних:

$$y^{'} = z(x),$$
$$y^{''} = z^{'}.$$

Тоді рівняння перепишеться у вигляді:

$$x^2 z = z^{'}.$$

Розв'яжемо його:

$$\frac{dz}{dx} = x^2 z \Rightarrow \frac{dz}{z} = x^2 dx,$$
$$\ln|z| = \frac{x^3}{3} + \ln c_1.$$

Отже, загальним розв'язком перетвореного рівняння буде функція:

$$z(x) = c_1 e^{\frac{x^3}{3}}.$$

Повертаючись до заміни, одержимо:

$$y^{'} = c_1 e^{\frac{x^3}{3}}.$$

А тоді

$$y(x) = c_1 \int e^{\frac{x^3}{3}} dx + c_2$$

буде загальним розв'язком заданого диференціального рівняння.

1.2.2 Рівняння, яке не містить незалежної змінної

Нехай диференціальне рівняння має вигляд:

$$F\left(y, y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n)}\right) = 0. \tag{1.9}$$

Для пониження його порядку зробимо заміну змінних:

$$y^{'} = p(y),$$

$$y^{''} = \frac{dy^{'}}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p = p^{'} \cdot p,$$

$$y^{'''} = \frac{dy^{''}}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d(p^{'}p)}{dy} \cdot p = (p^{''} \cdot p + p^{'2})p$$

і т. д.

Підставивши ці похідні у рівняння (1.9), одержимо диференціальне рівняння $(n-1)$–го порядку відносно шуканої функції $p = p(y)$.

Приклад 1.2. Розв'язати рівняння:

$$y^{''} = 2yy^{'}.$$

Зробимо заміну змінних:

$$y^{'} = p(y),$$

$$y^{''} = \frac{dy^{'}}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p^{'}p.$$

Тоді рівняння набуде вигляду:

$$p^{'}p = 2yp$$

$$p^{'} = 2y \ \vee \ p = 0.$$

Тоді

$$p(y) = y^2 + c_1,$$

$$y^{'} = y^2 + c_1,$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + c_1,$$

$$\frac{dy}{y^2 + c_1} = dx,$$

$$\frac{1}{\sqrt{c_1}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{c_1}} = x + c_2$$

і

$$y^{'} = 0,$$

$$y(x) = c_3.$$

1.2.3 Однорідні рівняння відносно $y, y^{'}, ..., y^{(n)}$

Розглянемо рівняння вигляду:

$$F\left(x, y, y^{'}, ..., y^{(n)}\right) = 0,$$

де функція F є однорідною відносно $y, y^{'}, ..., y^{(n)}$.

Заміна змінних:

$$y^{'} = z(x)y(x),$$

$$y^{''} = z^{'}y + zy^{'} = z^{'}y + z \cdot zy = y(z^{'} + z^2)$$

і т.д. знижує порядок вихідного рівняння на 1.

Приклад 1.3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$yy^{''} = y^2 + 2xy^{'2}.$$

Оскільки задане рівняння є однорідним відносно y, y', y'', то введемо заміну змінних:

$$y^{'} = z(x)y(x) \Rightarrow z = \frac{y^{'}}{y},$$

$$y^{''} = y(z^{'} + z^2).$$

Одержимо:

$$y^2(z' + z^2) = z^2y^2 + 2xz^2y^2,$$

$$z' + z^2 = z^2 + 2xz^2,$$

$$z' = 2xz^2,$$

$$\frac{dz}{z^2} = 2xdx,$$

$$-\frac{1}{z} = x^2 + c_1,$$

$$z = -\frac{1}{x^2 + c_1}.$$

Повертаючись до заміни, маємо:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2 + c_1},$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2 + c_1},$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{\sqrt{c_1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{c_1}} + \ln c_2.$$

А тоді

$$y = c_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{c_1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{c_1}}}$$

— загальний розв'язок заданого рівняння.

1.2.4 Квазіоднорідні рівняння

Задано рівняння:

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0,$$

яке є квазіоднорідним.

Заміною:

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = z(t)e^{kt}, \end{cases}$$

квазіоднорідне рівняння зводиться до рівняння 1 чи 2 типу.

Приклад 1.4. Перевірити диференціальне рівняння на квазіоднорідність:

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y^2 = 0.$$

Покладемо:

$$x \to tx,$$

$$y \to t^k y,$$

$$y' \to t^{k-1} y',$$

$$y'' \to t^{k-2} y''.$$

Підставивши ці значення у диференціальне рівняння, одержимо:

$$t^{k-2}y'' + \frac{2t^{-1}}{x}t^{k-1}y' + t^{2k}y = 0,$$

звідки

$$t^{k-2} = t^{k-2} = t^{2k},$$

$$2k = k - 2 \Rightarrow k = -2.$$

Таким чином, диференціальне рівняння є квазіоднорідним. Тому для його розв'язання потрібно зробити заміну змінних:

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = z(t)e^{-2t}. \end{cases}$$

1.2.5 Рівняння з точними похідними

Якщо у диференціальному рівнянні

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0.$$

можна виділити похідну по x:

$$\frac{d}{dx}\left(\phi\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)\right) = 0,$$

тоді, проінтегрувавши його по x, понизимо порядок цього рівняння на 1–цю:

$$\phi\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) = c_1.$$

Приклад 1.5. Проінтегрувати диференціальне рівняння, виділивши повну похідну:

$$5\frac{y''}{y'} - 3\frac{y'}{y} = 0.$$

Виділимо повну похідну:

$$\frac{d}{dx}(5\ln y' - 3\ln y) = 0,$$

$$5\ln y' - 3\ln y = \ln c_1,$$

$$\frac{y'^5}{y^3} = c_1,$$

$$y'^5 = c_1 y^3,$$

$$y' = \sqrt[5]{c_1 y^3} \Rightarrow y' = \widetilde{c_1} y^{\frac{3}{5}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \widetilde{c_1} y^{\frac{3}{5}},$$

$$\frac{dy}{y^{\frac{3}{5}}} = \widetilde{c_1} dx,$$

$$-y^{-\frac{2}{5}} \cdot \frac{5}{2} = \widetilde{c_1} x + c_2,$$

$$y^{-\frac{2}{5}} = -\frac{2}{5}(\widetilde{c_1} x + c_2),$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{4}{25}(\widetilde{c_1} x + c_2)^2}}$$

— загальний розв'язок рівняння.

1.3 Інтегровні типи диференціальних рівнянь n–го порядку

1.3.1 Диференціальне рівняння вигляду $F\left(x, y^{(n)}\right) = 0$.

- Нехай рівняння можна розв'язати відносно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x).$$

Проінтегруємо його n разів:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + c_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x)dx\right] dx + c_1 x + c_2,$$

і т.д.

$$y(x) = g(x, c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

- Нехай диференціальне рівняння можна розв'язати відносно незалежної змінної x:

$$x = f(y^{(n)})$$

Введемо заміну змінних:

$$y^{(n)} = z.$$

Тоді рівняння перепишеться у вигляді:

$$x = f(z).$$

Продиференціюємо його:

$$dx = f'(z)dz.$$

З параметризації одержимо:

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = z \Rightarrow dy^{(n-1)} = zdx.$$

Тоді

$$dy^{(n-1)} = f^{'}(z) \cdot z dz,$$

$$y^{(n-1)} = \int z f^{'}(z) dz + c_1,$$

$$\frac{dy^{(n-2)}}{dx} = \int z f^{'}(z) dz + c_1,$$

$$dy^{(n-2)} = \left(\int z f^{'}(z) dz + c_1 \right) dx; \quad dx = f^{'}(z) dz,$$

$$dy^{(n-2)} = \left(\int z f^{'}(z) dz + c_1 \right) f^{'}(z) dz,$$

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int z f^{'}(z) dz + c_1 \right) f^{'}(z) dz + c_2,$$

і т.д. Загальним розв'язком заданого диференціального рівняння буде функція:

$$\begin{cases} x = f(z), \\ y = g(z, c_1, c_2, \dots, c_n). \end{cases}$$

- Нехай диференціальне рівняння можна представити параметрично:

$$\begin{cases} x = \varphi t \Rightarrow dx = \varphi^{'}(t) dt \\ y^{(n)} = \psi(t) \Rightarrow \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = \psi(t) \Rightarrow dy^{(n-1)} = \psi(t) dx \Rightarrow \end{cases}$$

Тоді одержимо:

$$\Rightarrow dy^{(n-1)} = \psi(t) \varphi^{'}(t) dt,$$

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t) \varphi^{'}(t) dt + c_1,$$

$$\frac{dy^{(n-2)}}{dx} = \int \psi(t) \varphi^{'}(t) dt + c_1,$$

$$dy^{(n-2)} = \left(\int \psi(t) \varphi^{'}(t) dt + c_1 \right) dx; \quad dx = \varphi^{'}(t) dt,$$

$$dy^{(n-2)} = \left(\int \psi(t) \varphi^{'}(t) dt + c_1 \right) \varphi^{'}(t) dt,$$

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int \psi(t) \varphi^{'}(t) dt + c_1 \right) \varphi^{'}(t) dt + c_2,$$

і т.д.

Розв'язком диференціального рівняння буде система функцій:

$$\begin{cases} x(z) = \varphi(t), \\ y(t) = g(t, c_1, c_2, ..., c_n). \end{cases}$$

Приклад 1.6. Проінтегрувати диференціальне рівняння:

$$y''^3 - 2y'' - x = 0.$$

Розв'яжемо рівняння відносно незалежної змінної x:

$$x = y''^3 - 2y''.$$

Введемо заміну змінних:

$$y'' = z,$$

$$x = z^3 - 2z \Rightarrow dx = (3z^2 - 2)dz,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = z \Rightarrow dx = \frac{dy'}{z},$$

$$\frac{dy'}{z} = (3z^2 - 2)dz,$$

$$dy' = (3z^2 - 2)dz,$$

$$y' = \frac{3}{4}z^4 - z^2 + c_1,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}z^4 - z^2 + c_1,$$

$$dy = \left(\frac{3}{4}z^4 - z^2 + c_1\right)dx, \quad dx = (3z^2 - 2)dz,$$

$$dy = \left(\frac{3}{4}z^4 - z^2 + c_1\right)(3z^2 - 2)dz,$$

$$dy = \left(\frac{9}{4}z^7 - \frac{3}{2}z^4 - 3z^4 - 2z^2 + 3c_1z^2 - 2c_1\right)dz,$$

$$dy = \left(\frac{9}{4}z^7 + \frac{3}{2}z^4 + (3c_1 - 2)z^2 - 2c_1\right)dz.$$

Тоді загальним розв'язком диференціального рівняння буде система функцій:

$$x(z) = z^3 - 2z, y(z) = \frac{9}{32}z^8 + \frac{3}{10}z^5 + \frac{3c_1-2}{3}z^3 - 2c_1 z + c_2.$$

— загальний розв'язок рівняння.

1.3.2 Диференціальне рівняння вигляду $F\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}\right) = 0.$

- Якщо рівняння можна розв'язати відносно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}\right).$$

Введемо заміну змінних:

$$y^{(n-1)} = z(x), y^{(n)} = z^{'}.$$

Тоді рівняння перепишеться у вигляді:

$$z^{'} = f(z),$$

$$\frac{dz}{dx} = f(z) \Rightarrow \frac{dz}{f(z)} = dx,$$

$$\int \frac{dz}{f(z)} = x + c_1,$$

$$y^{(n-1)} = \varphi(x_1 c_1)$$

— рівняння звелося до 1–го типу.

- Нехай диференціальне рівняння можна представити параметрично:

$$\begin{cases} y^{(n)} = \varphi(t) \Rightarrow \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = \varphi(t) \Rightarrow dx = \frac{dy^{(n-1)}}{\varphi(t)} \\ y^{(n-1)} = \psi(t) \Rightarrow dy^{(n-1)} = \psi^{'}(t)dt \end{cases}$$

Тоді одержимо:

$$dx = \frac{\psi^{'}(t)}{\varphi(t)}dt,$$

$$x = \int \frac{\psi^{'}(t)}{\varphi(t)} dt + c_1,$$

$$y^{(n-1)} = \frac{dy^{(n-2)}}{dx} = \psi(t),$$

$$dy^{(n-2)} = \psi(t)dx = \frac{\psi(t)\psi^{'}(t)}{\varphi(t)} dt,$$

$$y^{(n-2)} = \int \frac{\psi(t)\psi^{'}(t)}{\varphi(t)} dt + c_2,$$

і т.д.

Розв'язком заданого рівняння буде система функцій:

$$\begin{cases} x = \int \frac{\psi^{'}(t)}{\varphi(t)} dt + c_1, \\ y = g(t, c_2, c_3, ..., c_n). \end{cases}$$

Приклад 1.7. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y^{'''} = y^{''2}.$$

Введемо заміну:

$$y^{''} = z(x),$$

$$y^{'''} = z^{'}.$$

Тоді рівняння перепишеться у вигляді:

$$z^{'} = z^2,$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{z^2} = dx,$$

$$-\frac{1}{z} = x + c_1,$$

$$z(x) = -\frac{1}{x + c_1},$$

$$y^{''} = -\frac{1}{x + c_1},$$

$$y^{'} = -\ln|x + c_1| + c_2,$$

$$y(x) = -\int \ln|x+c_1|dx + c_2x + c_3 =$$

$$= -x\ln|x+c_1| + x - c_1\ln|x+c_1| + c_2x + c_3 =$$

$$= -(x+c_1)\ln|x+c_1| + (1+c_2)x + c_3$$

— загальний розв'язок рівняння.

1.3.3 Диференціальне рівняння вигляду $F\left(y^{(n)}, y^{(n-2)}\right) = 0$.

