Розділ перший

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

§1. Рівняння з відокремлюваними змінними

Загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку такий:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Припустимо, що рівняння (1) може бути розв'язано відносно0 y':

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Нехай рівняння (2) має вигляд

$$y' = \frac{f_1(x)}{f_2(x)'} \tag{3}$$

Тоді його можна записати у вигляді:

$$f_2(y)dy = f_1(x)dx \tag{4}$$

Характерним для рівняння (4) є те, що множником при dy є функція тільки від y, а при dx – функція тільки від x. Такі рівняння називаються рівняннями із *відокремленими змінними*. Загальний інтеграл такого рівняння є:

$$\int f_2(y)dy = \int f_1 dx + C$$

До рівнянь із відокремленими змінними зводяться рівняння вигляду

$$f_1(x) \cdot f_2(y)dx + \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)dy = 0 \tag{5}$$

Рівняння (5) називають рівнянням із *відокремленими змінними.* Для відокремлення змінних потрібно обидві частини рівняння (5) поділити на вираз
$\varphi_1(x) \cdot f_2(y)$, після чого одержимо:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0,$$

звідки одержуємо загальний інтеграл рівняння(5):

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C.$$

Зведення рівняння (5)до рівняння (4) називають методом *відокремлення змінних.*

<u>Розв'язування типових задач</u>

<u>Задача 1.</u> *Проінтегрувати рівняння*

$$y\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)dx+(1+x^2)dy=0.$$

Тут $f_1(x)=\sqrt{1+x^2}-x,\ f_2(y)=y, \varphi_1(x)=(1+x^2), \varphi_2(y)=1.$

Відокремивши змінні, можемо записати:

$$\int\frac{dy}{y}+\int\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{(1+x^2)}dx=C_1$$

Виконавши інтегрування, дістанемо:

$$\ln|y|+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=\ln C.$$

Потенціюємо і одержуємо загальний інтеграл:

$$y\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=C\sqrt{1+x^2}.$$

<u>Задача 2.</u> *Знайти розв'язок рівняння*

$$xe^{-y}dx+ye^{-x}dy=0.$$

Маємо: $f_1(x)=x,\ \ f_2(y)=e^{-y},\ \ \varphi_1(x)=e^{-x},\ \ \varphi_2(y)=y.$

Поділивши обидві частини рівняння на вираз $\mu=e^{-x}\cdot e^{-y}$, *дістанемо рівняння з відокремленими змінними:*

$$xe^{x}dx+ye^{y}dy=0.$$

Інтегруючи це рівняння, знаходимо:

$$\int xe^{x}dx+\int ye^{y}dy=C.$$

Виконавши інтегрування, остаточно одержуємо загальний інтеграл:

$$e^{x}(x-1)+e^{y}(y-1)=C.$$

<u>Задача 3.</u> *Проінтегрувати рівняння:*

$$tg\, y\, dx - x \ln x dy = 0.$$

Тут $f_1(x)=1,\ f_2(y)=tg\, y,\ \varphi_1(x)=-x\ln x,\ \varphi_2(y)=1.$ *Поділивши рівняння на вираз* $x\cdot \ln x \cdot tg\, y\cdot \ln x,$ *дістанемо рівняння*

$$\frac{dx}{x\ln x}-\frac{dy}{tg\, y}=0;$$

інтегруючи його, знаходимо:

$$\ln|\ln x| - \ln|\sin y| = \ln|C|,$$

звідки $\ln|x| = C\sin y,$ *або* $x = e^{C\sin y}$.

§2. Однорідні рівняння та звідні до них

Якщо у рівнянні $y' = f(x,y)$ функція $f(x,y)$ не змінюється при заміні *x* на *kx* і *y* на *ky*, тобто $f(kx,ky)\equiv f(x,y)$, ($f(x,y)$ є однорідною функцією нульового виміру), тоді воно називається *однорідним.* Таке рівняння завжди можна подати у вигляді $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Підстановка

$$y = u\cdot x, \tag{1}$$

де *u* – нова фунція від *x,* дозволяє звести однорідне рівняння до рівняння із *відокремлюваними змінними.* Проінтегрувавши одержане рівняння і замінивши у його розв’язку *u* на $\frac{y}{x}$,одержимо загальний інтеграл заданого рівняння.

До однорідного рівняння зводиться рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{2}$$

Якщо $\Delta \equiv a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ то воно перетворюється в однорідне шляхом введення змінних *v* і *w*:

$$\begin{cases} x = v + x_0 \\ y = w + y_0 \end{cases} \tag{3}$$

де x_0 і y_0 визначаються з системи рівнянь

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0, \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0. \end{cases}$$

Якщо $\Delta = 0$, тоді, підставивши в рівняння (2) $Z = a_1 x + b_1 y$, дістанемо рівняння з відокремлюваними змінними.

Розв'язування типових задач

Задача 1. *Проінтегрувати рівняння:*

$$y' = \frac{y}{x} + tg\,\frac{y}{x}.$$

Розв'язання. *Легко перевірити що це рівняння однорідне, оскільки*

$$\frac{ky}{kx} + tg\,\frac{ky}{kx} = \frac{y}{x} + tg\,\frac{y}{x}.$$

Покладемо $y = u \cdot x$, *тоді* $y' = u + x + u'$. *Підставивши значення* y *та* y' *в рівняння, одержимо* $u + x \cdot u' = u + tg\,u$, *або в диференціальній формі*

$$x\,du = tg\,u\,dx$$

Одержали рівняння із відокремленими змінними.
Відокремлюємо змінні:

$$\frac{du}{tg\,u} = \frac{dx}{x}.$$

Проінтегрувавши одержане рівняння, матимемо:

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|C| \ \ \text{або} \ \ \sin u = C \cdot x.$$

Підставляючи $u = \dfrac{y}{x}$, *остаточно дістанемо загальний інтеграл*

$$\sin\frac{y}{x} = C \cdot x.$$

Задача 2. *Розв'язати рівняння:*

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$$

Розв'язання. $\Delta = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0.$ *Робимо заміну:* $x = v + x_0$,

$y = w + y_0$, *при цьому* x_0 *і* y_0 *визначаємо з системи*

$$\begin{cases} y_0 + 2 = 0 \\ x_0 + y_0 - 1 = 0 \end{cases},$$

звідки знаходимо $x_0 = 3,\ y_0 = -2$. *Отже маємо:* $\begin{cases} x = v + 3 \\ y = w - 2 \end{cases}$.

звідки $dx = dv,\ dy = dw$ *і рівняння набуває вигляду:*

$$\frac{dw}{dv} = 2\frac{w^2}{(v + w)^2}.$$

Одержане рівняння є однорідним відносно нових змінних v і w.

Далі розв'язуємо це рівняння як однорідне відносно функції $w = w(v)$. *Робимо підстановку* $w = u \cdot v$, *де u нова функція від* v.

Маємо

$$uw' + u = 2\frac{u^2 v^2}{(v + vu)^2},$$

або

$$u'v + u = 2\frac{u^2}{(1+u)^2};$$

Одержане рівняння є рівнянням із відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні:

$$v\,du = \left\{\frac{2u^2}{(1+u)^2} - u\right\}dv;\quad v\,du = \frac{2u^2 - u - 2u^2 - u^3}{(1+u)^2}dv,$$

звідки

$$v\,du = -\frac{(u + u^3)}{(1+u)^2}dv,\ \frac{(1+u)^2}{u + u^3}du = -\frac{dv}{v}.$$

Інтегруючи останню рівність, знаходимо:

$$e^{2 arctg\, u} = \frac{C}{uv}.$$

Повертаючись до старих змінних x і y ($v = x - 3,\ w = y + 2),$ *остаточно дістаємо загальний інтеграл диференціального рівняння:*

$$e^{2arctg\frac{y+2}{x-3}} = \frac{c}{y+2},\ \textit{або}\ (y+2)e^{2arctg\frac{y+2}{x-3}} = C.$$

<u>**Задача 3.**</u> *Розв'язати рівняння:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y + 1}{6x + 3y + 2}.$$

Розв'язання. $\Delta = 2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 0.$ *Робимо заміну:* $2x + y = z$, *звідки*

$dz = 2dx + dy$, *і дане рівняння переписується у вигляді*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-2x - y + 1}{6x + 3y + 2}.$$

Відокремлюючи змінні, дістанемо: $\frac{3z+2}{z+1}dz = 5dx$, *звідси інтегруванням знаходимо:* $5x - 3z + \ln|z+1| = C.$ *Підставляючи* $z = 2x + y,$ *дістанемо загальний інтеграл*

$$x + 3y - \ln|2x + y + 1| + C = 0.$$

§3. <u>Лінійні рівняння. Рівняння Бернуллі.</u>

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, лінійне відносно шуканої функції та її похідної.

Загальний вигляд такого рівняння:

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x) \tag{1}$$

Рівняння (1) називається лінійним неоднорідним, якщо $q(x) \neq 0.$ Якщо $q(x) = 0$, тоді рівняння (1) має вигляд

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = 0 \tag{2}$$

і називається лінійним однорідним, що відповідає рівнянню (1).

Для розв'язання лінійного неоднорідного рівняння використовують два методи:

1) <u>Метод варіації сталої.</u>
2) <u>Метод підстановки.</u>

Розглянемо сутність обох методів.

1) Суть методу варіації сталої полягає у наступному. Спочатку знаходимо загальний розв'язок однорідного рівняння (2), яке легко інтегрується, бо воно є рівнянням із відокремлюваними змінними. Справді, маємо:

$$y' + p(x)\cdot y = 0;\ \ dy + p(x)\cdot y\cdot dx = 0.$$

Відокремлюючи змінні, дістаємо

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\cdot dx.$$

Інтегруючи цю рівність, матимемо загальний розв'язок рівняння (2):

$$y = C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx},\ C \text{ - довільна стала} \qquad (3)$$

Для відшукання загального розв'язку рівняння (1) вважатимемо C функцією від x, тобто $C = C(x)$ і знаходимо розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + \overline{C}\right] \qquad (5)$$

2) В методі підстановки шуканий розв'язок знаходять у вигляді добутку двох невідомих функцій

$$y = U(x)\cdot V(x), \qquad (6)$$

Знаходимо похідну $y' = U'\cdot V + U\cdot V'$ і підставляємо значення y і y' до рівняння (1); одержуємо:

$$V\cdot\frac{dU}{dx} + U\cdot\frac{dV}{dx} + p(x)\cdot UV = q(x).$$

Згрупуємо члени рівняння так, щоб можна було винести за дужки одну з функцій, наприклад, U (можна й V):

$$V\frac{dU}{dx} + U\left(\frac{dV}{dx} + p(x)\cdot V\right) = q(x). \qquad (7)$$

Визначимо функцію V так, щоб вираз

$$\frac{dV}{dx}+p(x)V$$

перетворився на нуль. Одержуємо лінійне однорідне рівняння типу (2). Знайшовши його розв'язки *V(x)* і підставивши до рівняння (7), одержуємо рівняння

$$V\cdot\frac{dU}{dx}=q(x),$$

розв'язком якого буде функція $U=U(x,C)$. Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння матиме вигляд $y(x)=U(x,C)\cdot V(x)$.

До лінійного рівняння зводиться рівняння Бернуллі:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\cdot y=q(x)\cdot y^{\alpha} \tag{8}$$

(де $\alpha\neq 0,\ \alpha\neq 1$) за допомогою підстановки

$$z=y^{1-\alpha} \tag{9}$$

Рівняння Бернуллі можна також розв'язувати, користуючись підстановкою *y=UV*.

Розв'язування типових задач

Задача 1. *Розв'язати рівняння:*

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{1+x}y=\frac{\cos x}{1+x},x\neq -1.$$

Розв'язання. *Рівняння відповідне заданому однорідне рівняння*

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{1+x}y=0$$

і запишемо його у диференціальній формі:

$$(1+x)dy+y\,dx=0.$$

Відокремлюючи змінні, дістанемо: $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{1+x}$. *Інтегруючи одержану рівність, матимемо:* $\ln\left|\frac{y}{C}\right|=-\ln|1+x|$, *звідки* $y=\frac{C}{1+x}$.

