Міністерство освіти і науки України
ДВНЗ ”Ужгородський національний університет”

К. В. Маринець

Методичні рекомендації до практичних занять з курсу **”Динамічні системи”**

Траєкторії динамічних систем, їх властивості та стійкість

Ужгород—2017

УДК 517.9 (075.8)

ББК В161.6я73–1

Дане видання є методичною розробкою з курсу "Динамічні системи". Тут наводяться основні теоретичні відомості теорії динамічних систем, а саме: поняття системи автономних диференціальних рівнянь, розв'язків систем та їх властивостей тощо. На прикладах розглядаються способи дослідження станів рівноваги динамічних систем та стійкості, визначення типу їх фазових траєкторій.

Посібник містить задачі для самостійної та індивідуальної роботи студентів, а також може бути використаний викладачами під час проведення практичних занять.

Рецензенти: канд. фіз.–мат. наук, доц. Брила А. Ю.

канд. техн. наук, доц. Мулеса О. Ю.

Рекомендовано до друку Вченою радою математичного факультету ДВНЗ "Ужгородський національний університет" від 30 серпня 2017 р., протокол №1.
Рекомендовано до друку Науково–методичною комісією математичного факультету ДВНЗ "Ужгородський національний університет" 15 червня 2017 р., протокол №10.

1. Поняття динамічної системи, її розв'язків

ОЗНАЧЕННЯ 1. *Нормальна система диференціальних рівнянь називається* ***динамічною*** *(або автономною), якщо її праві частини не залежать явно від незалежної змінної; тобто динамічна система — це система вигляду*

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{1}$$

де функції f_i визначені й неперервні в області $D \subset \mathbb{R}^n$.

Оскільки праві частини системи (1) не залежать явно від незалежної змінної t, то, очевидно, ця система визначена в області $G = \mathbb{R} \times D$. Якщо $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \in G$, то початкові умови для системи (1) можна задати так:

$$x_1(t_0) = x_1^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0. \tag{2}$$

Надалі будемо користуватися векторним записом задачі Коші (1), (2)

$$\overrightarrow{x}' = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}),\ \overrightarrow{x}(t_0) = \overrightarrow{x}^0. \tag{3}$$

Припустимо, що $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\varphi}(t)$ — розв'язок системи (1), визначений на проміжку $[a, b]$. Графік цього розв'язку в області G, тобто множину точок

$$(t, \overrightarrow{x}) : t \in [a, b], \overrightarrow{x} = \overrightarrow{\varphi}(t),$$

називаємо ***інтегральною кривою*** системи (1).

ОЗНАЧЕННЯ 2. *Нехай $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\varphi}(t)$ — розв'язок системи (1), визначений на проміжку $[a, b]$. Образ l проміжку $[a, b]$ при відображенні $\overrightarrow{\varphi}$ називатимемо* ***траєкторією системи*** *(1).*

Очевидно, $l \in D$. Якщо зіставити поняття інтегральної кривої і траєкторії системи (1), то легко бачити, то траєкторія є проекцією інтегральної кривої на простір $\mathbb{R}^n$ змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у напрямі осі Ot.

Оскільки праві частини системи (1) визначені і неперервні в області $D \subset \subset \mathbb{R}^n$, то кожній точці $\overrightarrow{x}^0$ поставимо у відповідність вектор

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}^0) = \left(\overrightarrow{f}_1(\overrightarrow{x}^0, \ldots, \overrightarrow{f}_n(\overrightarrow{x}^0)\right),$$

який виходить з точки $\overrightarrow{x}^0$. Сукупність цих векторів утворює в області D векторне поле системи (1). Якщо $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\varphi}(t)$ — розв'язок задачі Коші (3) і l — його траєкторія, то у момент t траєкторія l проходить через точку $P(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in D$. Але $\overrightarrow{\varphi}'(t)$ виражає вектор швидкості руху точки вздовж траєкторії l у момент t, бо

$$\frac{d\overrightarrow{\varphi}(t)}{dy} \equiv \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\varphi}(t)).$$

Тому вектор швидкості руху точки вздовж траєкторії l в кожній точці P цієї траєкторії збігається з відповідним вектором поля $\overrightarrow{f}(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$.

Простір розмірності n, в якому розв'язок динамічної системи (1) інтерпретується як траєкторія, а сама динамічна система — як веторне поле, називається ***фазовим простором*** системи (1). Траєкторії називаються ***фазовими траєкторіями***, вектори $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{y})$ називаються ***фазовими швидкостями***.

ОЗНАЧЕННЯ 3. *Якщо $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\varphi}(t)$, $t \in [a, b]$, — розв'язок системи (1) такий, що $\overrightarrow{\varphi}(t) = \overrightarrow{a}$, $t \in [a, b]$, то розв'язок $\overrightarrow{\varphi}$ називається* ***стаціонарним розв'язком*** *динамічної системи, а точка $\overrightarrow{a}$ фазового простору —* ***станом рівноваги*** *динамічної системи.*

ТЕОРЕМА 1. *Для того, щоб точка $\overrightarrow{a}$ була станом рівноваги системи (1), необхідно й достатньо, щоб $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) = 0$.*

ОЗНАЧЕННЯ 4. *Розв'язок $\overrightarrow{\varphi}$ системи (1), для якого*

$$\overrightarrow{\varphi}(t_1) = \overrightarrow{\varphi}(t_2),\ t_1 \neq t_2,$$

називається ***періодичним****, а його траєкторія —* ***замкненою траєкторією*** *або* ***циклом****.*

2. Дослідження розв'язків динамічних систем

ОЗНАЧЕННЯ 5. ***Стійкою інтегральною кривою*** *називають таку інтегральну криву, що всі достатньо близькі до неї при $t = t_0$ інтегральні криві залишаються близькими до неї при всіх $t \geq 0$.*

Відповідний їм розв'язок називається ***стійким розв'язком***.