Нехай диференціальне рівняння можна розв'язати відносно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-2)}\right).$$

Введемо заміну змінних:

$$y^{(n-2)} = z(x),$$

$$y^{(n)} = z''.$$

Одержимо рівняння:

$$z'' = f(z) \qquad / \cdot 2z',$$

$$2z'z'' = 2f(z)z',$$

$$\frac{d(z'^2)}{dx} = f(z)\frac{dz}{dx} \qquad / \cdot dx,$$

$$dz'^2 = f(z)dz,$$

$$z'^2 = \int f(z)dz + c_1,$$

$$z' = \pm\sqrt{\int f(z)dz + c_1},$$

$$\frac{dz}{dx} = \pm\sqrt{\int f(z)dz + c_1},$$

$$\frac{dz}{\sqrt{\int f(z)dz + c_1}} = \pm dx \Rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{\int f(z)dz + c_1}} = \pm x + c_1,$$

Тоді повертаємося до заміни:

$$y^{(n-2)} = z(x) \Rightarrow \frac{dy^{(n-3)}}{dx} = z,$$

$$dy^{(n-3)} = zdx \Rightarrow dy^{(n-3)} = \pm\frac{zdz}{\sqrt{\int f(z)dz + c_1}},$$

$$y^{(n-3)} = \pm\int\frac{zdz}{\sqrt{\int f(z)dz + c_1}} + c_2,$$

і т.д.

Розв'язком заданого рівняння буде система функцій:

$$\begin{cases} x(z) = \pm\int\frac{dz}{\sqrt{\int f(z)dz+c_1}} - c_1, \\ y(z) = g(z, c_1, c_2, ..., c_n). \end{cases}$$

Приклад 1.8. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y^{'''} + y^{'} = 0,$$

Перепишемо рівняння у вигляді:

$$y^{'''} = -y^{'}$$

та введемо заміну змінних:

$$y^{'} = z(x), \quad y^{'''} = z^{'}.$$

Тоді рівняння набуде вигляду:

$$z^{''} = -z / \cdot 2z^{'},$$

$$2z^{'}z^{''} = -2zz^{'},$$

$$\frac{d(z^{'2})}{dx} = -\frac{d(z^2)}{dx},$$

$$z^{'2} = -z^2 + c_1,$$

$$z^{'} = \pm\sqrt{c_1 - z^2},$$

$$\frac{dz}{dx} = \pm\sqrt{c_1 - z^2},$$

$$\frac{dz}{\sqrt{c_1 - z^2}} = \pm dx \Rightarrow \arcsin\frac{z}{\sqrt{c_1}} = \pm x + c_2,$$

$$\frac{z}{\sqrt{c_1}} = \sin(c_2 \pm x),$$

$$z(x) = \sqrt{c_1}\sin(c_2 \pm x),$$

$$y^{'} = \sqrt{c_1}\sin(c_2 \pm x),$$

$$y = \pm\sqrt{c_1}\cos(c_2 \pm x) + c_3$$

— загальний розв'язок рівняння.

Завдання для індивідуальної роботи №4

Знайти розв'язок диференціального рівняння (задачі Коші).

Варіант 1

1. $(1+x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$;
2. $xy'' + y' - x^2 - 1 = 0$;
3. $yy'' + y'^2 = \frac{y^2}{x^2}$;
4. $y'y''' - 3y''^2 = 0; \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = 1$;
5. $y'' + y'^2 + 2y' = 0, \quad y(0) = \ln 2, \quad y'(0) = -1$.

Варіант 2

1. $xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}$;
2. $2y'' \ln y' = y'$;
3. $x^2 - \frac{1}{y''^2} = 1$;
4. $y''' - y''y' = y'', \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 4$;
5. $y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = -1$.

Варіант 3

1. $4y' + y'' = 4xy''$;
2. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$;
3. $y^{(3)}y' - 3y''^2 = 0$;
4. $xy''' + y'' - x - 1 = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = \frac{3}{4}, \quad y''(1) = 1$;
5. $y'' = 32\sin^3 y \cos y, \quad y(2) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(2) = 4$.

Варіант 4

1. $y'' - (1 + 2tg^2 x)y = 0$;
2. $2xy'y'' = y'^2 - 1$;
3. $xy^{(3)} - y''^2 = 0$;
4. $y''y''' + 1 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = 1$;
5. $y^3y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = \sqrt{2}$.

Варіант 5

1. $y^{''} = y^{'} + x \sin \frac{y^{'}}{x}$;
2. $2y^{''} \ln y^{'} = y^{'}$;
3. $2xy^{'}y^{''} = y^{'2} - 1$;
4. $y^{'''} - xy^{''2} = 0, \quad y(3) = 7\ln 2, \quad y^{'}(3) = \ln 2, \quad y^{''}(3) = -0.25$;
5. $y^{''}y^3 + 36 = 0, \quad y(0) = 3, \quad y^{'}(0) = 2$.

Варіант 6

1. $(x^{''} + 1)(y^{'2} - yy^{''}) = xyy^{'}$;
2. $2y^{'}(y^{''} + 2) = xy^{''2}$;
3. $y^{'}y^{''} - y^{'2} = \frac{y^2}{x^2}$;
4. $y^{'''} = 3yy^{'}, \quad y(0) = -2, \quad y^{'}(0) = 0, \quad y^{''}(0) = 4.5$;
5. $yy^{''} + y = y^{'2}, \quad y(1) = 1, \quad y^{'}(1) = \sqrt{3}$.

Варіант 7

1. $y^{''}tg(5x) = 5y^{'}$;
2. $2y^{'}(y^{''} + 2) = xy^{''2}$;
3. $3y^{'2} - 2yy^{''} = 4y^2$;
4. $x^2y^{'''} = y^{''2}, \quad y(1) = 2.5, \quad y^{'}(1) = 1, \quad y^{''}(3) = 0.5$;
5. $y^{''}(1 + 2\ln y^{'}) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y^{'}(0) = 1$.

Варіант 8

1. $xy^{''} = y^{'} \ln \frac{y^{'}}{x}$;
2. $y^{''}cth??? - y^{'} + \frac{1}{chx} = 0$;
3. $y^{''} = 2y^{'}y$;
4. $y^{'''2} + y^{'2} = y^{'4}, \quad y(0) = 0, \quad y^{'}(0) = 0, \quad y^{''}(0) = 1$;
5. $yy^{''} - 2xy^{'2} = 0, \quad y(\frac{1}{2}) = 2, \quad y^{'}(\frac{1}{2}) = \frac{8}{27}$.

Варіант 9

1. $x = y^{''2} + 1$;
2. $y^{''} + y^{'2} = e^{-y}$;
3. $y^{''} + \frac{2x}{x^2+1}y^{'} = 2x$;
4. $x^4y^{'''} + 2x^3y^{''} = 1, \quad y(1) = 0, \quad y^{'}(1) = 2.5, \quad y^{''}(1) = -2$;
5. $(x^2 + 1)y^{''} - 2xy^{'} = 0, \quad y(0) = 1, \quad y^{'}(0) = 3$.

Варіант 10

1. $y'' + \frac{2x}{x^2+1}y' = 2x;$
2. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2;$
3. $x^4y''' + 2x'y'' = 1;$
4. $(1+\sin x)y''' = y''\cos x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 2;$
5. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 4.$

Варіант 11

1. $(1-x^2)y'' + xy' = 2;$
2. $y(xy'' - y') + xy'^2 = 0;$
3. $(x^2+1)(y'^2 - yy'') = xyy';$
4. $y'y''' - y''^2 = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2, \quad y''(1) = 1;$
5. $3xy'^2y'' = y'^3 + \frac{x^4}{9}, \quad y(1) = \frac{2}{7}, \quad y'(1) = \frac{1}{3}.$

Варіант 12

1. $y''th??x - y' + \frac{1}{chx} = 0;$
2. $xyy'' - xy'^2 - 2yy' - y^2 = 0;$
3. $y''y''' = -1;$
4. $x^2y''' + y''^2 = 0, \quad y(1) = 2\ln 2, \quad y'(1) = \ln 2, \quad y''(1) = -0.5;$
5. $4y''y^3 = 16y^4 - 1, \quad y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Варіант 13

1. $yy'' - 3y'^2 = 8y^2;$
2. $x^3y'' - (y - xy')^2 = 0;$
3. $y'' - xy' - y = 1;$
4. $(x+1)y''' + y'' = x + 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1;$
5. $y'' = 2\sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 1.$

Варіант 14

1. $y''tgx - y'cscx = 0;$
2. $xyy'' + xy'^2 - 3yy' = 0;$
3. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2;$
4. $y'''y' - y''^2 - y'^3 = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad y'(\frac{\pi}{2}) = 1, \quad y''(\frac{\pi}{2}) = 1;$
5. $y'' = 2\sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 1.$

Варіант 15

1. $x^2y^{'''} = y^{''2}$;
2. $y^{''} - y^{'2} = 0$;
3. $xyy^{''} - xy^{'2} = yy^{'}$;
4. $x^3y^{'''} + x^2y^{''} = \sqrt{x}, \quad y(1) = -9, \quad y^{'}(1) = 2, \quad y^{''}(1) = -1$;
5. $y^{''} = 2yy^{'}, \quad y(0) = 0, \quad y^{'}(0) = 1$.

Варіант 16

1. $x^2y^{''} = y^{'2}$;
2. $yy^{'''} = y^{'}y^{''}$;
3. $(x^2+1)(y^{'2} - yy^{'}) = xyy^{'}$;
4. $yy^{'''} = y^{'}(2 - y^{''}), \quad y(0) = 1, \quad y^{'}(0) = 2, \quad y^{''}(0) = 2$;
5. $y^{''}ctgx - y^{'} - \frac{1}{\sin^3 x} = 0, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 0, \quad y^{'}(\frac{\pi}{4}) = 0$.

Варіант 17

1. $(1+x^2)y^{''} + 2xy^{'} = 12x^3$;
2. $xy^{''} + y^{'} - x^2 - 1 = 0$;
3. $yy^{''} + y^{'2} = \frac{y^2}{x^2}$;
4. $y^{'}y^{'''} - 3y^{''2} = 0, \quad y(1) = 2, \quad y^{'}(1) = 1, \quad y^{''}(1) = 1$;
5. $y^{''} + y^{'2} + 2y^{'} = 0, \quad y(0) = \ln 2, \quad y^{'}(0) = -1$.

Варіант 18

1. $xy^{''} = y^{'} + x\sin\frac{y^{'}}{x}$;
2. $2y^{''}\ln y^{'} = y^{'}$;
3. $x^2 - \frac{1}{y^{''2}} = 1$;
4. $y^{'''} - y^{''}y^{'} = y^{''}, \quad y(0) = 2, \quad y^{'}(0) = 2, \quad y^{''}(0) = 4$;
5. $y^{''} + 2\sin y\cos^3 y = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad y^{'}(\pi) = -1$.

Варіант 19

1. $4y^{'} + y^{''} = 4xy^{''}$;
2. $y^{''} + y^{'2} = 2e^{-y}$;
3. $y^{(3)}y^{'} - 3y^{''2} = 0$;
4. $xy^{'''} + y^{''} - x - 1 = 0, \quad y(1) = 0, \quad y^{'}(1) = \frac{3}{4}, \quad y^{''}(1) = 1$;
5. $y^{''} = 32\sin^3 y\cos y, \quad y(2) = \frac{\pi}{2}, \quad y^{'}(2) = 4$.

Варіант 20

1. $y^{''} - (1 + 2tg^2x)y = 0;$
2. $2xy^{'}y^{''} = y^{'2} - 1;$
3. $xy^{(3)} - y^{''2} = 0;$
4. $y^{''}y^{'''} + 1 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y^{'}(1) = 1, \quad y^{''}(1) = 1;$
5. $y^3y^{''} = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y^{'}(0) = \sqrt{2}.$

Варіант 21

1. $y^{''} = xy^{'} + y + 1;$
2. $1 + y^{'2} = 2yy^{''};$
3. $2xy^{'}y^{''} = y^{'2} - 1;$
4. $y^{'''} - xy^{''2} = 0, \quad y(3) = 7\ln 2, \quad y^{'}(3) = \ln 2, \quad y^{''}(3) = -0.25;$
5. $y^{''}y^3 + 36 = 0, \quad y(0) = 3, \quad y^{'}(0) = 2.$

Варіант 22

1. $(x^2 + 1)(y^{'2} - yy^{''} = xyy^{'};$
2. $2y^{'}(y^{''} + 2) = xy^{''2};$
3. $yy^{''} - y^{'2} = \frac{y^2}{x^2};$
4. $y^{'''} = 3yy^{'}, \quad y(0) = -2, \quad y^{'}(0) = 0, \quad y^{''}(0) = 4.5;$
5. $yy^{''} + y = y^{'2}, \quad y(1) = 1, \quad y^{'}(1) = \sqrt{3}.$

Варіант 23

1. $y^{''}tg(5x) = 5y^{'};$
2. $3y^{'2} - 2yy^{''} = 4y^2;$
3. $x^3y^{'''} + x^2y^{''} = \sqrt{x};$
4. $x^2y^{'''} = y^{''2}, \quad y(1) = 2.5, \quad y^{'}(1) = 1, \quad y^{''}(3) = 0.5;$
5. $y^{''}(1 + 2\ln y^{'}) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y^{'}(0) = 1.$

Варіант 24

1. $xy^{''} = y^{'}\ln\frac{y^{'}}{x};$
2. $y^{''}cthx - y^{'} + \frac{1}{chx} = 0;$
3. $y^{''} = 2y^{'}y;$
4. $y^{'''2} + y^{'2} = y^{'4}, \quad y(0) = 0, \quad y^{'}(0) = 0, \quad y^{''}(0) = 1;$
5. $yy^{''} - 2xy^{'2} = 0, \quad y(\frac{1}{2}) = 2, \quad y^{'}(\frac{1}{2}) = \frac{8}{27}.$

Варіант 25

1. $x = y^{''2} + 1;$
2. $y^{''} + y^{'2} = e^{-y};$
3. $y^{''} + \frac{2x}{x^2+1} y^{'} = 2x;$
4. $x^4 y^{'''} + 2x^3 y^{''} = 1, \quad y(1) = 0, \quad y^{'}(1) = 2.5, \quad y^{''}(1) = -2;$
5. $(x^2+1) y^{''} - 2xy^{'} = 0, \quad y(0) = 1, \quad y^{'}(0) = 3.$

Розділ 2

Лінійні диференціальні рівняння n–го порядку зі сталими коефіцієнтами

2.1 Лінійні однорідні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера

Означення 2.1. Рівняння вигляду:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y^{'} + a_n y = 0, \tag{2.1}$$

де $a_i = const$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$,
називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами.*

Розв'язок диференціального рівняння (2.1) будемо шукати у вигляді:

$$y(x) = e^{\lambda x}. \tag{2.2}$$

Підставивши функцію (2.2) у диференціальне рівняння (2.1) одержимо:

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + a_2 \lambda^{n-2} e^{\lambda x} + ... + a_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} = 0.$$

Оскільки $e^{\lambda x} \neq 0$, $x \in I$, то отримаємо алгебраїчне рівняння степеня n вигляду:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \tag{2.3}$$

Означення 2.2. Алгебраїчне рівняння (2.3) називається *характеристичним рівнянням*, що відповідає лінійному однорідному диференціальному рівнянню (2.1).