Вважаючи C=C(x), матимемо: $y=\frac{C(x)}{1+x}$;

$$y' = C'(x)\frac{1}{1+x} - C(x)\frac{1}{(1+x)^2},$$

Підставляючи значення y *і* y' *в задане неоднорідне рівняння, одержимо*

$$C'(x)\frac{1}{1+x} - C(x)\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x}\cdot\frac{C(x)}{1+x} = \frac{\cos x}{1+x},$$

дістанемо:

$C'(x) = \cos x, C(x) = \sin x + C.$ *Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд*

$$y = \frac{1}{1+x}(\sin x + C).$$

<u>Задача 2.</u> *Знайти загальний розв'язок рівняння:*

$$y' - \frac{1}{x}y = 3x.$$

Розв'язання. *Шукаємо розв'язок у вигляді* $y = U \cdot V$. *Маємо:* $y' = U'V + UV'$. *Підставивши* y *і* y' *у рівняння, одержимо:*

$$U'V + UV' - \frac{1}{x}UV = 3x.$$

У лівій частині винесемо за дужки U, згрупувавши другий і третій члени (можна згрупувати перший і третій члени та винести за дужки V)

$$U'V + U\cdot\left(V' - \frac{1}{x}V\right) = 3x.$$

Розв'язуємо рівняння:

$V' - \frac{1}{x}V = 0$, *звідки* $\frac{dV}{v} = \frac{dx}{x}$, $\ln V = \ln x$, *отже V = x. Підставивши значення* $V = x$ *у рівняння, одержимо рівняння для відшукання функції U:*

$$x\frac{dU}{dx} = 3x \quad \text{або} \quad \frac{dU}{dx} = 3,$$

звідки $U = 3x + C.$ *Тоді загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння матиме вигляд:*

$$y = (3x + C)x.$$

Задача 3. *Розв'язати рівняння Бернуллі*

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^3}y^3 \quad (\alpha = 3).$$

Розв'язання. Вводимо заміну $z = y^{-2}$, *тоді* $z' = -2y^{-3} \cdot y'$. *Поділимо рівняння на* y^3, *тоді матимемо:*

$$y^{-3}y' + \frac{2}{x}y^{-2} = \frac{1}{x^3}, \text{ звідки } \left(-\frac{1}{2}\right)z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^3},$$

або $z' - \frac{4}{x}z = -\frac{2}{x^3}$. *Одержане рівняння є лінійним неоднорідним відносно функції z. Його загальним розв'язком буде* $z = \frac{1}{3x^2} + C \cdot x^4$. *Враховуючи, що* $z = y^{-2}$, *дістаємо загальний розв'язок рівняння Бернуллі:*

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{3x^2} + C \cdot x^4.$$

Задача 4. *Проінтегрувати рівняння*

$$y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}, \quad \left(\alpha = \frac{1}{2}\right).$$

Приймаючи $y = U \cdot V$, *маємо:*

$$U'V + UV' - \frac{4}{x}UV = x\sqrt{UV}, \text{ звідки } \left(U' - \frac{4}{x}U\right)V + UV' = x\sqrt{UV}.$$

Для визначення функції U вимагатимемо, щоб $U' - \frac{4}{x}U = 0$. *Звідси знаходимо* $U = x^4$. *Підставляючи U у рівняння*

$$\left(U' - \frac{4}{x}U\right)V + UV' = x\sqrt{UV},$$

дістанемо:

$$x^4 \cdot V' = x\sqrt{V \cdot x^4}\text{, звідки } V = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2,$$

отже, загальний інтеграл рівняння Бернуллі буде

$$y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2.$$

§4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегрувальний множник.

Рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

називається рівнянням у повних диференціалах, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції двох змінних, тобто

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \equiv dU(x, y) \equiv \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy,$$

звідси

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \tag{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = M(x, y). \tag{3}$$

Рівняння (1) буде рівнянням у повних диференціалах, якщо виконується умова Ейлера

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{4}$$

Функцію U(x,y) знаходять, використовуючи (2) і (3).

Якщо функцію U знайдемо, тоді рівняння (1) матиме вигляд dU = 0, звідки U(x,y), тоді знаходять функцію μ=μ(x,y) (її називають інтегрувальним множником), таку, що

$$\mu(x, y)\left[M(x, y)dx + N(x, y)dy\right] = dU. \tag{5}$$

Тоді μ має задовольняти рівняння

$$M(x, y)\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{6}$$

У загальному випадку розв'язання такого рівняння є складною проблемою. Але у простих випадках частинний розв'язок такого рівняння знаходиться порівняно легко.

Інтегрувальний множник μ легко знаходиться у двох випадках:

a) μ = μ(x), тоді маємо рівняння $\mu(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})=N\frac{\partial U}{\partial x}$,

b) μ = μ(y), тоді маємо рівняння $\mu(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})=-M\frac{\partial \mu}{\partial y}$,

У випадку a) μ(x) визначається за формулою

$$\mu(x)=e^{\int\varphi(x)dx} \tag{7}$$

якщо

$$(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})/N=\varphi(x).$$

У випадку b) μ(y) визначається за формулою

$$\mu(y)=e^{\int\psi(x)dx} \tag{7}$$

якщо

$$(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})/(-M)=\psi(x).$$

Розв'язування типових задач

Задача 1. *Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:*

$$(y^2-x)y'+x^2-y=0\ .$$

Розв'язання. *Перепишемо це рівняння так:*

$$(y^2-x)dy+(x^2-y)dx=0$$

(тут $M(x,y)=x^2-y, N(x,y)=y^2-x$*). Перевіряємо умову Ейлера (4):*

$\frac{\partial M}{\partial y}=-1;\frac{\partial N}{\partial x}=-1,$ *отже, дане рівняння є рівнянням у повних диференціалах.*

Знаходимо U(x,y) з (2), де y – параметр:

$U(x,y)=\int M(x,y)dx+C(y)=\int(x^2-y)dx+C(y)$

Тобто

$$U(x,y)=\frac{1}{3}x^3-xy+C(y).$$

Знайдемо C(y) з умови, що $\dfrac{\partial U}{\partial y} = N(x,y)$ *матимемо:*

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -x + C'(y) = y^2 - x,$$

тобто $C'(y) = y^2$, *звідки*

$$C(y) = \frac{y^3}{3} + C_1; U(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - xy + \frac{1}{3}y^3 + C_{1,}$$

де C_1 *– довільна стала.*

Отже загальний інтеграл диференціального рівняння буде мати вигляд

$$\frac{1}{3}x^3 - xy + \frac{1}{3}y^3 + C_1 = C_2, \text{ або}$$

$$\frac{1}{3}x^3 - xy + \frac{1}{3}y^3 = C(C = C_2 - C_1).$$

<u>Задача 2.</u> *Розв'язати рівняння:*

$$(2x + 3x^2 y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0.$$

Розв'язання. *Оскільки:*

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x + 3x^2 y) = 3x^2; \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3^2) = 3x^2,$$

задане рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Знайдемо функцію U(x,y), повний диференціал якої dU дорівнював би лівій частині рівняння. Маємо:

$$U'_x = 2x + 3x^2 y; U'_y = x^3 - 3y^2.$$

Інтегруючи по x перше з рівнянь, знаходимо

$$U(x,y) = \int (2x + 3xy)dx = x^2 + yx^2 + C(y).$$

Підставляючи вираз для U до другого з рівнянь, знайдемо

$$\left(x^2 + yx^3 + C(y)\right)'_y = x^3 + C'(y) = x^3 - 3y^2; C(y) = -y^3 + C_1.$$

Отже, $U = x^2 + yx^3 - y^3 + C_1$, *і загальний інтеграл рівняння буде мати вигляд*

$$x^2 + yx^3 - y^3 = C.$$

<u>Примітка.</u> *Функцію U(x,y) можна також знаходити за формулою*

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy. \qquad (9)$$

Задача 3. *Знайти загальний інтеграл рівняння:*

$$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0.$$

Розв'язання. *Використаємо формулу (7) для відшукання U(x,y):*

$$U(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4-(x_0^3+3x_0^2y_0^2+y_0^4),$$

або

$$x^3+3x^2y^2+y^4=C \quad (C=x_0^3+3x_0^2y_0^2+y_0^4).$$

Задача 4. *Розв'язати рівняння:*

$$(2x+3x^2y)dx+(x^3-3y^2)dy=0.$$

Розв'язання. *Знаходимо*

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x+x^2+y^2, \frac{\partial N}{\partial x}=2x$$ *(умова Ейлера не виконується).*

Складемо вираз

$$\varphi(x)=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)/N=\frac{2x+x^2+y^2-2x}{x^2+y^2}=1,$$ *матимемо*

$$\mu(x)e^{\int dx}=e^x$$ *при C = 1.*

Помноживши вихідне рівняння на e(x), дістанемо рівняння у повних диференціалах

$$e^x\left(2xy+x^2y+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}y^3\right)dx+e^x(x^2+y^2)dy=0.$$

Зінтегрувавши одержане рівняння, дістанемо загальний інтеграл:

$$ye^x\left(x^2+\frac{1}{3}y^2\right)=C.$$

Задача 5. *Розв'язати рівняння:*

$$2xy\ln y dx+\left(x^2+y^2\sqrt{y^2+1}\right)dy=0.$$

Розв'язання. *Легко пересвідчитися, що умова Ейлера не виконується.*

Складемо вираз

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)/(-M)=\frac{2x(\ln y+1)-2x}{-2xy\ln y}=-\frac{1}{y}.$$

Отже, інтергрувальний множник $\mu=\mu(y)$*; маємо:*

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{dy}{y}}=Ce^{\ln\frac{1}{y}}.$$

При C = 1 μ *= 1/y. Рівняння*

$$\frac{2xy\ln y}{y}dx+\frac{x^2+y^2\sqrt{y^2+1}}{y}dy=0$$

буде вже рівнянням у повних диференціалах. Його розв'язують, знаходячи функцію U(x,y). Це ж рівняння можна подати у вигляді

$$d\left(x^2\ln y+\frac{1}{3}(y^2+1)^{3/2}\right)=0,$$

звідки одержуємо загальний інтеграл

$$x^2\ln y+\frac{1}{3}(y^2+1)^{3/2}=C.$$

§5. Диференціальне рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної.

Диференціальне рівняння першого порядку, не розв'язане відносно похідної, має вигляд

$$F(x,y,y')=0. \qquad (1)$$

Інтегровані типи рівняння (1).

I. *Рівняння n-го степеня відносно похідної*

$$(y')^n+p_1(x,y)(y')^{n-1}+...+p_{n-1}(x,y)y'+p_n(x,y)y=0. \qquad (2)$$

Загальний метод розв'язання: розв'язуємо рівняння (2) відносно y'.

Нехай

$$y'=f_1(x,y), y'=f_2(x,y),..., y'=f_s(x,y)$$

- дійсні розв’язки рівняння(2). Знаходимо загальні інтеграли одержаних рівнянь

$\phi_1(x, y, C) = 0, \phi_2(x, y, C) = 0 ... \phi_s(x, y, C) = 0.$

Загальним інтегралом рівняння (2) буде добуток одержаних інтегралів.

<u>**Задача 1.**</u> *Розв’язати рівняння:*

$$yy'^2 + (x - y)y' - x = 0.$$

Розв’язання. *Розв’язуємо це рівняння відносно y’ (як квадратне рівняння), одержуємо:*

$$y' = \frac{y - x \pm \sqrt{(y-x)^2 + 4xy}}{2y},$$

Або y =1 і y’ = -x/y. Інтегруючи одержані диференціали рівняння, знаходимо їхні загальні інтеграли:

$x - y + C = 0, x^2 + y^2 + C = 0$

(друге рівняння є рівнянням із відокремленими змінними). Тоді загальний інтеграл вихідного рівняння буде

$(x - y + C)(x^2 + y^2 - C^2) = 0$

II. *Рівняння вигляду*

$$F(y, y') = 0. \tag{3}$$

1) Нехай це рівняння легко розв’язується відносно y: $y = \psi(y')$.

Позначимо y’=p. Тоді $y = \psi(p)$. Диференціюємо це рівняння і замінюємо dy на pdx, тоді дістаємо $pdx = \psi(p)dp$, звідки матимемо:

$$dx = \frac{\psi'(p)}{p}dp \text{ і } x = \int \frac{\psi'(p)}{p} + C.$$

Отже, одержуємо загальний розв’язок рівняння у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \int \frac{\psi'(p)}{p} dp + C \\ y = \psi(p) \end{cases}$$

2) Рівняння (2) можна представити у параметричній формі:

$y = \varphi(t), y' = \psi(t).$

Тоді: $dy = y'dx = \psi(t)dx$. З другого боку, $dy = \varphi'(t)dt$, отже маємо:

$\psi(t)dx = \varphi'(t)dt$, звідки знаходимо $dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt$ і $x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C$.

Загальний інтеграл рівняння (2) у параметричній формі буде

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + c \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

<u>**Задача 2.**</u> *Зінтегрувати рівняння:*

$$y^{2/3} + (y')^{2/3} = 1.$$

Розв'язання. *Покладемо* $y = \cos^3 t, y' = \sin^3 t$.

Тоді матимемо:

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{-3\cos^2 t \sin t dt}{\sin^e t} = -2\frac{\cos^2 t}{\sin^3 t}dt, \text{ звідки}$$

$$x = \int \left(3 - \frac{3}{\sin^2 t}\right)dt = 3t + 3ctgt + C.$$

Загальний розв'язок буде

$$\begin{cases} x = 3t + 3ctgt + C \\ y = \cos^3 t \end{cases}$$

III. Рівняння вигляду

$$f(x, y') = 0. \qquad (4)$$

Нехай це рівняння розв'язується відносно $x : x = \varphi(y')$. Позначимо $y' = p$, дістанемо $dx = \varphi'(p)dp$. Оскільки $dx = dy / p$, то матимемо:

$\frac{dy}{p} = \varphi'(p)dp$, звідки $dy = p\varphi'(p)dp$ і $y = \int p\varphi'(p)dp + C$.

Таким чином, знаходимо загальний інтеграл рівняння (3) у параметричній формі

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \int \varphi'(p)pdp + C \end{cases} \qquad \text{(p – параметр).}$$

Якщо рівняння (4) розв'язується відносно y, тоді воно являє собою рівняння із відокремленими змінними.