У протилежному випадку кажуть, що ***розв'язок нестійкий.***

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\overrightarrow{x}' = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{x}, \overrightarrow{F} \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Нехай $\overrightarrow{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ є розв'язком системи (4).

ОЗНАЧЕННЯ 6. *Розв'язок $\overrightarrow{\varphi}(t)$ системи (4) називається* ***стійким за Ляпуновим****, якщо*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \;\; \forall t \geq t_0 \;\; ||x(t_0) - \phi(t_0)|| < \delta \;\; ||x(t) - \psi(t)|| < \varepsilon, \tag{5}$$

ОЗНАЧЕННЯ 7. *Розв'язок $\overrightarrow{\varphi}(t)$ системи (4) називається* ***асимптотично стійким****, якщо для кожної компоненти розв'язку*

1. Він є стійким за Ляпуновим.
2. Має місце умова:
$$\lim_{m \to \infty} ||x_i(t) - \varphi_i(t)|| = 0. \tag{6}$$

Дослідження на стійкість будь–якого розв'язку системи (4) можна звести до дослідження на стійкість тривіального розв'язку цієї системи.

Нехай
$$\overrightarrow{z}(t) = \overrightarrow{x}(t) - \overrightarrow{\varphi}(t) \tag{7}$$
— нова шукана функція. Підставимо її в (4):

$$\overrightarrow{z}'(t) + \overrightarrow{\varphi}'(t) = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{z}(t) + \overrightarrow{\varphi}(t));$$

$$\overrightarrow{z}'(t) + \overrightarrow{F}(\overrightarrow{\varphi}(t)) = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{z}(t) + \overrightarrow{\varphi}(t));$$
$$\overrightarrow{z}'(t) = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{z}(t) + \overrightarrow{\varphi}(t)) - \overrightarrow{F}(\overrightarrow{\varphi}(t)). \tag{8}$$

Дослідження на стійкість розв'язку $\overrightarrow{\varphi}(t)$ системи (4) можна замінити на дослідження стійкості тривіального розв'язку системи (8).

Отже, будемо досліджувати на стійкість систему диференціальних рівнянь (4), для якої $\overrightarrow{F}(0) = 0$.

ОЗНАЧЕННЯ 8. *Тривіальний розв'язок системи називається* ***стійким за Ляпуновим****, якщо*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ \forall t \geq t_0\ ||x(t_0)|| < \delta\ ||x(t)|| < \varepsilon. \tag{9}$$

ОЗНАЧЕННЯ 9. *Тривіальний розв'язок системи називається* ***асимптотично стійким****, якщо*

1. Він є стійким за Ляпуновим.
2. Виконується умова:
$$\lim_{m\to\infty} ||x(t)|| = 0. \tag{10}$$

Дослідити на асимтотичну стійкість нелінійну систему (4) можна шляхом її лінеаризації.

Відповідна лінійна модель з певною точністю може описувати поведінку нелінійної моделі.

Нехай

$$A = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{x=0}. \tag{11}$$

Інакше кажучи, розкладемо праву частину системи (4) у ряд Тейлора в околі т. $x = 0$:

$$x' = Ax + R(x), \tag{12}$$

де $R(x)$ містить тільки нелінійні члени розкладу в ряд Тейлора.

ТЕОРЕМА 2. *Якщо дійсні частини усіх власних значень матриці A системи* (12) *від'ємні, то тривіальний розв'язок нелінійної системи* (4) *є асимптотично стійким. Якщо серед власних значень матриці A системи* (12) *є хоча б одне з додатною дійсною частиною, то тривіальних розв'язок системи* (4) *нестійкий.*

Якщо серед власних значень матриці A системи (12) є хоча б одне з нульовою дійсною частиною, а решта мають від'ємні дійсні частини, то тривіальний розв'язок системи (4) може бути як стійким (асимптотично стійким), так і нестійким, тобто з факту стійкості або нестійкості системи першого наближення (12) не можна зробити висновок про стійкість (нестійкість) тривіального розв'язку системи (4). У цьому випадку, який називають *критичним*, дослідження на стійкість за першим наближенням неможливе й потрібно використовувати властивості наступних (нелінійних) членів розкладу або інші методи.

Розглянемо тепер таку автономну систему диференціальних рівнянь

$$x' = f(x), x, f \in \mathbb{R}^n, \tag{13}$$

розв'язком якої є значення $x = x_0$, тобто

$$f(x_0) \equiv 0. \tag{14}$$

Потрібно дослідити поведінку розв'язків (фазових кривих) в околі положення рівноваги.

З цією метою необхідно замінити нелінійну систему (13) деякою лінійною системою, яка є достатньо близькою до заданої в околі положення рівноваги (точки $x = x_0$).

З цією метою лінеаризуємо нелінійну систему в околі положення рівноваги:

$$f(x) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0) + R(x - x_0), \tag{15}$$

де R містить степені $(x - x_0)$ від 2–го порядку і вище.

З урахуванням (15) система диференціальних рівнянь (13) перепишеться у вигляді:

$$x' = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0) + R(x - x_0). \tag{16}$$

Система (16) є лінеаризованою в околі точки $x = x_0$ системою, яка відповідає автономній диференціальній системі (13).

Позначимо через

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} \tag{17}$$

якобіан функції f.