Функція

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

є розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння (2.1) *тоді і тільки тоді, коли значення* λ *є розв'язком характеристичного рівняння* (2.1).

Загальним розв'язком диференціального рівняння (2.1) є функція,

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

де $c_i = const$, $i = \overline{1,n}$, а функції $y_i(x), i = \overline{1,n}$ утворюють фундаментальну систему частинних розв'язків рівняння (2.1).

Розглянемо можливі випадки розв'язків λ_i характеристичного рівняння (2.1).

I. Нехай λ дійсні і різні.

Тоді кожному значенню λ_i відповідає частинний розв'язок:

$$y_i(x) = e^{\lambda_i x}, i = \overline{1,n},$$

а загальний розв'язок рівняння (2.1) запишеться у вигляді:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i x}$$

.

II. Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_s = \lambda$, $2 \leq s \leq n$.

- Якщо $\lambda = 0$, то s-кратним кореням характеристичного рівняння (2.3) відповідає система з s лінійно незалежних частинних розв'язків вигляду:

$$y_1(x) = 1,$$

$$y_2(x) = x,$$

$$y_3(x) = x^2,$$

$$\ldots$$

$$y_s(x) = x^{s-1}.$$

- Якщо $\lambda = \mu \neq 0$, тоді цим власним значенням відповідатиме система лінійно незалежних частинних розв'язків:

$$y_1(x) = e^{\mu x},$$

$$y_2(x) = xe^{\mu x},$$

$$y_3(x) = x^2 e^{\mu x},$$

$$\dots$$

$$y_s(x) = x^s e^{\mu x}.$$

III. Нехай $\lambda = \alpha \pm i\beta$.

Оскільки коефіцієнти рівняння (2.1) є дійсними, то у цьому випадку матимемо комплексно спряжені корені характеристичного рівняння:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

Тоді цим розв'язкам рівняння (2.3) відповідатимуть два лінійно незалежних частинних розв'язки диференціального рівняння (2.1):

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Приклад 2.1. Побудувати загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y^{''} - y^{'} - 2y = 0.$$

Характеристичне рівняння матиме вигляд:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Тоді власні значення та власні функції будуть такими:

$$\lambda_1 = 2; \lambda_2 = -1$$

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = e^{-x},$$

а загальний розв'язок запишеться наступним чином:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}.$$

Приклад 2.2. Побудувати загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y^{''} + 4y = 0.$$

Запишемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 4 = 0,$$

розв'язками якого будуть власні значення:

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

Власні функції, які відповідають знайденим власним значенням, є наступними: $y_1(x) = \sin 2x, y_2(x) = \cos 2x$, а тоді загальним розв'язком є:

$$y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x.$$

Приклад 2.3. Побудувати загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y^{'''} - 3y^{''} + 3y^{'} - y = 0.$$

Характеристичне рівняння буде таким:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0,$$

$$(\lambda - 1)^3 = 0.$$

Його розв'язками є власні значення:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Фундаментальна система частинних розв'язків матиме вигляд:

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = xe^x, \quad y_3(x) = x^2 e^x,$$

а загальний розв'язок запишеться наступним чином:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x.$$

2.2 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод варіації сталих

Означення 2.3. Диференціальне рівняння вигляду:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y^{'} + a_n y = f(x), \tag{2.4}$$

де $a_i = const$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, $f \in C(I)$ називається *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами.*

Розв'язок диференціального рівняння (2.4) будемо шукати за допомогою **методу варіації сталих**, який складається з трьох етапів:

I. Розглядаємо відповідне однорідне диференціальне рівняння:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y^{'} + a_n y = 0, \tag{2.5}$$

розв'язок якого будується за допомогою методу Ейлера.

Нехай загальним розв'язком рівняння (2.5) є функція:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x). \tag{2.6}$$

II. Покладемо у (2.6) $c_1 = c_1(x), c_2 = c_2(x), \ldots, c_n = c_n(x)$.

Тоді розв'язок (2.6) запишеться у вигляді:

$$y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) + ... + c_n y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x). \tag{2.7}$$

Продиференціюємо функцію (2.7) n разів:

$$y' = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i(x)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i'(x),$$

$$y'' = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i'(x)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i''(x),$$

$$\cdots$$

$$y^{(n-1)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-2)}(x)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n-1)}(x),$$

$$y^{(n)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x)}_{=f(x)} + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n)}(x).$$

На основі знайдених значень похідних функції $y(x)$ вигляду (2.7) складаємо систему диференціальних рівнянь для відшукання невідомих $c_i(x)$, $i = \overline{1,n}$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i(x) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i'(x) = 0 \\ \ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-2)}(x) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \tag{2.8}$$

III. Розв'язавши систему (2.8), підставляємо знайдені значення функцій $c_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ у розв'язок (2.7) і одержуємо загальний розв'язок диференціального рівняння (2.4).

Приклад 2.4. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

Запишемо відповідне однорідне диференціальне рівняння та проінтегруємо його:

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = 1,$$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x \tag{2.9}$$

— загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння.

Припустимо, що $c_1 = c_1(x), c_2 = c_2(x)$. Тоді функція (2.9) набуде вигляду:

$$y(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x. \tag{2.10}$$

Продиференціюємо одержаний розв'язок 2 рази:

$$y^{'} = (c_1 + c_2)e^x + c_2xe^x + \underbrace{c_1^{'}e^x + c_2^{'}xe^x}_{=0},$$

$$y^{''} = (c_1 + 2c_2)e^x + c_2xe^x + (c_1' + c_2')e^x + c_2'xe^x,$$

$$\begin{cases} c_1^{'}e^x + c_2^{'}xe^x = 0, \\ c_1^{'}e^x + c_2^{'}(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1^{'} + xc_2^{'} = 0, \\ c_1^{'} + c_2^{'}(1 + x) = \frac{1}{x}, \end{cases}$$

$$c_2^{'} = \frac{1}{x} \Rightarrow c_2(x) = \ln|x| + \widetilde{c_2},$$

$$c_1^{'} = -1 \Rightarrow c_1(x) = -x + \widetilde{c_1}.$$

Підставляючи знайдені значення функцій $c_1(x)$ та $c_2(x)$ у (2.10), одержимо загальний розв'язок рівняння:

$$y(x) = (\widetilde{c_1} - x)e^x + (\ln|x| + \widetilde{c_2})xe^x.$$

2.3 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n–го порядку зі сталими коефіцієнтами (2.4).

Означення 2.4. Функція $f(x)$ називається *квазіполіномом*, якщо вона має вигляд:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_{m_1}(x)cos\beta x + Q_{m_2}(x)sin\beta x\right), \tag{2.11}$$

де $P_{m_1}(x)$ та $Q_{m_2}(x)$ — задані поліноми степеня m_1 та m_2 відповідно.

При цьому значення $\gamma = \alpha + i\beta$ називатимемо *контрольним числом.*

Якщо функція $f(x)$ у правій частині диференціального рівняння (2.4) є квазіполіномом, тоді розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді суми загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (2.1) та деякого частинного розв'язку неоднорідного рівняння (2.4):

$$y(x) = y_{\text{з. о.}}(x) + y_{\text{ч. н.}}(x)$$

Як зазначалось вище, загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами будуємо за допомогою методу Ейлера.

Частинний же розв'язок будемо будувати за допомогою **методу невизначених коефіцієнтів**.

Для функції $f(x)$ у правій частині диференціального рівняння (2.4) можливі наступні випадки:

I. Нехай

$$f(x) = P_{m_1}(x)e^{\alpha x},$$

де контрольне число $\gamma = \alpha$.

1. *Нерезонансний випадок*: якщо $\lambda = \gamma$ не є серед коренів характеристичного рівняння.

   Тоді:

   $$y_{\text{ч.н.}} = \overline{R_{m_1}}(x)e^{\gamma x},$$

   де $\overline{R_{m_1}}(x)$ — многочлен степеня m_1 з невизначеними коефіцієнтами.

2. *Резонансний випадок*: якщо $\lambda = \gamma$ є серед коренів характеристичного рівняння і кратність цього кореня s.

   Тоді:

   $$y_{\text{ч.н.}} = \overline{R_{m_1}}(x)x^s e^{\gamma x},$$

   де $\overline{R_{m_1}}(x)$ — многочлен степеня m_1 з невизначеними коефіцієнтами.

II. Нехай

$$f(x) = P_{m_1}(x)\cos\beta x$$

або

$$f(x) = Q_{m_2}(x)\sin\beta x,$$

або
$$f(x) = P_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}(x)\sin\beta x,$$
де контрольне число $\gamma = \pm i\beta$.

1. *Нерезонансний випадок:* $\lambda = \pm i\beta$ не є серед коренів характеристичного рівняння.

   Тоді:
   $$y_{\text{ч.н.}} = \overline{R_m}(x)\cos\beta x + \overline{T_m}(x)\sin\beta x,$$
   де – $m = max(m_1, m_2)$, $\overline{R_m}(x), \overline{T_m}(x)$ — поліноми степеня m з невизначеними коефіцієнтами.

2. *Резонансний випадок:* $\lambda = \pm i\beta$ є серед коренів характеристичного рівняння і кратність цього кореня s.

   Тоді:
   $$y_{\text{ч.н.}} = x^s\left(\overline{R_m}(x)\cos\beta x + \overline{T_m}(x)\sin\beta x\right),$$
   де – $m = max(m_1, m_2)$, $\overline{R_m}(x), \overline{T_m}(x)$ — поліноми степеня m з невизначеними коефіцієнтами.

III. Нехай
$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}(x)\sin\beta x\right),$$
де контрольне число $\gamma = \alpha \pm i\beta$.

1. *Нерезонансний випадок:* $\lambda = \alpha \pm i\beta$ не є серед коренів характеристичного рівняння.

   Тоді:
   $$y_{\text{ч.н.}} = e^{\alpha x}\left(\overline{R_m}(x)\cos\beta x + \overline{T_m}(x)\sin\beta x\right),$$
   де — $m = max(m_1, m_2)$, $\overline{R_m}(x), \overline{T_m}(x)$ — поліноми степеня m з невизначеними коефіцієнтами.

2. *Резонансний випадок:* $\lambda = \alpha \pm i\beta$ є серед коренів характеристичного рівняння і кратність цього кореня s.

   Тоді:
   $$y_{\text{ч.н.}} = e^{\alpha x}\cdot x^s\left(\overline{R_m}(x)\cos\beta x + \overline{T_m}(x)\sin\beta x\right)$$

Зауваження 2.1. Відмітимо, що значення невизначених коефіцієнтів поліномів $\overline{R_m}(x)$ та $\overline{T_m}(x)$ обчислюються підстановною відповідних частинних розв'язків у неоднорідне диференціальне рівняння.

Приклад 2.5. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y^{''} - 3y^{'} + 2y = \sin x.$$

Оскільки функція $f(x) = sinx$ є квазіполіномом, то розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$y(x) = y_{\text{з.о.}}(x) + y_{\text{ч.н.}}(x).$$

Розв'яжемо спочатку відповідне однорідне рівняння:

$$y^{''} - 3y^{'} + 2y = 0.$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2,$$

$$y_{\text{з.о.}}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Побудуємо тепер частинний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$f(x) = \sin x, \gamma = \pm i, s = 0, m = 0,$$

$$y_{\text{ч.н.}}(x) = A \sin x + B \cos x.$$

Для відшукання значень коефіцієнтів A, B підставимо функцію $y_{\text{ч.н.}}(x)$ у задане лінійне неоднорідне диференціальне рівняння:

$$y^{'}_{\text{ч.н.}}(x) = A \cos x - B \sin x,$$

$$y^{''}_{\text{ч.н.}}(x) = -A \sin x - B \cos x,$$

$$-A \sin x - B \cos x - 3(A \cos x - B \sin x) + 2(A \sin x + B \cos x) = \sin x$$

та прирівняємо коефіцієнти при функціях $sinx$ та $cosx$:

$$\sin x : -A + 3B + 2A = 1 \Rightarrow A + 3B = 1$$

$$\cos x : -B - 3A + 2B = 0 \Rightarrow -3A + B = 0$$

$$B = \frac{1}{5}, A = \frac{2}{5}.$$

Тоді

$$y_{\text{ч.н.}}(x) = \frac{2}{5}\sin x + \frac{1}{5}\cos x,$$

а

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{2}{5}\sin x + \frac{1}{5}\cos x$$

— загальний розв'язок диференціального рівняння.

Приклад 2.6. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y^{''} - 5y^{'} + 4y = 4x^2 e^{2x}.$$

Розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$y(x) = y_{\text{з.о.}}(x) + y_{\text{ч.н.}}(x).$$

Проінтегруємо відповідне однорідне диференціальне рівняння:

$$y^{''} - 5y^{'} + 4y = 0,$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4,$$

$$y_{\text{з.о.}}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x}.$$

Побудуємо тепер частинний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$f(x) = 4x^2 e^{2x}, \gamma = 2, m = 2, s = 0,$$

$$y_{\text{ч.н.}}(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x},$$

де A, B, C — невизначені коефіцієнти.