У випадку, коли рівняння(4) не можна розв'язати відносно x або y', але можна подати x та y через параметр t, наприклад

$$x=\varphi(t), y'=\psi(t),$$

тоді загальний інтеграл рівняння (4) визначається так: $dx=\varphi'(t)dt$, $dy=\psi(t)dx$, тобто $dy=\psi(t)\varphi'(t)dt$, звідки

$$y=\int\phi(t)\varphi'(t)dt+C$$

і загальний розв'язок у параметричній формі буде:

$$x=\varphi(t), \qquad y=\int\psi(t)\varphi'(t)+C.$$

Задача 2. *Зінтегрувати рівняння.*

$$xy'=\sqrt{1+y'^2} .$$

Розв'язання. *Позначивши* y' = p*, маємо:* $x=\frac{1}{p}\sqrt{1+p^2}$ *. Тоді*

$$dy=pdx=-\frac{dp}{p\cdot\sqrt{1+p^2}}, \ y=\ln\frac{1+\sqrt{1+p^2}}{|p|}+C .$$

Отже, загальний розв'язок запишеться так:

$$x=\frac{1}{p}\sqrt{1+p^2}, \ y=\ln\frac{1+\sqrt{1+p^2}}{|p|}+C .$$

Задача 4. *Зінтегрувати рівняння:*

$$x\sqrt{1+y'^2}=y'$$

Розв'язання. *Покладемо* $y'=tgt$, $-\pi/2<t<\pi/2$, *тоді задане диференціальне рівняння у параметричній формі має вигляд*

$$x=\sin t, \ y'=tgt$$

звідки,

$$dy=y'dx=tgt\cdot\cos tdt=\sin tdt, \ y=\int\sin tdt+C .$$

Отже, загальний інтеграл запишеться

$$x=\sin t, \ y=-\cos t+C .$$

Виключаючи параметр t, дістанемо загальний розв'язок рівняння у вигляді:

$$x^2+(y-C)^2=1.$$

IV. *Рівняння Лагранжа має вигляд*

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \qquad (5)$$

Покладемо y’=p, тоді методом диференціювання по x (вважаючи $dy = pdx$) рівняння (4) зводиться до лінійного відносно x як функції від p. Знаходимо розв’язок цього рівняння $x = \phi(p, C)$ і дістаємо загальний інтеграл рівняння (4) у параметричній формі

$$x = \phi(p, C),\ y = \phi(p, C)\varphi(p) + \psi(p) \qquad (p\text{-}параметр).$$

Крім того, рівняння Лагранжа може мати ще й особливі розв’язки вигляду $y = x\varphi(C) + \psi(c)$, де C – корінь рівняння $C = \psi(C)$.

V. *Рівняння Клеро має вигляд*

$$y = xy' + \psi(y') \qquad (6)$$

Метод розв’язання цього рівняння такий, як і для рівняння Лагранжа. Загальний розв’язок рівняння Клеро

$y = Cx + \psi(C)$.

Крім того, рівняння Клеро може мати й особливі розв’язки, які одержуються виключенням параметра *p* з рівнянь

$y = xp + \psi(p),\ x + \psi'(p) = 0$.

<u>Задача 5.</u> *Розв’язати рівняння:*

$$y = 2xy' + \ln y'.$$

Розв’язання. *Маємо рівняння Лагранжа* $(\varphi(y') = 2y',\ \psi(y') = \ln y')$. *Покладемо* $y' = p(x)$, *тоді* $y = 2px + \ln p$. *Диференціюючи це рівняння, знаходимо*

$$pdx = 2pdx + 2xdp + \frac{dp}{p},$$

звідки

$$p\frac{dx}{dp} = -2x - \frac{1}{p} \text{ або } \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -\frac{1}{p^2}.$$

Одержане рівняння є лінійним неоднорідним відносно $x = p(x)$. *Його загальний розв’язок(знаходиться методом підстановки* $x = U(p) \cdot V(p)$ *буде*

$$C = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}.$$

Остаточно дістанемо загальний розв’язок рівняння Лагранжа:

$x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}$, $y = 2xp + \ln p$.

<u>Задача 6</u>.Розвязати рівняння Клеро:

$$y = xy' - e^{y'}.$$

Розв'язання. *Загальний розв'язок цього рішення запишеться так:* $y = Cx - -e^c$.*Для відшукання особливого розв'язку складаємо систему рівнянь* $(y = xp + \psi(p), x + \psi(p) = 0)$

$y = xp - e^p \qquad x - e^p = 0$,

звідки, виключаючи параметр р, знаходимо особливий розв'язок рівняння Клеро: $y = x\ln x - x$.

<u>Завдання для самостійної роботи.</u>

I. Визначити тип поданих диференційних рівнянь:

1. $\sin x^3 = e^{(y'-x\ )/y}$;

2. $\sqrt{x^2 - y^2} = 2x \ /(y - 3x + xy') = 0$;
3. $1 + x + (1 + x^2)(e^x - e^{2y}y') = 0$;
4. $y' = \sin(y - x)$;

5. $x = \arccos(y' - a^x)/y$;

6. $\sqrt{y} = (ye^{x^2\sin x})/(x^2 + 2x - 1)$.

II. Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $xydx + \sqrt{1 - x^2}dy = 0$ (відповідь: $y = Ce^{\sqrt{1-x^2}} \quad x = \pm 1$).

2. $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$ (відповідь: $y = 2x\, arctg\, x$).

3. $(y + 2)dx + (4 - 2x - y)dy = 0$ (відповідь: $x + y - 1 = C(y + 2)^2$).

4. $y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1$ (відповідь: $y = x\ln x + \frac{c}{x}$).

5. $(2x + e^{x/y})dx + (1 - \frac{x}{y})e^{x/y}dy = 0$ (відповідь: $x^2 + ye^{x/y} = C$).

6. $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0; \quad \mu = \varphi(x)$ (відповідь: $xy^2 - 2x^2y - 2 = Cx$).

7. $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0 \quad \mu = \varphi(x)$ (відповідь: $x^2 - \frac{7}{y} - 3xy = C; \quad \mu = \frac{1}{x^2}$)

8. $y'^2 - (2x + y)y' + (x^2 + xy) = 0$ (відповідь: $y = \frac{x^2}{2} + C, y = Ce^x - x - 1$).

9. $y'^3 = yy'^2 - x^2y' \; x^2y = 0$ (відповідь: $\frac{y^2}{2} + C; y^3 - \frac{x^2}{2} + C; y = Ce^x$).

10. $x^3 = y'^2 - 2y' + 2$ (відповідь: $\begin{cases} x = p^2 - 2p + 2 \\ y + C = \frac{2}{3}p^3 - p^2 \end{cases}$).

11. $y = (y' - 1)e^{y'}$ (відповідь: $x = e^p + C; y = (p-1)e^p; y = -1$).

12. $y'^2 x = e^{1/y'}$ (відповідь: $x = \frac{1}{p^2}e^{1/p}, y = C + e^{1/p}(1 + \frac{1}{p})$).

13. $y = y'(1 + y'\cos y')$ (відповідь: $\begin{cases} y = p + p^2\cos p \\ x = 2Cp - \ln p - 2 \end{cases}$).

14. $y = x(1 + y') + y'^2$ (відповідь: $\begin{cases} x = 2(1-p) + Ce^{-p} \\ y = [2(1-p) + Ce^{-p}](1+p) + p^2 \end{cases}$).

15. $y = \frac{3}{2}xy' + e^{y'}$ (відповідь: $\begin{cases} x = \frac{C}{p^3} - 2e^p(\frac{1}{p} - \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3}) \\ y = \frac{3C}{2p^2} - 2e^p(1 - \frac{3}{p} + \frac{3}{p^2}) \end{cases}$).

16. $y = xy' + \frac{a}{y'^2}$ (відповідь: $y = Cx = \frac{a}{c^2}; 4y^3 = 27ax^2$).

17. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$ (відповідь: $x = Cy + C^2; 4x = -y^2$).

18. $x(1 - y^2)dx - y(1 - x^2)dy = 0.$

19. $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0.$

20. $(1 + x^2)y^3dx - (1 + y^2)x^3dy = 0.$

21. $xy' = y\ln y.$

22. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\ln x}{\cos\ln y}$

Знайти загальні інтеграли рівнянь і вилучити ту інтегральну криву,яка проходить через задану точку.

23. $y' = e^{x+y}$ M(0,0).

24. $\sin x \sin y dx + \cos x \cos y dy = 0$ $M(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

25.Парашутист спускається на парашуті. Сила ваги парашута $F_1 = mg,$ сила Опору повітря $F_2 = kv^2, k = const.$ Знайти швидкість v парашута через t_0 секунд після початку спуску і шлях S, пройдений за той самий час.

26.Цегляна стіна завширшки 30 см має з зовнішнього боку температуру 0°, а внутрішнього 20°. Знайти температуру всередині стіни.

27.За який час витече вся вода з циліндричного бака діаметром 1.8м, Заввишки H=2.45м через круглий отвір у дні радіуса 3см? Вісь бака вважати вертикальною.

28. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$

29. $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$.

30. $y' = \frac{x+y}{x-y}.$

31. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$

32. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3.$

33. $xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$

34. $y' = \frac{x+2y}{2x-y}$

35. $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y.$

36. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$.

37. $y' = \dfrac{x+2y-3}{2x-2}$

38. $y' = \dfrac{x+8y-9}{10x-y-9}$

39. $y' = \dfrac{3y-2x+1}{3x+3}$

40.Знайти криві в яких піддотична дорівнює сумі абциси та ординати точки дотику.

41.Знайти форму дзеркала, що відбиває всі промені, що виходять з однієї точки О, рівнобіжно з даним напрямком.

42.Знайти криві, у яких піднормаль дорівнює сумі абциси та ординати точки дотику.

43. $y' + ytgx = seCx.$

44. $(2x+1)y' = 4x+2y$

45. $x^2 y' = 4x+2y$

46. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2, y(1) = 0$

47. $y' - yctgx = 2x\sin x, y(\pi/2) = 0$

48. $y'' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x, y(0) = 0$

49. $y' + ytgx = \cos^2 x, y(\pi/4) = 1/2$

50. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x, y(-1) = 3/2$

51. $y' - \dfrac{1}{1+x} y = e^x (x+1), y(0) = 1$

52. $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x, y(\pi/2) = 1$

53. $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x, y(0) = 1$

54. $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2,\ y(0) = 1$

55. $xy' + y = 2y^2 \ln x,\ y(1) = 1/2$

56. $2(xy' + y) = xy^2,\ y(1) = 2$

57. $y' + 4x^3 y = 4(x^3+1)e^{-4x}y^2,\ y(0) = 1$

58.Ракету пущено вертикально вгору із початковою швидкістю 100м/с.Опір повітря сповільнює її рух, надаючи ракеті відємного прискорення, пропорційного квадрату її швидкості $(-kv^2)$.Через який час ракета досягне найбільшої висоти?

59.Закон Ома за наявності самоіндукції набуває вигляду $E - Ldi/dt = Ri,$ де E - Електрорушійна сила джерела енергії, $L-$ власна індуктивність, $R-$опір. Знайти $i(t)$.

60. $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$

61. $(3x^2 + \frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y})dx - \frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}dy = 0$

62. $(3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0$

63. $(2x - 1 - \frac{y}{x^2})dx - (2x - \frac{1}{x})dy = 0$

64. $\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx - (\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + 2y)dy = 0$

65. $(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y)dx + (x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})dy = 0$

66. $\frac{1+xy}{x^2y}dx + \frac{1-xy}{xy^2}dy = 0$

67. $\frac{dx}{y} - \frac{x+y^2}{y^2}dy = 0$

68. $\frac{y}{x^2}dx - \frac{xy+1}{x}dy = 0$

69. $(xe^x + \frac{y}{x^2})dx - \frac{1}{x} = 0$

70. $(10xy-\frac{1}{\sin y})+(5x^2+\frac{x\cos y}{\sin^2 y}-y^2\sin y^3)dy=0$

71. $(x^2+y^2+2x)dx+2ydy=0$

72. $(1+\frac{3y^2}{x^2})dx=\frac{2y}{x}dy$

73. $(x^2+x^2y+2xy-y^2-y^3)dx+(xy^2+y^2+2xy-x^2-x^3)dy=0$

74. $xy'=\sqrt{1+y'^2}$

75. $x^2y'^2+3xyy'+2xy^2=0$

76. $y'-\sin y'=0$

77. Чи мають рівняння:

a) $y^2-(\frac{2}{3}yy')^{3/2}=0$

b) $y'=\sqrt[3]{y}$

c) $y'+\sqrt{y}+1$

особливі розвязки? Чи виконується при цьому достатня умова обвідної?

78.При яких значеннях λ диференціальне рівняння $dy/dx=x^{-\lambda}$ має розв'язок $x=0$? При яких λ цей розв'язок буде особливий?

79. $y=y'tgy'+\ln\cos y'$

80. $x=4y'+4y'^3$

81. $y^2(y'-1)=(2-y')^2$

82. $4y'^2-9x=0$

Розділ другий

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ІИЩИХ ПОРЯДКІВ

§1.Рівняння n-го порядку, що розв'язуються у квадратурах

Диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0,$$

або якщо воно розв'язане відносно $y^{(n)} : y^n = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$

Інтегровні типи

1.Рівняння вигляду

$$F(x, y^n).$$

Тут можуть зустрітися три випадки.

(1)Рівняння (1) розв'язується відносно $y^n : y^n = f(x).$ Тоді його розв'язок знаходиться n-кратним інтегруванням:

$$y = \int dx \int dx ... \int f(x)dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + ... + C_{n-1}x + C_n.$$

(2)Рівняння (1)розв'язується відносно $x : x = f(y^n),$ тоді воно зводиться до квадрату підстановкою $y^n = p$

(3)Рівняння (1) не розв'язується не відносно x не відносно y^n , але його можна виразити у параметричній формі:

$$x = \varphi(t), y^n = \psi(t).$$

Тоді інтегрування рівняння зводиться до квадратур.

