АНАЛІТИЧНЕ РІШЕННЯ КВАНТОВОМЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ЗВ'ЯЗАНИМИ КАНАЛАМИ

І.І. Гайсак[1], В.І. Жаба[1], П. Мурін[2]

[1] Ужгородський національний університет, 88000, Ужгород, вул.Волошина, 54
[2] Університет П.Й. Шафарика, м. Кошице (Словакія)
e-mail: haysak@univ.uzhgorod.ua, viktorzh@meta.ua

В роботі розглянуто потенціальну кваркову модель мезонів, що складаються з кварків різних ароматів. В таких системах існують фізичні стани з визначеним орбітальним моментом та сумішшю синглетної та триплетної спінових компонент. Такі змішані стани описуються системою двох зв'язаних рівнянь Шредінгера. Для випадку, коли каналові потенціали суть колоноподібними, наведено алгоритм побудови аналітичного рішення. Власні значення в такій системі двозначні. На прикладі дивних мезонів продемонстровано конкретні розрахунки власних значень та власних функцій. Отримані рішення можуть слугувати в якості базиса для наближених методів в двоканальних системах такого роду.

Вступ

Добре відомо, що і в класичному, і в квантовому випадках рівняння руху можна розв'язати точно лише для відносно невеликого числа фізично цікавих систем. Але точні рішення часто слугують в якості вихідного пункту для наближених обчислень. Крім того, вони можуть допомогти у визначені меж застосовності різних наближених методів.

Для рівняння Шредінгера першими були знайдені рішення для найпростіших потенціалів, які зводять рівняння руху до диференціальних рівнянь для відомих елементарних і спеціальних функцій. Прикладом може бути потенціал

$$V(r) = ar^n ,$$

де *n=2* – осциляторний, *n=1* – лінійний, *n=0* – постійний, *n=-1* – кулонівський, *n=-2* – відцентровий та ін. [1, 2].

Клас задач, який допускає рішення в замкнутому аналітичному виді, для систем зв'язаних рівнянь значно бідніший, ніж при єдиному каналі [3, 4]. В той же час необхідність в простих моделях для дослідження складних об'єктів (із сильним зв'язком каналів) є ще більш насущною. Багатоканальний підхід являє собою універсальних та потужній засіб мікроскопічного опису багаточастинкових та багатовимірних систем, процесів, зв'язаних із збудженням різних степенів вільності в них, а також методом рішення задач із змішуванням спінових станів [5].

В даній роботі приведено точне рішення, знайдене для системи легкий-важкий кварки, в якій змішуються спінові стани [6].

Фізичні стани двоферміонної системи

Стан двоферміонної системи характеризується енергією E, повним моментом імпульсу J ($\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$) та його проекцією M_J. Орбітальний момент L та повний спін системи S ($\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$) у загальному випадку не суть «хорошими» квантовими числами, але їх зручно використовувати для позначення конкретних станів. Крім того, просторова парність, що є «хорошим» квантовим числом, визначається орбітальним моментом $P = (-1)^{L+1}$. Якщо система складається із частинки та її античастинки ($q\overline{q}$), то стан системи характеризується зарядовою парністю $C=(-1)^{L+S}$ та має однозначно визначений спін S. Можливі стани двоферміонної системи визначаються правилами додавання моментів і наведені в таблиці 1, де ми використали спектроскопічні позначення ${}^{2S+1}L_J$.

Таблиця 1

Фізичні стани двоферміонної системи з рівними масами

	Синглетний стан (S = 0)		Триплетний стан (S = 1)	
$P\rightarrow$ $J\downarrow$	+	−	+	−
0	—	${}^1S_0$	${}^3P_0$	—
1	${}^1P_1$	—	${}^3P_1$	${}^3S_1$+${}^3D_1$
2	—	${}^1D_2$	${}^3P_2$+${}^3F_2$	${}^3D_2$

Такі стани характерні для кварконіїв $q\bar{q}$, позитронія e^+e^- та інших подібних систем. Видно, що у даному випадку ${}^1S_0$, ${}^3P_0$, ${}^1P_1$, ${}^3P_1$ – чисті стани.