Підставимо тепер функцію $y_{\text{ч.н.}}(x)$ у лінійне неоднорідне диференціальне рівняння:

$$y^{'}_{\text{ч.н.}}(x) = (2Ax + B)e^{2x} + 2e^{2x}(Ax^2 + Bx + C),$$

$$y^{''}_{\text{ч.н.}}(x) = 2Ae^{2x} + 2(2Ax + B)e^{2x} + 4e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + 2e^{2x}(2Ax + B),$$

$$(2A + 4Ax + 2B + 4Ax^2 + 4Bx + 4C + 4Ax + 2B)e^{2x} -$$

$$-5(2Ax + B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C)e^{2x} + 4(Ax^2 + Bx + C)e^{2x} = 4x^2e^{2x}.$$

Прирівняємо коефіцієнти при x^2, x та x^0:

$$x^2 : 4A - 10A + 4A = 4 \Rightarrow A = -2,$$

$$x|4A + 4B + 4A - 10A - 10B + 4B = 0 \Rightarrow -2B - 2A = 0 \Rightarrow B = 2,$$

$$x^0|2A + 2B + 4C + 2B - 5B - 10C + 4C = 0 \Rightarrow 2A - B - 2C = 0 \Rightarrow C = -3.$$

Тоді

$$y_{\text{ч.н.}}(x) = (-2x^2 + 2x - 3)e^{2x},$$

а

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{4x} - (2x^2 - 2x + 3)e^{2x}$$

— загальний розв'язок рівняння.

Приклад 2.7. знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x.$$

Розв'язок шукаємо у вигляді:

$$y(x) = y_{\text{з.о.}}(x) + y_{\text{ч.н.}}(x).$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0,$$

$$\lambda_1 = 2 + 2i, \lambda_2 = 2 - 2i,$$

$$y_{\text{з.о.}}(x) = e^{2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

— загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння.

Для кожної з функцій у правій частині неоднорідного рівняння побудуємо частинний розв'язок згідно методу невизначених коефіцієнтів:

$$f_1(x) = e^{2x}, \gamma_1 = 2, m_1 = 0, s_1 = 0, y_{1\text{ч.н.}}(x) = Ae^{2x};$$

$$f_2(x) = \sin 2x, \gamma_2 = \pm 2i, m_1 = 0, s_2 = 0, y_{2\text{ч.н.}}(x) = B \sin 2x + C \cos 2x.$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти, які фігурують у кожному з частинних розв'язків:

$$y'_{1\text{ч.н.}}(x) = 2Ae^{2x}, y''_{1\text{ч.н.}}(x) = 4Ae^{2x},$$

$$4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} + 8Ae^{2x} = e^{2x} = e^{2x},$$

$$4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4},$$

$$y_{1\text{ч.н.}}(x) = \frac{1}{4}e^{2x};$$

$$y'_{2\text{ч.н.}}(x) = 2B\cos 2x - 2C\sin 2x,$$

$$y''_{2\text{ч.н.}}(x) = -4B\sin 2x - 4C\cos 2x,$$

$$-4B\sin 2x - 4C\cos 2x - 4(2B\cos 2x - 2C\sin 2x) + 8B\sin 2x + 8C\cos 2x = \sin 2x,$$

$$\sin 2x : -4B + 8C + 8B = 1,$$

$$\cos 2x : -4C - 8B + 8C = 0,$$

$$B = -\frac{1}{5}, C = \frac{1}{10},$$

$$y_{2\text{ч.н.}}(x) = -\frac{1}{5}\sin 2x + \frac{1}{10}\cos 2x.$$

А тоді загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння буде таким:

$$y(x) = e^{2x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{5}\sin 2x + \frac{1}{10}\cos 2x.$$

2.4 Диференціальні рівняння, що зводяться до лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

2.4.1 Рівняння Ейлера

Означення 2.5. Лінійне диференціальне рівняння вигляду:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \qquad (2.12)$$

де $x \in \mathbb{R}\ \{0\}$, a_i — дійсні сталі, $i = \overline{1, n}$, називається *рівнянням Ейлера.*

Рівняння (2.12) називається *однорідним*, якщо $f(x) \equiv 0$ та *неоднорідним* при $f(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}\ \{0\}$.

Нехай для визначеності $x \in (0, +\infty)$. Зробимо в рівнянні (2.12) заміну незалежної змінної згідно з формулою:

$$x = e^t, t = \ln x$$

(якщо $x \in (-\infty, 0)$, то заміна $x = -e^t$). Тоді

$$\frac{dx}{dt} = e^t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t},$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y_t' e^{-t},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(y_t' e^{-t})}{dt}\frac{dt}{dx} = \left(y_t'' e^{-t} - y_t' e^{-t}\right) e^{-t} = \left(y_t'' - y_t'\right) e^{-2t},$$

$$\dots$$

$$y^{(n)} = \left(y_t^{(n)} + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)! y_t'\right) e^{-nt}.$$

Підставляючи знайдені похідні в рівняння (2.12), одержимо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y_t^{(n)} + b_1 y_t^{(n-1)} + ... + b_{n-1} y_t^{'} + b_n y = f(e^t),$$

де $b_i = const$, $i = \overline{1, n}$, розв'язок якого будуємо за методою варіації довільних сталих або методом невизначених коефіцієнтів.

Приклад 2.8. Розв'язати диференціальне рівняння, попередньо звівши його до рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$x^2 y^{''} - 4xy^{'} + 6y = 0. \tag{2.13}$$

Задане рівняння є однорідним рівнянням Ейлера, визначеним на інтервалі $(0, +\infty)$.

Введемо заміну змінних:

$$x = e^t, t = \ln x,$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t},$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y_t' e^{-t},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(y_t' e^{-t})}{dt}\frac{dt}{dx} = \left(y_t'' e^{-t} - y_t' e^{-t}\right) e^{-t} = \left(y_t'' - y_t'\right) e^{-2t}.$$

Підставляючи одержані значення похідних шуканої функції y та незалежної змінної x у рівняння (2.13), одержимо:

$$y_t^{''} - 5y_t^{'} + 6y = 0.$$

Розв'язок останнього будуємо методом Ейлера:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3,$$

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}, x = e^t,$$

а тому загальний розв'язок диференціального рівняння (2.13) є таким:

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3.$$

Приклад 2.9. Розв'язати рівняння Ейлера, попередньо звівши його до рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$x^2 y^{''} - xy^{'} + y = 8x^3, \tag{2.14}$$

$x \in (0, +\infty)$.

Введемо заміну змінних:

$$x = e^t, t = \ln x,$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t},$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y_t' e^{-t},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(y_t' e^{-t})}{dt}\frac{dt}{dx} = \left(y_t'' e^{-t} - y_t' e^{-t}\right) e^{-t} = \left(y_t'' - y_t'\right) e^{-2t}.$$

Підставляючи одержані значення похідних шуканої функції y та незалежної змінної x у рівняння (2.14), одержимо:

$$y_t^{''} - 2y_t^{'} + y = 8e^{3t}.$$

Розв'язок останнього шукатимемо у вигляді:

$$y(t) = y_{\text{з.о.}}(t) + y_{\text{ч.н.}}(t).$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = 1,$$

$$y_{\text{з.о.}}(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$$

— загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння будуємо методом невизначених коефіцієнтів:

$$f(t) = 8e^{3t}, \gamma = 3, s = 0, m = 0,$$

$$y_{\text{ч.н.}}(t) = Ae^{3t},$$

де A — поки–що невизначений коефіцієнт.

Для його відшукання підставимо $y_{\text{ч.н.}}(t)$ у неоднорідне рівняння:

$$y'_{\text{ч.н.}} = 3Ae^{3t}, y''_{\text{ч.н.}} = 9Ae^{3t},$$

$$9Ae^{3t} - 6Ae^{3t} + Ae^{3t} = 8e^{3t},$$

$$2Ae^{3t} = 8e^{3t},$$

$$A = 4,$$

$$y_{\text{ч.н.}}(t) = 4e^{3t}.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами є таким:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + 4e^{3t},$$

а тоді розв'язком рівняння Ейлера є функція:

$$y(x) = c_1 x + c_2 x \ln x + 4x^3.$$

2.4.2 Рівняння Лежандра

Означення 2.6. Диференціальне рівняння вигляду

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(ax+b)y^{'} + a_n y = f(x), \quad (2.15)$$

де $a_i = const$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, називається *рівнянням Лежандра.*

Для зведення рівняння (2.15) до рівняння зі сталими коефіцієнтами введемо заміну змінних:

$$t = \ln(ax+b), ax+b = e^t,$$

$$x = \frac{e^t}{a} - \frac{b}{a}, \frac{dx}{dt} = \frac{e^t}{a},$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = ae^{-t}y'_t,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(ae^{-t}y'_t)}{dt}\frac{dt}{dx} = ae^{-t}(-ae^{-t}y'_t + ae^{-t}y''_t) = a^2e^{-2t}(y''_t - y'_t),$$

$$\cdots$$

$$y^{(n)} = a^n \left(y_t^{(n)} + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)!y'_t\right) e^{-nt}.$$

Підставляючи знайдені похідні в рівняння (2.15), одержимо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y_t^{(n)} + b_1 y_t^{(n-1)} + ... + b_{n-1}y_t^{'} + b_n y = f\left(frace^t a - \frac{b}{a}\right),$$

де $b_i = const$, $i = \overline{1,n}$, розв'язок якого будуємо за методою варіації довільних сталих або методом невизначених коефіцієнтів.

Приклад 2.10. Розв'язати рівняння Лежандра:

$$(2x+3)^3 y^{'''} + 3(2x+3)y^{'} - 6y = 0. \quad (2.16)$$

Для зведення рівняння (2.16) до рівняння зі сталими коефіцієнтами введемо заміну змінних:

$$t = \ln(2x+3), 2x+3 = e^t,$$

$$x = \frac{e^t}{2} - \frac{3}{2}, \frac{dx}{dt} = \frac{e^t}{2},$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 2e^{-t}y'_t,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(2e^{-t}y'_t)}{dt}\frac{dt}{dx} = 2e^{-t}(-2e^{-t}y'_t + 2e^{-t}y''_t) = 4e^{-2t}(y''_t - y'_t),$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d(4e^{-2t}(y''_t - y'_t))}{dt}\frac{dt}{dx} = 8e^{-3t}(y'''_t - 3y''_t + 2y'_t),$$

$$8y'''_t - 24y''_t + 22y'_t - 6y = 0,$$

$$4y'''_t - 12y''_t + 11y'_t - 3y = 0$$

— лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Розв'яжемо його методом Ейлера:

$$4\lambda^3 - 12\lambda^2 + 11\lambda - 3 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -5,$$

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{5t} + c_3e^{-5t}, e^t = 2x + 3,$$

а тоді загальним розв'язком рівняння (2.16) буде функція:

$$y(x) = c_1(2x+3) + c_2(2x+3)^5 + \frac{c_3}{(2x+3)^5}.$$

Приклад 2.11. Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння Лежандра:

$$(x-2)^2y^{''} - 3(x-2)y^{'} + 4y = x. \tag{2.17}$$

Для зведення рівняння (2.17) до рівняння зі сталими коефіцієнтами введемо заміну змінних:

$$t = \ln(x-2), x - 2 = e^t,$$

$$x = e^t + 2, \frac{dx}{dt} = e^t,$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}y'_t,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(e^{-t}y'_t)}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}(-e^{-t}y'_t + e^{-t}y''_t) = e^{-2t}(y''_t - y'_t).$$

Після підстановки значень похідних шуканої функції у (2.17), одержимо диференціальне рівняння вигляду:

$$y^{''}-4y^{'}+4y=e^{t}+2,$$

яке у свою чергу є лінійним неоднорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Розв'язок останнього шукаємо у вигляді:

$$y(t)=y_{\text{з.о.}}(t)+y_{\text{ч.н.}}(t).$$

Тоді

$$\lambda^2-4\lambda+4=0,$$

$$(\lambda-2)^2=0,$$

$$\lambda_{1,2}=2,$$

$$y_{\text{з.о.}}(t)=c_1e^{2t}+c_2te^{2t}$$

— загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$f_1(t)=e^{t},\gamma_1=1,s_1=0,m_1=0,$$

$$f_2(t)=2,\gamma_2=0,s_2=0,m_2=0.$$

$$y_{1,\text{ч.н.}}(t)=Ae^{t},$$

$$y_{2,\text{ч.н.}}(t)=B,$$

де A і B — деякі поки–що невідомі невизначені коефіцієнти.

Знайдемо їх:

$$y^{'}_{1,\text{ч.н.}}=Ae^{t},$$

$$y^{''}_{1,\text{ч.н.}}=Ae^{t},$$

$$Ae^{t}-4Ae^{t}+4Ae^{t}=e^{t},$$

$$A=1,$$

$$y_{1,\text{ч.н.}}(t)=e^{t};$$

$$y^{'}_{2,\text{ч.н.}}=y^{''}_{2,\text{ч.н.}}=0$$

$$4B=2,$$

$$B = \frac{1}{2},$$

$$y_{2,\text{ч.н.}}(t) = \frac{1}{2}.$$

Тоді загальний розв'язком неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами буде функція

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + e^t + \frac{1}{2},$$

а рівняння Лежандра —

$$y(x) = c_1 (x-2)^2 + c_2 (x-2)^2 \ln(x-2) + x + \frac{3}{2}.$$

Завдання для індивідуальної роботи №5

Завдання.

1. Розв'язати лінійне однорідне диференціальне рівняння методом Ейлера.
2. Розв'язати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами методом варіації сталих.
3. Записати вигляд загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння.
4. Знайти розв'язок задачі Коші.
5. Розв'язати рівняння Ейлера чи Лежандра.

Варіант 1
1. $y^{IV} + 64y = 0;$
2. $y^{''} + y = ctgx;$
3. $y^{''} - 2y^{'} + 2y = e^x + xcosx;$
4. $y^{''} - 2y^{'} + y = 0, y(2) = 1, y'(2) = -2;$
5. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$

Варіант 2
1. $y''' - 8y = 0;$
2. $y^{''} - y = \frac{e^x}{1+e^x};$
3. $y^{''} + 2y' + 2y = chx \cdot sinx;$
4. $y^{''} + y = 4e^x, y(0) = 4, y'(0) = -3;$
5. $x^2y'' - xy' - 3y = 0.$

Варіант 3
1. $4y'' + 4y' + y = 0;$
2. $y^{''} + 4y = \frac{1}{cos2x};$
3. $y'' - 8y + 20y = 5xe^{4x}sin2x;$
4. $y'' - 2y' = 2e^x, y(1) = -1, y'(1) = 0;$
5. $x^3y''' + xy' - y = 0.$

Варіант 4
1. $y^V - 6y^{IV} + 9y^{'''} = 0;$
2. $y^{''} + y = \frac{1}{sin^2x\sqrt{sinxcosx}};$

3. $y^{''} + 7y' + 10y = xe^{-2x}cos5x$;
4. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}, y(0) = y'(0) = 0$;
5. $x^2y''' - 2y' = 0$.