Розв'язування типових задач

Задача 1. *Зінтегрувати рівняння:*

$$y''' = \frac{\ln x}{x^2}$$

Розв'язання . Інтегруючи це рівняння послідовно три рази, знаходимо:

$$y'' = \int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_1, y' = -\frac{1}{2}\ln^2 x - \ln x + C_1 x + C_2$$

$$y = -\frac{x}{2}\ln^2 x + C_1 + \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_2$$

Задача 2. *Знайти розв'язок рівняння:*

$$(y'')^3 + y'' - xC = 0$$

Розв'язання . Тут маємо : $x = (y'')^3 + y''.$ Покладемо $y'' = p$, дістанемо $x = p + p^3$ і $dx = (1 + 3p^2)dp.$

Тому

$dy' = y''dx = p(1+3p^2)dp$

I $y' = \int p(1+3p^2)dp; \quad y' = \frac{1}{2}p^2 + \frac{3}{4}p^3 + C_1$

Далі знаходимо: $dy = y'dx = (\frac{1}{2}p^2 + \frac{3}{4}p^3 + C_1)(1+3p^2)dp$

$y = \int(\frac{1}{2}p^2 + \frac{3}{4}p^3 + C_1)(1+3p^2)dp + C_2$

Отже, загальним розв'язком рівняння у параметричній формі буде:

$x = p + p^3, \quad y = \frac{1}{6}p^3 + \frac{3}{16}p^4 + \frac{3}{10}p^5 + \frac{9}{24}p^6 + C_1 p + C_2$

<u>Задача 3.</u> *Зінтегрувати рівняння:*

$$y''^2 + 1 - x = 0$$

Розв'язання .. Вводимо параметр $t = y''$. тоді

$x = 1 + t^2 = \varphi(t), dx = 2tdt, dt' = y''dx = 2t^2 dt, y' = \frac{2}{3}t^3 + C_1$

$dy = (\frac{2}{3}t^3 + C_1)2tdt, y = \frac{4}{15}t^5 + C_! t^2 + C_2$

Загальний інтеграл у параметричній формі буде

$x = 1 + t^2, \quad y = \frac{4}{15}t^2 + C_1 t^2 + C_2$

II. Рівняння вигляду

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \qquad (2)$$

Розглянемо можливі випадки при розв'язанні рівняння(2)

(1) робимо заміну $z = y^{(n-1)}$, тоді отримуємо $F(z, z^{'})$, тобто рівняння 1-го порядку. Якщо це рівняння легко розв'язується відносно z', маємо:

$$z^{'} = f(z,), \quad x + C_1 = \int \frac{dz}{f(z)}$$

Звідси(якщо це можливо) знаходимо: $z = \varphi(z, C_1)$ і задача зводиться до послідовного інтегрування (випадок(1)) .У протилежному випадку, розглядаючи z як параметр, знайдемо:

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \frac{zdz}{f(z)}; \quad y^{(n-2)} = \int \frac{zdz}{f(z)} + C_2 = \varphi_2(z) + C_2$$

Аналогічно дістаємо:

$$y^{(n-3)} = \int \varphi_2(z) + C_2 \frac{-dz}{-f(z)} + C_3 = \varphi_3(z) + C_2 z + C_3$$

(2)Рівняння (2) можна подати у параметричній формі

$$y^{(n-1)} = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \varphi(t)$$

Тоді

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \varphi(t)dt\,; \quad dx = \frac{\varphi'(t)dt}{\varphi(t)}$$

Звідки

$$x + C_1 = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\varphi(t)}$$

Далі послідовно знаходимо

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \varphi(t)\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)},\ y^{n-2} = \frac{\varphi(t)\psi'(t)dt}{\psi(t)} + C_2$$

і таким чином одержуємо загальний розв'язок у параметричній формі.

Розв'язування типових задач

Задача 1. *Зінтегрувати рівняння:*

$$y'' = ay'.$$

Розв'язання. *Покладемо* $y' = p(x)$, *тоді* $y'' = dp/dx$. *Рівняння матиме вигляд* $dp/dx = ap$ *(це рівняння із відокремлюваними змінними). Маємо:* $dp/p = adx$. *Інтегрування дає:*

$$\ln p = ax + \ln C_1; \quad \ln\frac{p}{C_1} = ax; \quad \frac{p}{C_1} = e^{ax}, \quad p = C_1 e^{ax}.$$

Оскільки $p = y'$, *то* $y' = C_1 e^{ax}$, $dy = C_1 e^{ax}$ *і* $y = \frac{C_1}{a}e^{ax} + C_2$. *Позначивши* $C_1/a = \overline{C}_1$, *дістаємо загальний розв'язок рівняння*

$$y = \overline{C}_1 e^{ax} + C_2.$$

Задача 2. *Зінтегрувати рівняння:*

$$y'' = 1 + y'^2.$$

Розв'язання. *Покладемо* $y' = \varphi(t) = tgt$, *тоді* $y'' = \psi(t) = 1/\cos^2(t)$, $dx = \varphi'(t)dt/\psi(t) = dt,\ x = t + C_1$. *Знаходимо:*

$$y = \int \varphi(t)\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + C_2 = \int tgtdt + C_2 = \ln\frac{1}{|\cos t|} + C_2.$$

Отже, шуканий розв'язок у параметричній формі має вигляд

$$x = t + C_1, \quad y = -\ln|\cos t| + C_2.$$

III. *Рівняння вигляду*

$$F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (3)$$

Заміна $y^{(n-2)} = z$ зводить це рівняння до рівняння другого порядку відносно Функції z:

$$F\left(z, z''\right) = 0. \qquad (4)$$

Тут можливі три випадки:
(1) Рівняння (4) розв'язується відносно z''. Тоді інтегрування рівняння (3) зводиться до квадратур.

(2) Рівняння (4) розв'язується відносно z: $z = f(z'')$ або $y^{(n-2)} = f(y^n)$. Позначивши $y^{(n)} = t$, матимемо $y^{(n-2)} = f(t)$. Далі:

$$d\left(y^{(n-1)}\right)^2 = 2y^{(n-1)}y^{(n)} = 2y^{(n)}d\left(y^{(n-2)}\right) = 2tf'(t)dt.$$

Інтегруючи, знаходимо: $y^{(n-2)} = \Phi(t_1 C_1)$, тобто маємо параметричне Зображення рівняння (3) і воно інтегрується так само як і рівняння (2) у випадку (b).

(2) Рівняння (3) допускає параметризацію

$$y^{(n-2)} = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \varphi(t).$$

Тоді воно зводиться до рівняння типу $F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0.$

<u>Розв'язування типових задач</u>

<u>Задача 1.</u> *Зінтегрувати рівняння:*

$$y^{(IV)} = y''.$$

Розв'язання. *Поклавши* $y'' = z$, *записуємо це рівняння так:* $z'' = z$. *Помноживши обидві частини одержаного рівняння на* $2z'dx$, *матимемо:*

$$d(z')^2 = 2zdz, \text{звідки } (z')^2 = z^2 + C_1.$$

Відокремлюючи змінні у останньому рівнянні, знаходимо:

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 + C_1}} = dx.$$

Тоді

$$\ln\left(z+\sqrt{z^2+C_1}\right)=x+\ln C_2,\ z=\sqrt{z^2+C_1}=C_2e^x,$$

звідки, розв'язуючи z, дістаємо:

$$z=\frac{1}{2}C_2e^x-\frac{C_1}{2C_2}e^{-x}.$$

Оскільки $z=y''$, *то*

$$y''=\frac{1}{2}C_2e^x-\frac{C_1}{2C_2}e^{-x}.$$

Інтегруючи рівняння послідовно два рази, знаходимо загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y=\mathrm{A}e^x+\mathrm{B}e^{-x}+D,$$

де A,B,C,D – довільні рівняння

Задача 2. *Зінтегрувати рівняння*

$$y'''=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Розв'язання. *Це рівняння можна подати у параметричній формі:*

$$y'=\varphi(t)=tgt, y'''=\psi(t)=\sin t.$$

Далі:

$$d(y'')^2=2\psi(t)\varphi'(t)dt=2\sin t\frac{1}{\cos^2 t}dt,$$

Звідки знаходимо

$$y''=C_1+2\int\frac{\sin tdt}{\cos^2 t}=C_1+\frac{2}{\cos t}.$$

Знаходимо вираз для dx:

$$dx=\frac{dy'}{y''}=\frac{\varphi'(t)dt}{\sqrt{C_1\frac{2}{\cos t}}}=\frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{C_1}+\frac{2}{\cos t}}=\frac{dt}{\Phi(t,C_1)}.$$

Проінтегрувавши, одержуємо залежність x від параметру t:

$$x = \int \frac{dt}{\Phi(t, C_1)} + C_2.$$

Аналогічно знаходимо y як функцію від параметра t:

$$y = C_3 - \int \frac{d\cos t}{\cos^3 \sqrt{C_1 + \dfrac{2}{\cos t}}}.$$

Таким чином, загальний розв'язок отримано у параметричній формі.

§2. Зниження порядку диференціального рівняння

В окремих випадках порядок диференціального рівняння можна знизити на одиницю, що полегшує його інтегрування. Розглянемо класи рівнянь, що допускають таке пониження.

I. Рівняння вигляду

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)} = 0 \qquad (1)$$

Це рівняння не містить явно шуканої функції та її похідних до порядку k-1 включно. Порядок такого рівняння можна понизити заміною $y^{(k)} = p(x)$. Тоді рівняння (1) матиме вигляд:

$$F(x, p, p', ..., p^{(n-k)}) = 0.$$

З останнього рівняння знаходимо (якщо це можливо) $p = f(x, C_1, ..., C_{n-k})$,а *потім - y з рівняння*

$$y^{(k)} = f(x, C_1, ..., C_{n-k})$$

за допомогою k-кратного інтегрування.

II. Рівняння вигляду

$$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (2)$$

Це рівняння не містить явно незалежної змінної x. Підстановка $y' = p$ *дозволяє понизити його порядок на одиницю. При цьому p розглядається як нова невідома функція від y:p=p(y). Маємо:*

$$y' = p, y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} * \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}, y''' = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = p^2\frac{d^2 p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2$$

і т.д. Підставивши ці вирази у (2), одержимо рівняння (n-1)-го порядку.
III. Рівняння вигляду

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (3)$$

яке є однорідним відносно аргументів $y, y', y'', ... y^{(n)}$, *тобто*

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^M F(x, y, y', ..., y^{(n)}).$$

Порядок такого рівняння можна понизити на одиницю за допомогою підстановки $y = e^{\int zdx} dez$*- нова невідома функція від x:*

z=z(x).

IV. Рівняння вигляду

$$F(x, y, dx, dy, d^2 y) = 0, \qquad (4)$$

яке є однорідним відносно $x, y, dx, dy, d^2 y, ..., d^n y$, *а зміна* $x = e', y = ue'$ *зводить це рівняння до однорідного відносно* $y, y', y'', ..., y^{(n)}$

Розв'язування типових задач

Задача 1. *Розв'язати рівняння:*

$$y''' = \sqrt{1 + (y'')^2}.$$

Розв'язання. *Дане рівняння належить до рівнянь типу (1), оскільки воно не містить x, y і* y'. *Позначивши* $y'' = p$, *одержуємо рівняння із відокремлюваними змінними*

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2}.$$

Відокремивши змінні і інтегруючи, одержимо:

$$p = y'' = \frac{e^{x=C_1} - e^{-(x+C_1)}}{2},$$

звідки послідовним інтегруванням знаходимо:

$$y' = \frac{e^{x+C_1} + e^{-(x+C_1)}}{2} + C_2, \quad y = \frac{e^{x+C_1} - e^{-(x+C_1)}}{2} + C_2 x + C_3,$$

або $y = \sinh(x + C_1) + C_2 x + C_3.$

<u>Задача 2.</u> *Розв'язати рівняння:*

$$y'' + y'^2 = 2e^{-y}.$$

Розв'язання. *Рівняння явно не містить незалежної змінної x. Покладемо* $y' = p, y'' = pdp/dy$, *тоді одержуємо:*

$$p\frac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y},$$

яке є рівнянням Бернуллі. Воно зводиться до лінійного неоднорідного рівняння. Робимо підстановку: $z = p^2$, *тоді*

$$dzdy + 2z = 2e^{-y}.$$

Загальний розв'язок цього рівняння буде $z = 4\exp(-y) + C_1 \exp(-2y).$

Замінивши z на $p^2 = y'^2$, *одержимо*

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4e^{-y} + C_1 e^{-2y}}.$$

Відокремлюючи змінні і інтегруючи, одержимо:

$$x + C_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4e^{y} + C_1},$$

звідки

$$(x + C_2)^2 = e^y + \tilde{C}_1, \quad \text{де } \tilde{C}_1 = \frac{C_1}{4},$$

тобто загальний інтеграл цього рівняння.

<u>Задача 3.</u> Розв'язати рівняння:

$$x^2 yy'' = (y - xy')^2.$$

Розв'язання. *Це рівняння є однорідним відносно* y, y', y''. *Покладемо* $y = \exp(\int zdx)$. *Тоді*

$$y' = ze^{zdx}, \quad y'' = (z' + z^2)e^{zdx}.$$

Підставивши вирази для y, y', y'' *у рівняння, одержимо:*

$$x^2(z' + z^2)e^{zdx} = (e^{\int zdx} - xze^{zdx})^2.$$

Скоротивши на

$$e^{2\int z dx}$$

одержимо:

$$x^2(z' + z^2) = (1 - xz)^2 \quad \text{або} \quad x^2 z' + 2xz = 1.$$

Останнє рівняння є лінійним неоднорідним. Запишемо його так:

$(x^2 z) = 1$, *звідки* $x^2 z = x + C_1$ *і* $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{C_1}{x^2}$.

