УДК 681.14

Коцовський В. М.
Ужгородський національний університет

АЛГОРИТМ НАВЧАННЯ НЕЙРОФУНКЦІЙ НАД СИСТЕМОЮ ХАРАКТЕРІВ

В роботі розглядаються нейронні елементи відносно системи характерів та наводяться алгоритм.

Generalized neural devices over the character set have been studied in the paper. Learning algorithms have been given in the paper.

Останнім часом спостерігається значний інтерес до нейроподібних пристроїв, призначених для розв'язування задач розпізнавання образів [1].

Нехай $H_2=\{-1,1\}$, $G_n=H_2\times\ldots\times H_2$ – n-а декартова степінь множини H_2. Дискретні функції вигляду $f:G_n\to H_2$ будемо називати бульовими функціями в алфавіті $\{-1,1\}$. Визначимо характери групи G_n над полем R $\chi_j:G_n\to H_2$ наступним чином $\chi_j(a)=a_1^{j_1}\cdot a_2^{j_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{j_n}$, де $a=(a_1,\ldots,a_n)\in G_n$, $j=j_1 2^{n-1}+j_2 2^{n-2}+\ldots+j_n$ $\left(j_i\in\{0,1\},\ i=\overline{1,n}\right)$. Тобто $\chi_j(a)=a_{l_1}\cdot\ldots\cdot a_{l_r}$, при умові, що $j=2^{n-l_1}+2^{n-l_2}+\ldots+2^{n-l_r}$, $1\le l_1<l_2<\ldots<l_r\le n,\ r\le n$. На множині $R\setminus\{0\}$ визначимо знакову функцію Rsign так:

$$\operatorname{Rsign} x=\begin{cases}1, & \text{якщо } x>0,\\ -1, & \text{якщо } x<0.\end{cases}$$

Нехай $X=\{\chi_{i_1},\ldots,\chi_{i_m}\}$ – деяка система характерів, $w=(w_1,\ldots,w_m)\in R^m$. Якщо для бульової функції $f:G_n\to H_2$ виконується умова

$$\text{для всіх } a=(a_1,\ldots,a_n)\in G_n\ \ f(a)=\operatorname{Rsign}\sum_{j=1}^{n}w_j\chi_{i_j}(a), \tag{1}$$

то відносно системи характерів X бульова функція f реалізується на НЕ з ваговим вектором w. Якщо для бульової функції f можна вказати принаймні один такий ваговий вектор w, для якого виконується умова (1), то функцію f будемо називати X-нейрофункцією. При цьому для вагового вектора w має виконуватися умова для всіх $a\in G_n$ $(w,\chi(a))\ne 0$, де $(w,\chi(a))=w_1\chi_{i_1}(a)+\ldots+w_m\chi_{i_m}(a)$ – скалярний добуток векторів w і $\chi(a)=(\chi_1(a),\ldots,\chi_m(a))$. Такі вагові вектори будемо називати X-допустимими. Позначимо через $W_X(f)$ множину вагових векторів всіх НЕ, на яких реалізується X-нейрофункція f.

Під процесом навчання НЕ для бульової X-нейрофункції f будемо розуміти процес побудови скінченої послідовності векторів

$$w^0,w^1,\ldots,w^t, \tag{2}$$

такої, що функція f реалізується на НЕ з ваговим вектором w^t. В роботі розглядаються та обгрунтовуються два методи побудови послідовності (2).

Для бульової функції $f:G_n\to H_2$ відносно системи характерів X визначимо характеристичний вектор [3] $s_X(f)=(s_1,\ldots s_m)$ так: $s_j=\sum_{a\in G_n}\chi_{i_j}(a)f(a)$, $j=\overline{1,m}$. Нехай функція f є X-нейрофункцією і нехай $w\in W_X(f)\subset R^m$ – довільний ваговий вектор НЕ, який реалізує функцію f. Будемо вважати, що перші k+1 членів $w^0,w^1,\ldots,w^k$ послідовності (2) вже відомі і нехай w^k – m-вимірний X-допустимий дійсний вектор. Якщо функція f реалізується на НЕ з ваговим вектором w^k, то процес навчання вважаємо завершеним. Припустимо, що f не реалізується на НЕ з ваговим вектором w^k. Опишемо узагальнення алгоритму, наведеного у [4], за яким можна побудувати такий вектор w^{k+1}, для якого справджується нерівність

$$\left\|w^{k+1} - w\right\| < \left\|w^k - w\right\|, \tag{3}$$

(де $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ – звичайна евклідова норма в просторі R^m). Нехай $z^k = w^{k+1} - w^k$ – вектор приросту. Оскільки умова (3) рівносильна умові $\left\|w^{k+1} - w\right\|^2 - \left\|w^k - w\right\|^2 < 0$, то для виконання умови (3) досить вимагати виконання умови

$$2\left(z^k, w - w^k\right) - \left\|z^k\right\|^2 > 0. \tag{4}$$

Переходимо до визначення вектора z^k. Нехай $f^k(x_1,\ldots x_n)$ – функція, яка відносно системи характерів X реалізується на НЕ з ваговим вектором w^k. Із зроблених припущень випливає, що $f^k \neq f$ і $s_X\left(f^k\right) \neq s_X(f)$. Вектор приросту z^k будемо шукати у вигляді

$$z^k = \alpha_k\left(s_X(f) - s_X\left(f^k\right)\right), \tag{5}$$

де α_k – деяка додатна скалярна величина. Можна показати, що нерівність (4) виконується, якщо в якості α_k вибрати довільне число вигляду $t_k \alpha_k^0$, де

$$\alpha_k^0 = \frac{\left(w^k, s_X\left(f^k\right) - s_X(f)\right)}{\left\|s_X(f) - s_X\left(f^k\right)\right\|^2},$$

а величина t_k задовольняє умову

$$0 < t_k < 2\left(1 + \frac{\left(w, s_X(f) - s_X\left(f^k\right)\right)}{\left(w^k, s_X\left(f^k\right) - s_X(f)\right)}\right). \tag{8}$$

Число t_k надалі будемо називати нормуючим множником приросту.

Теорема 2. *Якщо бульова функція f є X-нейрофункцією, послідовність X-допустимих вагових векторів* $\left\{w^k\right\}$ *будується за допомогою приростів виду* (4)*, нормуючі множники* t_k *вибираються за формулою*

$$t_k = 2 + \frac{1}{\left(w^k, s_X\left(f^k\right) - s_X(f)\right)},$$

то процес навчання завершується через скінчену кількість кроків на деякому векторі $w^t \in W_X(f)$.

1. Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника: теория и практика.– М.:Мир,1992.
2. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. – М.: Наука, 1979.
3. Айзенберг Н.Н., Иваськив Ю.Л. Многозначная пороговая логика. – Київ: Наукова думка, 1977.
4. Грицик В.В., Гече Ф.Е. Реалізація бульових та багатозначних бульових функцій на нейронних елементах // Доповіді НАН України №5, 2004, С. 65-68.