Варіант 5
1. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$;
2. $y^{''} - 6y' + 9y = \frac{9x^2+6x+2}{x^3}$;
3. $y'' - 2y' + 5y = 2xe^x + e^x sin2x$;
4. $y''' - y' = 0, y(0) = 3, y'(0) = -1, y''(0) = 1$;
5. $x^2y^{''} - xy^{'} + y = 8x^3$.

Варіант 6
1. $y^{'''} - 3y^{''} + 3y^{'} - y = 0$;
2. $y^{''} + y = tgx$;
3. $y'' - 2y' + y = 2xe^x + e^x sin2x$;
4. $y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x}, y(0) = 0, y'(0) = -3, y''(0) = 3$;
5. $x^2y^{''} + xy' + 4y = 10x$.

Варіант 7
1. $y''' - y'' - y' + y = 0$;
2. $y^{''} - y = \frac{(2-cos^2x)sinx}{cos^3x}$;
3. $y'' - 8y' + 17y = e^{4x}(x^2 - 3xsinx)$;
4. $y^{IV} + y'' = 2cosx, y(0) = -2, y'(0) = 1, y''(0) = y'''(0) = 0$;
5. $x^3y^{''} - 2xy = 6lnx$

Варіант 8
1. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$;
2. $y^{''} + y = \frac{x^2+2}{x^3}$;
3. $y^{'''} + y^{'} = sinx + xcosx$;
4. $y'' - 2y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$;
5. $x^2y^{''} - 3xy' + 5y = 3x^2$.

Варіант 9
1. $y^V + 8y''' + 16y' = 0$;
2. $y^{''} + 2y^{'} + 5y = e^{-x}(cos^2x + tgx)$;
3. $y'' + 2y' + y = x(e^{-x} - cosx)$;
4. $y'' + 4y' + 3y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 4$;
5. $x^2y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$.

Варіант 10

1. $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0;$
2. $y^{''} + 3y^{'} + 2y = \frac{1}{1+e^x}, ;$
3. $y'' + 4y' + 3y = chx;$
4. $4y'' - 4y' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = -1;$
5. $x^2y'' - 2y = sinlnx.$

Варіант 11

1. $y'' - 7y' + 10y = 0;$
2. $y^{''} + y = \frac{1}{sinx};$
3. $y'' - 6y' + 13y = x^2e^{3x} - 3cos2x;$
4. $y^{''} - 4y = e^{2x}(11\cos x - 7\sin x), y(0) = 1, y^{'}(0) = 1;$
5. $x^2y'' + 3xy' + 2y = x^3.$

Варіант 12

1. $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0;$
2. $y^{''} + 4y = 2tgx;$
3. $y^{''} - 9y = e^{-3x}(x^2 + sin3x);$
4. $y^{''} - 9y^{'} + 20y = e^{6x}, y(0) = 1, y^{'}(0) = 1;$
5. $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4.$

Варіант 13

1. $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0;$
2. $y^{''} + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1};$
3. $y^{IV} + y'' = 7x - 3cosx;$
4. $y^{''} - 5y^{'} + 6y = (12x - 7)e^{-x}, y(1) = 0, y^{'}(0) = 1;$
5. $x^2y^{''} + 2xy' - 6y = 0.$

Варіант 14

1. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0;$
2. $y^{''} + y = 2sec^3x;$
3. $y^{''} + 4y = cosxcos3x;$
4. $y^{''} - 6y^{'} + 9y = x^2 - x + 3, y(0) = 2, y^{'}(0) = 1;$
5. $xy'' + y' = 0.$

Варіант 15

1. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0;$
2. $y^{''} - 3y^{'} + 2y = \frac{e^{3x}}{1+e^x};$

3. $y''' - 4y'' + 3y' = x^2 + xe^2x;$
4. $y^{''} + y = 4e^x, y(0) = 4, y^{'}(0) = -3;$
5. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0.$

Варіант 16
1. $y''' + 27y = 0;$
2. $y^{''} + y = \frac{1}{\cos x};$
3. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}sin^2x;$
4. $y^{''} - 2y^{'} = 2e^x, y(1) = -1, y^{'}(1) = 0;$
5. $x^3y''' - xy' - 3y = x^2.$

Варіант 17
1. $y^{IV} - 8y' = 0;$
2. $y^{''} + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\sin \pi x};$
3. $y^{''} + 3y' + 2y = e^{-x}cos^2x;$
4. $y^{''} + y = 1, y(0) = 0, y^{'}(\frac{\pi}{2}) = 0;$
5. $x^3y''' + 8x^2y'' + 12xy' = lnx.$

Варіант 18
1. $y''' + 27y = 0;$
2. $y^{''} + \frac{y}{\pi^2} = \frac{1}{\pi^2 \cos(\frac{x}{\pi})};$
3. $y'' - 2y' + 2y = (x + e^x)sinx;$
4. $y^{''} - y = 2x, y(0) = 0, y^{'}(1) = -1;$
5. $x^4y^{IV} + 10y = 0.$

Варіант 19
1. $y^{IV} - 13y'' + 36y = 0;$
2. $y^{''} + 16y = \frac{16}{\cos 4x};$
3. $y^{IV} + 5y'' + 4y = sinxcos2x;$
4. $y^{''} + y = 1, y(0) = 0, y^{'}(\pi) = 0;$
5. $(y + 1)^2y'' + 3(x + 1)y' + y = 0.$

Варіант 20
1. $y^{IV} + 9y'' = 0;$
2. $y^{''} + y = \frac{1}{\sin x};$
3. $y'' - y = 4shx;$
4. $y^{''} - y = x^2 + 1, y(0) = 1, y^{'}(0) = 0;$
5. $(x - 2)^2y'' - 3(x - 2)y' + 4y = x.$

Варіант 21

1. $y^{IV} + 5y'' + 6y = 0;$
2. $y^{''} + 4y = \frac{4}{\sin 2x};$
3. $y^{''} + 4y = shxsin2x;$
4. $y^{''} - 3y^{'} + 2y = x^3, y(0) = 0, y^{'}(0) = 0;$
5. $(x+2)^2 y^{''} - 4(x+2)y' + 6y = 0.$

Варіант 22

1. $y^{V} - y = 0;$
2. $y^{''} + y = 4ctgx;$
3. $y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - 2e^{3x}cosx;$
4. $y^{''} - 4y^{'} + 4y = xe^x, y(0) = y^{'}(0) = 0;$
5. $x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = x^3 + 3x.$

Варіант 23

1. $y^{V} - 3y^{IV} + 2y^{'''} = 0;$
2. $y^{''} - 6y^{'} + 8y = \frac{4}{2+e^{-2x}};$
3. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x}sin2x + 2x^2;$
4. $y^{''} - 9y = e^{3x}\cos x, y(0) = 0, y^{'}(0) = 1;$
5. $2(2x+1)^2 y'' - (2x+1)y' + 2y = 0.$

Варіант 24

1. $y^{VI} + 3y^{IV} = 0;$
2. $y^{''} + 4y = sin2x;$
3. $y'' - 6y' + 8y = 5xe^{2x} + 2e^{4x}sinx;$
4. $y^{'''} - 4y^{'} = x^2, y(0) = 5, y^{'}(0) = 0, y^{''}(0) = 1;$
5. $(2x+3)^3 y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0.$

Варіант 25

1. $y^{VI} - 4y^{V} + 13y^{IV} = 0;$
2. $y^{IV} + 8y'' + 16y = cosx;$
3. $y''' - 2y' + 4y = e^x cosx + sin2x + x^2;$
4. $y'' + 5y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1;$
5. $(x+1)^3 y''' + 9(x+1)^2 y'' + 4(x+1)y' - 4y = 0.$

Розділ 3

Системи звичайних диференціальних рівнянь n–го порядку

3.1 Основні поняття теорії лінійних систем

Означення 3.1. *Лінійною системою* називається система звичайних диференціальних рівнянь, визначена в області $G := [a, b] \times \mathbb{R}^n$, вигляду:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\ \qquad \qquad \ldots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + b_n(t), \end{cases} \tag{3.1}$$

де $t \in [a, b]$, функції $x_1, x_2, \ldots, x_n \in C^1([a, b])$ є шуканими; задані функції $a_{ij} \in C([a, b])$, $i, j = \overline{1, n}$ називаються *коефіцієнтами системи*, $b_i \in C([a, b])$, $i = \overline{1, n}$ — *вільними членами або правими частинами системи.*

Якщо хоча б одна з функцій $b_i, i = \overline{1, n}$ не дорівнює нулю, то система (3.1) називається *неоднорідною*; і якщо всі $b_i, i = \overline{1, n}$ є нульовими, то система (3.1) називається *однорідною* і має вигляд:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n, \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n, \\ \qquad \qquad \ldots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n, \end{cases} \tag{3.2}$$

Означення 3.2. *Задачею Коші* для системи диференціальних рівнянь (3.1) називатимемо задачу відшукання розв'язку системи (3.1), що задовольняє початковим умовам:

$$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0, \tag{3.3}$$

де $\left(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) \in G$ називається *початковою точкою.*

Має місце наступна теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші (3.1), (3.3).

Теорема 3.1. *Якщо a_{ij} та b_i є неперервними на $[a, b]$, то для будь–якої точки $\left(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ з області G задача Коші* (3.1), (3.3) *має єдиний* *непродовжуваний розв'язок, визначений на всьому проміжку* $[a, b]$.

Означення 3.3. Сукупність функцій

$$\varphi^k = \left(\varphi_1^k, \varphi_2^k, \ldots, \varphi_n^k\right), k \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

визначених і неперервних на $[a, b]$, називається *лінійно залежною* на цьому проміжку, якщо існують такі сталі $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, які одночасно не дорінюють нулю, що

$$\alpha_1 \varphi^1 + \alpha_2 \varphi^2 + \ldots + \alpha_m \varphi^m \equiv 0, t \in [a, b].$$

У протилежному випадку сукупність функцій φ^k, $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, називається *лінійно незалежною.*

Теорема 3.2. *Нехай* $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m$ *– розв'язки системи* (3.2). *Тоді функція*

$$x(t) = \sum_{i=1}^{m} = C_i \varphi^i(t)$$

буде розв'язком системи для довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_m$.

Означення 3.4. Сукупність n розв'язків $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n$ системи (3.2) називається *фундаментальною системою розв'язків*, якщо вона лінійно незалежна на $[a, b]$.

Теорема 3.3. *Для системи* (3.2) *завжди існує фундаментальна система розв'язків.*

Має місце теорема про структуру загального розв'язку однорідної системи.

Теорема 3.4. *Нехай* $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n$ *– фундаментальна система розв'язків системи* (3.2).

Тоді загальний розв'язок системи (3.2) *визначається формулою*

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} = C_j \varphi^j(t), \tag{3.4}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *– довільні сталі.*

Нехай вектори $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n$ утворюють фундаментальну систему розв'язків лінійної однорідної системи (3.2) на проміжку $[a, b]$. Введемо квадратну матрицю $\Phi = \left(\varphi_i^j\right)$, стовпцями якої є вектори φ^j.

Означення 3.5. Матриця Φ називається *фундаментальною матрицею* лінійної системи (3.2) на проміжку $[a, b]$.

Для фундаментальної матриці Φ лінійної однорідної системи (3.2) справедливі наступні властивості.

Властивість 3.1. *Фундаментальна матриця Φ є розв'язком матричного диференціального рівняння*

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t), t = [a, b],$$

де $A(t) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$.

Властивість 3.2. *Загальний розв'язок однорідної системи* (3.2) *має вигляд*

$$x(t) = \Phi(t)C,$$

де Φ — фундаментальна матриця, а C — довільний сталий вектор.

Властивість 3.3. *Фундаментальна матриця Φ є невиродженою в кожній точці.*

Властивість 3.4. *Нехай Φ — фундаментальна матриця лінійної системи* (3.2). *Тоді будь–яка інша фундаментальна матриця Ψ цієї системи має вигляд*

$$\Psi(t) = \Phi(t)U,$$

де U — стала невироджена матриця.

3.2 Зв'язок між лінійним рівнянням n–го порядку та лінійною системою розмірності n

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{3.5}$$

та систему n–диференціальних рівнянь першого порядку:

$$x' = F(t, x), \tag{3.6}$$

де $x, F \in \mathbb{R}^n$.

За допомогою заміни змінних:

$$\begin{cases} y = x_1, \\ y' = x_2, \\ \quad \dots \\ y^{(n-1)} = x_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ \quad \dots \\ x_{(n-1)}' = x_n, \\ x_n' = f(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \tag{3.7}$$

від рівняння (3.5) завжди можна перейти до системи диференціальних рівнянь (3.6)

Тобто диференціальне рівняння (3.5) може бути записане у вигляді (3.7).

Розглянемо алгоритм **методу зведення нормальної системи (3.6) до рівняння n–го порядку (3.5)** .

Запишемо систему (3.6) покомпонентно:

$$\begin{cases} x_1' = F_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \qquad \dots \\ x_n' = F_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \tag{3.8}$$

Продиференціюємо перше рівняння системи (3.8) $(n-1)$ раз, підставляючи замість похідних x_i', $i = \overline{1, n}$ їх значення із системи (3.8):

$$x_1' = F_1(t, x_1, \dots, x_n),$$

$$x_1'' = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \sum_{i=1} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} x_i',$$

$$x_1'' = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \sum_{i=1} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} F_i(t, x_1, \dots, x_n)$$

і т. д.