Вирахуємо інтеграл

$$\int z dx = \int \frac{dx}{x} + C_1 \int \frac{dx}{x^2} = \ln C_1.$$

Тоді загальний розв'язок цього рівняння буде

$$y = e^{\ln|x| + \frac{C_1}{x}\ln C_2} \quad \text{або} \quad y = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}.$$

<u>Завдання для самостійної роботи.</u>

Визначити тип кожного з поданих нижче диференціальних рівнянь і знайти його загальний інтеграл.

1. $y' = x + \cos x$ (відповідь: $y = \dfrac{x^4}{24} - \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$).

2. $y'' - 2y'y'' + 3 = 0$ (відповідь: $\begin{cases} x + C - z = \dfrac{1}{2}\ln|t| + \dfrac{3}{4t^2} \\ y + C_2 = \dfrac{1}{4}t + \dfrac{3}{4t^2} \end{cases}, t = y''$).

3. $y''^2 + y'^2 = y'^4$ (відповідь: $y + C_2 = \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + C_1\right)\right|$).

4. $4y' + y''^2 = 4xy''$ (відповідь $\begin{cases} C_1 x(x - C_1) + C_2 \\ y = \dfrac{1}{3}x^3 + C \end{cases}$).

5. $y''(1 + 2\ln y') = 1$ (відповідь $\begin{cases} y + C_1 = p^2 \ln p \\ x + C_2 = p(2\ln p - 1) \end{cases}, p = y'$).

6. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}, y(2) = 0, y'(2) = 4$ (відповідь: $y = \dfrac{2}{3}x^2\sqrt{2x} - \dfrac{16}{3}$).

7. $y'y''' - 3y''^2 = 0$ (відповідь: $x = C_1 y^2 + C_2 y + C_3$).

8. $3y'y''=2y, y(0)=y'(0)=1$ (відповідь: $y=\left(\frac{x}{3}+1\right)^3$).

9. $yy''-y'^2=y^2y'$ (відповідь: $C_1x+C_2=\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|$).

10. $y'x(yy''-y'^2)-x^4y^3$ (відповідь: $y=C_2e^{\frac{1}{3}(x^2+C_1)^{3/2}}$).

11. $y''=y'(1+y'^2)$ (відповідь: $y=\pm\arcsin e^{x+C_1}+C_2$).

12. $y'''=e^{-x}; y(0)=y'(0)=y''(0)=0.$

13. $y''''=\frac{e^x}{x}; y(1)=y'(1)=y''(1)=y'''(1)=0.$

14. $x^2yy''=(y-xy')^2.$

15. $y'''=2xy'.$

16. $x=e^{-y''}+y''.$

17. $yy''^2=1.$

18. $xy''=y'\ln\left(\frac{y'}{x}\right).$

19. $y^4-y^3y''=1.$

20. $y''=2yy'.$

21. Обчислити швидкість, з якою впаде на Землю(під дією земного тяжіння) тіло, що у початковий момент перебуває на орбіті Місяця(прискорення земного тяжіння обернено пропорційне квадрату відстані тіла від центра Землі).

23. $y''y^3+64=0, y(0)=4, y'(0)=2.$

24. $y''=50y^3, y(3)=1, y'(3)=5.$

25. $y''=18\sin^3 y\cos y, y(0)=2\sqrt{2}, y'(0)=1/\sqrt{2}.$

Розділ третій

ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ *n* -ГО ПОРЯДКУ

§1. Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь *n*-го порядку

Лінійним диференціальним рівнянням *n*-го порядку називається рівняння, лінійне відносно функції і усіх її похідних. Його загальний вигляд:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \qquad (1)$$

Якщо права частина $f(x) \equiv 0$, тоді рівняння називається лінійним однорідним, оскільки воно є однорідним відносно шуканої функції y та її похідних. У зв'язку із цим рівняння (1) називають лінійним неоднорідним. Отже, однорідне рівняння має вигляд:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \qquad (2)$$

Загальний розв'язок рівняння (1) шукається у вигляді:

$$y = \bar{y} + Y \qquad (3)$$

де $\bar{y}$ - загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (2);
Y - будь-який частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1).

Якщо відома фундаментальна система частинних розв'язків однорідного рівняння (2) $y_1, y_2, \ldots, y_n$, тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1) визначається за формулою

$$y_{gn} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n.$$

де функції $C_1(x), (i = 1,2,\ldots,n)$ визначаються з системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{n-2} + C_2'(x)y_2^{n-2} + \ldots + C_n'(x)y_n^{n-2} = 0 \\ C_1'(x)y_1^{n-1} + C_2'(x)y_2^{n-1} + \ldots + C_n'(x)y_n^{n-1} = f(x) \end{cases} \qquad (4)$$

(метод варіації довільних сталих, або метод Лагранжа).

Якщо є лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{5}$$

і відомий його один частинний розв'язок $y_1(x)$, тоді загальний розв'язок цього рівняння визначається за формулою Абеля

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}. \tag{6}$$

Розв'язування типових задач

Задача 1. *Зінтегрувати рівняння:*

$$xy'' + y' = x^2.$$

Розв'язання. *Інтегруємо відповідне однорідне рівняння* $xy'' + y' = 0$ *(воно належить до рівнянь типу $F(x, y', y'')=0$, тобто до нього явно не входить y). Загальним розв'язком цього рівняння буде $y = C_1 \ln x + C_2$. Отже, функції $y_1 = \ln x$, $y_2 = 1$ утворюють фундаментальну систему частинних розв'язків. Шукаємо загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння методом варіації сталих, тобто у вигляді:*

$$y = C_1(x)\ln x + C_2(x).$$

Складаємо систему (4) для визначення невідомих функцій $C_1(x)$ *і* $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\ln x + C_2'(x) = 0, \\ C_1'(x)\dfrac{1}{x} + C_2'(x)\cdot 0 = x^2, \end{cases}$$

звідки

$$C_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + A,$$

$$C_2(x) = -\frac{x^3}{3}\ln x + \frac{x^3}{9} + B.$$

Отже, загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння запишеться як

$$y = \frac{x^3}{9} + \tilde{C}_1 \ln x + \tilde{C}_2, \quad \text{де } \tilde{C}_1 \text{ і } \tilde{C}_2 - \text{довільні сталі.}$$

Задача 2. *Зінтегрувати рівняння:*

$$(x-1)y''-xy'+y=0.$$

якщо відомий його частинний розв'язок $y_1 = x$ (перевірити, що $y_1 = x$ справді є розв'язком цього рівняння).

Розв'язання. *Запишемо рівняння у вигляді*

$$y''-\frac{x}{x-1}y'+\frac{1}{x-1}y=0.$$

Тут $p_1(x) = -x/(x-1)$. Для відшукання загального розв'язку рівняння використаємо формулу (6). Обчислимо спочатку $\int p_1(x)dx$:

$$-\int -\frac{x}{x-1}dx=\int\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx=x+\ln(x-1)$$

(тут ми не враховуємо довільну сталу, оскільки вона об'єднається із довільною сталою у загальному розв'язку).

Далі:

$$e^{-\int p_1(x)dx}=e^{x+\ln(x-1)}=e^x(x-1),$$

І формула (6) дає:

$$y=C_1x+C_2x\int\frac{e^x(x-1)}{x^2}dx;$$

$$\int\frac{e^x(x-1)}{x^2}dx=\int\frac{e^x}{x}dx-\int\frac{e^x}{x^2}dx=\frac{1}{x}e^x.$$

Таким чином, загальним розв'язком рівняння буде $y = C_1x - C_2 e^x$.

§2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами.

Загальний вигляд лінійного однорідного диференціального рівняння n— ого порядку із сталими коефіцієнтами:

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0. \tag{1}$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – дійсні сталі.

Розв'язок рівняння (1) шукається у вигляді $y = e^{kx}$ (метод Ейлера).

Підставляючи $y = e^{kx}$ у (1) і скорочуючи на e^{kx}, одержимо рівняння:

$$a_0k^n+a_1k^{n-1}+\cdots+a_{n-1}k+a_n=0. \tag{2}$$

яке називається *характеристичним рівнянням* рівняння (1).

Вигляд загального розв'язку рівняння (1) залежить від значень коренів характеристичного рівняння (2). є

Можливі такі випадки:

1. Корені рівняння (2) різні і дійсні: $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Тоді фундаментальною системою частинних розв'язків буде

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x}, \cdots,\ y_n = e^{k_n x}$$

і загальний розв'язок рівняння (1) матиме вигляд

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \cdots + C_n e^{k_n x}$$

де C_i $(i = 1,2, ...,n.)$ – довільні сталі.

2. Корені характеристичного рівняння (2) дійсні, але серед них є кратні, наприклад, $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = \tilde{k}$, тобто $\tilde{k}$ є m — кратним коренем, а решта n — m коренів різні. У цьому випадку фундаментальна система розв'язків має вигляд:

$$y_1 = e^{\tilde{k}x}, \quad y_2 = x \cdot e^{\tilde{k}x}, \cdots, \quad y_m = x^{m-1} e^{\tilde{k}x}, \quad y_{m+1} = e^{k_{m+1}x}, \cdots, \quad y_n = e^{k_n x},$$

отже, загальний розв'язок рівняння буде

$$y = C_1 e^{\tilde{k}_1 x} + C_2 e^{\tilde{k}_2 x} + \cdots + C_n e^{k_n x}$$

3. Серед коренів характеристичного рівняння є комплексно –спряжені. Кожній парі комплексно-спряжених (не кратних) коренів $k = \alpha \pm i\beta$ відповідають два частинних розв'язки

$$y_1 = e^{ax} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{ax} \sin \beta x.$$

4. Кожній парі комплексно-спряжених коренів кратності m відповідають $2m$ частинних розв'язків:

$$y_1^{(1)} = e^{ax} \cos \beta x, \quad y_2^{(1)} = x e^{ax} \cos \beta x, \cdots, y_m^{(1)} = x^{m-1} e^{ax} \cos \beta x,$$

$$y_1^{(2)} = e^{ax} sib \beta x, \quad y_2^{(2)} = x e^{ax} siv \beta x, \cdots, y_m^{(2)} = x^{m-1} e^{ax} \sin \beta x.$$

Загальним розв'язком є сума усіх частинних (лінійно незалежних) розв'язків, помножених на довільні сталі.

Розв'язування типових задач

Задача 1. *Зінтегрувати диференціальне рівняння:*

$$y^{(IV)} - 5y'' + 4y = 0$$

Розв'язання. *Характеристичним рівнянням буде рівняння*

$k^4 - 5k^2 + 4 = 0.$

Розв'язавши його, знайдемо: : $k_1=1$, $k_2=-1$, $k_3=2$, $k_4=-2$, *тобто корені є дійсними і різними. Фундаментальна система частинних розв'язків буде*

$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x}, \quad y_3 = e^{2x}, \quad y_4 = e^{-2x}.$

Отже, загальний розв'язок має вигляд

$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} y_4 = C_4 e^{-2x}.$

Задача 2. *Зінтегрувати рівняння :*

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

Розв'язання. *Характеристичним рівнянням є рівняння* $k^3 + 2k^2 + k = 0$. *Звідси* $k_1=k_2=-1$, $k_3=0$. *Оскільки корінь* $k = -1$ *є коренем кратності 2, фундаментальна система частинних розв'язків матиме вигляд*

$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = xe^{-x}, \quad y_3 = e^{0x} = 1$

і загальний розв'язок

$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^x.$

Задача 3. *Зінтегрувати рівняння:*

$$y''' + 4y'' + 13y' = 0.$$

Розв'язання. *Складаємо характеристичне рівняння*

$k^3 + 4k^2 + 13k = 0.$

Воно має корені:

$k_1 = 0, \quad k_2 = -2 + 3i, \quad k_3 = -2 - 3i.$

Отже, загальний розв'язок:

$y = C_1 + C_2 e^{-2x} \cos 3x + C_3 e^{-2x} \sin 3x.$

Задача 4. *Зінтегрувати рівняння:*

$$y^{(V)} - 2y^{(IV)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$$

Розв'язання. *Характеристичне рівняння*

$k^5 - 2k^4 + 2k^3 - 4k^2 + k - 2 = 0$

має корені:

$k_1 = 2, \quad k_2 = -i, \quad k_3 = i, \quad k_4 = -i, \quad k_5 = i,$

тобто загальний розв'язок має вигляд:

$y = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\sin x.$

Задача 5. *Знайти розв'язок рівняння:*

$$y'' + y' + y = 0$$

який задовольняє початкові умови (задача Коші) : y(0) = 2, y'(0) = 1/2.

Розв'язання. *Складемо характеристичне рівняння :*

$k^2 + k + 1 = 0,$

його коренями будуть числа

$k_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \quad k_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$

Отже, частинними розв'язками будуть функції

$y_1 = e^{-\frac{1}{2}x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2} x, \quad y_2 = e^{-\frac{1}{2}x} \sin\frac{\sqrt{3}}{2} x.$

і загальний розв'язок запишеться так:

$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2} x \right),$

одержуємо:

$y' = e^{-\frac{1}{2}x}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} C_2 - \frac{1}{2} C_1 \right) \cos\frac{\sqrt{3}}{2} x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} C_1 \right) \sin\frac{\sqrt{3}}{2} x \right].$

Знаходимо сталі C_1 *і* C_2 *з початкових умов:* C_1 *розв'язком даної задачі Коші буде функція*

$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(2\cos\frac{\sqrt{3}}{2} x + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2} x \right),$

§3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння л-го порядку із сталими коефіцієнтами.

