УДК 512.547.25:681.14

Ф.Е. Гече , В.М. Коцовський (Ужгородський нац. ун-т)

ЗАДАННЯ ПРЕДИКАТІВ ІЗ СКІНЧЕННОЮ ОБЛАСТЮ ВИЗНАЧЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ БАГАТОПОРОГОВИХ НЕЙРОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ.

The paper considers some problems, conserning the possibility of realising of n-set predicates with finits basis sets upon k-threshold neuron elements.

В роботі розглядаються деякі питання, що стосуються можливості реалізації n-місних предикатів із скінченними базисними множинами на k-порогових нейронних елементах.

Нехай n – натуральне число,

$$G_i = \{a_{i1}, ..., a_{im_i}\},\ a_{ij} \in R,\ a_{i1} < a_{i2} < \ldots < a_{im_i},\ m_i > 1,\ i = 1, \ldots, n,$$

$$G = G_1 \times \ldots \times G_n.$$

Відображення вигляду

$$f : G \to \{-1, 1\} \tag{1}$$

очевидно можна розглядати, як n-місний предикат із скінченними базисними множинами G_i, $i = 1, \ldots, n$. Надалі будемо розглядати лише відображення вигляду (1), називаючи їх просто предикатами, і використовувати для них позначення $f(x_1, ..., x_n)$ або $f(\boldsymbol{x})$.

Розглянемо один із методів задання предикатів вигляду (1). Нехай

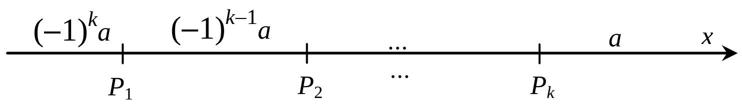
$$\boldsymbol{w} = (\omega_1, ..., \omega_n) \in R^n,\ \boldsymbol{p} = (p_1, ..., p_k) \in R^k,\ p_1 < p_2 < \ldots < p_k,\ s = (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{p}),\ a \in \{-1, 1\},$$

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i$$

– зважена сума. Будемо казати, що k-пороговий нейронний елемент із структурою s і міткою a (скорочено КНЕ$_{s,a}$) породжує (реалізує) предикат $f(\boldsymbol{x})$, якщо для довільного $\boldsymbol{x} \in G$

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} (-1)^k a, (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) \in (-\infty, p_1), \\ (-1)^{k-1} a, (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) \in [p_1, p_2), \\ \quad\ldots \\ a, (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) \in [p_k, +\infty). \end{cases} \tag{2}$$

Вектор $\boldsymbol{w}$ будемо називати ваговим вектором КНЕ, $\boldsymbol{p}$ – вектором порогів КНЕ. Зробимо деякі пояснення щодо формули (2). Вектор порогів $\boldsymbol{p} = (p_1, ..., p_k) \in R^k$, для координат якого справджуються нерівності $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ здійснює розбиття числової осі на $k + 1$ проміжок: $(-\infty, p_1)$, (p_1, p_2), …, $(p_k, +\infty)$. Значення предиката $f(\boldsymbol{x})$ на наборі $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ залежить від того, в який з цих проміжків потрапить значення зваженої суми $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x})$. Графічно це можна проілюструвати так:



Предикат $f(\boldsymbol{x})$ вигляду (1) назвемо k-пороговим (k-реалізовним), якщо знайдеться КНЕ$_{s,a}$, такий, що справджуються співвідношення (2).

Зауваження 1. Слід зазначити, що для k = 1 поняття мітки є несуттєвим, тобто якщо деякий предикат $f(\boldsymbol{x})$ реалізується на деякому КНЕ з міткою 1, то знайдеться КНЕ з міткою –1, який задає $f(\boldsymbol{x})$ і навпаки. Для $k > 1$ поняття мітки є суттєвим. Уже для $k = 2$ відомі приклади предикатів, які породжуються деяким КНЕ з міткою 1 і не реалізуються на жодному КНЕ з міткою –1.