У результаті одержимо таку систему:

$$\begin{cases} x_1' = F_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ x_1'' = G_2(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \qquad \ldots \\ x_1^{(n)} = G_n(t, x_1, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{3.9}$$

З перших $(n-1)$–го рівняння системи (3.9) знаходимо виразимо $x_2, \ldots, x_n$ через $x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}$:

$$\begin{cases} x_2 = \varphi_2\left(t, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}\right), \\ \qquad \ldots \\ x_n = \varphi_n\left(t, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}\right). \end{cases} \tag{3.10}$$

Одержані значення $x_2, \ldots, x_n$ підставимо в останнє рівняння системи (3.9):

$$x_1^{(n)} = G_n(t, x_1, \varphi_2(t, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)})), \ldots, \varphi_n(t, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}),$$

тобто отримаємо рівняння:

$$x_1^{(n)} = H(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}), \tag{3.11}$$

яке є диференціальним рівнянням n–го порядку та розв'язується одним із методів, наведених у Розділі 2 даного навчального посібника відповідно до його типу.

Знайшовши розв'язок рівняння (3.11), підставляємо його у (3.10), тим самим одержуючи значення решти шуканих функцій $x_i(t)$, $i = \overline{2, n}$.

Приклад 3.1. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases} \tag{3.12}$$

Для відшукання розв'язку диференціальної системи (3.12) використаємо метод зведення. З цією метою продиференціюємо перше рівняння по t:

$$x'' = 2x' + y' \overset{(3.12)}{\Rightarrow} x'' = 2x' + 3x + 4y \overset{(3.12)}{\Rightarrow} x'' = 6x' - 5x,$$

тобто одержали диференціальне рівняння вигляду:

$$x'' - 6x' + 5x = 0. \tag{3.13}$$

Розв'яжемо (3.13) методом Ейлера:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5,$$

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^5 t. \tag{3.14}$$

Підставимо функцію $x(t)$ вигляду (3.14) у перше рівняння системи (3.12) та обчислимо функцію $y(y)$:

$$y(t) = x' - 2x \Rightarrow y(t) = c_1 e^t + 5c_2 e^{5t} - 2(c_1 e^t + c_2 e^{5t}) \Rightarrow y(t) = -c_1 e^t + 3c_2 e^{5t}.$$

Таким чином, розв'язком диференціальної системи (3.12) буде система функцій:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^t + c_2 e^5 t, \\ y(t) = -c_1 e^t + 3c_2 e^{5t}, \end{cases}$$

що і потрібно було знайти.

3.3 Будова загального розв'язку лінійної однорідної системи зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера

Розглянемо лінійну однорідну систему n–го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$x' = Ax, \tag{3.15}$$

$$A = (a_{ij})_{ij=1}^n, a_{ij} = const \in \mathbb{R}.$$

Система (3.15) має n лінійно незалежних розв'язків

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \ldots, x_n(t) = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

які утворюють фундаментальну систему розв'язків і загальний розвязок системи (3.15) є лінійною комбінацією лінійно незалежних розв'язків системи:

$$x(t) = C_1 x_1(t) + \ldots + C_n x_n(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix} C_1 + \ldots + \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix} C_n =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = X(t)C.$$

Згідно **методу Ейлера** частинні розв'язки системи (3.15) будемо шукати у вигляді:

$$x(t) = he^{\lambda t} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \tag{3.17}$$

де λ — власне значення матриці A, $h = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ — власний матриці A, який відповідає власному значенню λ.

Підставимо (3.17) в однорідну систему (3.15):

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} \lambda = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

Тоді одержимо таку систему рівнянь у покомпонентній формі:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)k_1 + a_{12}k_2 + \ldots + a_{1n}k_n = 0, \\ a_{21}k_1 + (a_{22} - \lambda)k_2 + \ldots + a_{2n}k_n = 0, \\ \qquad \ldots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)k_n = 0, \end{cases} \tag{3.18}$$

або, що те ж саме

$$(A - \lambda E)h = 0.$$

Система (3.18) є системою алгебраїчних рівнянь (3.18) для відшукання власних векторів h.

Алгебраїчна система (3.18) має ненульовий розв'язок тільки у тому випадку, коли

$$|A - \lambda E| = 0, \tag{3.19}$$

тобто λ є власним значенням матриці A.

(3.19) називається *характеристичним рівнянням* для системи (3.18).

Запишемо характеристичне рівняння (3.18) у вигляді:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3.20}$$

Розглянемо випадки:

1. Якщо всі власні значення матриці A дійсні і різні:

$$\lambda_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1,n}, \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j.$$

Переконаємося, що в цьому випадку кожному λ буде відповідати 1 власний вектор, тобто власний вектор знаходиться з точністю до константи. Іншими словами, розв'язок системи (3.15) єдиний і має вигляд (3.17).

Нехай маємо деякий многочлен $P(t)$ і $t = t_0$ є коренем кратності s цього многочлена. Це означає, що

$$P(t_0) = 0, P'(t_0) = 0, \dots, P^{(s-1)}(t_0) = 0,$$

$$P^{(s)}(t_0) \neq 0.$$

$$P(t) = (t - t_0)^s \cdot R(t), R(t) \neq 0.$$

Застосуємо цю властивість до нашого випадку, коли λ є коренем кратносі 1 характерестичного рівняння. Це означає, що

$$\Delta(\lambda) = 0, \Delta'(\lambda) \neq 0.$$

Покажемо, що з цього випливає, що

$$rank\Delta(\lambda) = n - 1.$$

Оскільки λ є коренем кратності 1 характеристичного рівняння, то

$$\Delta'(\lambda) \neq 0.$$

Знайдемо похідну Δ', використовуючи ***правило диференцюювання детермінанта***: *похідна від детермінанта n–го порядку дорівнює сумі з n детермінантів n–го порядку, кожен з яких одержується заміною i–го стовпця на похідну цього стовпця:*

$$\Delta'(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & -1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & 0 & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\Delta_{11} + \Delta_{22} + \ldots + \Delta_{nn}) \neq 0$$

А це означає, що хоча б 1 мінор $\Delta_{ii} \neq 0$.

З цього випливає, що $\Delta(\lambda)$ має ранг $(n-1)$.

Виходячи з доведеного, робимо висновок, що всі розв'язки $k_1, \ldots, k_n$ системи (3.18) знаходяться з точністю до константи, тобто, система (3.18) має єдиний лінійно незалежний розв'язок $\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$, якому відповідає єдиний лінійно незалежний розв'язок диференціальної системи (3.15) вигляду (3.17).

Загальний розв'язок диференціальної системи (3.15) матиме вигляд:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} \cdot h_i.$$

Приклад 3.2. Побудувати загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x' = 3x + 12y - 4z \\ y' = -x - 3y + z \\ z' = -x - 12y + 6z \end{cases}$$

де $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix}.$

Згідно методу Ейлера розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^{\lambda t} \\ y(t) = \beta e^{\lambda t} \\ z(t) = \gamma e^{\lambda t} \end{cases}$$

де власні значення λ матриці A є розв'язками характеристичного рівняння:

$$|A - \lambda E| = 0.$$

Таким чином,

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 12 & -4 \\ -1 & -3-\lambda & 1 \\ -1 & -12 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda_1 = 3; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 1.$$

Кожному з власних значень λ_i відповідає власний вектор h_i, $i = 1, 2, 3$. Знайдемо їх.

Нехай $\lambda_1 = 3$.

Тоді

$$\begin{cases} 12\beta - 4\gamma = 0 \\ -\alpha - 6\beta + \gamma = 0 \\ -\alpha - 12\beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -3, \beta = 1, \gamma = 3.$$

Отже, система власних функцій, які відповідають власному значенню

$\lambda_1 = 3$ та власному вектору $h_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, є такою:

$$\begin{cases} x_1(t) = -3e^{3t} \\ y_1(t) = e^{3t} \\ z_1(t) = 3e^{3t} \end{cases}$$

Аналогічно шукаємо решту власних векторів та власних функцій:

$$\lambda_2 = 2,$$

$$\begin{cases} \alpha + 12\beta - 4\gamma = 0 \\ -\alpha - 5\beta + \gamma = 0 \\ -\alpha - 12\beta + 4\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -15, \beta = 3, \gamma = 7,$$

$$\begin{cases} x_2(t) = -15e^{2t} \\ y_2(t) = 3e^{2t} \\ z_2(t) = e^{2t} \end{cases}$$

і

$$\lambda_3 = 1,$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 12\beta - 4\gamma = 0 \\ -\alpha - 4\beta + \gamma = 0 \\ -\alpha - 12\beta + 5\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -2, \beta = 1, \gamma = 2,$$

$$\begin{cases} x_3(t) = -2e^{t} \\ y_3(t) = e^{t} \\ z_3(t) = 2e^{t} \end{cases}$$

Таким чином, загальний розв'язок заданої системи диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} x(t) = -3_1e^{3t} - 15c_2e^{2t} - 2c_3e^{t}, \\ y(t) = c_1e^{3t} + 3c_2e^{2t} + c_3e^{t}, \\ z(t) = 3c_1e^{3t} + 7c_2e^{2t} + 2c_3e^{t}. \end{cases}$$

2. Якщо серед власних значень матриці A ***є комплексні:***

$$\lambda \in \mathbb{C}, \lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

Оскільки коефіцієнти матриці A дійсні, то комплексні корені характеристичного рівняння є взаємно спряженими. Таким чином, двом власним значенням λ_1, λ_2 відповідатиме 2 лінійно незалежні власні вектори h_1, h_2 та 2 лінійно незалежні частинні розв'язки лінійної однорідної системи (3.15):

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ \vdots \\ k_{1n} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}, x_2(t) = \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{2n} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}.$$

Комплексно спряженим значенням λ_i, $i = 1, 2$ відповідають комплексно спряжені власні функції x_1 та x_2 (тобто коефіцієнти k_{i1} і k_{i2}, $i = \overline{1, n}$ є комплексно спряженими).

Двом комплексно спряженим розв'язкам диференціальної системи (3.15) відповідають 2 дійсні:

$$\widetilde{x_1}(t) = \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} = Rex_1(t),$$

$$\widetilde{x_2}(t) = \frac{x_1(t) - x_2(t)}{2} = Imx_1(t).$$

Приклад 3.3. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 21x - 8y - 19z, \\ y' = 16x - 7y - 14z, \\ z' = 16x - 6y - 15z. \end{cases}$$

Тут $\quad A = \begin{pmatrix} 21 & -8 & -19 \\ 16 & -7 & -14 \\ 16 & -6 & -15 \end{pmatrix}$

Розв'язок шукаємо у вигляді: $\begin{cases} x(t) = \alpha e^{\lambda t} \\ y(t) = \beta e^{\lambda t} \\ z(t) = \gamma e^{\lambda t} \end{cases}$

Власні значення матриці A шукаємо у вигляді:

$$\begin{vmatrix} 21-\lambda & -8 & -19 \\ 16 & -7-\lambda & -14 \\ 16 & -6 & -15-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = \pm i.$$

Нехай

$$\lambda_1 = -1.$$

Тоді власний вектор шукаємо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} 22\alpha - 8\beta - 19\gamma = 0, \\ 16\alpha - 6\beta - 14\gamma = 0, \\ 16\alpha - 6\beta - 14\gamma = 0, \end{cases}$$

$$\alpha = -2, \beta = 1, \gamma = 2,$$

а власна функція є такою:

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-t}, \\ y_1(t) = -2e^{-t}, \\ z_1(t) = 2e^{-t}. \end{cases}$$

Розглянемо тепер комплексне власне значення

$$\lambda_2 = i.$$

$$\begin{cases} (21-i)\alpha - 8\beta - 19\gamma = 0, \\ 16\alpha - (7+i)\beta - 14\gamma = 0, \\ 16\alpha - 6\beta - (15+i)\gamma = 0. \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{21}{16} + \frac{1}{16}i, \beta = 1, \gamma = 1.$$

Комплекснозначною власною функцією, що відповідає даному власному значенню, є така:

$$x(t) = \left(\frac{21}{16} + \frac{1}{16}i\right) e^{it} = \left(\frac{21}{16} + \frac{1}{16}i\right)(\cos t + i \sin t) =$$

$$= \frac{21}{16}\cos t + i\frac{21}{16}\sin t + i\frac{1}{16}\cos t - \frac{1}{16}\sin t =$$

$$\left(\frac{21}{16}\cos t - \frac{1}{16}\sin t) + i(\frac{21}{16}\cos t + \frac{1}{16}\sin t\right),$$

$$y(t) = e^{it} = \cos t + i\sin t,$$

$$z(t) = e^{it} = \cos t + i\sin t,$$

звідки

$$\begin{cases} x_2(t) = Re(x(t)) = \frac{21}{16}\cos t - \frac{1}{16}\sin t \\ x_3(t) = Im(x(t)) = \frac{21}{16}\sin t + \frac{1}{16}\cos t \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2(t) = Re(y(t)) = \cos t, \\ y_3(t) = Im(y(t)) = \sin t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_2(t) = Re(z(t)) = \cos t, \\ z_3(t) = Re(z(t)) = \sin t. \end{cases}$$

При цьому загальним розв'язком системи диференціальних рівнянь буде:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + c_2(\frac{21}{16}\cos t - \frac{1}{16}\sin t) + c_3(\frac{21}{16}\cos t - \frac{1}{16}\sin t), \\ y(t) = -2_1 e^{-t} + c_2\cos t + c_3\sin t, \\ z(t) = 2c_1 e^{-t} + c_2\cos t + c_3\sin t. \end{cases}$$

3. Якщо λ є коренем характеристичного рівняння кратності s.

Теорема. *Якщо λ є коренем кратності s визначального рівняння, то цьому кореню відповідають розв'язки:*

$$\begin{cases} x_1(t) = P_1(t)e^{\lambda t} \\ x_2(t) = P_2(t)e^{\lambda t} \\ \quad \dots \\ x_s(t) = P_s(t)e^{\lambda t} \end{cases}$$

де $P_i(t)$ — вектор–поліноми системи не вище за $(s-1)$, причому в цих поліномах s коефіцієнтів є базовими, а всі інші через них виражаються.

$$x(t) = P(t)e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} (A_{11}t^{s-1} & A_{12}t^{s-2} & \dots & A_{1s})e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_{n1}t^{s-1} & A_{n2}t^{s-2} & \dots & A_{ss})e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Коефіцієнти A_{ij} є невідомими. Всього їх є $n \times s$. Для їх знаходження підставляємо розв'язок у систему (3.15) і прирівнюємо коефіцієнти при $t^i e^{\lambda t}$. Одержимо лінійну однорідну алгебраїчну систему порядку $n \times s$, у якій s коефіцієнтів будуть базовими, а всі інші через них виражаються.