Загальний вигляд лінійного неоднорідного диференціального рівняння п-го порядку із сталими коефіцієнтами:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x). \qquad (1)$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – дійсні сталі.

Задача інтегрування такого рівняння зводиться до відшукання частинного розв'язку Y неоднорідного рівняння. У загальному випадку інтегрування рівняння (1) можна виконати методом варіації сталих.

Якщо права частина *f(x)* рівняння (1) має спеціальний вигляд, тоді Y знаходиться простіше(*метод невизначених коефіцієнті).*

Загальний вигляд *f(x)* рівняння (1), до якого можна застосувати цей метод, такий:

$$f(x) = e^{ax}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right] \qquad (2)$$

де $P_n(x)\ i\ Q_m(x)$ - многочлени степеня n та m відповідно. У цьому випадку частинний розв'язок Y_{pn} рівняння (1) шукають у вигляді

$$Y_{pn} = x^s e^{ax}\left[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right] \qquad (3)$$

де $k = \max(m, n), \tilde{P}_n(x)\ i\ \tilde{Q}_m(x)$ – многочлени від x *k-го* степеня із невизначеними коефіцієнтами, а s кратність кореня $a \pm \beta i$ характеристичного рівняння (якщо $a \pm \beta i$ не є коренем, тоді $s = 0$.)

Випишемо зведену таблицю виглядів частинних розв'язків для різного вигляду правих частин рівняння (1):

№ п/п	Вигляд правої частини	Корені характеристичного рівняння	Вигляд Y
1	$P_m(x)$	Число 0 не є коренем характеристичного рівняння.	$\tilde{P}_m(x)$
		Число 0 – корінь характеристичного рівняння кратності s	$x^s \tilde{P}_m(x)$

2	$P_m(x)e^{\alpha x}$ $\alpha - дійсне$	Число α не є коренем характеристичного рівняння.	$\widetilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
		Число α – корінь характеристичного рівняння кратності s	$x^s\widetilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
3	$P_n(x)\cos\beta x + \cdots + Q_m(x)\sin\beta x$	Число $\pm i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння.	$\widetilde{P}_n(x)\cos\beta x + \cdots + \widetilde{Q}_m(x)\sin\beta x$
		Число $\alpha \pm i\beta$ – корінь характеристичного рівняння кратності s	$x^s e^{\alpha x}\left(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \cdots + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right)$
4	$e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + \cdots + Q_m(x)\sin\beta x\right)$	Число $\alpha \pm i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння.	$e^{\alpha x}\left(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \cdots + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right)$
		Число $\alpha \pm i\beta$ – корінь характеристичного рівняння кратності s	$x^s e^{\alpha x}\left(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \cdots + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right)$

Розв'язування типових задач

Задача 1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y''' - y'' + y' - y = x^3 + x$$

Розв'язання. Розглядаємо відповідне однорідне рівняння

$y''' - y'' + y' - y = 0.$

Характеристичне рівняння

$k^3 - k^2 + k - 1 = 0$

має корені: $k_1 = 1$, $k_2 = i, k_3 = -i$. Тому загальний розв'язок однорідного рівняння $\bar{y}$ буде

$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$

Знаходимо частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння. Має місце випадок 1 (див. таблицю), причому число 1 не є коренем характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок Y треба шукати у вигляді

$Y = Ax^2 + Bx + C,$

де A,B,C - деякі сталі. Підставляючи вираз для Y , Y', Y'', Y''' у дане рівняння, одержуємо:

$-Ax^2 + (2A - B)x + B - 2A - C = x^2 + x.$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{cases} A = -1 \\ 2A - B = 1 \\ B - 2A - C = 0 \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, одержуємо: A = -1 ,B = -3,C = -1.

Отже,

$Y = -x^2 - 3x - 1$

а загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння запишеться як

$y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x^2 - 3x - 1$

Задача 2. Знайти загальний розв'язок

рівняння:

$$y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння $k^2 - 3k + 2 = 0$ має корені $k_1 = l, k_2 = 2$. Отже, загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння буде

$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Знаходимо частинний розв'язок даного рівняння. Бачимо, що число $\alpha = 3$ не є коренем характеристичного рівняння. Тоді Y шукаємо у вигляді

$Y = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$.

Підставивши Y, Y', Y'' у задане рівняння, дістанемо систему для визначення коефіцієнтів A, B, C:

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 6A + 2B = 1 \\ 2A + 3B + 2C = 0 \end{cases}$$

звідки A = $1/2$, B = -1, C =

1. Таким чином,

$$Y = (\frac{1}{2}x^2 - x + 1)e^{3x} = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^{3x}$$

отже, загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння матиме вигляд:

$$y = \bar{y} + Y = C_1 e^x + C^2 e^{2x} + \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^{3x}$$

Задача 3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{3x}.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 4 = 0$ *має* корінь k = 2 кратності 2. Тому

$\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

Частинний розв'язок даного рівняння шукатимемо у вигляді
$Y = x^2 (Ax + B)e^{2x}$,

оскільки число $\alpha = 2$ - корінь характеристичного рівняння (двократний, тобто s = 2). Методом невизначених коефіцієнтів знаходимо:

$A = 1/6, B = 2.$ *Отже,*

$$Y = \frac{1}{6}x^3 e^{2x},$$

а загальним розв'язком буде

$$y = \bar{y} + Y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{1}{6}x^3 e^{2x}$$

Задача 4. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' - 6y' + 9y = 25e^x e^x \sin x$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 9 = 0$ має корені $k_{1,2} = 3$ і загальний розв'язок $\bar{y}$ однорідного рівняння має вигляд $y' = e^x(A\cos x + B\sin x)$.. Частинний розв'язок Y шукаємо у вигляді $Y = e^x(A \cos x + B \sin x)$. Підставивши Y, Y', Y" у дане неоднорідне рівняння і скоротивши обидві частини на e^x, одержимо:

$$(3A - 4B)\cos x + (4A + 3B)\sin x = 25\sin x,$$

звідки, прирівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$, матимемо:

$$\begin{cases} 3A - 4B = 0 \\ 4A + 3B = 25 \end{cases}$$

Розв'язком одержаної системи буде: $A = 4$, $B = 3$, отже:

$Y = e^x (4 \cos x + 3 \sin x)$.

Загальний розв'язок даного рівняння запишеться так:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + e^x(4 \cos x + 3 \sin x).$$

§4. Рівняння Ейлера.

Рівняння вигляду

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y) = 0, \qquad (1)$$

де усі a_i - сталі, називається рівнянням Ейлера.

Це рівняння за допомогою заміни незалежної змінної

$$x = e^t$$

перетворюється на лінійно однорідне рівняння із сталими коефіцієнтами:

$$b_0 y^{(n)} + b_1 y_t^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1} y'_t + b_n y(t) = 0. \qquad (2)$$

Рівняння вигляду

$$a_0 (ax + b)^n y^{(n)} + a^1 (ax + b)^{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(ax + b) y' + a_n y = 0. \qquad (3)$$

також називається рівнянням Ейлера і зводиться до лінійного однорідного рівняння із сталими коефіцієнтами шляхом заміни змінних
$ax+b=e^t$.

Частинні розв'язки рівняння (1) можна відразу ж шукати у вигляді

$y = x^k$,

при цьому для *k* ми одержуємо рівняння, яке співпадає із характеристичним рівнянням для рівняння (2).

Неоднорідні рівняння Ейлера вигляду

$$\sum_{k=0}^{m} a_k x^k y^{(k)} = x^{\alpha} P_m(\ln x), \qquad (4)$$

де $P_m(u)$ - многочлени степеня *m,* можна також розв'язувати методом підбору за аналогією із відшуканням розв'язку лінійного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами і з правою частиною вигляду

$e^{\alpha x} P_m(x)$..

Розв'язування типових задач

Задача 1. Знайти загальний розв'язок рівняння Ейлера:

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0.$$

Розв'язання. Перший спосіб. Робимо у рівнянні підстановку $x=e^t$, тоді

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-t}}{e^{-t}} = e^{2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

і рівняння набуває вигляду

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0,$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2,$ і загальний розв'язок останнього рівняння буде $y = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}$. Але оскільки $x=e^t$, тоді

$y = C_1 x^{-3} + C_2 x^2$ або

$y = \frac{C_1}{x^3} + C_2 x^2$

Другий спосіб. Будемо шукати розв'язок даного рівняння у вигляді $y = x^k$, де k - невідоме число. Знаходимо:

$y' = kx^{k-1}, y'' = k(k-1)x^{k-2}.$

Підставляючи у рівняння, одержуємо:

$x^2 k(k-1)x^{k-2} + 2xkx^{k-1} - 6x^k = 0$

Або

$x^k[k(k-1) + 2k - 6] = 0$

Але, оскільки $x^k \neq 0$, тоді $k(k - 1) + 2k - 6 = 0$ або $k^2 + k - 6 = 0$. Корені цього рівняння $k_1 = -3, k_2 = 2$. їм відповідає фундаментальна система розв'язків:

$y_1 = x^{-3}, y_2 = x^2,$

і загальний розв'язок

буде

$y_1 = C_1 x^{-3} + C_2 x^2$

<u>Задача 2.</u> Розв'язати рівняння Ейлера:

$$x^2 y'' - xy' + 2y = x\ln x.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k(k-1) - k + 2 = 0$ або $k^2 - 2k + 2 = 0$

має корені $k_1 = 1 - i, k_2 = 1 + i$ Тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння буде

$\bar{y} = x(C_1 \cos\ln x + C_2 \sin\ln x)$

Частинний розв'язок шукаємо у вигляді $Y = x(A\ln x + B)$ Маємо:

$Y' = A\ln x + B\frac{A}{x}A, Y'' = \frac{A}{x'}$

або

Ax *In* x + Bx = x *In* x,

звідки A = 1, B = 0. Отже, $Y = x\ln x$. Загальним розв'язком буде

$y = x(C_1 \cos\ln x + C_2 \sin\ln x) + x\ln x$

Завдання для самостійної роботи.

Розв'язати наступні рівняння:

1. $y'' + 2y' + 2 = 0$ (відповідь: $y = C_1 + C_2e^{-2ч} - x)$.

2. $y'' - 4y' + 4y = x^2$ (відповідь: $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \left(\frac{1}{4}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)x + \frac{7}{8}.$)

3. $y'' + 8y' = 8x$ (відповідь: $y = C_1 + C_2e^{-8x} + \left(\frac{1}{2}\right)x^2 - \left(\frac{1}{8}\right)x$)

4. $y'' - 4y' + 4y = 8e^{-2x}$ (відповідь: $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + 4x^2e^{-2x}$)

5. $y'' + 5y' + 6y = 10(1-x)e^{-2x}$
(відповідь: $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x} + (20x - 5x^2)e^{-2x}$)

6. $y'' + 4y' - 2y = 8\sin 2x$
(відповідь: $y = C_1e^{-(\sqrt{6}+2)x} + C_2e^{(\sqrt{6}-2)x} - \frac{12\sin 2 + 16\cos 2x}{25}$)

7. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x \cos 2x$
(відповідь: $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x - \left(\frac{1}{8}e^x \sin 2x\right)$)

8. $y'' + y = 2\sin x \sin 2x$
(відповідь: $y = \frac{1}{2}x\sin x + \left(\frac{1}{8}\right)\cos 3x + C_1\cos x + C_2\sin x$)

9. $y'' + 4y = \sin\sin 2x.$

10. $y'' - 4y' = 2\cos^2 4x$

11. $y^{iv} + 2y''' + y'' = e^{4x}.$

12. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x).$

13. $y'' + 4y' + 5y = 10e^{-2x}\cos x$

14. $y'' + y' - 2y = x^2e^{4x}.$

15. $y'' + 4y = e^x + 4\sin 2x + 2\cos^2 x - 1$

16. $y'' + 4y = x\sin^{2x}$

17. $y'' + 3y' + 2y = 6xe^{-x}(1 - e^{-x})$

18. $y'' - 2y' + 5y = e^x(1 - 2\sin^2 x) + 10x + 1.$

19. $y'' - 4y' + 4y = 4x + \sin x + \sin 2x$

20. $y'' + y' + y + 1 = \sin x + x + x^2$

$21. y'' + 6y' + 9y = 9xe^{-3x} + 1 + 9\sin x$

$22. y'' + 2y' + 1 = 3\sin 2x + \cos x$

Знайти частинні розв'язки рівнянь,що задовольняють задані початкові умови:

$23. y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x};\ y(0) = y'(0) = 0.$

$24. y'' + 9y = 6e^{3x};\ y(0) = y'(0) = 0.$

$26. y'' + 6y + 9y = 20\sin x;\ y(0) = y'(0) = 0.$

$27. y'' + y = 2\cos x;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

$28. y'' + 4y = \sin x;\ y(0) = y'(0) = 0.$

$29. y'' + 4y' = 4(\sin 2x + \cos 2x);\ y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi$

$30. y^{IV} - y = 8e^{x};\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 4,\ y'''(0) = 6.$

$31. x^2 y'' + xy' - y = 0$

$32. x^2 y'' + 2xy' + 6y = 0.$

$33. (2x+1)^2 y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0.$

$34. x^2 y''' - 3xy'' + 3y' = 0.$

$35. x^2 y'' + xy' + y = x(6 - \ln x).$.