Тоді отримаємо, що дослідження на стійкість положення рівноваги системи (13) зводиться до дослідження на стійкість тривіального розв'язку системи

$$x' = Ax. \tag{18}$$

ТЕОРЕМА 3. *Якщо дійсні частини усіх власних значень матриці A вигляду (17) від'ємні, то положення рівноваги $x = x_0$ асимптотично стійке; якщо серед власних значень матриці A є хоча б одне з додатною дійсною частиною, то положення рівноваги $x = x_0$ нестійке.*

Розглянемо нелінійну автономну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases} \tag{19}$$

ОЗНАЧЕННЯ 10. ***Особливою точкою*** *системи* (19) *будемо називати точку* (x_0, y_0) *таку, що*

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Для того, щоб дослідити фазові криві системи (19) потрібно:

1. Знайти положення рівноваги системи.
2. Лінеаризувати систему в околі цих положень рівноваги.
3. Дослідити тип положень рівноваги.

Лінеаризацією для заданої нелінійної автономної системи (19) в околі положення рівноваги (x_0, y_0) є система:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0), \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0). \end{cases} \tag{21}$$

Представимо систему диференціальних рівнянь (21) у вигляді:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)}. \tag{23}$$

Дослідження положення рівноваги (x_0, y_0) системи (22) еквівалентно дослідженню положення рівноваги $(0,0)$ системи:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad (24)$$

де $u = x - x_0$, $v = y - y_0$.

ТЕОРЕМА 4. *Положення рівноваги* (x_0, y_0) *нелінійної диференціальної системи* (19) *є:*

1. Асимптотично стійким, якщо дійсні частини власних значень матриці A вигляду (23) *від'ємні.*

2. Нестійким, якщо дійсна частина хоча б одного власного значення матриці A додатня.

3. Якщо дійсна частина хоча б одного власного значення матриці A дорівнює нулеві, то дослідження на стійкість за першим наближенням є неможливим. Потрібне застосування додаткових критеріїв.

ПРИКЛАД 1. *Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - ln(1+y) + sinx, \\ \frac{dy}{dt} = e^x + sin(x+y) - cos^2 y. \end{cases} \qquad (25)$$

На основі (25) побудуємо систему першого наближення вигляду (21). Одержимо:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (2 + cosx)|_{(0,0)} x - \frac{1}{1+y}\Big|_{(0,0)} y\ , \\ \frac{dy}{dt} = (e^x + cos(x+y))|_{(0,0)} x + (cos(x+y) + 2sin2y)|_{(0,0)} y. \end{cases}$$

Таким чином, одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y, \end{cases}$$

матрицею якої є

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення матриці A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm i.$$

Оскільки $Re(\lambda_{1,2}) = 2 > 0$, нульовий розв'язок системи (25) є нестійким.

3. Фазові портрети станів рівноваги

Розглянемо динамічну диференціальну систему:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{26}$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — невироджена матриця з дійсними сталими компонентами.

Системі (26) відповідає одне рівняння з дробово–лінійною правою частиною

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}. \tag{27}$$

Особливою точкою системи диференціальних рівнянь (26) будемо називати точку (x_0, y_0), яка є розв'язком системи алгебраїчних рівнянь:

$$\left\{ a_{11}x + a_{12}y = 0, a_{21}x + a_{22}y = 0. \right. \tag{28}$$

Оскільки система (28) є лінійною однорідною диференціальною системою, а її детермінант відмінний від нуля, то особливою точкою системи (26) буде $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Позначимо через λ_1, λ_2 корені характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Розглянемо можливі випадки:

I. Нехай λ_1, λ_2 дійсні, різні та $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$. Тип особливої точки — ***вузол.***

1. Якщо $\lambda_1 > 0$ та $\lambda_2 > 0$, то *вузол є нестійким* і рух по фазовим кривим іде від початку координат на ∞.

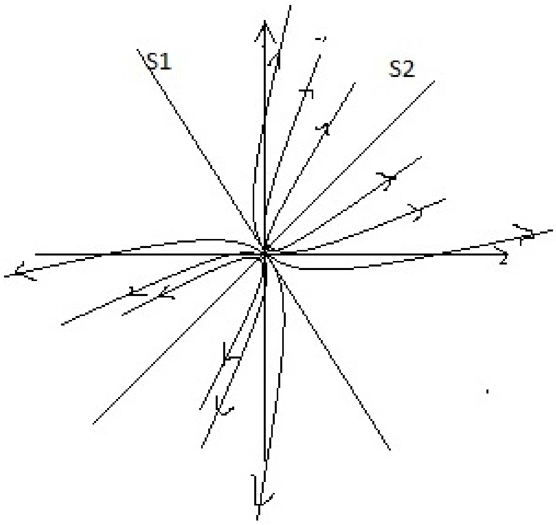

Рис. 1:

2. Якщо $\lambda_1 < 0$ та $\lambda_2 < 0$, то *вузол є асимптотично стійким* і рух по фазовим кривим іде від ∞ до початку координат.

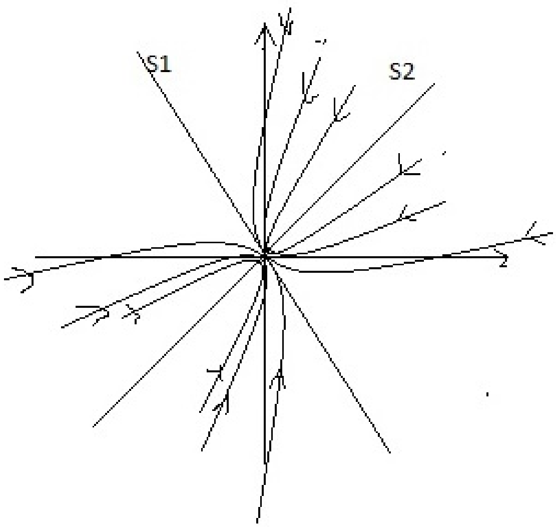

Рис. 2:

Напрямні S_1 та S_2 шукаємо у вигляді $y = kx$, де кутовий коефіцієнт k обчислюється підстановкою значення y у рівняння (27).