У випадку, коли двоферміонна система складається із частинок різної маси (наприклад, $q\overline{Q}$ - системи), то повний спін системи вже не є однозначно визначеним і фізичні стани такої системи можна отримати накладанням двох частин таблиці 1, що і наведено в таблиці 2.

Таблиця 2

Фізичні стани двоферміонної системи

$P\rightarrow$ $J\downarrow$	+	−
0	${}^3P_0$	${}^1S_0$
1	${}^1P_1+{}^3P_1$	${}^3S_1$+${}^3D_1$
2	${}^3P_2$+${}^3F_2$	${}^1D_2+{}^3D_2$

Тобто, в цій ситуації тільки два стани системи являються чистими станами, а всі інші – змішані (або по орбітальному моменту, або по спіну).

Потенціальна модель двоферміонної системи

По аналогії з добре вивченою структурою нуклон-нуклонного потенціалу [7], гамільтоніан кварк-кваркової системи з масами $m_1 \neq m_2$ можна записати у виді [8, 9]

$$\begin{aligned}\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + V_0(r) + V_{LS}(r)(\vec{L}\vec{S}) + V_{LS-}(r)(\vec{L}\vec{S}_-) + \\ + V_{SS}(r)(\vec{s}_1\vec{s}_2) + V_T(r)\hat{S}_{12}\end{aligned}, \quad (1)$$

де μ - приведена маса системи частинок, $\vec{S}_- = \vec{s}_1 - \vec{s}_2$. В гамільтоніані (1) враховано тільки члени лінійні відносно спінових і орбітального моментів, а саме, симетричний $(\vec{L}\vec{S})$ і антисиметричний $(\vec{L}\vec{S}_-)$ спін-орбітальні оператори, спін-спіновий $(\vec{s}_1\vec{s}_2)$ та спін-тензорний $\hat{S}_{12} = 12\left[(\vec{s}_1\vec{r})(\vec{s}_2\vec{r})/r^2 - (\vec{s}_1\vec{s}_2)/3\right]$ оператори.

Згідно таблиці 2, для систем із різних ароматних складових ($m_q \neq m_{\overline{Q}}$), стани з повним моментом $J=L$ задаються двокомпонентною хвильовою функцією

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r}\Im^M_{JJ0}(\theta,\varphi) + \frac{w(r)}{r}\Im^M_{JJ1}(\theta,\varphi), \quad (2)$$

де $u(r)$ та $w(r)$ – радіальні компоненти хвильової функції системи, що відповідають синглетній і триплетній конфігурації, а $\Im^M_{JLS}(\theta,\varphi)$ – спін-орбітальна частина хвильової функції.

В роботі [6] показано, що по аналогії із змішуванням тензорними силами в дейтроні [10] та в кварконії [11], для мезонів із кварками різних ароматів та повним моментом $J=L$ отримаємо систему зв'язаних рівнянь Шредінгера. Дану систему рівнянь зручніше записати через каналові потенціали $U_i(r)$:

$$\begin{cases} u'' + \left(k^2 - \dfrac{J(J+1)}{r^2} - U_1(r)\right)u = U_3(r)w \\ w'' + \left(k^2 - \dfrac{J(J+1)}{r^2} - U_2(r)\right)w = U_3(r)u \end{cases}, \quad (3)$$

де $k^2 = 2\mu E$, а каналові потенціали $U_i(r)$ виражаються через компоненти потенціалу кварк-кваркової взаємодії

$$U_1(r)=2\mu\left(V(r)-\frac{3}{4}V_{SS}(r)\right),$$

$$U_2(r)=2\mu\left(V(r)-V_{LS}(r)+\frac{1}{4}V_{SS}(r)+2V_T(r)\right), \quad (4)$$

$$U_3(r)=2\mu\left(\sqrt{J(J+1)}V_{LS\_}(r)\right).$$

В роботі [6] проводилось чисельне рішення системи (3). Для отримання аналітичного рішення ми виберемо канальні потенціали кулонівського виду, а саме:

$$\begin{cases} u^{//}+\left(-k^2-\dfrac{J(J+1)}{r^2}-\dfrac{A}{r}\right)u=\dfrac{C}{r}w; \\ w^{//}+\left(-k^2-\dfrac{J(J+1)}{r^2}-\dfrac{B}{r}\right)w=\dfrac{C}{r}u. \end{cases} \quad (5)$$