Нехай відображення $\rho : R^n \times G \times G \to R$ визначається так:

$$\rho(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}).$$

Введемо в розгляд наступну підмножину множини R^n

$$\Omega(R^n, G) = \{\boldsymbol{w} \in R^n | \text{для довільних } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G\ \rho(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\}.$$

Тоді справедливою є

Лема 1. *Для довільного* $\boldsymbol{w} \in R^n$ *знайдеться вектор* $\boldsymbol{v} \in \Omega(R^n, G)$, *такий, що для довільних* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G$ *справедлива імплікація*

$$\rho(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > 0 \Rightarrow \rho(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > 0. \tag{3}$$

Доведення. Використаємо такі позначення:

$$E(\boldsymbol{w}, G) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in G \times G \mid \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}, \rho(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\}, \delta = \max_{1 \le i \le n}(a_{im_i} - a_{i1}),$$

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2\delta} \min\{\rho(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in G \times G \setminus E(\boldsymbol{w}, G)\}.$$

Нехай $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E(\boldsymbol{w}, G)$ і $x_i \neq y_i$. Побудуємо вектор $\boldsymbol{u} \in R^n$ таким чином:

$$u_j = \begin{cases} \omega_j, \ i \neq j, \\ \omega_j + \varepsilon, \ i = j. \end{cases}$$

Тоді отримаємо, що $E(\boldsymbol{u}, G) \subset E(\boldsymbol{w}, G)$, причому включення строге, оскільки $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E(\boldsymbol{w}, G)$ і $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \notin E(\boldsymbol{u}, G)$. Застосовуючи описану вище послідовність дій для вектора $\boldsymbol{u}$, а потім і для наступних отриманих векторів (якщо в цьому буде потреба) у результаті отримаємо спадну послідовність множин

$$E(\boldsymbol{w}, G) \supset E(\boldsymbol{u}, G) \supset \ldots \supset E(\boldsymbol{v}, G) = \varnothing.$$

З рівності $E(\boldsymbol{v}, G) = \varnothing$ маємо, що $\boldsymbol{v} \in \Omega(R^n, G)$. Лема доведена.

Слід зауважити, що доведена вище лема є узагальненням результатів, які отримані в [1] і використовувалися раніше в [2]. З лемою 1 пов'язані

Наслідок 1. *Для довільного* $\boldsymbol{w} \in R^n$ *знайдуться* $\boldsymbol{w}_Q \in \Omega(Q^n, G)$ *і* $\boldsymbol{w}_Z \in \Omega(Z^n, G)$, *такі, що для довільних* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G$ *справедлива імплікація*

$$\rho(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > 0 \Rightarrow \rho(\boldsymbol{w}_Q, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > 0,\ \rho(\boldsymbol{w}_Z, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > 0.$$

Доведення. За вектор $\boldsymbol{w}_Q$ досить взяти достатньо близький елемент із простору Q^n до вектора $\boldsymbol{v} \in \Omega(R^n, G)$, який задовольняє умовам леми 1. Вектор $\boldsymbol{w}_Z$ можна отримати, домноживши всі координати вектора $\boldsymbol{w}_Q$ на найменше спільне кратне їх знаменників.

Наслідок 2. *Для довільного k-порогового предиката* $f(\boldsymbol{x})$ *знайдеться* $КНЕ_{s,a}$, *такий, що* $s = (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{p})$, $\boldsymbol{w} \in \Omega(R^n, G)$ *і для всіх* $\boldsymbol{x} \in G$

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) \neq p_i,\ i = 1, 2, \ldots, k \tag{4}$$

і предикат $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* $КНЕ_{s,a}$.

Згідно наслідку 2 леми 1 при розгляді реалізовності предикатів на k-порогових нейронних елементах достатньо розглядати можливість їх реалізовності на $КНЕ_{s,a}$, структури яких задовольняють умову (4). Такі структури будемо називати допустимими. Надалі обмежимося розглядом k-порогових нейронних елементів лише з допустимими структурами $s = (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{p})$.

Визначимо функціонал $\varphi(s, \boldsymbol{x})$ таким чином

$$\varphi(s, \boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{k}((\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) - p_i). \tag{5}$$

Тоді справедливою є

Лема 2. *Предикат* $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* КНЕ$_{s,a}$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} -a, & \varphi(s, \boldsymbol{x}) < 0, \\ a, & \varphi(s, \boldsymbol{x}) > 0. \end{cases} \tag{6}$$

Доведення леми безпосередньо випливає з (2), оскільки випадок $\varphi(s, \boldsymbol{x}) =$ $= 0$ неможливий (для допустимих структур).