II. Нехай λ_1, λ_2 дійсні, різні та $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. Тип особливої точки — ***сідло.*** Оскільки одне з власних значень завжди додатне, то *сідло нестійке.*

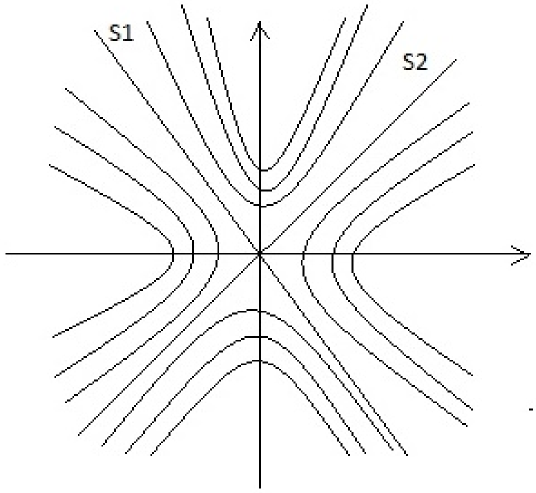

Рис. 3:

III. Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. Тип особливої точки — ***вироджений вузол.***

1. Якщо $\lambda > 0$, то *вироджений вузол нестійкий* і рух по фазовим кривим іде від початку координат на ∞.

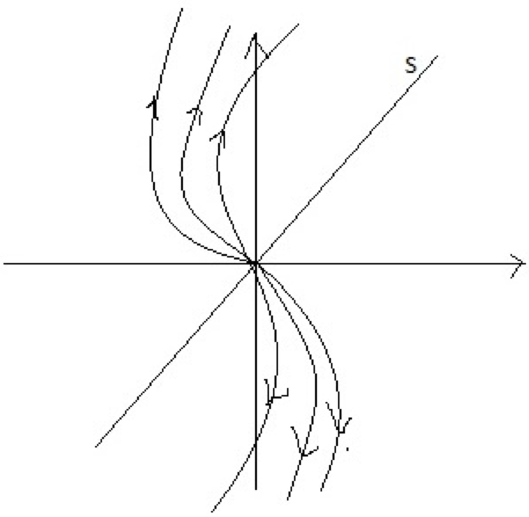

Рис. 4:

2. Якщо $\lambda < 0$, то *вироджений вузол є асимптотично стійким* і рух по фазовим кривим іде від ∞ до початку координат.

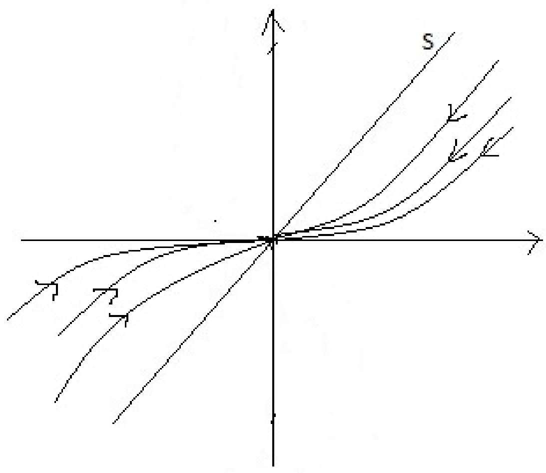

Рис. 5:

IV. Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ і система диференціальних рівнянь (26) має вигляд:

$$\begin{cases} x' = ax, \\ y' = ay. \end{cases}$$

Тип особливої точки ***дикритичний вузол.***

1. Якщо $\lambda > 0$, то *дикритичний вузол нестійкий* і рух по фазовим кривим іде від початку координат на ∞.

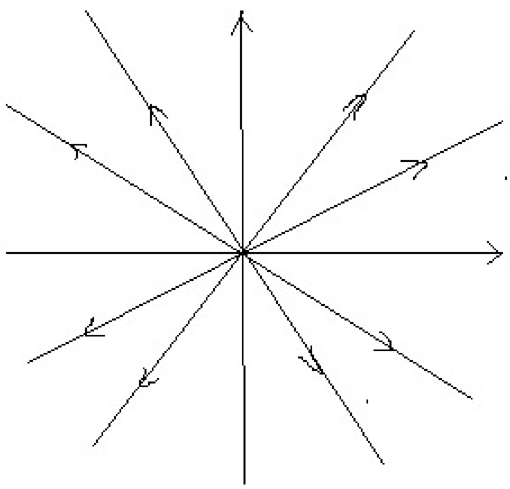

Рис. 6:

2. Якщо $\lambda < 0$, то *дикритичний вузол є асимптотично стійким* і рух по фазовим кривим іде від ∞ до початку координат.

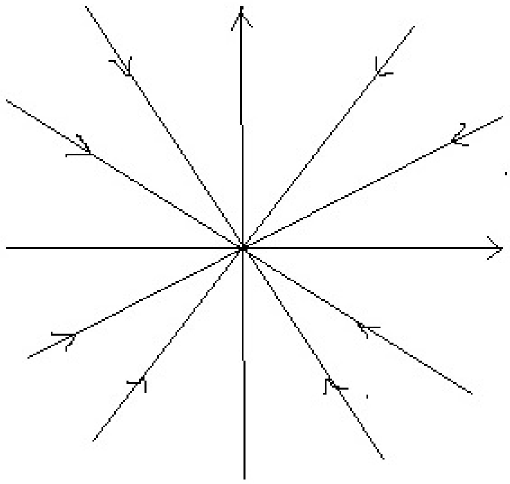

Рис. 7:

V. Нехай $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$. Тип особливої точки — ***пряма положень рівноваги.***

1. Якщо $\lambda_2 > 0$, то *пряма положень рівноваги нестійка* і рух по фазовим кривим іде від початку координат на ∞.

