УДК 681.14

Гече Ф. Е., Коцовський В. М.
Ужгородський національний університет

Матриці толерантності і узагальнені нейронні елементи

Нехай $f\left(x_1,\dots,x_n\right)$ бульова функція в алфавіті $\{-1,1\}$, тобто $f:G_n\to H_2$. Розглянемо задачу: чи реалізується функція $f\left(x_1,\dots,x_n\right)$ одним нейронним елементом (НЕ) відносно системи характерів $X=\left\{\chi_{i_1},\chi_{i_2},\dots,\chi_{i_m}\right\}\subset X(G_n)$ і якщо так, то як знайти вектор структури НЕ? За допомогою перетворення $\mathbf{x}'=\frac{1}{2}(\mathbf{x}+1)$ реалізуємо відображення $\{-1,1\}\to\{0,1\}$ і розглянемо систему $X'=\left\{\chi'_{i_1}=\frac{1}{2}\left(\chi_{i_1}+1\right),\chi'_{i_2}=\frac{1}{2}\left(\chi_{i_2}+1\right),\dots,\chi'_{i_m}=\frac{1}{2}\left(\chi_{i_m}+1\right)\right\}$.

Нехай $f^{-1}(-1)=\left\{\mathbf{g}\in G_n\mid f(\mathbf{g})=-1\right\}$ і $f^{-1}(1)=\left\{\mathbf{g}\in G_n\mid f(\mathbf{g})=1\right\}$. За допомогою системи X' визначимо

$$f^{-1}(-1)=\bigcup_{\mathbf{g}\in f^{-1}(-1)}\left\{\left(\chi'_{i_1}(\mathbf{g}),\dots,\chi'_{i_m}(\mathbf{g})\right)\right\},$$

$$f^{-1}(1)=\bigcup_{\mathbf{g}\in f^{-1}(1)}\left\{\left(\chi'_{i_1}(\mathbf{g}),\dots,\chi'_{i_m}(\mathbf{g})\right)\right\}.$$

Ядро бульової функції $f\left(x_1,\dots,x_n\right)$ відносно системи характерів X групи G_n визначається так:

$$K(f_X)=\begin{cases} f_X^{-1}(1), & \text{якщо } \left|f_X^{-1}(1)\right|\le\left|f_X^{-1}(-1)\right|,\\ f_X^{-1}(-1), & \text{якщо } \left|f_X^{-1}(1)\right|>\left|f_X^{(-1)}(-1)\right|,\end{cases}$$

де $\left|f_X^{-1}(i)\right|$ – кількість елементів множини $f_X^{-1}(i)\ (i\in\{-1,1\})$, якщо $f_X^{-1}(1)\cap f_X^{-1}(-1)=\varnothing$. Якщо $f_X^{-1}(1)\cap f_X^{-1}(-1)\neq\varnothing$, то ядро $K(f_X)$ не існує і це означає, що функція $f\left(x_1,\dots,x_n\right)$ не реалізується одним НЕ відносно системи X.

Нехай $K(f_X)=\{\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_q\}$ – ядро бульової функції $f\left(x_1,\dots,x_n\right)$ відносно системи характерів $X=\left\{\chi_{i_1},\dots,\chi_{i_m}\right\}$. Кожному $\mathbf{a}_i=\left(\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_n^{(i)}\right)\in K(f_X)$ ставимо у відповідність елемент $\mathbf{g}_i=\left((-1)^{\alpha_1^{(i)}},\dots,(-1)^{\alpha_1^{(i)}}\right)$ і будуємо множину

$$T(f_X)=\left\{K(f_X)_i=\mathbf{g}_iK(f)\mid i=1,2,\dots,q\right\},$$

яку назвемо множиною зведених ядер бульової функції $f\left(x_1,\dots,x_n\right)$ відносно системи X.

Теорема 1. *Бульова функція* $f\left(x_1,\cdots,x_n\right)$ $(f:G_n \to H_2)$ *реалізується одним нейронним елементом відносно системи характерів* $X=\{\chi_{i_1},\ldots,\chi_{i_m}\}$ *тоді і тільки тоді, коли її ядро* $K(f_X)$ *допускає зображення матрицями толерантності з* E_m.

Теорема 2. *Бульова функція* $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ $(f:G_n \to H_2)$ *реалізується одним нейронним елементом відносно системи характерів* $X=\{\chi_{i_1},\ldots,\chi_{i_m}\}$ *тоді і тільки тоді, коли хоча б одне її зведене ядро* $K(f_X)\in T(f_X)$ *допускає зображення матрицями толерантності з* E_m^-.

Теорема 3. *Якщо в множині зведених ядер* $T(f_X)$ *бульової функції* $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ *знайдеться таке ядро* $K(f_X)_i$ *і такі елементи* $\sigma\in S_n, \xi\in S_q$ $(q=|K(f_X)|)$, *що* $K_\xi^\sigma(f_X)_i = p(K(f_X)_i)$, *тоді* $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ *реалізується одним НЕ відносно системи характерів X.*