Теорема 2. *Предикат* $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* КНЕ$_{s,a}$ *тоді і тільки тоді, коли для всіх наборів* $\boldsymbol{x}$ *із множини* G *виконується умова*

$$f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x}) = a|\varphi(s, \boldsymbol{x})|. \tag{7}$$

Доведення випливає з еквівалентності формул (6) та (7), яка перевіряється безпосередньо для випадків $\varphi(s, \boldsymbol{x}) < 0$ та $\varphi(s, \boldsymbol{x}) > 0$.

Надалі ми часто будемо розглядати відображення вигляду $h : G \to R$. Для зручності запису аналогічно до [3] будемо використовувати такі позначення

$$\langle h(\boldsymbol{x})\rangle = \sum_{\boldsymbol{x}\in G} h(\boldsymbol{x}).$$

Тоді справедливою є

Лема 3. *Нехай* $f(\boldsymbol{x})$ *– довільний предикат,* s *– допустима структура* КНЕ. *Тоді має місце нерівність*

$$|\langle f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})\rangle| \le \langle|\varphi(s, \boldsymbol{x})|\rangle, \tag{8}$$

причому у випадку точної рівності в (8) *предикат* $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* КНЕ$_{s,1}$ *або* КНЕ$_{s,-1}$.

Доведення. На основі (7) маємо

$$|\langle f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})\rangle| \le \langle|f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})|\rangle = \langle|\varphi(s, \boldsymbol{x})|\rangle.$$

Якщо предикат $f(\boldsymbol{x})$ не реалізується на КНЕ$_{s,a}$, то знайдеться вектор $\boldsymbol{x} \in G$, на якому порушується умова (7). Тоді в суму $<f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})>$ входять доданки різних знаків і має місце строга нерівність $|\langle f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})\rangle| < \langle|f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})|\rangle$.

Тоді в (8) рівність неможлива.

Теорема 2. *Предикат* $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* КНЕ$_{s,a}$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\langle f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})\rangle = a\,\langle|\varphi(s, \boldsymbol{x})|\rangle. \tag{9}$$

Доведення. Необхідність можна легко отримати, просумувавши обидві частини рівності (7) по всім $\boldsymbol{x} \in G$. Для доведення достатньої частини теореми досить помітити, що з рівності (9) випливає рівність у співвідношенні (8), що згідно леми 2 є достатньою умовою реалізовності предиката $f(\boldsymbol{x})$ на КНЕ$_{s,a}$.

Наслідок 3. *Якщо предикат* $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* КНЕ$_{s,a}$, $g(\boldsymbol{x})$ *– довільний предикат, то*

$$|\langle g(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})\rangle| \le |\langle f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})\rangle|$$

причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли $g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ *або* $g(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$.

Доведення наслідку безпосередньо випливає з леми 3 з врахуванням теореми 2.

Задамо на множині G довільний лінійний порядок і будемо вважати, що елементи множини G занумеровані згідно цього порядку. Виходячи з довільного предиката $f(\boldsymbol{x})$ визначимо предикати $f_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, 2, ..., |G|$, де

$$|G| = |G_1||G_2|\dots|G_n| = m_1\, m_2\, \dots m_n$$

таким чином:

$$f_i(\boldsymbol{x}_j) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}_j)\,, при\ j \neq i, \\ -f(\boldsymbol{x}_j), при\ j = i. \end{cases} \tag{10}$$

Теорема 3. *Нехай* $f(\boldsymbol{x})$ *– довільний предикат, предикати* $f_i(\boldsymbol{x})$ *визначені згідно* (10), s *– допустима структура* КНЕ. *Якщо для всіх* $\boldsymbol{x} \in G$ *виконується одна з умов*:

1) $f_i(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})$, $i = 1, 2, ..., |G|$;
2) $f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x}) \le f_i(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})$, $i = 1, 2, ..., |G|$;

то предикат $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* КНЕ$_{s,1}$ (КНЕ$_{s,-1}$ *відповідно*).