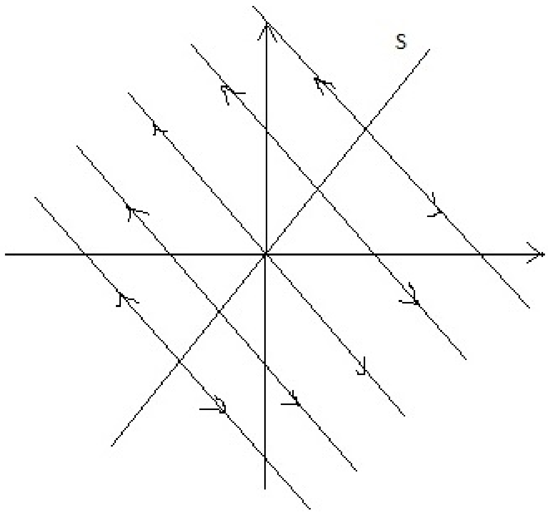

Рис. 8:

2. Якщо $\lambda_2 < 0$, то *пряма положень рівноваги є асимптотично стійкою* і рух по фазовим кривим іде від ∞ до початку координат.

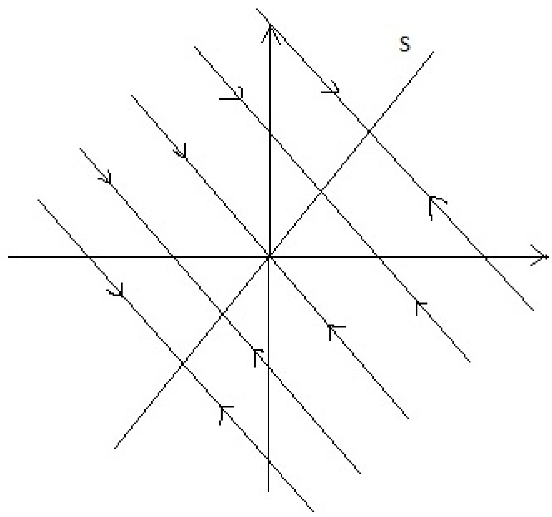

Рис. 9:

VI. Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Тип особливої точки — ***прямі положень рівноваги.*** Прямі положень рівноваги *стійкі.*

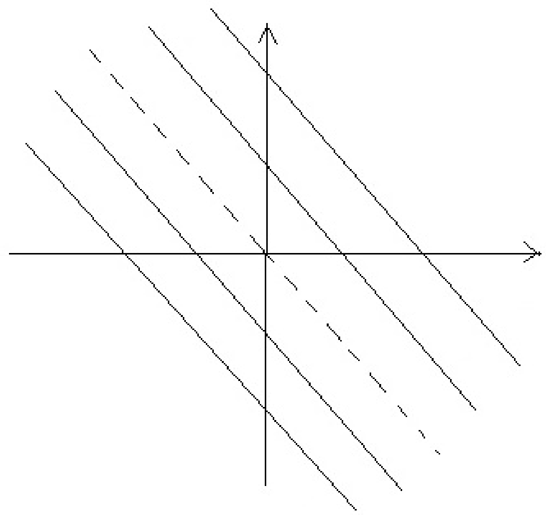

Рис. 10:

VII. Нехай $\lambda_1 = i\beta, \lambda_2 = -i\beta$. Тип особливої точки — ***центр.*** Центр завжди стійкий.

Для відшукання напрямної S досліджуємо на екстремум функцію:

$$f(x, y) := x^2 + y^2 \to extr;$$

$$f' = 2xx' + 2yy' = 0 \Rightarrow 2x(a_{11}x + a_{12}y) + 2y(a_{21}x + a_{22}y) = 0.$$

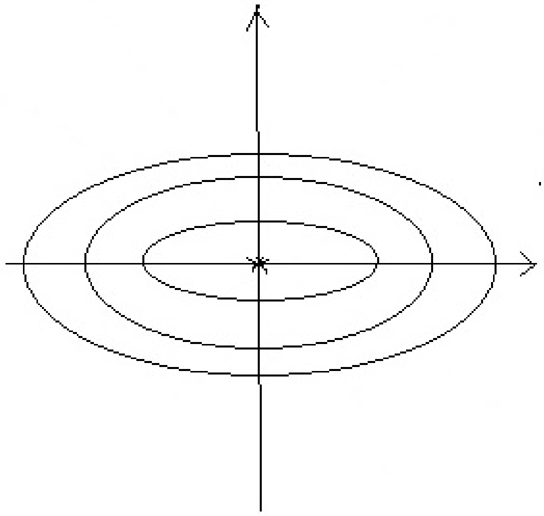

Рис. 11:

VIII. Нехай $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$. Тип особливої точки — ***фокус.***

1. Якщо $Re(\lambda_1) = \alpha > 0$, то *фокус нестійкий* і рух по фазовим кривим іде від початку координат на ∞.