Аналітичне рішення

По аналогії із задачею для атома водню, асимптотика хвильових функцій на нескінченості має вид e^{-kr}. Тому будемо шукати рішення системи (5) у виді

$$u=f(r)\cdot e^{-kr} \text{ і } w=g(r)\cdot e^{-kr}. \quad (6)$$

Після підстановки (6) в систему (5) та очевидних спрощень, отримаємо:

$$\begin{cases} r^2f''(r)-Lf(r)-L^2f(r)-Arf(r)-2kr^2f(r)=Crg(r) \\ r^2g''(r)-Lg(r)-L^2g(r)-Brg(r)-2kr^2g(r)=Crf(r) \end{cases}. \quad (7)$$

Далі зручно звести систему двох диференціальних рівнянь другого порядку до рівняння четвертого порядку. Для цього визначимо із першого рівняння системи (7) функцію *g(r)* і підставимо її в друге рівняння. Для функції *f(r)* отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} &r^4f^{(4)}+r^3p_3(r)f^{(3)}+r^2p_2(r)f''+ \\ &+rp_1(r)f'+p_0(r)f=0 \end{aligned}, \quad (8)$$

де $p_i(r)$– поліноми по змінній *r*, з параметрами потенціалів *A*, *B*, *C* та орбітального моменту *L* і енергетичного параметру *k*. Будемо шукати рішення рівняння (8) у виді ряду

$$f(r)=r^s(a_0+a_1r+a_2r^2+a_3r^3+a_4r^4+a_5r^5+...), \quad (9)$$

де s і a_i – невідомі коефіцієнти ($a_0\neq 0$). Підставимо (9) у (8) і прирівняємо до нуля коефіцієнти при відповідних степенях *r*. Для першого коефіцієнта, а саме, вільного члена отримаємо

$$\begin{aligned} &r^0:-2a_0L-a_0L^2+2a_0L^3+a_0L^4-2a_0s+ \\ &+4a_0Ls+5a_0s^2+2a_0Ls^2-4a_0s^3+a_0s^4=0 \end{aligned}.$$

Дане характеристичне рівняння дозволяє визначити лише параметр *s*. Його рішення мають наступні значення:

$$(s_1=L+2,\ s_2=L+1,\ s_3=-L+1,\ s_4=-L). \quad (10)$$

Перші два рішення $f(r)\sim r^{L+2}$ і $f(r)\sim r^{L+1}$ задовільняють крайовій умові в початку координат ($u(0)=w(0)=0$), а два інші – не задовільняють. Зауважимо, що точка *r=0* – хибна особлива точка [12], тому, обидва зазначені рішення є незалежними рішеннями. Тобто функція

$$f(r)=a_0r^{L+1}+a_1r^{L+2}+a_2r^{L+3}+... \quad (11)$$

із двома задовільними константами a_0 і a_1 буде загальним рішенням, що задовільняє першій крайовій умові.

При визначеному параметрі *s=L+1* коефіцієнти при наступних степенях *r* позволяють послідовно визначити поки невідомі нам коефіцієнти a_2, a_3, a_4... функції (11):

$$\begin{aligned} &(AB-C^2+2Ak+2Bk+4k^2+2AkL+2BkL+8k^2L+4k^2L^2)a_0+ \\ &+(-2A-2B-12k-2AL-2BL-20kL-8kL^2)a_1+(12+20L+8L^2)a_2=0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &(AB-C^2+4Ak+4Bk+16k^2+2AkL+2BkL+16k^2L+4k^2L^2)a_1+ \\ &(-6A-6B-60k-4AL-4BL-64kL-16kL^2)a_2+(72++84L+24L^2)a_3=0 \end{aligned} \quad (13)$$

При заданих a_0 і a_1 із (12) знайдемо a_2, потім із (13) можна визначити a_3 і так далі.