Беручи послідовно один з базових коефіцієнтів рівним 1, а решта — 0, одержимо s лінійно незалежних розв'язків диференціальної системи.

3.4 Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами. Випадок кратних коренів характеристичного рівняння. Метод власних та приєднаних векторів

Розглянемо лінійну однорідну диференціальну систему (3.15). І нехай власне значення λ матриці A системи (3.15) є коренем кратності s характеристичного рівняння (3.19).

Розглянемо спосіб відшукання лінійно незалежних частинних розв'язків системи (3.15) за допомогою **методу власних і приєднаних векторів** матриці A.

Означення 3.6. *Нехай λ є власним значенням матриці A кратності s. Тоді йому відповідає система з s лінійно незалежних векторів:*

$$(A - \lambda E)h_1 = 0,$$

$$(A - \lambda E)h_2 = h_1,$$

$$\dots$$

$$(A - \lambda E)h_m = h_{m-1}.$$

Вектор h_1 називається власним вектором для власного значення λ, а $h_2, \dots, h_m$ називаються приєднаними векторами до h_1.

Система векторів $h_1, h_2, \dots, h_m$ називається Жордановим ланцюжком для власного значення λ, а $m \leq s$ — довжиною ланцюжка.

При цьому система лінійно незалежних власних функцій буде будуватись згідно формул:

$$\begin{cases} x_1(t) = h_1 e^{\lambda t} \\ x_2(t) = (\frac{t}{1!}h_1 + h_2)e^{\lambda t} \\ \quad \dots \\ x_m(t) = (\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}h_1 + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}h_2 + \ldots + h_m)e^{\lambda t} \end{cases}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 3.5. ***(Жордана)*** *Для будь–якої матриці A в n–вимірному комплексному просторі завжди існує n–вимірнтй базис, складений із Жорданових ланцюжків для всіх власних значень цієї матриці.*

Зауваження 3.1. Слід зауважити, що у випадку простого кореня характеристичного рівняння для нього існує тільки власних вектор. Якщо ж λ є коренем кратності s, то йому повинна відповідати система з s лінійно незалежних векторів $h_1, h_2, \ldots h_s$, частина з яких є власними, решта — приєднаними. При цьому, на практиці, слід мати на увазі, що за рахунок довільності вибору деяких з компонент власного вектора, може виникнути ситуація, коли система для відшукання приєднаного вектора може виявитись несумісною.

Розглянемо частинний випадок диференціальної системи (3.15) при $n = 3$.

Тоді для власних значень матриці A цієї системи можливі наступні випадки:

1. $n = 3$, $s = 2$.

- **Якщо власному значенню λ відповідає два лінійно незалежні власні вектори h_1, $\overline{h}_1$.**

  Тоді частинні розв'язки системи (3.15) будуть наступними:

$$x_1(t) = h_1 e^{\lambda t}, x_2(t) = \overline{h}_1 e^{\lambda t}$$

Приклад 3.4. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 4x - y - z, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = x - y + 2z, \end{cases}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^{\lambda t}, \\ y(t) = \beta e^{\lambda t}, \\ z(t) = \gamma e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Власні значення матриці A, які є розв'язками характеристичного рівняння:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

є такими:

$$\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 3.$$

Нехай

$$\lambda_1 = 2.$$

Тоді $h_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ є власним вектором, компоненти якого шукаємо із системи рівнянь:

$$(A - \lambda_1 E)h_1 = 0,$$

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta - \gamma = 0, \\ \alpha - \gamma = 0, \\ \alpha - \beta = 0. \end{cases}$$

Отже,

$$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0,$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай тепер $\lambda_2 = 3$. Оскільки $rank(A - \lambda_2 E) = 1$, то для цього двократного кореня характеристичного рівняння існуватиме 2 власні лінійно незалежні вектори, які шукаємо із системи рівнянь:

$$(A - \lambda_2 E)h_2 = 0, h_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0.$$

Одержимо, що

$$\alpha - \beta - \gamma = 0,$$

а тоді

$$h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, загальним розв'язком заданої системи буде:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- **Якщо для λ існує один лінійно незалежний власний вектор.**

При цьому h_2 буде приєднаним вектором. Тоді власні функції матимуть вигляд:

$$x_1(t) = h_1 e^{\lambda t}, x_2(t) = (th_1 + h_2)e^{\lambda t}.$$

Приклад 3.5. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 2y + 4z; \\ z' = x - z. \end{cases}$$

Власні значення, які є розв'язками характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

є такими:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3.$$

Розглянемо $\lambda_1 = 0$. Тоді власний вектор шукаємо із системи рівнянь:

$$(A - \lambda_1 E)h_1 = 0, h_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0, \\ 2\beta + 4\gamma = 0, \\ \alpha - \gamma = 0. \end{cases}$$

Таким чином, власний вектор має вигляд:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор h_2 є приєднаним до вектора h_1, отже, він буде розв'язком системи:

$$(A - \lambda_1 E)h_2 = h_1, h_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 1, \\ 2\beta + 4\gamma = -2, \\ \alpha - \gamma = 1, \end{cases}$$

і має вигляд:

$$h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Нехай $\lambda_3 = 3$. Тоді власний вектор h_3 шукаємо із системи алгебраїчних рівнянь:

$$(A - \lambda_3 E)h_3 = 0, h_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = 0, \\ -\beta + 4\gamma = 0, \\ \alpha - 4\gamma = 0, \end{cases}$$

$$h_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, загальний розв'язок заданої системи диференціальних рівнянь є наступним:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \left(t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right) + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $n = 3$, $s = 3$.

- **Даному λ відповідають два лінійно незалежні власні вектори h_1, $\bar{h}_1$.**

При цьому для вектора h_1 буде існувати приєднаний вектор:

$$(A - \lambda E)\bar{h}_1 = 0,$$

$$x_1(t) = \bar{h}_1 e^{\lambda t},$$

$$(A-\lambda E)h_1 = 0,$$

$$(A-\lambda E)h_2 = h_1,$$

$$\begin{cases} x_2(t) = h_1 e^{\lambda t}, \\ x_3(t) = (th_1 + h_2)e^{\lambda t}. \end{cases}$$

- **Даному λ відповідає один лінійно незалежний власний вектор h_1.**

  При цьому вектори h_2, h_3 будуть приєднаними:

$$(A-\lambda E)h_1 = 0,$$

$$x_1(t) = h_1 e^{\lambda t},$$

$$(A-\lambda E)h_2 = h_1,$$

$$(A-\lambda E)h_3 = h_2,$$

$$\begin{cases} x_2(t) = (th_1 + h_2)e^{\lambda t}, \\ x_3(t) = \left(\frac{t^2}{2}h_1 + th_2 + h_3\right) e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Приклад 3.6. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = 3x + y - z, \\ z' = x + z, \end{cases}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Власні значення матриці A є такими:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

Оскільки $rank(A - \lambda E) = 2$, то кількість власних векторів дорівнює одиниці, а тоді два вектори є приєднаними. Знайдемо їх:

$$(A-\lambda E)h_1 = 0, h_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 0, \\ 3\alpha - \beta - \gamma = 0, \\ \alpha - \gamma = 0, \end{cases}$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$(A-\lambda E)h_2 = h_1, h_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 1, \\ 3\alpha - \beta - \gamma = 2, \\ \alpha - \gamma = 1, \end{cases}$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(A-\lambda E)h_3 = h_2, h_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 1, \\ 3\alpha - \beta - \gamma = 1, \\ \alpha - \gamma = 0, \end{cases}$$

$$h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) +$$

$$+ c_3 e^{2t} \left(\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

3.5 Лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів

Розглянемо лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь вигляду:

$$x' = Ax + f(t), x, f \in \mathbb{R}^n \tag{3.21}$$

де $f(t) = e^{\alpha t}(P_{m1}(t) \cos \beta t + Q_{m2}(t) \sin \beta t)$,

$P_{m1}(t), Q_{m2}(t)$ — векторні n–вимірні поліноми степеня m_1 і m_2 відповідно.

Розв'язок неоднорідної системи (3.21) будемо шукати у вигляді:

$$x(t) = x_{\text{з.о.}}(t) + x_{\text{ч.н.}}(t),$$

де $x_{\text{з.о.}}(t)$ — загальний розв'язок відповідної однорідної системи (3.15), а $x_{\text{ч.н.}}(t)$ — частинний розв'язок неоднорідної системи, який будуємо **методом невизначених коефіцієнтів.**

Розглянемо наступні випадки:

1. *Нерезонансний випадок.* Якщо $\gamma = \alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок неоднорідної системи має вигляд:

$$x_{\text{ч.н.}}(t) = e^{\alpha t} \left(\overline{P_m}(t) \cos \beta t + \overline{Q_m}(t) \sin \beta t \right)$$

де $m = \max(m_1, m_2)$, $\overline{P}_m(t)$ та $\overline{Q}_m(t)$ — векторні многочлени степеня m з невизначеними коефіцієнтами.

2. *Резонансний випадок.* Якщо $\gamma = \alpha + i\beta$ є коренем характеристичного рівняння кратності s. Тоді

$$x_{\text{ч.н.}}(t) = e^{\alpha t}(\overline{P}_{m+s}(t) \cos \beta t + \overline{Q}_{m+s}(t) \sin \beta t),$$

де $m = \max(m_1, m_2)$, $\overline{P}_{m+s}(t), \overline{Q}_{m+s}(t)$ — векторні многочлени степеня $(m+s)$ з невизначеними коефіцієнтами.

3.6 Лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Метод варіації сталих

Розглянемо лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь (3.21) де $f(t)$ задана неперервна на $[a, b]$ функція. Систему (3.21) завжди можемо розв'язати **методом варіації довільних сталих.** Останній полягає в наступному.

I. Розглядаємо відповідну однорідну систему (3.2) та будуємо її розв'язок, утворений системою функцій:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t), \tag{3.22}$$

де $C_i = const$, $i = \overline{1, n}$, а $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ утворюють фундаментальну систему частинних розв'язків системи (3.2).

II. Припускаємо, що $C_i = C_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ та підставляємо (3.22) в неоднорідну диференціальну систему (3.21). Одержимо:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i' x_i(t) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i' = A \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t) + f(t), \tag{3.23}$$

звідки отримаємо систему рівнянь для відшукання невідомих функцій $C_i = C_i(t)$:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i' x_i(t) = f(t). \tag{3.24}$$

III. Нехай розв'язком (3.24) є функції $C_i(t) = \varphi_i(t, \widetilde{C}_i)$, $\widetilde{C}_i = const$. Тому загальним розв'язком лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь буде

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t, \widetilde{C}_i) x_i(t).$$

Приклад 3.7. Проінтегрувати неоднорідну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = x - y + \frac{1}{\cos t} \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

Спочатку розглядаємо відповідну однорідну систему диференціальних рівнянь та знаходимо її розв'язок.

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \Longrightarrow x = \frac{1}{2}(y' + y) \end{cases}$$

$$y'' = 2x' - y' = 2(x - y) - y' = y' + y - 2y - y'$$

$$y'' + y = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

$$y(t) = c_1 \cos t + x_2 \sin t$$

$$x(t) = \frac{1}{2}(-c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_1 \cos t + x_2 \sin t)$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(c_2 - c_1) \sin t + \frac{1}{2}(c_1 + c_2) \cos t \\ y(t) = c_1(t) \cos t + x_2(t) \sin t \end{cases}$$

Тоді припускаємо, що

$$c_1 = c_1(t), c_2 = c_2(t).$$

Тобто

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(c_2(t) - c_1(t)) \sin t + \frac{1}{2}(c_1(t) + c_2(t)) \cos t \\ y(t) = c_1 \cos t + x_2 \sin t \end{cases}$$

Складаємо систему для відшукання c_1, c_2:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(c_2' - c_1') \sin t + \frac{1}{2}(c_1' + c_2') \cos t = \frac{1}{\cos t} \quad / \cdot 2 \\ c_1' \cos t + x_2'(t) \sin t = 0 \end{cases}$$

$$c_1' = -\frac{\sin t}{\cos t} c_2'$$

$$c_2'(\sin t + \cos t) - \frac{\sin t}{\cos t} c_2'(-\sin t + \cos t) = \frac{2}{\cos t}$$

$$c_2'(\sin t + \cos t + \frac{\sin^2 t}{\cos t} - \sin t) = \frac{2}{\cos t \quad / \cdot \cos t}$$

$$c_2' = 2$$

$$c_2(t) = 2t + \tilde{c}_2$$

$$c_1' = -2\frac{\sin t}{\cos t}$$

$$c_t = 2\ln|\cos t| + \tilde{c}_1$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\left[(2\ln|\cos t| + \tilde{c}_1)(\cos t - \sin t) + (2t + \tilde{c}_2)(\cos t + \sin t)\right] \\ y(t) = (2\ln|\cos t| + \tilde{c}_1)\cos t + (2t + \tilde{c}_2)\sin t \end{cases}$$

3.7 Розв'язування лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами за допомогою експоненти матриці

Означення 3.7. Для кожної матриці $A \in M_n(\mathbb{C})$ поставимо у відповідність матрицю e^A з простору $M_n(\mathbb{C})$, яка є сумою матричного ряду:

$$e^A = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{k!}A^k + \ldots . \tag{3.25}$$

Матриця e^A називається *експонентою матриці* A.

Властивості експоненти матриці:

1. Для кожної матриці $A \in M_n(\mathbb{C})$ правильна рівність:

$$e^A = \lim_{m\to\infty}\left(E + \frac{1}{m}A\right)^m .$$

2. Якщо матриці A та B комутують, тобто $AB = BA$, то

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A.$$

3. Матриця e^A є невиродженою для кожної $A \in M_n(\mathbb{C})$, бо

$$dete^A = e^{trA},$$

де $trA = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ — слід матриці.

4. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

5. Експоненти подібних матриць є подібними матрицями, а саме, якщо

$$A = HBH^{-1}, \tag{3.26}$$

то $e^{At} = He^{Bt}H^{-1}$.