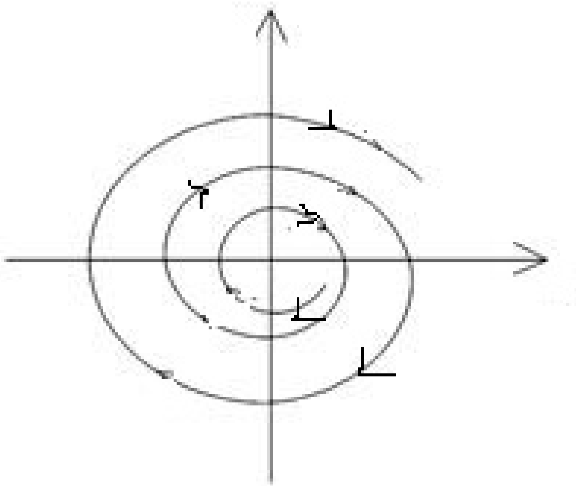

Рис. 12:

2. Якщо $Re(\lambda_1) = \alpha < 0$, то *фокус є асимптотично стійким* і рух по фазовим кривим іде від ∞ до початку координат.

ПРИКЛАД 2. *Визначити тип положення рівноваги та побудувати його фазовий портрет:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases} \tag{29}$$

Особливою точкою заданої системи є точка $(0, 0)$. Визначимо її тип.

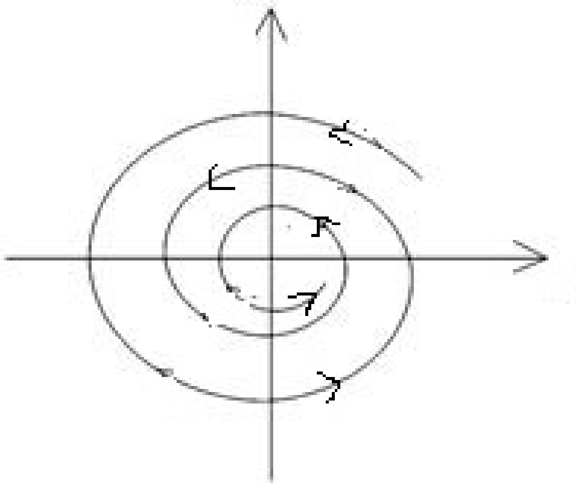

Рис. 13:

Знайдемо власні значення матриці заданої системи:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda. \end{vmatrix} = 0.$$

Отримаємо рівняння:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

розв'язками якого є

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$$

Таким чином, тип особливої точки вузол, причому він нестійкий.

Для його побудови потрібно 2 напрямні. Кожну з них шукаємо у вигляді:

$$S : y = kx.$$

Перейдемо від системи (29) до диференціального рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x}$$

та підставимо значення

$$y = kx, y' = k.$$

Одержимо:

$$k = \frac{x+2kx}{x} \Rightarrow k = 1+2k,$$

$$k = -1.$$

Отже, рівняння напрямної є таким:

$$S_1 : y = -x.$$

Другою напрямною буде

$$S_2 : x = 0.$$

При цьому фазовий портрет особливої точки буде наступним:

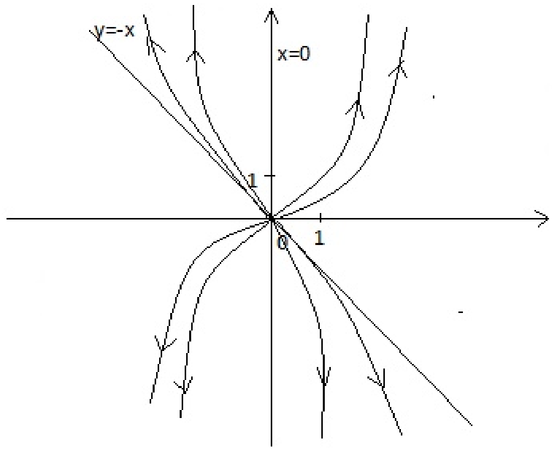

Рис. 14:

4. Системи рівнянь у симетричній формі

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (СДР):

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots \\ \frac{dx_n}{dt} = F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{30}$$

або еквівалентний їй запис

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X).$$

СДР (30) є системою диференціальних рівнянь n–го порядку у нормальному вигляді.

Сукупність функцій

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(t, c_1, c_2, \ldots, c_n), \\ x_2 = \phi_2(t, c_1, c_2, \ldots, c_n), \\ \ldots \\ x_n = \phi_n(t, c_1, c_2, \ldots, c_n), \end{cases} \tag{31}$$

такі, що ϕ_i є неперервно диференційовними функціями в D і при підстановці їх у (30) перетворюють кожне з рівнянь системи на тотожність, називається *загальним розв'язком.*

Систему (31) можна розв'язати відносно довільних сталих c_i:

$$\begin{cases} c_1 = \psi_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ c_2 = \psi_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots \\ c_n = \psi_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{32}$$

Розглянемо систему функцій (32). Праві частини цієї системи не є тотожньо рівними константі, а перетворюються на константу тільки тоді, коли замість x_i підставити будь–який частинний розв'язок системи.

Таку систему функцій називають *загальним інтегралом* системи (30), а рівності

$$\psi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_i, i = \overline{1, n} \tag{33}$$

називають *першими інтегралами системи.*

Функція $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається *інтегралом системи (30)*, якщо вона перетворюється на сталу при заміні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на будь–який частинний розв'язок системи (30).

Рівність

$$\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = c, \tag{34}$$

де $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є інтегралом системи, називається *першим інтегралом системи.*

Загальним інтегралом системи (30) називається сукупність (32) з n незалежних перших інтегралів, яка є розв'язаною відносно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причому в результаті одержуємо загальний розв'язок 31) системи.