$36. x^2 y'' + xy' + y = 2x.$

$37. x^2 y'' - xy' - 3y = -\frac{16\ln}{x}.$

$38. x^w y'' - 2xy + 2y = x^2 - 2x + 2.$

$39. x^2 y'' + xy' - y = x^m, |m\ | \neq 0$

$40. x^2 y'' + 4xy' + 2y = 2\ln^2 x + 12x.$

$41 y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2.$

$42. y^{V} - y^{IV} = 2x + 3.$

$43. y^{IV} + y''' = x.$

$44. y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}.$

$45. y''' - 3y' + 2y = (4x + 9)e^{2x}.$

$46. y'' - 2y' = 4e^{x}(\sin x + \cos x).$

$47. y'' - 4y' + 4y = -e^{-2x}\sin 6x.$

$48. y'' - 4y = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x}.$

$49. y'' - 4y' = 16ch4y.$

$50. y'' + 81y = 9\sin 9x + 3\cos 9x + 162e^{9x}.$

$51 y'' - 5y' = 50ch5x.$

$52. y'' + \pi^2 y = \pi^2 / \cos \pi x,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0.$

$53. y'' + 3y' = 9e^{3x} / (1 + e^{3x}),\ y(0) = \ln 4,\ y'(\pi/2) = 2$

.

$54. y'' + 16y = 16/\sin 4x,\ y(\pi/8) = 1,\ y'(\pi/2) = 2.$

55. $y'' + y = 2ctgx, y(\pi / 2) = 2.$

56. $x^2 y'' - xy'' - 3y = 0.$

57. $x^2 y'' - xy' + y = 6x \ln x.$

58. $x^2 y'' - xy' = - x + \frac{3}{x}$

59. $x2\ y'' + xy' + y = 2 \sin(\text{In}\ x).$

60. $x2y'' - xy' + y = 8x3.$

Розділ четвертий

СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯННЯ

§1. Системи звичайних диференціальних рівнянь

Означення. Системою звичайних диференціальних рівнянь називається сукупність k рівностей, які виражають залежність між аргументом x, k функціями цього аргументу та їхніми похідними до певного порядку.

Загальний вигляд системи:

$$F_i(x,y_1,y_1',\dots,y_1^{(n1)};y_2,y'_2,\dots,y_2^{(n2)};\ \dots;\ Y_k\, Y'_k,\dots,Y_k^{(k)})=0 \qquad (1)$$

$(i=1,2,\ \dots\ ,k).$

Розв'язком системи (1) на деякому проміжку $(a,\ b)$ називається сукупність функцій $y_1\ (x),\ y_2$ (x),..., $y_к\ (x),$ неперервна диференційованих на $(a,\ b),$ підстановка яких разом з їхніми похідними до системи (1) перетворює кожне рівняння системи на тотожність. Як правило, ми вважатимемо, що число рівнянь системи дорівнює числу невідомих функцій.

Якщо система (1) розв'язана відносно старших похідних усіх функцій, її називають канонічною:

$$\begin{cases} Y_1^{(n1)}= f_1(x,y_1,y'_1,\ \dots\ ,y_1^{(n1-1)};\ \dots\ ,Y_k,Y'_k,\ \dots\ ,Y_k^{(nk-1)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_k^{(nk)}=f_k(x,y_1,y'_1,\ \dots\ ,y_1^{(n1-1)};\ \dots\ ,Y_k,Y'_k,\ \dots\ ,Y_k^{(nk-1)}) \end{cases}$$

(2)

При цьому число n = max $\{n_1,n_2,\dots ,n_k\}$ називають порядком системи. При $n_1 = n_2 = \dots = n_k= 1$ маємо канонічну систему диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} Y'_1(x) =f_1(x,y_1,y_2,\ \dots\ ,y_n) \\ Y'_2(x)= f_2(x,y_1,y_2,\ \dots\ ,y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y'_n(x)= f_n(x,y_1,y_2,\ \dots\ ,y_n) \end{cases} \qquad (3)$$

яку називають нормальною системою диференціальних рівнянь.

Одним із загальних методів розв'язання системи (3) полягає у тому, щоб звести її до одного диференціального рівняння n — го порядку відносно однієї шуканої функції. У даних вказівках розглянуто лише лінійні системи та приведено методи їх інтегрування.

§2. Системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Нормальна система лінійних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i + f_i(x)(i = 1,2,..., n),), \qquad (4)$$

де a_{ij} - сталі, $f_i(x)$ – задані функції ($i,j \in \{1,2, ..., n\}$, називається лінійною неоднорідною системою . Система (4) називається не однорідною, якщо $f_i = 0$ для усіх $i \in \{1, ... , n\}$.

Розглянемо найбільш поширені способи розв'язання системи (4).

I. Зведення системи до одного рівняння n –го порядку.

Проілюструємо цей метод на прикладі системи двох рівнянь:

$$\frac{dy_1}{dx} = a_1 y_1 + b_1 y_2 + f_1(x),$$
$$\frac{dy_2}{dx} = a_2 y_1 + b_2 y_2 + f_2(x).$$

(5)

Зведемо систему (5) до рівняння 2-го порядку відносно шуканої функції $y_1(x)$. Для цього[1] продиференціюємо перше з рівнянь (5) по x:

$$\frac{d2y1}{dx2} = a_1\frac{dy1}{dx} + b_1\frac{dy2}{dx} + f'_1(x) \qquad (6)$$

З першого рівняння знаходимо

$y_2 = \frac{1}{b1}(\frac{dy1}{dx} - a_1y_1 - f_1(x))$

Підставляючи y_2 у (6), одержуємо рівняння другого порядку відносно $y_1(x)$:

$$\mathrm{a}\frac{d^2 y_1}{dx^2} + b\frac{dy_1}{dx} + cy_1 + f(x) = 0$$

де **a, b, c** - сталі. Знаходимо розв'язок цього рівняння $y_1 = \varphi(x, C_1, C_2$, і підставивши значення y_1 *і* dy_1 / dx у вираз для y_2, одержуємо функцію y_2.

Можна зводити систему (5) до рівняння другого порядку відносно шуканої функції y_2, а потім знаходити функцію y_1 (x).

Задача 1. *Розв'язати систему*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y+z+x \\ \frac{dz}{dx} = -2z + 2x \end{cases}$$

Розв'язання. *Диференціюємо перше рівняння системи, одержуємо:*

$y'' = y' + z' + 1,$

Звідки, з другого рівняння:

$y'' = 1 + y' + 2x - 2z$

З першого рівняння системи знаходимо:

$z = y' - y - x,$

тоді одержуємо лінійне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами:

$y'' + y' - 2y = 4x + 1$

Його загальний розв'язок:

$y = C_1e^x + C_2 e^{-2x} - 2x - \frac{3}{2}$

Підставляючи у вираз для z значення y та y', дістаємо:

$z = -3C_2e^{-2x} + -\frac{1}{2}$

Таким чином, знайдено обидві невідомі функції y(x),z(.x), які дають загальний розв'язок заданої системи.

Задача 2. *Розв'язати систему*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 1, \\ \frac{dy}{dt} = x + 1. \end{cases}$$

Розв'язання. *З другого рівняння:*

$\frac{d2y}{dt} = \frac{dy}{dt}, x = \frac{dy}{dt} - 1.$

одержуємо лінійне рівняння другого порядку відносно y(t)

$y'' - y = -1,$

загальний розв'язок якого

$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + 1.$

Підставляючи y' у вираз для x, одержимо:

$x = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - 1.$

II. Спосіб Ейлера інтегрування системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами.

Розглянемо цей метод для до системи трьох лінійних однорідних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \frac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ \frac{dz}{dt} = a_2 x + b_3 y + c_3 z \end{cases} \qquad (7)$$

Розв’язок системи (1) шукаємо у вигляді:

$X = Ae^{kt},\ y = Be^{kt},\ z = Ce^{kt}$ (*A,B,C* – сталі) (8)

Підставляючи (2) до системи (1), дістанемо систему для визначення **А. В, С:**

$$\begin{cases} (a_1 - k)A + b_1 B + c_1 C = 0, \\ a_2 A + (b_2 - k) B + c_2 C = 0, \\ a_3 A + b_3 B + (c_3 - k) = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Система (3) має ненульовий розв'язок, якщо її детермінант Δ дорівнює нулеві, тобто:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-k & b & c \\ a1 & b1-k & c1 \\ a2 & b2 & c2-k \end{vmatrix} = 0. \qquad (10)$$

Рівняння (10) називають характеристичним рівнянням системи (7). Воно є рівнянням третього степеня, отже, має три корені: k_1, k_2, k_3. Тут можливі три випадки.

(1)Корені $к_г, к_2, к_3$ - дійсні і різні. Підставивши у систему (9) замість $к$ число $к_1$ і розв'язавши цю систему, дістанемо числа A_1, B_1, C_1. Далі, підставивши до (9) число $к = к_2$, знайдемо числа A_2, B_2, C_2. Нарешті, підставивши $k = k_3$, матимемо A_3, B_3, C_3. Отже, відповідними розв'язками (7) будуть:

$$\begin{cases} X_1 = A_1 e^{k1t},\ y_1 = B_1 e^{k1t},\ z_1 = C_1 e^{k1t}, \\ X_2 = A_2 e^{k2t},\ y_2 = B_2 e^{k2t},\ z_2 = C_2\, e^{k2t}, \\ X_3 = A_3 e^{k3t},\ y_3 = B_3 e^{k3t},\ z_3 = C_3\, e^{k3t}. \end{cases}$$

Тоді загальний розв'язок (7) матимемо вигляд:

$$\begin{cases} x = \bar{A}x_1 + \bar{B}x_2 + \bar{C}x_3, \\ y = \bar{A}y_1 + \bar{B}y_2 + \bar{C}y_3, \text{ де } \bar{A}, \bar{B}, \bar{C} \text{ - довільні сталі.} \\ z = \bar{A}z_1 + \bar{B}\, z_2 + \bar{C}z_3, \end{cases}$$

Задача 1. *Розв'язати систему*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z \end{cases}$$

Розв'язання. *Характеристичне рівняння (4) запишеться так:*

$$\Delta\ (k) = \begin{vmatrix} -(1+k) & 1 & 1 \\ 1 & -(1+k) & 1 \\ 1 & 1 & (1-k) \end{vmatrix} = 0$$

Або $k^3 + k^2 - 4k - 4 = 0$. Підставивши його корені $k_1 = -1$, $k_2 = 2$, $k_3 = -2$

по черзі до системи (3), одержимо три системи, розв'язавши які, одержимо значення A_i, B_i, C_i відповідні частинні розв'язки:

$x_1 = e^{-t}$, $y_1 = -e^{-t}$, $z_1 = e^{-t}$,

$x_2 = e^{2t}$, $y_2 = e^{2t}$, $z_2 = 2e^{2t}$,

$x_3 = e^{-2t}$, $y_3 = e^{-2t}$, $z_3 = 0$

Отже, загальний розв'язок даної системи записується у вигляді:

$$\begin{cases} x = \bar{A}e^{-t} + \bar{B}e^{2t} + \bar{C}e^{2t}, \\ y = \bar{A}e^{-t} + \bar{B}e^{2t} + \bar{C}e^{2t}, \\ z = \bar{A}e^{-t} + \bar{B}e^{2t}. \end{cases}$$

(2)Корені характеристичного рівняння комплексні.

Задача 2. *Розв'язати систему*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$$

Розв'язання. *Система для визначення сталих A і B буде мати вигляд:*

$$\begin{cases} (1 - k)\,A - 5B = 0 \\ 2A - (1 + k)\,B = 0 \end{cases}$$

Характеристичне рівняння

$\begin{vmatrix} 1-k & -5 \\ 2 & -1-k \end{vmatrix} = 0$ має корені $k_1 = 3i$, $k_2 = -3i$.

Підставляючи $k_1 - 3_i$ до системи (9), одержуємо:

$$\begin{cases} (1 - 3i)\,A_i - 5B_i = 0, \\ 2A_1 - (1 + 3_i)\,B_1 = 0. \end{cases}$$

Оскільки $\Delta = 0$, одне рівняння є наслідком другого. Якщо $A_1 = 5$, тоді $A_1 = 1 - 3_i$, і перший частинний розв'язок буде

$x_1 = 5\,e^{3it}$, $y_1 = (1 - 3i)e^{3it}$

Аналогічно, підставивши $k_2 = -3_i$ у **(9),** одержимо систему, з якої знаходимо другий частинний розв'язок:

$x_2 = 5\,e^{-3it}$; $\quad y_2 = (1 + 3i)e$

Перейдемо до нової фундаментальної системи розв'язків

$\tilde{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $\tilde{x}2 = \frac{1}{2i}(x_1 + x_2)$,

$\tilde{y} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, $\widetilde{y2} = \frac{1}{2i}(y_1 + y_2)$.

і, скориставшись формулою Ейлера ($e^{\pm ait} = \cos at \pm i \sin at$), одержимо:

$\widetilde{x1} = 5\cos 3t$, $\widetilde{x2} = 5\sin 3t$;

$\widetilde{y1} = \cos 3t + 3\sin 3t$, $\widetilde{y2}\ \sin 3t - 3\cos 3t$.