Доведення. Якщо предикат $f(\boldsymbol{x})$ не реалізується на КНЕ$_{s,a}$, то знайдеться таке i з множини $\{1, 2, ..., |G|\}$, для якого $\boldsymbol{x}_i$ не задовольняє (7). Тоді

$$f_i(\boldsymbol{x}_i)\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x}_i) > f(\boldsymbol{x}_i)\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x}_i) \text{ або } f_i(\boldsymbol{x}_i)\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x}_i) < f(\boldsymbol{x}_i)\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x}_i),$$

тобто для $f_i(\boldsymbol{x})$ не виконується умова 1 (умова 2 відповідно).

Визначимо для предиката $f(\boldsymbol{x})$ набір спектральних параметрів

$$b_{i_1 i_2 \dots i_r} = \sum_{\boldsymbol{x}\in G}\{\prod_{j=1}^{r} x_{i_j}(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})\},\ r = 1, 2, \dots, k,\ b_0 = \sum_{\boldsymbol{x}\in G} f(\boldsymbol{x}), \tag{11}$$

де $x_i(\boldsymbol{x})$ – i-та координата вектора $\boldsymbol{x}$. Визначимо функцію $\Phi(s, f)$ так:

$$\Phi(s, f) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{i_1\dots i_r}(-1)^{k-r} b_{i_1\dots i_r}\sigma_{k-r}(p_1, ..., p_k)\cdot\omega_{i_1}...\omega_{ir}\,. \tag{12}$$

У другій сумі у формулі (12) сумування проводиться по всім незалежним один від одного індексам $i_1, \dots, i_r$, які приймають значення від 1 до n, функції $\sigma_i(\boldsymbol{p})$ – елементарні симетричні функції [4]. Для зручності запису вважаємо, що $\sigma_0(\boldsymbol{p}) = 1$, і при $r = 0$

$$b_{i_1\dots i_r} = b_0, \quad \omega_{i_1}...\omega_{i_r} = 1.$$

Теорема 4. *Необхідною і достатньою умовою реалізовності предиката* $f(\boldsymbol{x})$ *на* КНЕ$_{s,a}$ *є умова*

$$\Phi(s, f) = a\langle|\varphi(s, \boldsymbol{x})|\rangle. \tag{13}$$

Доведення. Для доведення теореми покажемо, що $\Phi(s, f) = \langle f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})\rangle$. Для цього використаємо рівність

$$\varphi(s, \boldsymbol{x}) = \prod_{r=1}^{k}\{\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i(\boldsymbol{x}) - p_r\},$$

яка являє собою розгорнутий запис (5). Розкривши дужки, отримаємо

$$\varphi(s, \boldsymbol{x}) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{j_1<\dots<j_{k-r}}\sum_{i_1=1}^{n}\dots\sum_{i_r=1}^{n}(-1)^{k-r} p_{j_1}\dots p_{j_{k-r}}\omega_{i_1}\dots\omega_{i_r} x_{i_1}(\boldsymbol{x})\dots x_{i_r}(\boldsymbol{x}).$$

Тоді

$$\langle f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})\rangle = \sum_{\boldsymbol{x}\in G}\varphi(s, \boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) =$$

$$= \sum_{\boldsymbol{x}\in G}\sum_{r=0}^{k}\sum_{j_1<\dots<j_{k-r}}\sum_{i_1=1}^{n}\dots\sum_{i_r=1}^{n}(-1)^{k-r} p_{j_1}\dots p_{j_{k-r}}\omega_{i_1}\dots\omega_{i_r} x_{i_1}(\boldsymbol{x})\dots x_{i_r}(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) =$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \sum_{j_1<\ldots<j_{k-r}} \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_r=1}^{n} \{ \sum_{x \in G} x_{i_1}(\boldsymbol{x}) \ldots x_{i_r}(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) \} (-1)^{k-r} p_{j_1} \ldots p_{j_{k-r}} \omega_{i_1} \ldots \omega_{i_r}.$$

Враховуючи вигляд спектральних параметрів (11) отримаємо

$$\langle f(\boldsymbol{x}) \cdot \varphi(s, \boldsymbol{x}) \rangle = \sum_{r=0}^{k} \sum_{i_1 \ldots i_r} (-1)^{k-r} b_{i_1 \ldots i_r} \sigma_{k-r}(p_1, \ldots, p_k) \cdot \omega_{i_1} \ldots \omega_{i_r} = \Phi(s, f).$$

Тоді з теореми 2 та попередньої рівності випливає справедливість теореми 4.