6. Для кожної невиродженої матриці $B \in M_n(\mathbb{C})$ існує така матриця A, що $B = e^A$. Матрицю A називають логарифмом матриці B і пишуть $A = \ln B$.

Нехай J — Жорданова нормальна форма матриці A, а H — перетворення подібності, яке зводить матрицю A до ЖНФ, тоді

$$A = HJH^{-1},$$

$$e^{At} = He^{Jt}H^{-1}. \tag{3.27}$$

Отже, співвідношення (3.27) зводить знаходження експоненти будь–якої матриці до відшукання її ЖНФ.

Якщо

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ & \ldots & \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = J,$$

тоді стовпці матриці H є власними лінійно незалежними векторами матриці A. Матриця H знаходиться однозначно з точністю до перестановки стовпців.

Нехай матриця A має n різних власних значень $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, яким відповідають лінійно незалежні власні вектори $h_1, \ldots, h_n$.

Матрицею перетворення H буде матриця, стовпці якої є власними векторами $h_1, \ldots, h_n$ матриці A:

$$H := (h_1, \ldots, h_n).$$

Будуємо ЖНФ, згідно формули

$$J = H^{-1}AH.$$

Тоді експонента ЖНФ матиме вигляд:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \tag{3.28}$$

а експонента матриці A обчислюється за формулою:

$$e^{At} = He^{Jt}H^{-1}. \tag{3.29}$$

Розглянемо загальний випадок відшукання експоненти матриці, коли ЖНФ є блочно–діагональною матрицею, тобто має вигляд:

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_l}(\lambda_l) \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

Запишемо матрицю (3.30) у вигляді:

$$e^{Jt} = diag\left\{e^{t\cdot J_{k_1}(\lambda_1)}, e^{t\cdot J_{k_2}(\lambda_2)}, \dots, e^{t\cdot J_{k_l}(\lambda_l)}\right\}, \tag{3.31}$$

а тоді

$$e^{At} = Hdiag\left\{e^{t\cdot J_{k_1}(\lambda_1)}, e^{t\cdot J_{k_2}(\lambda_2)}, \dots, e^{t\cdot J_{k_l}(\lambda_l)}\right\} H^{-1}.$$

При підстановці матриці (3.28) у (3.29) отримаємо:

$$J = diag\left\{J_{k_1}(\lambda_1), J_{k_2}(\lambda_2), \dots, J_{k_l}(\lambda_l)\right\}.$$

Нехай задано лінійну однорідну диференціальну систему (3.15). Загальний розв'язок системи (3.15) шукатимемо у вигляді:

$$x(t) = e^{At} \cdot C, \tag{3.32}$$

де e^{At} — матрична експонента матриці A диференціальної системи (3.15), а $C = col(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — вектор–стовпець довільних сталих.

Алгоритм побудови загального розв'язку лінійної однорідної системи (3.15):

1) знаходимо власні значення матриці A: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$;
2) знаходимо власні вектори $h_1, h_2, \ldots, h_n$, що відповідають власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$;
3) виписуємо матрицю перетворення $H = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$;
4) будуємо ЖНФ J вигляду (3.30);
5) згідно формули (3.31) знаходимо e^{Jx};
6) обчислюємо експоненту матриці A: $e^{Ax} = He^{Jx}H^{-1}$, яка буде фундаментальною матрицею для ЛОС (3.15);
7) записуємо загальний розв'язок системи (3.15) у вигляді (3.32).

Зауваження 3.2. Розглянемо особливості побудови ЖНР J та матриці e^{Jt} у випадку системи трьох диференціальних рівнянь.

1. Нехай $\lambda_i, i = \overline{1,3}$ — дійсні різні власні значення матриці A. Тоді ЖНФ J матиме вигляд:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

   а матриця e^{Jt} є такою:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}.$$

2. Нехай власними значеннями матриці A є такі: $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$. Тоді

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

а

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} cos\beta t & e^{\alpha t} sin\beta t \\ 0 & -e^{\alpha t} sin\beta t & e^{\alpha t} cos\beta t \end{pmatrix}.$$

3. Нехай $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \in \mathbb{R}$.

- Якщо двократному власному значенню λ відповідає два лінійно незалежні власні вектори. Тоді

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

а

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

- Якщо двократному власному значенню λ відповідає 1 власний та 1 приєднаний вектор. Тоді

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

а

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

4. Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \in \mathbb{R}$.

- Якщо трикратному власному значенню λ відповідає два лінійно незалежні власні та один приєднаний вектор. Тоді

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

а

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

- Якщо трикратному власному значенню λ відповідає 1 власний та 2 приєднані вектори. Тоді

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

а

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Приклад 3.8. Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$x' = Ax,$$

де $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ за допомогою експоненти матриці.

Знайдемо власні значення матриці A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_2 = 1.$$

Оскільки $rank(A - \lambda_1 E) = 1$, то знайденим власним значенням буде відповідати 1 власний вектор і 2 приєднані. Знайдемо їх:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} h_1 = 0 \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} h_2 = h_1 \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} h_3 = h_2 \Rightarrow h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Побудуємо на основі системи векторів h_1, h_2, h_3 матрицю H та обчислимо H^{-1}:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді ЖНФ, що відповідає знайденим власним значенням, буде такою:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Експоненту матриці A обчислимо згідно формули:

$$e^{At} = He^{Jt}H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}t^2 + t + 1\right) e^t & \left(\frac{1}{2}t^2 \frac{1}{2}t\right) e^t & \left(-\frac{1}{2}t^2 - t\right) e^t \\ 2te^t & (1-2t)e^t & -2te^t \\ \left(\frac{1}{2}t^2 - t\right) e^t & \left(-\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t\right) e^t & \left(-\frac{1}{2}t^2 + t + 1\right) e^t \end{pmatrix}.$$

А тоді загальний розв'язок заданої системи рівнянь буде:

$$x(t) = e^{At}C,$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}t^2 + t + 1\right) e^t & \left(\frac{1}{2}t^2 \frac{1}{2}t\right) e^t & \left(-\frac{1}{2}t^2 - t\right) e^t \\ 2te^t & (1-2t)e^t & -2te^t \\ \left(\frac{1}{2}t^2 - t\right) e^t & \left(-\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t\right) e^t & \left(-\frac{1}{2}t^2 + t + 1\right) e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Завдання для індивідуальної роботи №6

Завдання.

1. Розв'язати лінійну однорідну диференціальну систему.

2. Розв'язати лінійну однорідну диференціальну систему.

3. Розв'язати лінійну неоднорідну диференціальну систему методом варіації сталих.

4. Побудувати загальний розв'язок лінійної неоднорідної диференціальної системи методом невизначених коефіцієнтів (значення коефіцієнтів не знаходити).

5. Знайти експоненту матриці.

Варіант 1

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{cases} x' = -2x - y - z, \\ y' = z, \\ z' = 2x - z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = y + 2e^t, \\ y' = x + t^2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = x + z - y + e^t, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y + t. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$

Варіант 2

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = -2x - z, \\ y' = -x - 3z, \\ z' = 2x - y - z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = y - 5cost, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = x - 2y - z, \\ y' = y - x + z + e^{-t}sin2t, \\ z' = x - z. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

Варіант 3

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = -2 - y - z, \\ y' = -x - 2z, \\ z' = x. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 2x - y + z - 3tcost, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = x - y + 2z + 2e^{2t}. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$

Варіант 4

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = -y - z, \\ y' = -x + z, \\ z' = 2x - z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ y' = 2x - 2y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 3x - y + z, \\ y' = x + y + z - 2t + 1, \\ z' = 4x - y + 4z. \end{cases}$

5. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$

Варіант 5

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = x - y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = 3x + z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 4x + y - e^{2t}, \\ y' = y - 2x. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 4y - 2z - 3x + sint, \\ y' = z + x - tcost, \\ z' = 6x - 6y + 5z. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$

Варіант 6

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 3y - z, \\ z' = 2y + 3z - x. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 2y - x + 1, \\ y' = 3y - 2x. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = x - y - z, \\ y' = x + y - te^t sin2t, \\ z' = 3x + z. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

Варіант 7

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = 2x + 2z - y, \\ y' = x + 2z, \\ z' = y - 2x - z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ y' = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 2x + y - 5t^2, \\ y' = x + 3y - z, \\ z' = 2y + 3z - x + 1. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$

Варіант 8

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = 2x + 2y + z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 2x + y + e^t, \\ y' = -2x + 2t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 2x + 2z - y + 2sint, \\ y' = x + 2z + 5t, \\ z' = y - 2x - z. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

Варіант 9

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = 2x - y - z, \\ y' = x - z, \\ z' = 3x - y - 2z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = x - 5sint. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 4x - y - z, \\ y' = x + 2y - z + 7e^{3t}, \\ z' = x - y + 2z - cos4t. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$

Варіант 10

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = x - 2y + 2z, \\ y' = x + 4y - 2z, \\ z' = x + 5y - 3z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 2x - 4y, \\ y' = x - 3y + 3e^{t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 2x - y - z, \\ y' = 3x - 2y - 3z + t - 1, \\ z' = 2z - x + y. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

Варіант 11

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = -x - 2y + 2z, \\ y' = -2x - y + 2z, \\ z' = -3x - 2y + 3z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = y - 2x + 18t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = y - 2x - 2z, \\ y' = x - 2y + 2z + 3sint + 1, \\ z' = 3x - 3y + 5z. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Варіант 12

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = -3x + 2y + 2z, \\ y' = -3x - y + z, \\ z' = -x + 2y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = x + 2y + 16te^t, \\ y' = 2x - 2y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 3x - 2y - z - tcost, \\ y' = 3x - 4y - 3z - e^{2t}, \\ z' = 2x - 4y. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Варіант 13

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = 3x - 3y + z, \\ y' = 3x - 2y + 2z, \\ z' = -x + 2y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 2x + 4y - 8, \\ y' = 3x + 6y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2z - y + 3t^2 + 2t + 1. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Варіант 14

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = 2x + y - z, \\ y' = -x + z, \\ z' = x + y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 2x - 3y, \\ y' = x - 2y + 2sint. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = y - 2z - x, \\ y' = 4x + y + e^{-t}, \\ z' = 2x + y - z - cos2t. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Варіант 15

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = 2x + 2y + z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = x - y + 2sint, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 2y + 4z + 3t, \\ z' = x - z - 2e^{3t}. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

Варіант 16

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x + y, \\ z' = z - x. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x + 2e^t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 2x - y - z + tcos3t, \\ y' = 2x - y - 2z, \\ z' = 2z - x + y - 2sin3t. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Варіант 17

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = -2x + y + 2z, \\ y' = -x + 2z, \\ z' = -2x + 3z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 4x - 3y + sint, \\ y' = 2x - y - 2cost. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 4x - y + e^{4t}, \\ y' = 3x + y - z, \\ z' = x + z - 7te^{2t}. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$

Варіант 18

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = x - z, \\ z' = 2x + 2y - 3z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 2x + y + 2e^{t}, \\ y' = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 4x + 2y - 2z + 4, \\ y' = x + 3y - z, \\ z' = 3x + 3y - z - 2t. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

Варіант 19

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = 2x - z, \\ y' = x - y, \\ z' = 3x - y - z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = x - y + 8t, \\ y' = 5x - y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = y + e^{-t} sint, \\ y' = 6, \\ z' = z. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$

Варіант 20

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 2y + z, \\ z' = 2z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 2y - x - 5e^t sint. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = x + 3z + te^t cos3t, \\ y' = -x + 2y - 2sin3t, \\ z' = y - z. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

Варіант 21

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = x + 4y + 2z, \\ y' = 3x + y - z, \\ z' = 2x + y - 3z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = y + tg^2 t - 1, \\ y' = -x + tgt. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 3x - 2y - z - tcost, \\ y' = 3x - 4y - 3z - e^{2t}, \\ z' = 2x - 4y. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$

Варіант 22

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = 2x - y - z, \\ y' = x - z, \\ z' = 3x - y - 2z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 2y - x, \\ y' = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t+1}}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = x + z - y + e^t, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y + t. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$

Варіант 23

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = 2x + y - z, \\ y' = -x + z, \\ z' = x + y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ y' = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 2x - y - z + tcost, \\ y' = 2x - y - 2z, \\ z' = 2z - x + y - 2e^{3t}. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Варіант 24

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = 2x - y - z, \\ y' = x - z, \\ z' = 3x - y - 2z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -x - y + \frac{1}{cost}, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = x - y - z, \\ y' = x + y - te^t sin2t, \\ z' = 3x + z. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

Варіант 25

1. $x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x + y, \\ z' = z - x. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 2x - y + z - 3tcost, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = x - y + 2z + 2e^{2t}. \end{cases}$

5. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$

Список рекомендованої літератури

1. *Городецький Ю. Д.* Диференціальні рівняння/ Городецький Ю. Д., Кирилич В. М., Лавренюк В. М.—Л.: ЛНУ ім. Івана Франка, 2011.— 470 с.
2. *Кривошея С. А.* Диференціальні та інтегральні рівняння/ Кривошея С. А., Перестюк М. О., Бурим В. М.—- К.: Либідь, 2004.—408 с.
3. *Самойленко А. М.* Диференціальні рівняння/ Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. — К.: Либідь, 2003.-600с.
4. *Н. М. Матвеев.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.:Высшая школа,1967. — 564 с.
5. *Э. Камке.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1965.—703 с.
6. *В. Степанов.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: Гос. издательство технико–теоретической литературы, 1950. — 473 с.
7. *Самойленко А. М.* Диференціальні рівняння у прикладах і задачах/ Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О..:К.—Вища школа, 1994.—454 с.
8. А. Ф. Филипов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям, 2000.—174 с.

Зміст

Стор.

Відповідальний за випуск:
завідувач кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики
доктор фіз.–мат. наук, проф. Маринець В. В.

Автор: кандидат фіз.–мат. наук, Маринець К. В.

Рецензенти: канд. фіз.–мат. наук, доц. Глебена М. І.

канд. фіз.–мат. наук, доц. Погоріляк О. О.

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

з курсу "Диференціальні рівняння"

Частина II

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ.

СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
ПЕРШОГО ПОРЯДКУ