Загальним розв'язком даної системи будуть функції:

$x = 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t,$

$y = C_1(\cos 3t + 3 \sin 3t) + C_2 (\sin 3t \cos 3t)$

Вказівка. Маючи розв'язок $x_г$, y_1 можна було б одразу записати загальний розв'язок, користуючись формулами

$$\begin{cases} x = C_1\, \mathfrak{R}x_1 + C_1 \mathfrak{I}x_1 \\ y = C_2\, \mathfrak{R}y_1 + C_2 \mathfrak{I}y_1 \end{cases}$$

де $\mathfrak{R}x_1, \mathfrak{R}y_1\ \mathfrak{I}x_1, \mathfrak{I}y_1$ *– дійсні* ($\mathfrak{R}$) *і уявні* ($\mathfrak{I}$) *частини* x_1 *і* y_1

(3)<u>Випадок кратних коренів</u>

<u>Задача 3.</u> *Розв'язати систему*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y. \end{cases}$$

<u>Розв'язання.</u> ***Складемо характеристичне рівняння***

$$\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ -1 & 1-k \end{vmatrix} = 1$$

тобто $k_2 — 6к + 9 = 0$. *Його корені* $k_1 = k_2 = 3$. *тоді розв'язок слід шукати у вигляді*

$$\begin{cases} x=(A_1 + B_1 t)e^{3t} \\ y=(A_2 + B_2 t)e^{3t} \end{cases} \qquad (13)$$

З першого рівняння системи матимемо:

$$3(A_1 + B_1 t) + B_1 = 2(A_1 + B_1 t) + (A_2 + B_2 t).$$

Порівнюючи коефіцієнти у лівій і правій частинах при однакових степенях t, знайдемо:

$3A_1 + B_1 = 2A_1 + A_2$,

$3B_1 = 2B_1 + B_2$, звідки $A_2 = A_1 + B_1$, $B_2 = B_1$.

Позначивши $A_1 = C_1, B_1 = C_2$, одержуємо загальний розв'язок заданої системи:

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2t)e^{3t}, \\ y = (C_1 + C_2 + C_2t)\,e^{3t}. \end{cases}$$

III. <u>Розв’язування системи диференціальних рівнянь методом «інтегровних комбінацій».</u>

Цей метод розв'язання систем диференціальних рівнянь (не лише лінійних) полягає у тому, що з даної системи шляхом тих чи інших перетворень

дістають, якщо це можливо, рівняння, які безпосередньо можна про інтегрувати.

Задача 1. *<u>Розв'язати систему</u>*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y^2}{x}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x^2}{y}. \end{cases}$$

Розв’язання. *<u>Запишемо систему у вигляді</u>*

$$\begin{cases} xdx = y^2dt \\ ydy = x^2dt \end{cases}$$

Склавши рівняння почленно, маємо:

$xdx + ydy = (x^2 + y^2)dt$

або

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 2dt;,$$

звідки

$\ln(x^2 + y^2) = 2t + \ln C_1$, $x^2 + y^2 = C_1e^{2t}$.

Віднімаючи почленно з першого рівняння друге, одержуємо:

$xdx - ydy = (y^2 - x^2)dt,$

або

$$\frac{d(x^2-y^2)}{x^2-y^2} = 2dt;$$

звідки

$$x^2 - y^2 = C_2 e^{-2t} \qquad (1)$$

*Р*озв'язуючи одержані рівності відносно x і y, знаходимо загальний розв'язок заданої системи у вигляді:

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}C_1 e^{2t} + \frac{1}{2}C_2 e^{-2t}}, \quad y = \sqrt{\frac{1}{2}C_1 e^{2t} - \frac{1}{2}C_2 e^{-2t}},$$

Задача 2. *Знайти розв'язок системи*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z-1}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{y-x}. \end{cases}$$

Розв'язання. *Приводимо цю систему до симетричної форми*

$$\frac{dy}{z-1} = \frac{dx}{z}; \quad \frac{dz}{1} = \frac{dx}{y-x};$$

або

$$\frac{dx}{z(y-x)} = \frac{dy}{(z-1)(y-x)} = \frac{dz}{z} \quad . \qquad (2)$$

Складаємо відношення

$$\frac{dz}{z} = \frac{dy - dx}{(z-1)(y-x) - z(y-x)}$$

або

$$\frac{dz}{z} = \frac{d(y-x)}{y-x},$$

звідки знаходимо

$(y - x)\, z = C_1.$

Далі прирівнюємо першій і останній дроби одержаної системи, замінивши знаменник першого дробу через його значення C_1 із (6):

$$\frac{dx}{C_1} = \frac{dz}{z},$$

звідки

$$z = C_2 e^{\frac{x}{x(y-x)}}.$$

тобто

$$(y-x)z = C_1$$

Отже, цей вираз для z та співвідношення $C_1 = (y - x)z$ визначають загальний інтеграл заданої системи диференціальних рівнянь.

Завдання для самостійної роботи.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt}.$$

I. $\begin{cases} \dot{y} = y - z; \\ \dot{z} = 4z - 4y. \end{cases}$

II. $\begin{cases} \dot{y} = 2y + z; \\ \dot{z} = -6z - 3z. \end{cases}$

III. $\begin{cases} \dot{y} = 2y - 3z; \\ \dot{z} = 3y + 2z. \end{cases}$

IV. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 12y - 4z; \\ \dot{y} = -x - 3y + z; \\ \dot{z} = -x - 12y + 6z. \end{cases}$

V. $\begin{cases} \dot{y} = y - z; \\ \dot{z} = 4z - 4y. \end{cases}$

VI. $\begin{cases} \dot{x} = 21x - 8y - 19z; \\ \dot{y} = 18x - 7y - 15z; \\ \dot{z} = 16x - 6y - 15z. \end{cases}$

VII. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y + \dfrac{1}{\cos} t; \\ \dot{y} = -2x - 2y. \end{cases}$

VIII. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - e^{2t}; \\ \dot{y} = -3x + 2y + 6e^{2t}. \end{cases}$

IX. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$

X. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{x+y}$

XI. $\dfrac{dx}{z-y} = \dfrac{dy}{x-z} = \dfrac{dz}{y-x}$

Розділ п'ятий

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

§1.Лінійні однорідні та неоднорідні рівняння

Рівняння першого порядку із частинними похідними має вигляд

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + ... + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = X \qquad (1)$$

де z – невідома функція від n незалежних змінних $x_1,x_2,\ldots,x_n$; $x_1,x_2,\ldots x_n$,- задані функції від тих самих змінних $x_1,x_2,\ldots x_n$ і z.

Якщо права частина $X\equiv 0$ і коефіцієнти X_i (i=1,2,…,n) не залежать від z, тоді рівняння (1) називається однорідним і має вигляд:

$$X(x_1,x_2,\ldots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1} + ... + x_n(x_1,x_2,\ldots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0 \qquad (2)$$

Розв'язком цього рівняння буде функція $z= z(x_1,x_2,..,x_n)$, яка при підстановці її до рівняння(2) перетворює його у тотожність.

Інтегрування рівняння (2) здійснюється так : складаємо систему звичайних диференціальних рівнянь у симетричні формі, що відповідає рівнянню(2); знаходимо n-1 незалежних перших інтегралів цієї системи. Тоді будь-яка диференційована функція від цих інтегралів буде розв'язком рівняння(2).

Вище згадана система матиме вигляд:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = \frac{\partial z_2}{\partial x_2} = ... = \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \qquad (3)$$

а n-1 незалежних інтегралів цієї системи-функції

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2,..., x_n) = C_1 \\ \psi_1(x_1, x_2,..., x_n) = C_2 \\ .... \\ \psi_1(x_1, x_2,..., x_n) = C_n \end{cases} \qquad (4)$$

Тоді загальний розв'язок (2) буде

$z = \phi(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{n-1})$,

де ф – довільна стала диференційована функція від n-1 аргументів

$\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{n-1}$

Аналогічно розв'язується неоднорідне рівняння(1).

Задача Коші для лінійного рівняння з двома незалежними змінними (z=z(x,y)) формулюється так: визначити інтегральну поверхню, яка Проходить через дане криву.

Розв'язування типових задач

Задача 1. *Проінтегрувати рівняння :*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Розв'язання. *Складаємо систему* (3):

$$\frac{\partial x}{y} = \frac{\partial y}{x} = \frac{\partial z}{0}$$

Звідки $xdx - ydy = 0, dz=0$, тоді $x^2 - y^2 = C_1$, $z=C_2$. *Таким чином,*

загальний інтеграл даного рівняння буде
ф(x^2 $-y^2$,*z*)=0
або(розв'язавши відносно z): z=f(x^2 $-y^2$*).*
<u>Задача2.</u> *Розв'язати рівняння:*

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

Розв'язання. *Складаємо систему:*

$$dx=dy=dz$$

Перші інтеграли системи : $x-y=C_1$ $z-x=C_2$. *Загальний інтеграл Запишеться як*
$\Phi(x-y, z-x)=0$,
де ***ф*** *– довільна функція.*

<u>Задача 3.</u> *Знайти поверхню , яка задовольняє рівняння:*

$$x\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

І проходить через криву $x = 0, z = y^2$.
Розв'язання. *Складемо систему:*

$$\frac{\partial x}{-y}=\frac{\partial y}{x}=\frac{\partial z}{0}$$

звідки одержуємо : $z=C_1, x^2+y^2=C_1$
Виключимо x,y і z з рівнянь:

$$\begin{cases} x^2+y^2=C_1 \\ z=C_1 \\ x=0 \\ z=y^2 \end{cases}$$

тоді $C_1 = C_2$, *отже шукана інтегральна поверхня буде:*
$z=x^2+y^2$
<u>Задача 4.</u> *Знайти поверхню, яеа задовольняє рівняння:*

$$2xz\frac{\partial z}{\partial x}+2yz\frac{\partial z}{\partial x}=z^2-x^2-y^2$$

і проходить через криву $\begin{cases} x+y+z=0 \\ z^2+x^2+y^2=a \end{cases}$

Розв'язання *Складемо систему:*

$$\frac{\partial x}{2xz}=\frac{\partial y}{2yz}$$

звідки $x/y = C_1$ *; далі:*

$$\frac{\partial y}{2yz}=\frac{\partial z}{z^2-C_1y^2-y^2}$$

звідки

$$2z\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial x}=-y(C_1^2+1)$$

Одержане рівняння відноситься до типу рівнянь Бернуллі і його загальний інтеграл буде:

$$z^2=C_2y-x^2-y^2 \quad \text{або} \quad \frac{z^2+x^2+y^2}{y}=C_2$$

Таким чином, загальним інтегралом рівняння буде функція

$$\phi\left(\frac{x}{y},\frac{z^2+x^2+y^2}{y}\right)=0$$

Для відшукання поверхні, яка проходить через задане коло, треба виключати x,y і z з системи рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=C_1\\ \dfrac{z^2+x^2+y^2}{y}=C_2\\ x+y+z=0\\ z^2+x^2+y^2=a\end{cases}$$

З другого і четвертого рівняння знаходимо:

$$\frac{a^2}{y}=C_2 \text{ отже } y=\frac{a^2}{C_2}$$

Тоді з першого рівняння: $x=a^2\dfrac{C_1}{C_2}$. *Далі, з третього рівняння*

$$z=-\frac{a^2}{C_2}(C_1+1)$$

Використавши друге рівняння, знайдемо залежність між C_1 і C_2 :

$$\frac{a^4C_1^2}{C_2^2}+\frac{a^4}{C_2^2}+\frac{a^4}{C_2^2}(C_1+1)^2=a^2$$

Отже,

$$2a^2(C_1^2+C_1+1)=C_2^2$$

Замінюючи C_1 і C_2 їхніми виразами , знаходимо рівняння шуканої поверхні:

$$(z^2+x^2+y^2)^2=2a^2(z^2+x^2+xy)$$

Завдання для самостійної роботи.

1. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial y}{\partial z}=0$

2. $(x-y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(x-z)\dfrac{\partial u}{\partial y}+2z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$

3. $(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

4. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

$$5.\ y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=x, x=0, z=y^2$$

$$6.\ tgx\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z, y=x, z=x^3$$

$$7.\ x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+xy\frac{\partial u}{\partial z}=0, u=x^2+y^2, z=0$$

$$8.\ y^2\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}+z^2=0, y=x, x-yz=1$$

<u>Література</u>

1. Эльсгольц Л.Э. – *Дифференциальне уравнения и вариационное исчисление.* М.*: «Наука», 1969 – 272с.*
2. Матвеев Н.М. – *Методы интегрирования обикноаенных дифференциалных уравнений.* М.*:* Высшая школа, 1969. – 556с.
3. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. *–диференціальні рівняння.* К.:Либідь, 1994. – 360с.
4. Степанов В.В. *–Курс дифференциальных уравнений.* М.*:*Фызматгиз, 1959. – 304с..
5. Шкіль М.І. , Сотніченко М.А. – *Звичайні диференціальні рівняння К.: Вища школа, 1992. – 304с.*
6. Гудименко Ф.С., Павлюк І.А., Волкова В.О. – *Збірник задач з диференціальних рівнянь* К.: Вища школа, 1972. – 384с
7. Перестюк М.О. Свіщук М.Я. - *збірник задач з диференціальних рівнянь К.: Либідь, 1997. – 192с.*
8. Самойленко А.М. , Кирвошея С.А. Перестюк М.О. – *Дифепенціальні рівняння у прикладах і задачах. К.: Вища школа,1994. – 456с.*
9. Филпов А.Ф. , - Сборник задач по дифференциальним уравнениям. М.: Наука, 1979. – 100с.
10. Киселев А.И. Краснов М.Л. мкаенко Г.И. – *Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям М.:* Высшая школа, 1967. – 312с.