Із структури рівнянь (12) і (13) видно, що система рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладу (11) має тридіагональну форму наступного виду:

$$\begin{cases} b_{11}\cdot a_0 + b_{12}\cdot a_1 + b_{13}\cdot a_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots b_{22}\cdot a_1 + b_{23}\cdot a_2 + b_{24}\cdot a_3 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots b_{33}\cdot a_2 + b_{34}\cdot a_3 + b_{35}\cdot a_4 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots b_{44}\cdot a_3 + b_{45}\cdot a_4 + b_{46}\cdot a_5 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}, \tag{14}$$

де перші два коефіцієнти b_{ij} у кожному рядкові залежать від параметрів потенціалів *A*, *B*, *C* та орбітального числа *L*, а третій – тільки від орбітального числа.

Оскільки часткове рішення (11) визначається двома задовільними константами, ми можемо розпорядитися ними таким чином, щоб побудувати поліноміальні функції. А саме, отримаємо перший поліном, взявши

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0 \tag{15}$$

та потребуємо занулення коефіцієнту b_{11}

$$\left(4+8L+4L^2\right)k^2 + \left(2A+B+2AL+2BL\right)k + \\ +AB - C^2 = 0. \tag{16}$$

Умова (16) є умовою на власне значення k

$$k_{1,2} = -\frac{A+B\pm\sqrt{(A-B)^2+4C^2}}{4(L+1)}. \tag{17}$$

Підстановка умов (15) і (17) в систему (14) дає наступні значення коефіцієнтів розкладу

$$a_2 = a_3 = \ldots = 0.$$

Тобто, згідно (6), (7) і (11), отримаємо перші дві пари радіальних функцій

$$u(r) = r^{L+1}e^{-kr}$$
$$w(r) = -\frac{A+2k(L+1)}{C}r^{L+1}e^{-kr}, \tag{18}$$

де k приймає два значення (17).

Схему (15-17) можна повторити, а саме, задовільними взяти

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0$$

і потребувати занулення коефіцієнту b_{22}

$$\left(16+16L+4L^2\right)k^2 + \left(4A+4B+2AL+2BL\right)k + \\ +AB - C^2 = 0,$$

що визначає наступні власні значення хвильового числа k

$$k_{3,4} = -\frac{A+B\pm\sqrt{(A-B)^2+4C^2}}{4(L+2)}. \tag{19}$$

Такий стартовий вибір дає нам наступні два рішення

$$u(r) = r^{L+1}(a_0 + r)e^{-kr}$$
$$w(r) = r^{L+1}\left(\frac{2(L+1)(1-a_0k) - a_0A}{C} - \right. , \tag{20}$$
$$\left. - \frac{A+2k(L+2)}{C}\right)re^{-kr}$$

де a_0 визначається із рівняння (12) і власних значень (19) і має вид

$$a_0 = \frac{4(L+1)(L+2)}{A+B\pm\sqrt{(A-B)^2+4C^2}}.$$

Обговорення результатів

Як приклад, розглянемо *K*-мезони, що складаються із легких *u*-, *d*- та важкого *s*-кварків. Масу мезонів будемо визначати як

$$M = m_q + m_Q + E + V_0,$$

де E – власне значення енергії із системи (3), а V_0 – константа, яку ми вибираємо для нормірування основного стану на експериментальне значення.

Каналові потенціали в роботі [6] містять і кулоноподібні члени. Ми взяли ті ж самі значення коефіцієнтів *A*, *B* і *C*. В таблиці 3 наведено вибрані параметри та отримані по формулам (17), (19) значення хвильового числа, енергії зв'язку та маси мезона для повних моментів *J*=1, 2, 3, 4.

Із формул для власних значень хвильового числа та таблиці 3 видно, що зростання повного моменту приводить до зростання коефіцієнта *C* (див. (4)) і, відповідно, одне із пари власних значень стає нефізичним.

На рис. 1 наведено графіки радіальних хвильових функцій для різних власних значень хвильового числа. Менше власне значення із пари позначено індексом α, а більше індексом β. Із рисунку видно, що в стані типу α переважає синглетна спінова компонента, а в стані типу β домінує триплетна спінова компонента.

Висновки

В системах із змішаними спіновими компонентами та з кулоноподібними каналовими потенціалами вдається побудувати аналітичні рішення.