Зауваження 2. Розглянемо деякі частинні випадки теореми 4. Класичний випадок $G = \{-1, 1\}^n$, $k = 1$ було розглянуто в [3]. При цих умовах (13) набуває такого вигляду:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \omega_i + b_0 p_0 = \langle |\varphi(s, \boldsymbol{x})| \rangle.$$

Тобто отримуємо умови реалізовності бульової функції на звичайному однопороговому елементі. Для випадку $G = \{-1, 1\}^n$, $k = 2$ (випадок реалізовності бульових функцій на двопорогових нейронних елементах) отримуємо таку умову реалізовності:

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \omega_i \omega_j - (p_1 + p_2) \sum_{i=1}^{n} b_i \omega_i + p_1 p_2 b_0 = a \langle |\varphi(s, \boldsymbol{x})| \rangle.$$

Наслідок 4. *Якщо предикат $f(\boldsymbol{x})$ реалізується на* КНЕ$_{s,a}$, *$g(\boldsymbol{x})$ – довільний предикат, то*

$$|\Phi(s, g)| \le |\Phi(s, f)|,$$

причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли

$$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \text{ або } g(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x}).$$

Доведення безпосередньо випливає з наслідку до теореми 1 та попередньої теореми.

Для предикатів, реалізовних на k-порогових нейронних елементах можна навести теореми, аналогічні до відомих теорем Чоу, які наведені в [3] для випадку бульових функцій і однопорогових нейронних елементів.

Теорема 5. *Якщо в предикатів $g(\boldsymbol{x})$ і $f(\boldsymbol{x})$ співпадають параметри* (11), *то вони одночасно реалізуються або не реалізуються на* КНЕ$_{s,a}$.

Доведення. У випадку співпадання параметрів (11) для предикатів $g(\boldsymbol{x})$ і $f(\boldsymbol{x})$ відповідні функції $\Phi(s, f)$ та $\Phi(s, g)$ також співпадають. Звідси, враховуючи (13), отримуємо твердження теореми.

Теорема 6. *Якщо виконуються умови попередньої теореми і принаймні один із предикатів $f(\boldsymbol{x})$, $g(\boldsymbol{x})$ реалізується на* КНЕ$_{s,a}$, *то $g(\boldsymbol{x}) \equiv f(\boldsymbol{x})$(предикат $g(\boldsymbol{x})$* тотожно рівний предикату $f(\boldsymbol{x})$).

Доведення. Для доведення теореми використаємо попередню теорему, згідно якої предикати $f(\boldsymbol{x})$, $g(\boldsymbol{x})$ реалізується на одному і тому самому k-пороговому нейронному елементі КНЕ$_{s,\,a}$. Але якщо предикати реалізуються на одному і тому самому k-пороговому нейронному елементі КНЕ$_{s,\,a}$, то вони очевидно співпадають.

Покажемо, що використовуючи узагальнені теореми Чоу, можна отримати цікаві результати. Наступний приклад покаже, що навіть для великого, наперед вибраного числа порогів, знайдуться предикати досить простого вигляду, які не реалізуються на жодному з таких КНЕ.