Перші інтеграли, які утворюють загальний інтеграл, є лінійно незалежними, якщо існує функція

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = const. \tag{35}$$

Диференціальна система n–го порядку має рівно n незалежних перших інтегралів.

Система вигляду

$$\frac{dy_1}{g_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \frac{dy_2}{g_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \\ = \ldots = \frac{dy_{n+1}}{g_{n+1}(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)} \tag{36}$$

називається *системою диференціальних рівнянь у симетричній формі порядку* n.

Покажемо, що будь–яку нормальну систему (30) можна звести до симетричної системи (36) і навпаки.

Із (30) одержимо:

$$\begin{cases} dt = \frac{dx_1}{F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \\ dt = \frac{dx_2}{F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \\ \ldots \\ dt = \frac{dx_n}{F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \end{cases} \tag{37}$$

Як видно із одержаних рівностей, система (37) є еквівалентною диференціальній системі у симетричній формі вигляду:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \\ = \ldots = \frac{dx_n}{F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{38}$$

Нехай функція $\phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є спільним знаменником функцій $F_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$. Домножимо знаменники дробів у (38) на $\phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{\phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \\ = \frac{dx_2}{\phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \\ = \frac{dx_n}{\phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)}. \quad (39)$$

У рівностях (39) зробимо заміну змінних:

$$\begin{cases} y_1(t) = t, \\ y_2(t) = x_1(t), \\ \dots \\ y_{n+1}(t) = x_n(t); \end{cases} \quad (40)$$

та

$$\begin{cases} g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \\ g_{n+1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (41)$$

Заміни (40), (41) зводять систему (39) до системи (36).

Зведемо тепер симетричну систему (36) до нормальної системи (30).

У симетричній СДР усі змінні є рівносильними. Без обмеження загальності припустимо, що $g_{n+1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ в області визначення системи (36). Тоді:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dy_{n+1}} = \frac{g_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n)}{g_{n+1}(t, y_1, y_2, \dots, y_n)}, \\ \frac{dy_2}{dy_{n+1}} = \frac{g_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n)}{g_{n+1}(t, y_1, y_2, \dots, y_n)}, \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dy_{n+1}} = \frac{g_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n)}{g_{n+1}(t, y_1, y_2, \dots, y_n)}. \end{cases} \quad (42)$$

У виразах (42) введемо заміну змінних:

$$\begin{cases} x_1(t) = y_1(t), \\ x_2(t) = y_2(t), \\ \dots \\ t = y_{n+1}(t); \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{g_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n)}{g_{n+1}(t, y_1, y_2, \dots, y_n)}, \\ F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{g_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n)}{g_{n+1}(t, y_1, y_2, \dots, y_n)}, \\ \dots \\ F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{g_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n)}{g_{n+1}(t, y_1, y_2, \dots, y_n)}. \end{cases} \tag{44}$$

Заміни змінних (43), (44) зводять симетричну СДР (36) до нормальної системи (30).

Інтегровною комбінацією будемо називати вираз вигляду:

$$\frac{dx_1}{\phi_1(x_1)} = \frac{dx_2}{\phi_2(x_2)}, \tag{45}$$

звідки

$$\int \frac{dx_1}{\phi_1(x_1)} - \int \frac{dx_2}{\phi_2(x_2)} = c. \tag{46}$$

Якщо знайти n незалежних інтегровних комбінацій симетричної системи, то тим самим ми знайдемо n незалежних перших інтегралів, тобто побудуємо загальний інтеграл СДР у симетричній формі.

Для відшукання інтегровної комбінації надалі використовуватимемо *правило рівних дробів*, яке задається рівністю:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n}, \tag{47}$$

де $a_i, b_i, k_i = const, i = \overline{1, n}$.

ПРИКЛАД 3. *Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:*

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}.$$

Виділимо в заданій системі 2 інтегровні комбінації. Першою буде:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz},$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow ln|x| = ln|y| + lnC_1,$$

$$x = C_1 y, \tag{48}$$

$$C_1 = \frac{x}{y}$$

— перший проміжний інтеграл.

Друга інтегровна комбінація є такою:

$$\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}. \tag{49}$$

Підставимо (48) у (49). Одержимо:

$$\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-C_1 y^2},$$

$$C_1 y dy = -dz \Rightarrow C_2 = \frac{C_1 y^2}{2} + z,$$

$$C_2 = \frac{xy}{2} + z.$$

Таким чином, загальним розв'язком системи буде

$$\begin{cases} C_1 = \frac{x}{y}, \\ C_2 = \frac{xy}{2} + z. \end{cases}$$

Завдання для самостійної роботи

Варіант 1

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = 2xy - x + y, \\ y' = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{dx}{2y - z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{2x + y}{3x + 4y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{2y - x}{3x + 6}.$$

Варіант 2

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$\begin{cases} x' = ax - 2y + x^2, \\ y' = x + y + xy. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{x - 4y}{2y - 3x}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}.$$

Варіант 3

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = ax + y + x^2, \\ y' = x + ay + y^2. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{dx}{y + z} = \frac{dy}{x + z} = \frac{dz}{x + y}.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{x + 4y}{2x + 3y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}.$$

Варіант 4

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = e^{x+2y} - cos3x, \\ y' = \sqrt{4+8x} - 2e^{y}. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{x+y+z} = \frac{dz}{x-y}.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{x-2y}{3x-4y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{x^2+y^2-2}{x-y}.$$

Варіант 5

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$\begin{cases} x' = x + ay + y^2, \\ y' = bx - 3y - x^2. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{u} = \frac{dz}{x} = \frac{du}{y}.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{x+4y}{2x+3y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{2y}{x^2-y^2-1}.$$