На відміну від одноканального випадку, в двоканальних системах власні значення визначаються із квадратного рівняння, тобто можлива ситуація, коли в різних станах радіальні хвильові функції мають однакове число вузлів. Причому, число власних станів визначається співвідношенням сил каналових потенціалів.

Стани системи поділяються на два класи, в яких переважає одна або інша спінова компонента. Із зростанням величини повного моменту системи залишаються тільки стани, в яких переважає триплетна спінова компонента.

Власні функції двоканальної задачі подібні до власних функцій одноканального випадку (атом водню). Вони мають одну і ту ж структуру – добуток полінома на експоненціальну функцію. В одноканальному випадку мають місце поліноми Лагерра, а для двоканальної задачі можна говорити про матричні ортогональні поліноми.

Таблиця 3

Параметри моделі та результати розрахунків мас

Параметри						
	$m_1 = 330 MeV,\ m_2 = 580 MeV,\ V_0 = 377,8784 MeV$					
	A	B	C	A	B	C
	-0,30665	-0,13487	-0,09236	-0,30665	-0,13487	-0,15997
Розрахунки						
J →	1			2		
n ↓	k_i	E_i, MeV	M_i, MeV	k_i	E_i, MeV	M_i, MeV
1	0,086722	-17,8784	1270,0	0,067056	-10,6891	1277,2
	0,023658	-1,33058	1286,5	0,006531	-0,10141	1287,8
2	0,057815	-7,94596	1279,9	0,050292	-6,01261	1281,9
	0,015772	-0,59137	1287,3	0,004898	-0,05704	1287,8
	A	B	C	A	B	C
	-0,30665	-0,13487	-0,22623	-0,30665	-0,13487	-0,29207
Розрахунки						
J →	3			4		
n ↓	k_i	E_i, MeV	M_i, MeV	k_i	E_i, MeV	M_i, MeV
1	0,057844	-7,95402	1279,9	0,05252	-6,55713	1281
	-0,00265			-0,00837		
2	0,046275	-5,09057	1282,8	0,043766	-4,55356	1283
	-0,00212			-0,00697		