Приклад. Покажемо, що для всякого натурального k, знайдеться такий n-місний предикат $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, який не реалізується на жодному k-пороговому нейронному елементі. Покладемо

$$n = k + 1, \quad G = \{-1, 1\}^n, \quad f(x_1, x_2, \dots x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n.$$

Ми стверджуємо, що предикат $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ не реалізується на жодному k-пороговому нейронному елементі $КНЕ_{s,\,a}$. Для доведення розглянемо предикат $g(x_1, x_2, \dots x_n) = -f(x_1, x_2, \dots x_n)$. Тоді безпосередньою перевіркою можна впевнитися, що відповідні спектральні параметри (11) для функцій $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ і $g(x_1, x_2, \dots x_n)$ співпадають і рівні 0. Тоді згідно теореми 5 предикати $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ і $g(x_1, x_2, \dots x_n)$ одночасно реалізуються або не реалізуються на одному і тому самому k-пороговому нейронному елементі. Припустивши реалізовність предиката $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ на деякому $КНЕ_{s,a}$, за теоремою 6 отримаємо, що $f(x_1, x_2, \dots x_n) = g(x_1, x_2, \dots x_n)$. Але оскільки $f(x_1, x_2, \dots x_n) \neq g(x_1, x_2, \dots x_n)$, то предикат $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ не реалізується на жодному k-пороговому нейронному елементі.

З формул (11) легко отримати узагальнення співвідношень, які встановлені в [3] для звичайних однопорогових нейронних елементів і в [2] для двопорогових нейронних елементів. Нехай $s = ((\omega_1, ..., \omega_n), (p_1, ..., p_k))$ – деяка допустима структура КНЕ.

Теорема 7. *Предикат $f(x_1, ..., x_n)$ реалізується на $КНЕ_{s,a}$ тоді і тільки тоді, коли*

1) *предикат $f_1(x_1, ..., x_n) = -f(x_1, ..., x_n)$ реалізується на $КНЕ_{s,-a}$.*
2) *предикат $f_2(x_1, ..., x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = f(x_1, ..., x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$ реалізується на $КНЕ_{t,a}$, де $t = ((\omega_1, ..., \omega_j, \dots, \omega_i, ..., \omega_n), \boldsymbol{p})$ (в цьому місці вважаємо, що $G_i = G_j$).*
3) *предикат $f_3(x_1, ..., x_i, \dots, x_n) = f(x_1, ..., -x_i, \dots, x_n)$ реалізується на $КНЕ_{t,a}$, де $t = ((\omega_1, \dots, -\omega_i, ..., \omega_n), \boldsymbol{p})$(в цьому місці вважаємо, для всякого $a_{ij} \in G_i$ знайдеться $a_{il} \in G_i$, таке, що $a_{il} = -a_{ij}$).*

Доведення. Доведення теореми легко отримується безпосередньо з означення k-порогового нейронного елемента. Інший метод доведення базується на застосуванні теореми 4, властивостей функції $\varphi(s, \boldsymbol{x})$ та формули зв'язку спектральних параметрів предикатів $f_1(x_1, ..., x_n)$, $f_2(x_1, ..., x_n)$ і $f_3(x_1, ..., x_n)$ із спектральними параметрами предиката $f(x_1, ..., x_n)$, які аналогічні наведеним у [3] (При умові, що на множини G_i накладені додаткові обмеження, які фігурують в умові теореми 7).

Зауваження 3. Для випадку $k = 1$ (і при певних умовах, накладених на множини G_i) залишаються справедливими твердження про зв'язок між нерівностями, якими пов'язані координати вектора $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n)$, і відповідними нерівностями між координатами вектора $\boldsymbol{w} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, які наведені в [3].

Зауваження 4. Для перевірки реалізовності предикатів на k-порогових нейронних елементах можна запропонувати методи пониження розмірності такого самого типу, що й розглянуті в [5].

1. *Яджима С., Ибараки Т.* Нижняя оценка числа пороговых функций // Киберн. сб. Нов. сер. – 1969. – Вып.6. – С. 72–81.
2. *Ф. Е. Гече*. Реалізація бульових функцій на двопорогових нейронних елементах // Наук. вісник Ужгород. ун-ту, сер. мат. Вип. 4. – 1999. – С. 17–24.
3. *Дертоузос М.* Пороговая логика. – М.: Мир, 1967. – 342 с.
4. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. – М.: Наука, 1976. – 648 с.
5. *Ф. Е. Гече, В. М. Коцовський.* Про деякі властивості бульових функцій, які реалізуються на одному нейронному елементі. // Наук. вісник Ужгород. ун-ту, сер. мат. Вип. 4. – 1999. – С. 25–29.

Одержано 10. 10. 2001