Варіант 6

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = ln(4y + e^{-3x}), \\ y' = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{dx}{y-u} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{u-y} = \frac{du}{x-z}.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{x-2y}{3x-4y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{y + \sqrt{1+2x^2}}{x+y+1}.$$

Варіант 7

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$\begin{cases} x' = y + sinx, \\ y' = ax + by. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{2x-y}{x-y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$\begin{cases} x' = x^2 - y, \\ y' = ln(1 - x - x^2) - ln3. \end{cases}$$

Варіант 8

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = ln(3e^y - 2cosx), \\ y' = 2e^x - \sqrt[3]{8+12y}. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{dx}{x^2 - y^2} = \frac{dy}{x} = -\frac{dz}{y}.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{y - 2x}{2y - 3x}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$\begin{cases} x' = ln(2 - y^2), \\ y' = e^x - e^y. \end{cases}$$

Варіант 9

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$\begin{cases} x' = 2e^{-x} - \sqrt{4 + ay}, \\ y' = ln(1 + 9x + ay). \end{cases}$$

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy + z}.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{4y - 2x}{x + y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$\begin{cases} x' = (2x - y)(x - 2), \\ y' = xy - 2. \end{cases}$$

Варіант 10

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = tg(y-x), \\ y' = 2^y - 2cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right). \end{cases}$$

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{y}{x}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$\begin{cases} x' = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2, \\ y' = arctg(x^2 + xy). \end{cases}$$

Варіант 11

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$\begin{cases} x' = ln(e + ax) - e^y, \\ y' = bx + tgy. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{dx}{x + y^2 + z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{4x - y}{3x - 2y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$\begin{cases} x' = x^2 - y, \\ y' = x^2 - (y-2)^2. \end{cases}$$

Варіант 12

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = 2xy - x + y, \\ y' = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$-\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy - 2z^2} = \frac{dz}{xz}.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$\begin{cases} x' = 3x, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$\begin{cases} x' = ln\frac{y^2 - y + 1}{3}, \\ y' = x^2 - y^2. \end{cases}$$

Варіант 13

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$\begin{cases} x' = ax - 2y + x^2, \\ y' = x + y + xy. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{dx}{x(z - y)} = \frac{dy}{y(y - x)} = \frac{dz}{y^2 - xz}.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x. \end{cases}$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$\begin{cases} x' = ln(1 - y + y^2), \\ y' = 3 - \sqrt{x^2 + 8y}. \end{cases}$$

Варіант 14

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = ax + y + x^2, \\ y' = x + ay + y^2. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = -\frac{dy}{y(z^2 + x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = -6x - 5y. \end{cases}$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$\begin{cases} x' = \sqrt{(x - y)^2 + 3} - 2, \\ y' = e^{y^2 - x} - e. \end{cases}$$

Варіант 15

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = e^{x+2y} - cos3x, \\ y' = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{dx}{2y - z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{2y - x}{3x + 6}.$$

Варіант 16

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$\begin{cases} x' = x + ay + y^2, \\ y' = bx - 3y - x^2. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$\begin{cases} x' = -2x - 5y, \\ y' = 2x + 2y. \end{cases}$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}.$$

Варіант 17

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = ln(4y + e^{-3x}), \\ y' = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{dx}{y - x} = \frac{dy}{x + y + z} = \frac{dz}{x - y}.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = y - x. \end{cases}$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}.$$

Варіант 18

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$\begin{cases} x' = y + sinx, \\ y' = ax + by. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{u} = \frac{dz}{x} = \frac{du}{y}.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 4y - 6x. \end{cases}$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x - y}.$$

Варіант 19

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = ln(3e^y - 2cosx), \\ y' = 2e^x - \sqrt[3]{8 + 12y}. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{dx}{y - u} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{u - y} = \frac{du}{x - z}.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$\begin{cases} x' = y - 2x, \\ y' = 2y - 4x. \end{cases}$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}.$$

Варіант 20

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$\begin{cases} x' = 2e^{-x} - \sqrt{4 + ay}, \\ y' = ln(1 + 9x + ay). \end{cases}$$

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{2x + y}{3x + 4y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{y + \sqrt{1 + 2x^2}}{x + y + 1}.$$

Список використаної літератури

1. *Городецький Ю. Д.* Диференціальні рівняння/ Городецький Ю. Д., Кирилич В. М., Лавренюк В. М.—Л.: ЛНУ ім. Івана Франка, 2011.— 470 с.
2. *Кривошея С. А.* Диференціальні та інтегральні рівняння/ Кривошея С. А., Перестюк М. О., Бурим В. М.—- К.: Либідь, 2004.—408 с.
3. *Самойленко А. М.* Диференціальні рівняння/ Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. — К.: Либідь, 2003.-600с.
4. *Н. М. Матвеев.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.:Высшая школа,1967. — 564 с.
5. *Э. Камке.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1965.—703 с.
6. *В. Степанов.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: Гос. издательство технико–теоретической литературы, 1950. — 473 с.
7. *Самойленко А. М.* Диференціальні рівняння у прикладах і задачах/ Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О..:К.—Вища школа, 1994.—454 с.
8. А. Ф. Филипов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям, 2000.—174 с.

Зміст

Відповідальний за випуск:
завідувач кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики
доктор фіз.–мат. наук, проф. Маринець В. В.

Автор: кандидат фіз.–мат. наук, Маринець К. В.

Рецензенти: канд. фіз.–мат. наук, доц. Брила А. Ю.

канд. техн. наук, доц. Мулеса О. Ю.

Методичні рекомендації
до практичних занять
з курсу
"Динамічні системи"

Траєкторії динамічних систем,
їх властивості та стійкість