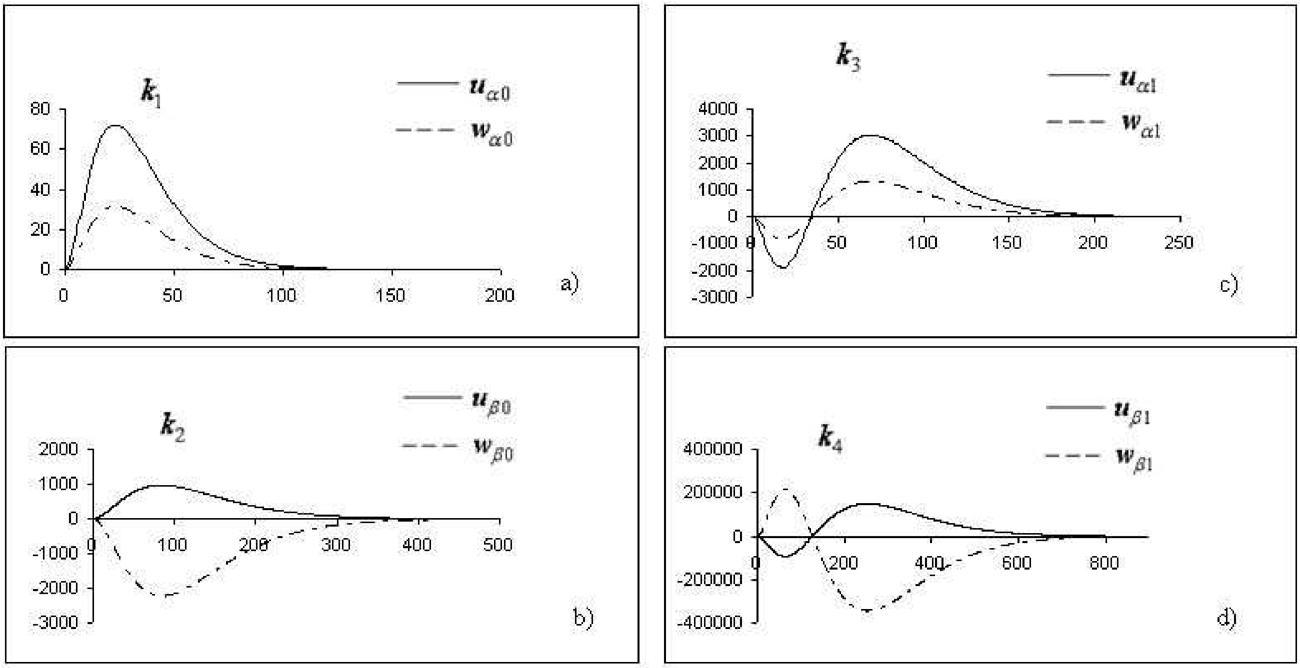

Рис. 1. Радіальні хвильові функції: a) і b) – для власних значень (17), c) і d) –для власних значень (19).

Література

1. Флюгге З. Задачи по квантовой механике. Пер. с англ. В 2 томах. – М.: Мир, 1974.
2. Багров В.Г., Гитман Д.М, Тернов И.М. и др. Точные решения релятивистских волновых уравнений. – Новосибирск: Наука, 1982. – 220 с.
3. Захарьев Б.Н., Сузько А.А. Потенциалы и квантовое рассеяние: Прямая и обратные задачи. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 224 с.
4. Захарьев Б.Н., Чабанов В.М. Послушная квантовая механика. Новый статус теории в подходе обратной задачи – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 300 с.
5. Feshbach H., Phys.Lett. A255, 123(1999).
6. Гайсак І.І., Селянчин Р.І. Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика – 2005. – №17, С. 119-123.
7. Tamagaki R., Watari W. Potential Model Approach. Supplement of the Progress of Theoretical Physics, N 39, 1967, P. 23-90.
8. Godfrey S.and N. Izgur, Phys. Rev. D32, 189 (1995).
9. Люха В., Шёберл Ф.Ф. Сильное взаимодействие. Введение в нерелятивистские потенциальные модели. – Перевод с немецкого С.М.Зверева. – Львов: Академический Экспресс, 1996. – 184 с.
10. Rarita W., J.Schwinger, Phys. Rev. 59, 436 (1941).
11. Haysak I. Czech. J. Phys., v.55, No.5 (2005) 541-554.
12. Slavyanov S.Yu., Lay W.: Special Function. Oxford University Press, Oxford, 2000.

ANALITICAL SOLUTION OF QUANTUM SYSTEM WITH COUPLED CHANNELS

I. Haysak[1], V. Zhaba[1], P. Murin[2]

[1] Uzhhorod National University, Uzhhorod, Ukraine
[2] University Shafarika, Koshice, Slovakija
e-mail: haysak@univ.uzhgorod.ua, viktorzh@meta.ua

The quark potential model of mesons created by different flavor quarks is considered. In such systems the states with definite orbital momentum and mixed spin components exist. These mixed states are described by systems of two coupled Schredinger equations. An algorithm for analytical solution construction is shown in the situation with Coulomb channel potentials. The eigenvalues are doubled for such systems. The numerical values of the eigenvalues and the eigenfunctions are demonstrated for strange mesons. The found solutions can be used as a basis of approximate methods for two coupled channel systems.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СО СВЯЗАННЫМИ КАНАЛАМИ

И.И. Гайсак[1], В.И. Жаба[1], П. Мурин[2]

[1] Ужгородский национальный университет, 88000, Ужгород, ул. Волошина, 54
[2] Университет П.Й. Шафарика, г. Кошице (Словакия)
e-mail: haysak@univ.uzhgorod.ua, viktorzh@meta.ua

В работе рассмотрено потенциальную кварковую модель мезонов, состоящую из кварков разных ароматов. В таких системах есть физические состояния со смешанными синглетным и триплетным спиновыми компонентами и однозначным орбитальным моментом. Такие смешанные состояния описываются системой двух связанных уравнений Шредингера. Для случая кулоноподобных каналовых потенциалов приведен алгоритм построения аналитического решения. Собственные значения в такой системе являются двузначными. На примере странных мезонов приведены конкретные расчеты собственных значений и собственных функций. Полученные решения могут служить базисом для приближенных методов в двуканальных системах такого типа.